ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ ТА ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра фізики

МЕХАНІКА. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з фізики

Харків – 2018

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри фізики 26 вересня 2017 р., протокол № 2.

Докладно розглянуті методи розв’язання задач з розділів «Механіка», «Молекулярна фізика і термодинаміка», у кожному з яких наведено основні поняття і формули з теми, а також приклади розв’язання задач.

Призначені для проведення практичних занять зі студентами всіх спеціальностей денної форми навчання. Методичні вказівки можуть використовуватись для самостійної підготовки до занять, а також при дистанційному навчанні курсу фізики.

Укладачі:

доценти А. Т. Котвицький,
К. А. Котвицька

Рецензент

доц. Г. І. Рашба (ХНУ ім. В. Н. Каразіна)

МЕХАНІКА. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА
І ТЕРМОДИНАМІКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з фізики

Відповідальний за випуск Котвицький А. Т.

Редактор Третьякова К. А.

Підписано до друку 10.11.17 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,25. Тираж 30. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

За сучасною освітньою програмою підготовки бакалаврів, через збільшення кількості годин для самостійного навчання зростає роль практичних занять. Їх основна мета – навчити студентів використовувати теоретичний матеріал у процесі розв'язання задач за темами курсу фізики.

Повний курс дисципліни включає до себе такі розділи:

- «Механіка»;
- «Молекулярна фізика і термодинаміка»;
- «Електростатика і постійний струм»;
- «Електромагнетизм»;
- «Квантова оптика»;
- «Атомна і ядерна фізика».

У результаті вивчення наведених розділів студенти повинні *знати* структуру курсу, основні питання і завдання відповідних розділів курсу, зміст і математичне відображення основних законів. Студенти повинні *вміти* давати визначення фізичних величин, понять і законів; виводити формули, що пов’язують основні величини при формулюванні фізичних законів; самостійно розв'язувати традиційні фізичні задачі, користуватись довідковою літературою.

Дані методичні вказівки включають до себе такі розділи курсу фізики: «Механіка», «Молекулярна фізика і термодинаміка». Кожен окремий розділ розподілений на теми, які супроводжуються коротким теоретичним матеріалом, поясненням основних фізичних законів і визначень, прикладами розв’язування задач, що дозволяє організувати самостійну та індивідуальну роботу студентів у процесі навчання. Можливо використовувати при дистанційному навчанні студентів всіх спеціальностей університету залізничного транспорту.

1 МЕХАНІКА

1.1 Кінематика поступального руху

Система відліку. Траєкторія, шлях, переміщення матеріальної точки. Швидкість. Прискорення та його складові. Кутова швидкість і кутове прискорення. Рівномірний та рівнозмінний рух.

1.2 Динаміка матеріальної точки

Інерціальні системи відліку. Перший закон Ньютона. Маса та імпульс матеріальної точки. Другий закон Ньютона. Сила та імпульс сили. Третій закон Ньютона. Закон збереження імпульсу.

1.3 Закони збереження у механіці

Механічна система. Закон збереження імпульсу. Центр мас системи. Енергія, робота, потужність. Кінетична та потенціальна енергії як складові механічного руху. Закон збереження механічної енергії. Зіткнення тіл. Абсолютно пружний удар (АПУ) та абсолютно непружний удар (АНУ)

1.4 Динаміка обертального руху твердого тіла

Момент інерції матеріальної точки та твердого тіла. Моменти інерції симетричних тіл правильної геометричної форми. Момент сил. Рівняння моментів. Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу. Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла. Робота та кінетична енергія в обертальному русі.

1.1 КІНЕМАТИКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

Основні поняття і формули

Кінематика – розділ механіки, в якому досліджуються характеристики і закономірності різних видів механічного руху в незалежності від причин, що спричиняють цей рух.

З усіх видів руху поступальний і обертальний є найбільш універсальними, оскільки будь-який рух можна розкласти на поступальну та обертальну складові.

Поступальним називається рух, при якому будь-яка пряма, жорстко пов'язана з тілом, переміщується у просторі, залишаючись паралельною самій собі.

Обертальний рух тіла, при якому всі його точки описують кола, центри яких лежать на одній прямій, що називається віссю обертання.

1.1.1 Положення матеріальної точки у даний момент часу задається *радіус-вектором* $\vec{r}$ – направленим відрізком, проведеним від початку координат у дану точку.

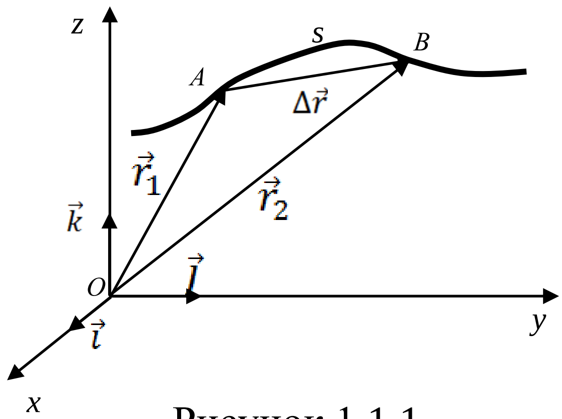


Рисунок 1.1.1

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орти (одиничні вектори в напрямах координатних осей x, y, z).

Модуль радіуса вектора матеріальної точки можна визначити за формулою

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

1.1.2 Рівняння залежності координат від часу називається *рівнянням руху*:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t)\,. \end{cases}$$

1.1.3 Траєкторія – сукупність послідовних положень точки, тобто лінія, яку вона описує у просторі під час руху (на рисунку 1.1.1 це дуга *AB*).

1.1.4 Шлях – довжина траєкторії, яку описує матеріальна точка під час руху.

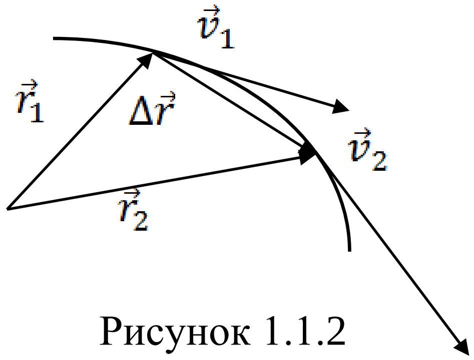


Рисунок 1.1.2

1.1.5 Переміщення – векторна фізична величина, що дорівнює різниці двох радіус – векторів, проведених у перше і в друге положення (рисунок 1.1.2).

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1.$$

Переміщення, як і шлях, вимірюється в SI в метрах $[\Delta\vec{r}] = [S] =$ м.

1.1.6 Швидкість – фізична величина, яка характеризує зміну положення тіла.

Середня швидкість переміщення – це величина, що дорівнює відстані, яку долає тіло вздовж вектора переміщення за одиницю часу.

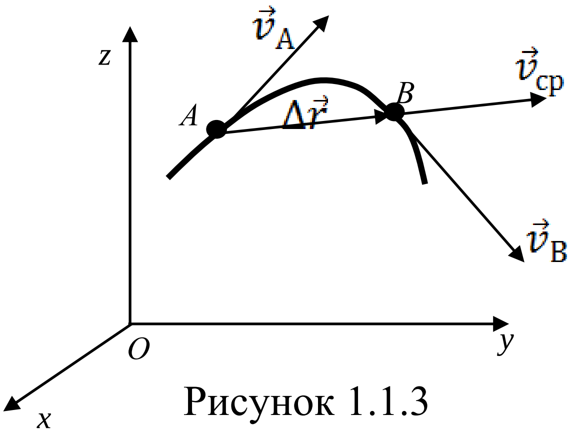


Рисунок 1.1.3

$$\vec{v}_{\text{сер.пер.}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

де $\Delta\vec{r}$ – переміщення матеріальної точки за інтервал часу Δt.

Середня швидкість переміщення спрямована вздовж вектора переміщення.

Середня швидкість шляху – величина, що дорівнює відстані, яку проходить тіло вздовж траєкторії за одиницю часу.

$$\mathrm{v}_{\text{сер.шлях.}} = \frac{S(t_1,t_2)}{t_2 - t_1}.$$

Миттєва швидкість – це швидкість у даний момент часу, вона спрямована по дотичній до траєкторії у даній точці в бік руху (рисунок 1.1.4).

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

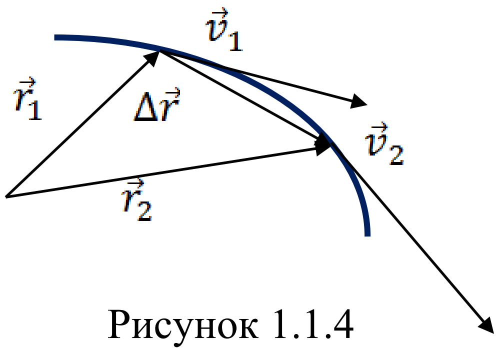


Рисунок 1.1.4

Вектор швидкості можна виразити через його проекції на відповідні осі:

$$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k},$$

де $\begin{cases} \mathrm{v}_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}; \\ \mathrm{v}_y = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} \\ \mathrm{v}_z = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases}$ – проекції швидкості $\vec{v}$ на осі.

