УДК 537.8

О. В. Казанко, О. Є. Пєнкіна

РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА У ЗАДАЧІ ПРО РОЗСІЯННЯ ПЛОСКОЇ МОНОХРОМАТИЧНОЇ ХВИЛІ НА РЕШІТЦІ З МЕТАМАТЕРІАЛУ

O. Kazanko, O. Penkina

THE SOLUTION OF HELMHOLTZ EQUATION IN DIFFRACTION TASK OF FLAT MONOCHROMATIC WAVE ON A GRATE WITH METAMATERIALS

У цілому ряді практичних додатків спектроскопії, антенної техніки виникає необхідність у розв'язанні задачі про дифракцію електромагнітних хвиль на шарових діелектричних структурах. Додаткові можливості для розширення функціональності цих систем з'являються завдяки використанню конструкції штучних середовищ з від'ємними значеннями діелектричної та магнітної проникності – метаматеріалів (лівосторонніх матеріалів). Унікальні фізичні властивості таких лівосторонніх середовищ дозволяють створювати пристрої з незвичайними характеристиками у різних частотних діапазонах (фільтри, частотно-селективні структури, хвилеводи, резонатори, лінзи). З дифракцією пов'язують доволі широке коло явищ, що виникають при розповсюдженні механічних або електромагнітних хвиль в неоднорідних середовищах, виявляється у перетворенні просторової структури хвиль при проходженні через межу розподілу двох середовищ. Тобто дифракція – це хвильове явище, яке супроводжує будь-який процес розповсюдження електромагнітних хвиль.

Задачі про дифракцію електромагнітних хвиль належать до задач електродинаміки. Розглянута задача про дифракцію поперечно поляризованої плоскої монохроматичної хвилі на шаровій періодичній структурі є типовою задачею електродинаміки. Найзагальніше описання процесів дифракції дається рівняннями Максвелла. В рамках задачі, що розглядається, рівняння Максвелла зводяться до однорідного рівняння Гельмгольца – диференційного рівняння у часткових похідних. Однак для побудови відповідного математичного апарату класичного поняття похідної та диференціала виявляється недостатньо. У цьому, зокрема, виражена специфіка та проблематика побудови математичного апарату як для розв'язання рівняння Гельмгольца, так і у цілому в галузі рівнянь з частковими похідними. Важлива роль в історії розвитку математичного апарату в галузі рівнянь з частковими похідними і рівнянь математичної фізики відводиться працям радянського математика XX-го століття С. Л. Соболева (1908-1989), серед яких теорія розподілів, що запропонована в 1935 р. та надалі набула загального визнання. Введене в цій теорії поняття похідної надає доволі потужний математичний апарат в галузі сучасної теорії диференціальних рівнянь з частковими похідними. Згідно з теорією розподілів, будь-яка локально інтегрована функція є диференційованою, тобто клас диференційованих функцій в класичному сенсі якісно розширюється.

Усередині решітки спостерігаються стоячі хвилі. В цій області, як було зазначено, рівняння Максвелла зводяться до граничної задачі для однорідного рівняння Гельмгольца (крайової). У такій задачі рівняння Гельмгольца виявляється з кусково-сталим коефіцієнтом. Нехай $\boldsymbol{n}(z)=\begin{cases} n_1, & z\in[d/2-l,-d/2) \\ n_2, & z\in[-d/2,d/2) \end{cases}$ – кусково-стала функція, де $n_j = \sqrt{\varepsilon_j \mu_j}$ $(j = 1, 2)$ – коефіцієнти заломлення середовищ, які заповнюють, відповідно, одне та друге сімейство брусів розглянутої двошарової періодичної структури. Рівняння Гельмгольца набуває вигляду

$$\Delta u + k^2 \boldsymbol{n}^2(z) u = 0, \tag{1}$$

як крайові умови виступають такі рівності:

$$\Lambda u(z = \frac{d}{2} - l) = u(z = \frac{d}{2})$$
$$\Lambda \frac{1}{\mu_1} \dot{u}(z = \frac{d}{2} - l) = \frac{1}{\mu_2} \dot{u}(z = \frac{d}{2}), \tag{2}$$
$$\Lambda = e^{-k\alpha l}.$$

З урахуванням теореми Флоке ці умови є наслідком рівності тангенціальних складових векторів електричного і магнітного полів на щілини між бруссями. Для розв’язання крайової задачі (1)-(2) необхідно розв’язати таку задачу Штурма-Ліувілля:

$$\mu(\frac{1}{\mu} \dot{Z})^{\boldsymbol{\cdot}} + k^2 \boldsymbol{n}^2(z) Z = -\beta^2 Z, \tag{3}$$

$$\Lambda Z(\frac{d}{2} - l) = Z(\frac{d}{2} - 0),$$

$\Lambda \frac{1}{\mu_1} \dot{Z}(\frac{d}{2} - l) = \frac{1}{\mu_2} \dot{Z}(\frac{d}{2} - 0)$ – граничні умови, (4)

$\mu(z) = \begin{cases} \mu_1, & z \in [\frac{d}{2} - l, -\frac{d}{2}) \\ \mu_2, & z \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}) \end{cases}$ – кусково-стала функція.

Список використаних джерел

1. Theory and Phenomena of Metamaterials / Edited by F. Capolino. – CRC Press, 2009. – 926 p.
2. Solymar L., Shamonina E. Waves in Metamaterials. – Oxford University Press, USA, 1st edition, 2009. – 368 p.
3. Масалов, С. А. Дифракция плоской электромагнитной волны на диэлектрической решетке [Текст] / С.А. Масалов, Ю.Т. Репа, В. П. Шестопалов // Радиотехника: республ. межведомств. тематический науч.-техн. сборник. – 1969. – Вып. 10. – С. 15-24.
4. Казанко, А. В. Взаимодействие плоской электромагнитной волны с дифракционной решеткой из метаматериала [Текст] / А. В. Казанко, Е. Н. Одаренко, А. А. Шматько // Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. Радіофізика та електроніка. – 2012. – № 1010. – Вип. 20. – С. 57-65.