Абсолютне значення швидкості: $\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}$.

Одиниці вимірювання швидкості в системі SI: $[\mathrm{v}] = \text{м/с}$.

1.1.7 Прискорення – характеристика зміни швидкості тіла за модулем і напрямком.

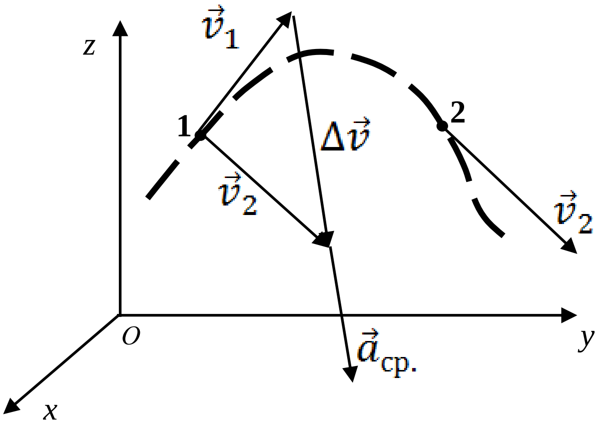


Рисунок 1.1.5

Середнє прискорення – відношення зміни швидкості $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ до інтервалу часу Δt, за який відбулась ця зміна (рисунок 1.1.5).

$$\vec{a}_{\text{ср.}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Миттєве прискорення є першою похідною від швидкості за часом

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Вектор прискорення можна виразити через його проекції на відповідні осі:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k},$$

де $\begin{cases} a_x = \dfrac{d\text{v}_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{d\text{v}_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \dfrac{d\text{v}_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$ – проекції прискорення $\vec{a}$ на осі координат.

Абсолютне значення прискорення $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

При *криволінійному русі* прискорення можна задати як суму нормальної і тангенціальної складових (рисунок 1.1.6).

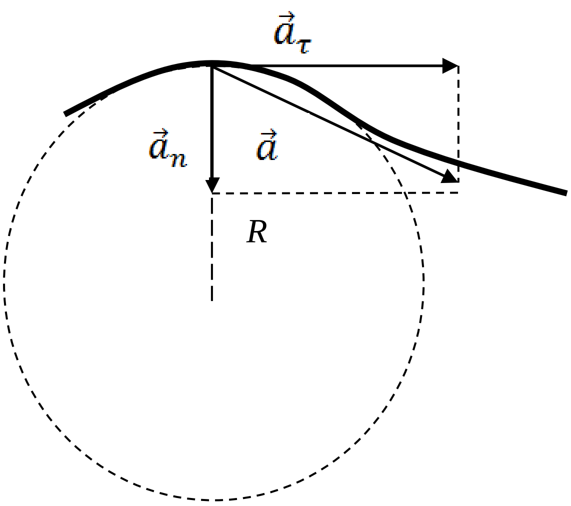


Рисунок 1.1.6

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau,$$

де $\vec{a}_n$ і $\vec{a}_\tau$ – відповідно нормальне і тангенціальне прискорення.

Нормальне прискорення характеризує зміну швидкості за напрямком та спрямоване до центра кривизни траєкторії у даній точці (рисунок 1.1.6).

$$a_n = \frac{\text{v}^2}{R},$$

де v – модуль швидкості частинки в цій точці, R – радіус кривизни траєкторії в будь-якій її точці.

Тангенціальне прискорення характеризує зміну швидкості за величиною та спрямоване по дотичній до траєкторії (рисунок 1.1.6).

$$\vec{a}_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

Повне прискорення дорівнює їх векторній сумі

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau .$$

Модуль повного прискорення

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} .$$

Одиниці вимірювання прискорення в SI:

$$[a] = [a_n] = [a_\tau] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

1.1.8 Рівномірний рух – це рух, при якому швидкість не змінюється (*$\vec{v}$= const).*

Кінематичне рівняння рівномірного руху вздовж осі *x*

$$x = x_0 + \mathrm{v}_x t, \qquad S = \mathrm{v} t,$$

де *x* – кінцева координата, x_0 – початкова координата.

1.1.9 Рівнозмінний рух – це рух з постійним прискоренням (*$\vec{a}$ = const*).

Кінематичне рівняння рівнозмінного руху вздовж осі *x*

$$x = x_0 \text{ - } \mathrm{v}_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \qquad S = \mathrm{v}_x t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Швидкість точки при рівнозмінному русі

$$\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_{0x} + a_x t .$$

1.1.10 Рух матеріальної точки по колу

Кутове переміщення – це вектор, модуль якого дорівнює куту повороту, а напрямок пов'язаний з напрямком руху правилом правого гвинта.

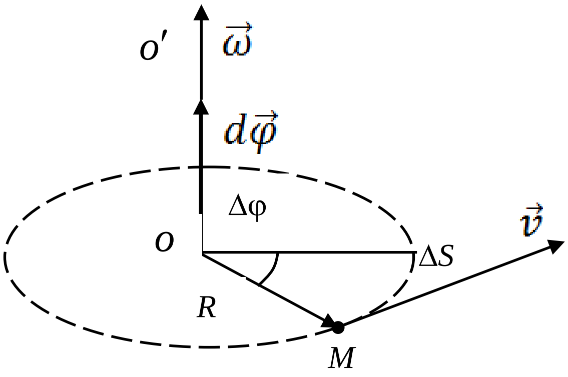


Рисунок 1.1.7

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}].$$

Кутова швидкість – це вектор, що дорівнює першій похідній кута повороту за часом.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Одиниця вимірювання кутового прискорення в SI: $[\omega] = 1/\text{с} = \text{с}^{-1}$.

Вектор кутової швидкості лежить на осі обертання, його напрямок визначається за правилом правого гвинта (рисунок 1.1.7).

Кутове прискорення – зміна кутової швидкості з часом.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$$

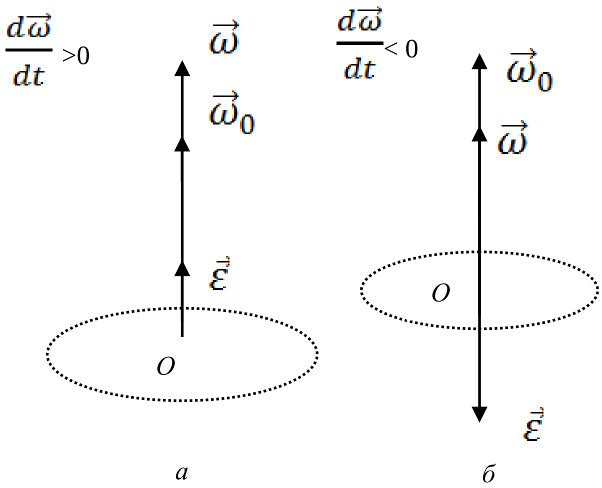


Рисунок 1.1.8

Кутове прискорення – векторна величина, напрямок якої збігається з напрямком кутової швидкості, якщо рух прискорений або протилежний, якщо обертання сповільнене (рисунок 1.1.8).

Одиниця вимірювання кутового прискорення в SI: $[\varepsilon] = \text{рад} / \text{с}^2$.

1.1.11 Кінематичне рівняння рівномірного обертання (ω = *const*).

$$\varphi = \varphi_0 \pm \omega t ,$$

де φ_0 – кут повороту в початковий момент часу.

1.1.12 Частота – це величина, яка дорівнює кількості обертів за одиницю часу.

$$\nu = \frac{N}{t}, \qquad [\nu] = c^{-1},$$

де N – число обертів, що здійснюється за час t.

1.1.13 Період – це час, за який відбувається один повний оберт

$$T = \frac{t}{N}, \quad [T] = c.$$

Період і частота пов'язані співвідношенням:

$$T = \frac{1}{\nu}.$$

1.1.14 Кінематичне рівняння рівнозмінного обертання (ε = *const*)

$$\varphi = \varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Кутова швидкість тіла при рівнозмінному русі

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t.$$

1.1.15 Зв'язок між лінійними та кутовими величинами, що характеризують обертання матеріальної точки, задається такими співвідношеннями:

- довжина дуги кола радіусом R визначається формулою

$$s = \varphi R;$$

- лінійна швидкість точки

$$\text{v} = \omega r \quad \text{або} \quad \vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}];$$

- прискорення точки:

а) тангенціальне

$$a_\tau = \varepsilon r \quad \text{або} \quad \vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}];$$

б) нормальне

$$a_n = \omega^2 r \quad \text{або} \quad \vec{a}_n = [\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]];$$

в) повне прискорення точки

$$a = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.1.1

Рівняння руху матеріальної точки вздовж осі x має вигляд $x(t) = t^2 - 4t + 1$.

Знайти:

1) переміщення тіла за час від t_1=0 с до t_2=5 с;
2) шлях тіла за час від t_1=0 с до t_2=5 с;
3) швидкість тіла наприкінці третьої секунди;
4) середню шляхову швидкість за перші три секунди;
5) середню швидкість переміщення за перші три секунди;
6) прискорення наприкінці третьої секунди.

Дано:	Розв'язання
$x(t) = t^2 - 4t + 1$ t_1=0 с t_2=5 с t_3=3 с $\Delta x(0,5) -$? $S(0,5)$ -? $\text{v}(3)$ -? $\text{v}_{\text{сер.шлях.}}(0,3)$ -? $\text{v}_{\text{сер.пер.}}(0,3)$ -? $a(3)$ -?	1 Для одномірного руху положення у будь-який момент часу можна задати тільки одним числом, в даному випадку це координата x: $$\Delta x = x(t_2) - x(t_1).$$ Тоді переміщення тіла за час від t_1=0 с до t_2=5 с складе $$\Delta x = x(5) - x(0) = 6 - 1 = 5\text{м}.$$

При $\Delta x > 0$ тіло за час свого руху перемістилося вправо (негативне переміщення вказувало б на зміщення вліво).

2 Щоб визначити шлях, необхідно перевірити, зупинялось тіло за проміжок часу t_1=0 с до t_2=5 с чи ні?

Знайдемо час зупинки. Для цього необхідно взяти похідну за часом від функції $x(t)$ і прирівняти її до нуля:

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = 0.$$

Тобто $$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^2 - 4t + 1\right) = 2t - 4,$$

$$2t - 4 = 0.$$

Час зупинки складає

$$t_{\text{зупинки}} = 2\text{с}.$$

Оскільки час зупинки знаходиться між часом $t_1 < t_{\text{зупинки}} < t_2$, то необхідно це врахувати. Тоді повний шлях знаходиться за формулою

$$S(t_{1,} t_2) = S(t_{1,} t_{\text{зуп}}) + S(t_{\text{зуп}}, t_{2,}) = |x(2) - x(0)| + |x(5) - x(2) =|$$
$$= |-3 - 1| + |6 - (-3)| = 4 + 9 = 13\text{м}.$$

3 Для одновимірного випадку миттєва швидкість визначається як

$$\mathrm{v}(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t^2-4t+1\right)=2t-4\,\text{м/с}.$$

Підставимо $t=3\,\text{с}$, знайдемо швидкість тіла наприкінці третьої секунди

$$\mathrm{v}(3)=2t-4\big|_{t=3}=2\cdot 3-4=6-4=2\,\text{м/с}.$$

4 Середню шляхову швидкість обчислимо за формулою

$$\mathrm{v}_{\text{сер.шлях.}}=\frac{S(t_1,t_2)}{t_2-t_1},$$

$$\mathrm{v}_{\text{сер.шлях.}}(0{,}3)=\frac{S(0{,}3)}{3-0}=\frac{S(0{,}2)+S(2{,}3)}{3}.$$

Підставимо числові значення:

$$\mathrm{v}_{\text{сер.шлях.}}(0{,}3)=\frac{\left|x(2)-x(0)\right|+\left|x(3)-x(2)\right|}{3}=\frac{\left|-3-1\right|+\left|-2-(-3)\right|}{3}=\frac{4+1}{3}=1{,}67\,\text{м/с}.$$

Середня швидкість по переміщенню

$$\mathrm{v}_{\text{сер.пер.}}(t_1,t_2)=\frac{x(t_1,t_2)}{t_2-t_1}$$

$$\mathrm{v}_{\text{сер.пер.}}(0{,}3)=\frac{x(3)-x(0)}{3-0}=\frac{-2-1}{3}=-1\,\text{м/с}.$$

Знак «мінус» означає, що швидкість спрямована в бік негативних значень x, тобто вліво.

5 У разі прямолінійного руху прискорення визначається як

$$a(t)=\frac{d\mathrm{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Підставимо вираз для швидкості, знайдемо

$$a(t)=\frac{d\text{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(2t-4)=2\,\text{м/с}^2.$$

Бачимо, прискорення у даній задачі від часу не залежить, отже, в будь-який момент часу воно дорівнює отриманому значенню $a(3)=2\,\text{м/с}^2$.

Приклад 1.1.2

Автомобіль проходить першу третину шляху з деякою швидкістю v_1, а решту шляху зі швидкістю $\text{v}_2=50\frac{\text{км}}{\text{год}}$. Знайти швидкість на першій ділянці шляху, якщо середня швидкість на всьому шляху дорівнює $\text{v}=37{,}5\frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Дано:

$S_1=\frac{S}{3}$

$S_2=S-\frac{S}{3}=\frac{2S}{3}$

$\text{v}_2=50\frac{\text{км}}{\text{год}}$

$\text{v}=37{,}5\frac{\text{км}}{\text{год}}$

$\text{v}_1-?$

Розв'язання

Середня швидкість руху

$$\text{v}_{cp}=\frac{S}{t},$$

де $S=S_1+S_2$ – шлях; $t=t_2+t_1$ – час, за який був пройдений шлях S.

Швидкість на другій ділянці

$$\text{v}_2=\frac{S_2}{t_2}=\frac{\frac{2S}{3}}{t_2}=\frac{2S}{3\cdot t_2},\ \text{звідки}\quad t_2=\frac{2S}{3\text{v}_2}.$$

Час руху автомобіля на першій ділянці: $t_1=\frac{S_1}{\text{v}_1}=\frac{\frac{S}{3}}{\text{v}_1}=\frac{S}{3\text{v}_1}$.

$$\text{v}_{cp}=\frac{S_1+S_2}{t_2+t_1}=\frac{S}{\frac{2S}{3\text{v}_2}+\frac{S}{3\text{v}_1}},\quad \text{звідки}\quad \text{v}_{cp}\left(\frac{2S}{3\text{v}_2}+\frac{S}{3\text{v}_1}\right)=S,$$

після спрощення $\text{v}_{cp}\left(\frac{2}{3\text{v}_2}+\frac{1}{3\text{v}_1}\right)=1.$

Розкривши дужки, отримаємо $\frac{\mathrm{v}_{cp}}{3\mathrm{v}_1} = 1 - \frac{2\mathrm{v}_{cp}}{3\mathrm{v}_2}$, звідки $\mathrm{v}_1 = \frac{\mathrm{v}_{cp}}{3\left(1 - \frac{2\mathrm{v}_{cp}}{3\mathrm{v}_2}\right)}$.

Підставимо числові значення:

$$\mathrm{v}_1 = \frac{37,5}{3\left(1 - \frac{2\cdot 37,5}{3\cdot 50}\right)} = \frac{37,5}{3\left(1 - \frac{75}{150}\right)} = \frac{37,5}{3(1-0,5)} = 25\,\frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

Приклад 1.1.3

Точка рухається по колу радіусом $R = 3\text{м}$ за законом $\varphi(t) = t^2 - 2t + 5$.

Знайти:

1) кутову швидкість наприкінці другої секунди;
2) кутове прискорення наприкінці другої секунди;
3) лінійну швидкість точки наприкінці другої секунди;
4) тангенціальне прискорення наприкінці другої секунди;
5) нормальне прискорення наприкінці другої секунди;
6) повне прискорення наприкінці другої секунди.

Дано:
$R = 3\text{м}$
$\varphi(t) = t^2 - 2t + 5$
t=2 с

$\omega(2) - ?$ $\varepsilon(2)$-? $\mathrm{v}(2)$-?
$a_{\tau}(2)$-? $a_{n}(2)$-? $a(2)$-?

Розв'язання

1 Кутову швидкість знайдемо, взявши похідну від кута повороту φ:

$$\omega = \frac{dx}{dt},$$

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(t^2 - 2t + 5\right) = 2t - 2\,\text{рад/с}.$$

Підставимо числові значення:

$$\omega(2) = 2\cdot 2 - 2 = 2\,\text{рад/с}.$$

2 Кутове прискорення – це похідна від кутової швидкості за часом, або друга похідна від кута повороту за часом.

$$\varepsilon(t)=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)=\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Підставимо вираз для кутової швидкості:

$$\omega(t)=2t-2.$$

Кутове прискорення

$$\varepsilon(t)=\frac{d}{dt}(2t-2)=2\,\text{рад/с}^2.$$

3 Лінійна швидкість точки

$$\text{v}=\omega r.$$

Підставимо числові значення

$$\text{v}(2)=R\omega(2)=3\cdot 2=6\,\text{м/с}.$$

4 Тангенціальна компонента прискорення характеризує швидкість зміни модуля швидкості з часом і визначається як

$$a_\tau(t)=\frac{d\,\text{v}}{d\,t}=\frac{d(\omega R)}{dt}=R\frac{d\omega}{dt}=R\varepsilon(t).$$

Наприкінці другої секунді тангенціальна компонента прискорення дорівнює

$$a_\tau(2)=R\varepsilon(2)=3\cdot 2=6\,\text{м/с}^2.$$

5 Нормальна компонента прискорення характеризує швидкість зміни швидкості за напрямком і визначається виразом

$$a_n(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = R\omega^2(t).$$

Підставимо числові значення:

$$a_n(2) = R\omega^2(2) = 3 \cdot 2^2 = 12\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

6 Повне прискорення знаходимо як геометричну суму тангенціального і нормального прискорення:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Підставимо числові значення:

$$a = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} \approx 13{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Приклад 1.1.4

Камінь кинули вертикально вгору. Знайти швидкість, з якою камінь влучив у ціль на висоті H=2,5 м, якщо початкова швидкість дорівнює $v_0 = 9\,\frac{м}{с}$? Скільки часу летів камінь? На яку висоту піднявся б камінь, якби пролетів повз ціль? Опором повітря знехтувати.

Дано:	Розв'язання
$H = 2{,}5$ м	З формули для падіння з висоти H
$v_0 = 9\,\frac{м}{с}$	$v_1^2 - v_0^2 = -2gH$,
$g = 9{,}8\,\frac{м}{с^2}$	після перенесення отримуємо: $v_1^2 = v_0^2 - 2gH$, звідки $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gH}$.
$v_1 - ?\ t - ?\ H_{max} - ?$	

Обчислимо швидкість каменя, з якою він влучив у ціль:

$$v_1 = \sqrt{9^2 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}5} = 5{,}65\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Визначимо час підняття на задану висоту з формули $v_1 = v_0 - gt$,

звідки $$t = \frac{v_0 - v}{g}.$$

Підставимо числові значення, отримуємо

$$t = \frac{9 - 5{,}65}{9{,}8} = 0{,}34 \text{ с}.$$

Якби камінь не влучив у ціль, то він піднявся б вище висоти H_{max}, де його швидкість дорівнює нулю:

$$v^2 - v_0^{\ 2} = -2gH_{max}, \quad v_0^{\ 2} = 2gH_{max},$$

звідки $H_{max} = \dfrac{v_0^{\ 2}}{2g}$.

Підставимо числові значення, отримуємо

$$H_{max} = \frac{9^2}{2 \cdot 9{,}8} = 4{,}13 \text{ м}.$$

1.2 ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Основні поняття і формули

Динаміка – розділ механіки, який вивчає закони руху тіл і причини, що викликають або змінюють цей рух. До динамічних характеристик поступального руху відносяться: маса m, імпульс $\vec{p}$, сила $\vec{F}$.

1.2.1 Маса – це фізична величина, яка визначає інерційні і гравітаційні властивості. Маса є скалярною величиною.

$$[m] = кг.$$

1.2.2 Імпульсом тіла називається фізична величина, яка дорівнює добутку маси тіла на його швидкість.

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad [p] = кг·м / с.$$

Напрямок імпульсу тіла співпадає з напрямком швидкості тіла.

1.2.3 Сила – це векторна величина, що є мірою механічної дії на тіло з боку інших тіл або полів, у результаті якої тіло одержує прискорення або деформується.

$$[\,F\,] = \text{Н} = \text{кг}\cdot\text{м/с}^2.$$

1.2.4 Перший закон Ньютона: Якщо на тіло не діють сили або сума цих сил дорівнює нулю, то тіло перебуває у стані спокою чи рухається з постійною швидкістю.

$$\vec{a} = 0, \text{ тобто } \sum \vec{F} = 0.$$

1.2.5 Другий закон Ньютона (*в імпульсній формі*): Швидкість зміни імпульсу тіла в часі дорівнює результуючій прикладених до тіла сил.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}.$$

У випадку, коли $m = const$. Рівнодійна сил, що діють на матеріальну точку, дорівнює добутку маси матеріальної точки і прискорення, якого набуває точка.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a},$$

де – $\sum \vec{F}$ векторна сума сил, що діють на матеріальну точку.

1.2.6 Третій закон Ньютона: Дві матеріальні точки взаємодіють із силами рівними за величиною та спрямованими в протилежні сторони вздовж прямої, що з'єднує ці точки (рисунок 1.2.1).

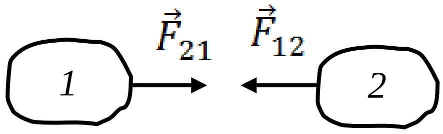


Рисунок 1.2.1

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

1.2.7 Сили у природі.

- *Сила пружності* – це сила, яка виникає при деформації тіла, тобто при зміні його форми або об'єму, що обумовлено дією зовнішніх сил.

$$F_{\text{пр}} = -kx,$$

де k – коефіцієнт пружності; x – абсолютна деформація. Знак «мінус» визначається тим, що сила пружності протилежна деформації.

- *Сила гравітаційної взаємодії* – це сила, що діє між двома матеріальними тілами та обумовлена гравітаційною взаємодією між тілами.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравітаційна стала; m_1 і m_2 – маси взаємодіючих тіл; r – відстань між матеріальними точками або тілами.

- *Сила тяжіння* – це сила, яка діє на тіло зі сторони Землі:

$$F = mg,$$

де $g = 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ – прискорення вільного падіння.

- *Сили тертя* з'являються при переміщенні тіл, що стикаються, або їх частин одна відносно одної:

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

де μ – коефіцієнт тертя; N – сила нормального тиску.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.2.1

Матеріальна точка масою $m = 2$ кг рухається під дією сили відповідно до рівняння $x(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C = 1 \text{м/с}^2$, $D = -0,2 \text{м/с}^3$. Знайти значення цієї сили в момент часу $t_1 = 2\text{с}$. В який момент часу сила дорівнює нулю?

Дано:	Розв'язання
$m = 2$ кг $x(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ $C = 1\text{м/с}^2$ $D = -0,2\text{м/с}^3$ $t_1 = 2\text{с}$ $F_2 = 0$	Запишемо рівняння у вигляді: $$x(t) = t^2 - 0,2t^3.$$ За другим законом Ньютона, $\vec{F} = m\vec{a}$, де $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ – прискорення тіла. Швидкість тіла – це перша похідна від координати тіла за часом.
$F_1 - ?$ $t_2 - ?$	$$\text{v}(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 - 0,2t^3) = 2t - 0,6t^2.$$

Тоді прискорення тіла: $a(t) = \frac{d\text{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(2t - 0,6t^2) = 2 - 1,2t$.

Визначимо прискорення у момент часу $t_1 = 2c$:

$$a(2) = 2 - 1,2 \cdot (2) = 2 - 2,4 = -0,4\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Сила в момент часу $t_1 = 2c$, дорівнює:

$$F_1 = 2 \cdot (-0,4) = -0,8 \text{ Н}.$$

Визначимо час за умови, що $F_2 = 0$, тоді

$$F_2 = 2(2 - 1,2t_2) = 0.$$

Зробимо спрощення:

$$4-2,4t_2=0\text{, звідки } t_2=\frac{4}{2,4}=1,67 \text{ с.}$$

Приклад 1.2.2

Поїзд масою $m=500\,\text{т}$ наближаючись до станції, зменшив швидкість з $v_1=40\frac{\text{км}}{\text{год}}$ до $v_2=28\frac{\text{км}}{\text{год}}$ за 1 хв. Визначити імпульс поїзда до і після гальмування, а також силу гальмування.

Дано:	SI	Розв'язання
$m=500\,\text{т}$	$=5\cdot10^5\,\text{кг}$	Імпульс визначимо як добуток маси на швидкість:
$v_1=40\frac{\text{км}}{\text{год}}$	$=11{,}1\frac{\text{м}}{\text{с}}$	$$\vec{p}=m\vec{v}.$$
$v_2=28\frac{\text{км}}{\text{год}}$	$=7{,}78\frac{\text{м}}{\text{с}}$	Тоді імпульс до гальмування:
$t=1\text{хв.}$	$=60\text{с}$	$$p_1=mv_1=5\cdot10^5\cdot11{,}1\approx5{,}56\cdot10^6\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}},$$
p_1-? p_2-? $F_{зуп.}$-?		а після гальмування дорівнює

$$p_{22}=mv_1=5\cdot10^5\cdot7{,}78\approx3{,}89\cdot10^6\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Другий закон Ньютона стверджує, якщо на тіло діє сила, то тіло рухається з прискоренням

$$\vec{F}=m\vec{a}.$$

Прискорення призводить до зміни швидкості у часі

$$a=\frac{v_2-v_1}{t}.$$

Тоді сила гальмування визначається як

$$F = ma = m\frac{v_2 - v_1}{t}.$$

Підставимо числові значення:

$$F = 5 \cdot 10^5 \frac{11{,}1 - 7{,}78}{60} = -27{,}8 \cdot 10^3 = -27{,}8 \text{ кН}.$$

Знак мінус означає, що сила спрямована проти руху.

Приклад 1.2.3

Тіло рухається по похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 45^\circ$. Після проходження відстані $S = 36{,}4$ см тіло набуває швидкості $v_0 = 2 м/с$. Визначити коефіцієнт тертя тіла.

Дано:	SI
$\alpha = 45^\circ$ $v_0 = 2$м/с $S = 36{,}4$см	 $= 0{,}364$м
$\mu - ?$	

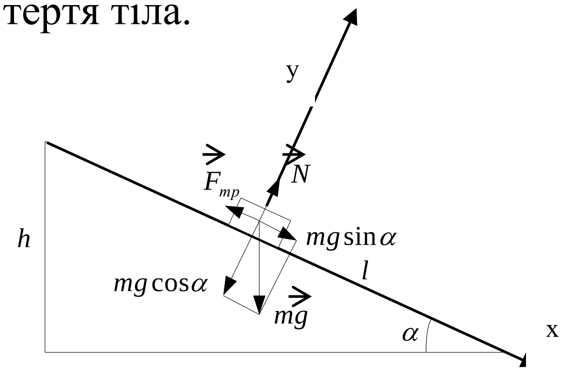


Рисунок 1.2.2

Запишемо другий закон Ньютона:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

У загальному вигляді він такий:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

У проекціях на осі OX та OY отримаємо (рисунок 1.2.2):

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_{тр} = ma \\ N - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}.$$

З другого рівняння системи сила реакції опори дорівнює

$$N = mg\cos\alpha .$$

З визначення сила тертя

$$F_{тр} = \mu N ,$$

підставимо силу $N,$ отримуємо $F_{тр} = \mu \cdot mg\cos\alpha$.

Тоді перша формула системи запишеться у вигляді

$$mg\sin\alpha - \mu \cdot mg\cos\alpha = ma,$$

звідки $\mu = \dfrac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} = tg\alpha - \dfrac{a}{g\cos\alpha}$.

Шлях, згідно з кінематичною формулою, дорівнює

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}, \quad \text{звідки} \quad a = \frac{v_0^2}{2S} .$$

Підставляємо прискорення, отримаємо

$$\mu = tg\alpha - \frac{v_0^2}{2Sg\cos\alpha} .$$

Підставимо числові значення:

$$\mu = tg(45^{\circ}) - \frac{2^2}{2 \cdot 0{,}364 \cdot 9{,}8\cos 45} = 0{,}208 .$$

1.3 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ У МЕХАНІЦІ

Основні поняття і формули

1.3.1 Закон збереження імпульсу: сумарний імпульс замкнутої системи тіл залишається постійним.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const \qquad \text{або} \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathrm{v}}_i = const,$$

де N – кількість матеріальних точок (тіл) системи.

1.3.2 Система тіл замкнута, якщо на неї не діють зовнішні сили або геометрична сума внутрішніх сил дорівнює нулю.

Сили, з якими на систему діють зовнішні тіла, називаються *зовнішніми*, а сили взаємодії між матеріальними точками системи – *внутрішніми*.

Закон збереження імпульсу – це фундаментальний закон природи, який свідчить про однорідність простору.

1.3.3 Робота кількісно характеризує процес обміну енергією між тілами, що взаємодіють. У механіці це робота сили, що прикладена до тіла.

- *Робота, яка виконується постійною силою ($\vec{F} = const$):*

$$A = F\,\Delta r \cos\alpha,$$

де α – кут між напрямками векторів сили F та переміщення Δr.

$$[A] = \text{Дж}.$$

Робота – це скалярна величина. Залежно від значення $\cos\alpha$ вона може бути додатною, від'ємною та дорівнювати нулю.

- *Робота, яка виконується змінною силою*:

$$A_{1,2} = \int_{L_{1,2}} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right),$$

де інтегрування здійснюється вздовж траєкторії, що позначається через $L_{1,2}$.

1.3.4 Потужність – це величина, яка чисельно дорівнює відношенню роботи, що здійснюється за одиницю часу:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Якщо швидкість тіла $\vec{\mathrm{v}} = const$, потужність дорівнює добутку сили на швидкість

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t} = F \cdot \mathrm{v}.$$

У випадку змінної потужності вводиться поняття миттєвої потужності

$$N = \frac{dA}{dt}, \qquad [N] = \text{Вт}.$$

1.3.5 Кінетична енергія матеріальної точки – це енергія, яку тіло має внаслідок свого руху.

$$W_к = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} \quad \text{або} \quad W_к = \frac{p^2}{2m}.$$

Кінетична енергія залежить від вибору системи відліку.

Теорема про кінетичну енергію: Робота всіх сил на деякому переміщенні дорівнює збільшенню кінетичної енергії тіла на даному переміщенні.

$$A_{1,2} = W_{к2} - W_{к1}.$$

1.3.6 Потенціальна енергія тіла – це енергія тіла, яка визначається взаємним розміщенням тіл або матеріальних точок і характером сил взаємодії з іншими тілами.

- Потенціальна енергія пружно деформованого тіла

$$W_p = \frac{\mathrm{kx}^2}{2}.$$

• Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок масами m_1 і m_2, що знаходяться на відстані r,

$$W_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

• Потенціальна енергія піднятого на висоту над поверхнею Землі тіла

$$W_p = mgh,$$

де h – висота тіла відрахована від нульового рівня.

Теорема про потенціальну енергію: Робота консервативної сили на деякому переміщенні дорівнює зменшенню потенціальної енергії тіла на даному переміщенні.

$$A_{1,2} = W_{p1} - W_{p2} = -\Delta W_p.$$

1.3.7 Консервативні сили – це сили, робота яких не залежить від траєкторії руху, а залежить від початкового і кінцевого положення тіла.

1.3.8 Сума кінетичної і потенціальної енергії тіла називається його *повною механічною енергією*.

$$W = W_к + W_p.$$

1.3.9 Закон збереження повної механічної енергії системи: У замкненій системі, в якій діють тільки консервативні сили, повна механічна енергія зберігається.

$$W = W_к + W_p = const.$$

Одиниці вимірювання енергії в системі SI:

$$[W] = [W_к] = [W_p] = \text{Дж}.$$

1.3.10 Удар – це зіткнення двох або більше тіл, коли взаємодія триває дуже короткий час.

• *Абсолютно пружний удар (АПУ)* – зіткнення двох тіл, під час якого зберігається не тільки геометрична сума імпульсів, а й сума кінетичних енергій взаємодіючих тіл, тобто виконуються закони збереження імпульсу та механічної енергії.

Швидкості руху куль після АПУ, коли кулі рухаються назустріч одна одній:

$$u_1 = \frac{-2m_2\mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_1(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1}, \quad u_2 = \frac{2m_1\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1}.$$

• *Абсолютно непружний удар (АНУ)* – це зіткнення двох тіл, після якого швидкості обох тіл, що зіштовхуються, виявляються однаковими.

Швидкість руху куль після АНУ, коли кулі рухаються в одному напрямку:

$$u = \frac{m_1\mathrm{v}_1 + m_2\mathrm{v}_2}{m_2 + m_1},$$

де m_1 і m_2 – маси куль; $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ – швидкості куль до взаємодії.

Внаслідок непружного зіткнення тіл відбувається втрата кінетичної енергії, яка переходить у теплову та інші форми енергії. Цю втрату можна визначити за формулою

$$\Delta W = \frac{m_2 m_1}{2(m_2 + m_1)}(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2)^2.$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.3.1

Сталева пружина під дією сили $F_1 = 300\,\text{Н}$ розтягується на $x_1 = 2$ см. Яку потенціальну енергією буде мати ця пружина при її розтягуванні на $x_2 = 10$ см?

Дано:	SI	Розв'язання
$F_1 = 300\,\text{Н}$ $x_1 = 2$ см $x_2 = 10$ см	 =0,02 м =0,1 м	Потенціальна енергія розтягнутої пружини дорівнює $$W_p = \frac{kx^2}{2}.$$
W_p – ?		При цьому коефіцієнт жорсткості пружини можна визначити з закону Гука: $$F = kx,$$ де F – величина зовнішньої сили.

Звідки одержуємо:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{F_1}{x_1}.$$

Підставивши отриманий вираз у формулу потенціальної енергії, отримаємо

$$W_p = \frac{F_1 x_2^2}{2x_1}.$$

Підставимо чисельні значення:

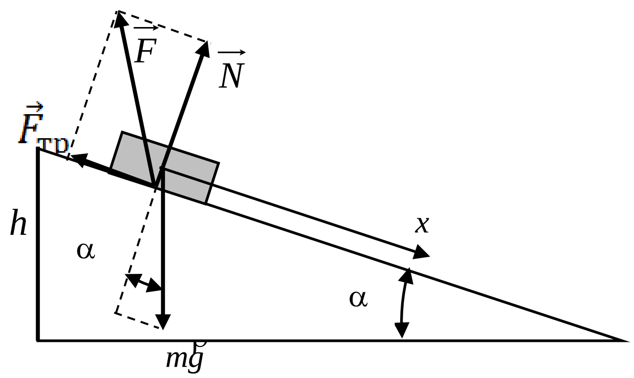
$$W_p = \frac{300 \cdot (0{,}1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 75 \text{ Дж.}$$

Приклад 1.3.2

З похилої площини висотою $h = 1$ м і довжиною $l = 10$ м сковзає тіло масою $m = 1$ кг. Знайти:

1) кінетичну енергію тіла біля основи похилої площини;

2) швидкість тіла біля основи похилої площини. Коефіцієнт тертя на всьому шляху вважати постійним і таким, що дорівнює $\mu = 0{,}05$.

Дано:	Розв'язання
$h=1$ м $l=10$ м $m=1$ кг $\mu=0{,}05$	 Рисунок 1.3.1
$W_к-?$ $\mathrm{v}-?$	

1 Із закону збереження енергії потенціальна енергія тіла переходить у кінетичну енергію і роботу проти сили тертя

$$mgh=\frac{m\mathrm{v}^2}{2}+F_{тр}\,l\text{, звідки }\frac{m\mathrm{v}^2}{2}=mgh-F_{тр.}l\,.$$

З геометрії рисунка 1.3.1 бачимо, що $h=l\sin\alpha$, де α – кут нахилу похилої площини.

За визначенням сила тертя дорівнює

$$F_{тр}=\mu\ N=\mu\cdot mg\cos\alpha\,.$$

Кінетична енергія тіла $W_к=\dfrac{m\mathrm{v}^2}{2}$, звідки

$W_к=mgh-F_{тр.}l=mgl\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, де $\sin\alpha = h\,/\,l = 0{,}1$,

тоді $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-(0{,}1)^2}=0{,}995$.

Підставимо чисельні значення:

$$\mathrm{W}_к=1\cdot 9{,}8\cdot 1(0{,}1-0{,}05\cdot 0{,}995)=4{,}9\,\text{Дж}.$$

2 Швидкість тіла одержимо з формули кінетичної енергії:

$$\mathrm{v}=\sqrt{\frac{2W_k}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 4{,}9}{1}}=3{,}1\ \text{м/с}\ .$$

Приклад 1.3.3

Вагон масою $m_1 = 1{,}5$ т, що рухається по горизонтальному шляху зі швидкістю $\text{v}_1 = 15\,\text{м/с}$, стикається з нерухомим вагоном масою $m_2 = 4$ т.

Знайти:

1) швидкості вагонів після зіткнення у разі абсолютно пружного удару;

2) швидкості вагонів після зіткнення у разі абсолютно непружного удару;

3) втрату механічної енергії.

Дано:	SI
$m_1 = 1{,}5\,\text{т}$	$= 1{,}5 \cdot 10^3\,\text{кг}$
$\text{v}_1 = 15\,\text{м/с}$	
$m_2 = 4\,\text{т}$	$= 4 \cdot 10^3$
u_1-? u_2-? ΔW-?	

Розв'язання

При пружному ударі виконуються два закони збереження.

Запишемо закон збереження енергії:

$$\frac{m_1 \text{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \text{v}_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

а також закон збереження імпульсу:

$$m_1 \overrightarrow{\text{v}_1} + m_2 \overrightarrow{\text{v}_2} = m_1 \overrightarrow{u_1} + m_2 \overrightarrow{u_2}\,.$$

За умови, що $\overrightarrow{\text{v}_2} = 0$, запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 \text{v}_1^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2} \\ m_1 \text{v}_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \end{cases}.$$

Перетворимо перше і друге рівняння, отримаємо

$$\begin{cases} m_1\left(\text{v}_1^2 - u_1^2\right) = m_2 u_2^2 \\ m_1\left(\text{v}_1 - u_1\right) = m_2 u_2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} m_1\left(\text{v}_1 - u_1\right)\left(\text{v}_1 + u_1\right) = m_2 u_2^2 \\ m_1\left(\text{v}_1 - u_1\right) = m_2 u_2 \end{cases}.$$

Підставимо в перше рівняння друге, маємо

$$m_2 u_2 (\mathrm{v}_1 + u_1) = m_2 u_2{}^2 .$$

Зробимо спрощення на $m_2 u_2$, отримаємо $\mathrm{v}_1 + u_1 = u_2$.

Підставимо вираз для u_2 в друге рівняння, отримаємо $m_1 \mathrm{v}_1 = m_1 u_1 + m_2 (\mathrm{v}_1 + u_1)$, звідки $(m_1 - m_2)\mathrm{v}_1 = (m_1 + m_2) u_1$.

Тоді швидкість вагона після зіткнення

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \mathrm{v}_1 \ .$$

За умови, що $u_2 = \mathrm{v}_1 + u_1$, отримаємо

$$u_2 = \mathrm{v}_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \mathrm{v}_1 = \left(1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \mathrm{v}_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \mathrm{v}_1 \ .$$

Підставимо числові значення:

$$u_1 = \frac{1{,}5 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^3}{1{,}5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} 15 = -6{,}8 \text{м/с} \ .$$

$$u_2 = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3}{1{,}5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} 15 = 8{,}2 \text{м/с} \ .$$

Слід підкреслити той факт, що знак «мінус» для швидкості u_1 означає, що вагон після зіткнення рухається у зворотний бік.

2 Після непружного удару вагони рухаються як єдине ціле.

Запишемо закон збереження імпульсу для непружного удару:

$$m_1 \overrightarrow{\mathrm{v}_1} + m_2 \overrightarrow{\mathrm{v}_2} = (m_1 + m_2)\vec{u} .$$

За умови, що $\overrightarrow{\mathrm{v}_2}$ =0, закон збереження перетворюється на

$$m_1 \mathrm{v}_1 = (m_1 + m_2) u \quad \text{звідки} \quad u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathrm{v}_1 \ .$$

Підставимо числові значення:

$$u=\frac{1{,}5\cdot10^3}{1{,}5\cdot10^3+4\cdot10^3}15=4{,}1\text{м/с} \ .$$

Для того щоб обчислити втрату енергії при такому зіткненні, необхідно спочатку визначити енергію до зіткнення та після зіткнення:

$$W_к=\frac{m_1\mathrm{v}_1^{\ 2}}{2}+\frac{m_2\mathrm{v}_2^{\ 2}}{2};$$
$$W_к^{\ *}=\frac{m_1u_1^{\ 2}}{2}+\frac{m_2u_2^{\ 2}}{2}.$$

Підставимо числові значення:

$$W_к=\frac{1{,}5\cdot10^3\cdot15^2}{2}+0=169\cdot10^3\,\text{Дж}=169\text{кДж} \ .$$
$$W_к^{\ *}=\frac{1{,}5\cdot10^3\cdot4{,}1^2}{2}+\frac{4\cdot10^3\cdot4{,}1^2}{2}=46{,}2\cdot10^3\,\text{Дж}=46{,}2\,\text{кДж} \ .$$

Тоді втрата енергії

$$\Delta W=W_к-W_к^{\ *}=169\cdot10^3-46{,}2\cdot10^3=123\cdot10^3\,\text{Дж}=123\text{кДж} \ .$$

1.4 ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Основні поняття і формули

1.4.1 Моментом інерції називається фізична величина, яка є мірою інертності тіла в обертальному русі.

• *Момент інерції матеріальної точки масою* m відносно нерухомої осі обертання

$$I=mr^2,$$

де m – маса точки; r – відстань від точки до осі обертання.

• *Момент інерції довільного твердого тіла:*

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2,$$

де r_i – відстань елемента маси Δm_i від осі обертання.

• *Момент інерції в інтегральній формі* (для тіл правильної геометричної форми):

$$I = \int r^2 dm.$$

Якщо тіло однорідне, тобто його густина ρ однакова по всьому об'єму, то

$$dm = \rho dV \quad \text{і} \quad I = \rho \int r^2 dV,$$

де V – об'єм тіла.

Моменти інерції деяких геометричних тіл наведено в таблиці 1.4.1.

Таблиця 1.4.1

Тіло	Вісь, відносно якої визначається момент інерції тіла	Формула моменту інерції тіла
Однорідний тонкий стрижень масою m і довжиною l	Проходить через центр тяжіння стрижня перпендикулярно до нього	$I = \frac{ml^2}{12}$
Однорідний тонкий стрижень масою m і довжиною l	Проходить через кінець стрижня перпендикулярно до нього	$I = \frac{ml^2}{3}$
Тонке кільце, обруч, труба радіусом R і масою m, маховик радіусом R і масою m	Проходить через центр тяжіння перпендикулярно до площини основи	$I = mR^2$
Круглий однорідний диск (циліндр) радіусом R і масою m	Проходить через центр тяжіння перпендикулярно до площини основи	$I = \frac{mR^2}{2}$
Однорідна куля масою m і радіусом R	Проходить через центр кулі	$I = \frac{2mR^2}{5}$

1.4.2 Теорема Штейнера: Момент інерції тіла відносно осі AA', яка не проходить через центр мас, дорівнює сумі моменту інерції відносно паралельної осі OO', яка проходить через центр мас, та добутку маси тіла на квадрат відстані між осями (рисунок 1.4.1).

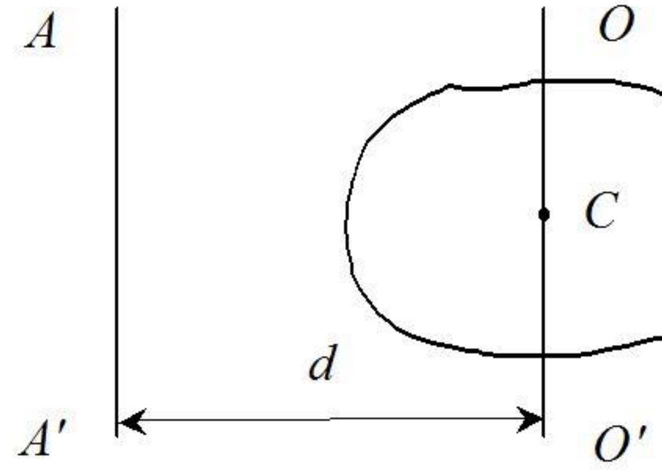


Рисунок 1.4.1

$$I = I_0 + md^2,$$

де I_0 – момент інерції цього тіла відносно осі OO', що проходить через центр мас тіла; d – відстань між паралельними осями; m – маса тіла.

1.4.3 Моментом імпульсу частинки відносно точки О називається вектор, який дорівнює векторному добутку радіус-вектора на вектор імпульсу тіла (рисунок 1.4.2).

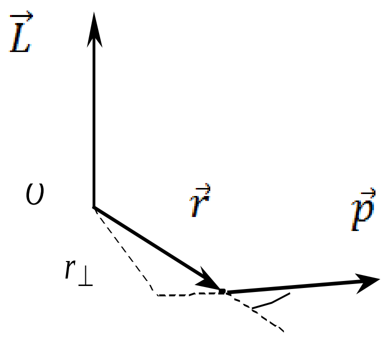


Рисунок 1.4.2

$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, або $\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}]$,
де r – радіус-вектор; $p = m\text{v}$ – імпульс тіла.

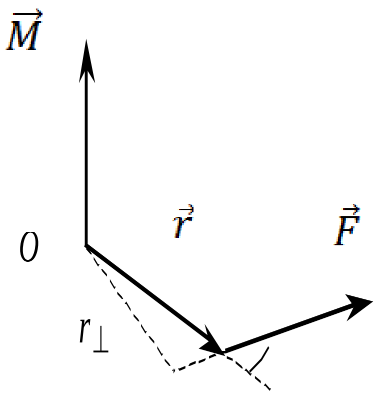
Модуль моменту імпульсу частинки

$$L = r\,p\sin\alpha = r_\perp m\text{v}.$$

Момент імпульсу тіла, що обертається відносно осі,

$$L = I\omega.$$

1.4.4 Моментом сили $\vec{F}$ *відносно полюса О* називається векторний добуток радіус-вектора $\vec{r}$ *на силу* $\vec{F}$ (рисунок 1.4.3).



$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right],$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений з точки O в точку прикладання сили.

Модуль моменту сили

$$M = r\,F\sin\,\alpha = r_\perp F\,,$$

Рисунок 1.4.3

де α – кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{F}$; $r_\perp = r\sin\alpha$ – *плече сили*.

Напрямок вектора моменту імпульсу та моменту сил визначається правилом правого гвинта.

1.4.5 Основне рівняння динаміки обертального руху відносно нерухомої осі

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

де $\vec{M}$– результуючий момент всіх діючих сил; $\vec{L}$ – вектор моменту імпульсу тіла.

У випадку постійного моменту інерції:

$$\overrightarrow{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}\,,$$

де ε – кутове прискорення; I – момент інерції тіла.

1.4.5 Закон збереження моменту імпульсу

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = const\,.$$

Закон збереження моменту імпульсу для одного тіла зі змінним моментом інерції

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2,$$

де I_1 *і* I_2 – початковий і кінцевий моменти інерції; ω_1 і ω_2 – початкова і кінцева кутові швидкості тіла.

1.4.6. Кінетична енергія тіла, яке здійснює обертальний рух,

$$W_к = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Кінетична енергія тіла, яке котиться без ковзання уздовж будь-якої площини,

$$W_к = \frac{m\text{v}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

де $\frac{m\text{v}^2}{2}$ – кінетична енергія поступального руху тіла; $\frac{I\omega^2}{2}$ – кінетична енергія обертального руху тіла навколо осі, що проходить через центр інерції.

1.4.7 Робота постійного моменту сили М, що діє на тіло, яке здійснює обертання,

$$A = M\varphi,$$

де φ – кут повороту тіла.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.4.1

На краю нерухомої лави Жуковського діаметром $D = 0{,}8$ м і масою $m_1 = 6$кг стоїть людина масою $m_2 = 60$кг. Людина піймала м'яч масою $m = 0{,}5$кг, що летить зі швидкістю $\text{v} = 5$м/c на неї. Траєкторія м'яча горизонтальна і проходить на відстані $\text{r} = 0{,}4$м від осі лави. З якою кутовою швидкістю ω почала обертатись лава?

Дано:	Розв'язання
$D = 0{,}8$ м $m_1 = 6$кг $m_2 = 60$кг $m = 0{,}5$кг $\mathrm{v} = 5$м$/c$ $\mathrm{r} = 0{,}4$м	Людина, що стоїть на нерухомій лаві Жуковського, являє собою замкнену систему. Коли людина спіймає м’яч, система почне обертатися. Із закону збереження моменту імпульсу $$L_1 = L_2,$$
ω-?	де $L_1 = m\mathrm{v}r$ – момент імпульсу м’яча, $L_2 = I\omega$– момент імпульсу системи.

Момент інерції системи

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

де I_1 – момент інерції лави Жуковського; I_2 – момент інерції людини; I_3 – момент інерції м’яча.

Припустимо, що лава Жуковського являє собою однорідний диск, людину і м'яч будемо розглядати як матеріальні точки, тоді

$$I_1 = \frac{m_1 R^2}{2}, \quad I_2 = m_2 R^2, \quad I_3 = mR^2,$$

де $R = \dfrac{D}{2}$ – радіус лави, а також відстань від людини до осі обертання.

Підставимо формули в закон збереження моменту імпульсу, отримуємо

$$m\mathrm{v}r = \left(\frac{m_1 R^2}{2} + m_2 R^2 + mR^2\right)\omega.$$

Звідки кутова швидкість

$$\omega = \frac{mvr}{\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m\right)R^2} = \frac{mvr}{\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m\right)\left(\frac{D}{2}\right)^2}.$$

Підставимо чисельні значення:

$$\omega = \frac{0,5 \cdot 5 \cdot 0,4}{(3 + 60 + 0,5)0,4^2} = \frac{2,5}{25,5} = 9,92 \cdot 10^{-2} \text{ рад/с}.$$

Приклад 1.4.2

Диск діаметром $D = 20\,\text{см}$ і масою $m = 2\,\text{кг}$ обертається навколо осі, яка проходить через його центр. Кут повороту диска змінюється з часом за законом $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $C = -2\,\text{рад/с}^2$. Визначити величину сили, прикладеної до обода диска.

Дано:
$D = 20\,\text{см} = 0,2\text{м}$
$m = 2\,\text{кг}$
$\varphi = A + Bt + Ct^2$
$C = -2\,\text{рад/с}^2$

$F - ?$

Розв'язання

Запишемо рівняння у вигляді $\varphi = -2t^2$.

Силу, прикладену до обода, можна знайти зі співвідношення

$F = M/R$, де R – плече сили.

Запишемо основне рівняння динаміки обертального руху:

$$M = I \cdot \varepsilon,$$

де $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ – кутове прискорення диску.

Знайдемо кутове прискорення $\varepsilon = \frac{d^2}{dt^2}(-2t^2) = -4\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

Запишемо формулу для моменту інерції диска:

$$I = \frac{1}{2}mR^2.$$

Підставимо кутове прискорення та момент інерції у формулу для сили:

$$F=\frac{M}{R}=\frac{-4\cdot mR^2/2}{R}=-2\cdot mR=-2\cdot m\frac{D}{2}=-mD.$$

Підставимо чисельні значення

$$\mathrm{F}=-0{,}2\cdot 2=-0{,}4\mathrm{Н}.$$

Приклад 1.4.3

Кулька масою $m=100\text{г}$, прив'язана до кінця нитки довжиною $l_1=1\text{м}$, обертається у горизонтальній площині з частотою $\nu=1\frac{\text{об}}{\text{с}}$. Нитку вкорочують по довжині до $l_2=0{,}5\text{м}$. Знайти частоту обертання після укорочення нитки? Яка робота буде здійснена для зменшення нитки.

Дано:	Розв'язання
$m=100\text{г}=0{,}1\text{кг}$ $l_1=1\text{м}$ $\nu_1=1\frac{\text{об}}{\text{с}}$ $l_2=0{,}5\text{м}$	Коли на тіло діють зовнішні сили, робота дорівнює зміні кінетичної енергії тіла при обертальному русі: $$A=\frac{I_1\omega_1^2}{2}-\frac{I_2\omega_2^2}{2},$$
$\nu_2-?$	

де $I_1=\frac{ml_1^2}{2}$ – момент інерції до зменшення нитки, $I_2=\frac{ml_2^2}{2}$ – момент інерції після зменшення нитки.

Циклічна частота обертання кульки на нитці довжиною l_1

$$\omega_1=2\pi\nu_1.$$

Циклічна частота обертання кульки на нитці довжиною l_2

$$\omega_2=2\pi\nu_2.$$

Із закону збереження моменту імпульсу

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 .$$

Підставимо циклічні частоти у формулу закону збереження моменту імпульсу, отримуємо

$$\frac{ml_1^2 \cdot 2\pi\nu_1}{2} = \frac{ml_2^2 \cdot 2\pi\nu_2}{2} .$$

Звідки $$l_1^2 \cdot \nu_1 = l_2^2 \cdot \nu_2 \Rightarrow \nu_2 = \nu_1\left(\frac{l_1^2}{l_2^2}\right).$$

Обчислимо частоту обертання після укорочення нитки:

$$\nu_2 = 1\cdot\left(\frac{1}{0,5}\right)^2 = 4\frac{\text{об}}{\text{с}} .$$

$A = \dfrac{ml_1^2}{4}(2\pi\nu_1)^2 - \dfrac{ml_2^2}{4}(2\pi\nu_2)^2$, звідки $A = m\pi^2(l_1^2 \cdot \nu_1^2 - l_2^2 \cdot \nu_2^2)$.

Визначимо роботу, яку необхідно здійснити для укорочення нитки:

$$A = 0,1\cdot 3,14^2(1^2 \cdot 1^2 - 0,5^2 \cdot 4^2) = -2,96\,\text{Дж}.$$

Приклад 1.4.4

Однорідний циліндр скочується з похилої площини висотою $h = 90$ см. Яку лінійну швидкість матиме центр циліндра в той момент, коли він скотиться з площини?

Дано:	Розв'язання
$h = 90$ см = 0,9 м	На висоті h циліндр має потенційну енергію: $$W_p = mgh,$$ де m – маса вантажу, $g = 9,8\,\text{м/с}^2$ – прискорення вільного падіння.
$v - ?$	

При скочуванні циліндра з похилої площини ця енергія переходить в кінетичну енергію поступального руху $W_к = \frac{m\text{v}^2}{2}$, і кінетичну енергію обертального руху: $W_{оберт} = \frac{I\omega^2}{2}$.

Із закону збереження енергії:

$$mgh = \frac{m\text{v}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Момент інерції однорідного циліндра (однорідного диска):

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

Кутова швидкість пов'язана з лінійною співвідношенням:

$$\omega = \frac{\text{v}}{R}.$$

Підставимо формулу зв’язку швидкостей у формулу закону збереження енергії, отримаємо

$$mgh = \frac{m\text{v}^2}{2} + \frac{mR^2}{2}\frac{(\text{v}/R)^2}{2}.$$

Зробимо скорочення:

$$gh = \frac{\text{v}^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{\text{v}^2}{2} = \frac{3}{4}\text{v}^2, \text{ звідки } \text{v} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}.$$

Підставимо числові значення:

$$\text{v} = 2\sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 0{,}9}{3}} = 3{,}44\,\text{м/с}.$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ
з теми «Механіка»

1 Залежність координати x тіла (в метрах) від часу має такий вигляд: $x(t) = -\mathrm{t}^2 + 18t - 5,$. Знайти шлях тіла від часу t_1 = 8 с до t_2 = 11 с.

2 Рух матеріальної точки задано рівнянням $S = A + Bt + \mathrm{C}t^2 + Dt^3$, $C = 0{,}14\,\text{м/с}^2$ і $D = 0{,}01\,\text{м/с}^3$. За який час після початку руху прискорення точки буде дорівнювати 1 м/с.

3 Поїзд, що рухається зі швидкістю $\mathrm{v} = 10\,\text{м/с}$, почав гальмувати і зупинився через t = 20 с. Знайти довжину гальмівного шляху.

4 Тіло рухається з постійним прискоренням $a = 2\,\text{м/с}^2$. За який час тіло пройде шлях S = 28 м, якщо початкова швидкість тіла дорівнює $\mathrm{v}_0 = 3\,\text{м/с}$?

5 Визначити нормальне прискорення точки в момент часу 3 с, що обертається за законом $\varphi(t) = 2t^3 + t^2 - 25$, якщо відстань до осі обертання дорівнює 50 см.

6 Точка рухається по колу радіусом 4 м. Закон руху записується у вигляді $\varphi = 7t - 2t^2$. Визначити момент часу, для якого нормальне прискорення дорівнює 36 м/с^2.

7 Тіло підкинули вертикально вгору зі швидкістю 25 м/с. На яку максимальну висоту підніметься тіло? Вважати, що $g = 10\,м/с^2$.

8 Локомотив тягне состав масою 5000 т зі швидкістю 72 км/год. Визначити потужність двигунів локомотива, якщо коефіцієнт опору руху становить 0,005. Вважати, що $g = 10\,\text{м/с}^2$.

9 Після того як куля застрягла у маятнику, він піднявся на 20 см. Знайти швидкість кулі перед зіткненням, якщо маса маятника 490 г, маса кулі 10 г.

10 Знайти час, за який постійна сила в 3 кН, що прикладена к ободу шківа радіусом 5 см розкручує систему від 2 до 30 об/с. Момент інерції системи складає $1{,}5\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$.

2 ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ ТА ТЕРМОДИНАМІКИ

2.1 Молекулярно-кінетична теорія (МКТ) ідеальних газів

Маса і розміри молекул. Молярна та молекулярна маси. Кількість речовини. Концентрація молекул. Закон Авогадро. Основне рівняння МКТ.

2.2 Ідеальний газ

Модель ідеального газу. Закони ідеального газу. Рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона – Менделєєва). Максвелівський розподіл молекул ідеального газу за швидкостями та енергіями теплового руху.

2.3 Закони термодинаміки

Внутрішня енергія ідеального газу. Робота газу. Перший закон термодинаміки. Теплоємність. Застосування першого закону термодинаміки до ізопроцесів. Адіабатичний процес. Круговий процес (цикл). Оборотні та необоротні процеси. Другий закон термодинаміки. Цикл Карно. Коефіцієнт корисної дії (ККД) теплової машини.

2.4 Явища перенесення

Середня кількість зіткнень і середня довжина вільного пробігу молекул. Явища перенесення. Теплопровідність. Дифузія. Внутрішнє тертя.

2.1 МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ ІДЕАЛЬНИХ ГАЗІВ

Основні поняття і формули

Молекулярна фізика вивчає властивості тіл, встановлюючи зв'язок макроскопічних параметрів з фізичними характеристиками мікрочастинок, з яких складається речовина.

2.1.1 Відносно молекулярна маса – відношення маси молекули m_0 до $\frac{1}{12}$ маси атома карбону.

$$M_r = \frac{m_0}{{}^1\!/_{12}\, m_C}.$$

Відносно молекулярна маса в системі SI – безрозмірна величина.

2.1.2 Молярна маса – маса одного моля. Молярна маса дорівнює відношенню маси речовини до кількості молів у ньому.

$$\mu = \frac{m}{\nu}, \qquad [\mu] = \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

2.1.3 Число Авогадро показує, що в одному молі довільної речовині міститься $6{,}02 \cdot 10^{23}$ молекул.

2.1.4 Закон Авогадро: При однакових температурах і тиску молі будь-яких газів займають однакові об'єми. За нормальних умов ($T_0 = 273\text{К}, P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\,\text{Па}$) об'єм моля будь-якого газу дорівнює 22,4 л.

2.1.5 Кількість речовини

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{N \cdot m_{мол}}{N_A \cdot m_{мол}} = \frac{m}{\mu},$$

де N - кількість молекул речовини, m – маса речовини, $m_{мол}$ – маса молекули.

$$[\nu] = \text{моль}.$$

2.1.6 Маса молекули – це відношення молярної маси до кількості молекул в одному молі, тобто до числа Авогадро.

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A}.$$

Також масу молекули можна знайти з формул

$$m_0 = \frac{m}{N}, \text{ або } m_0 = \frac{\rho}{n},$$

де m – маса речовини; N – кількість молекул; ρ – густина речовини.

$$[m_0] = \text{кг}.$$

2.1.7 Концентрація – кількість молекул в одиниці об'єму.

$$n = \frac{N}{V}, \quad [n] = \text{м}^{-3}.$$

2.1.8 Температура – міра середньої кінетичної енергії теплового руху молекул.

Зв'язок між шкалами Цельсія і Кельвіна

$$T(K) = t(°C) + 273.$$

2.1.9 Закон Дальтона: Загальний тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків складових суміші, тобто тисків, які б мала кожна частина суміші, займаючи весь об'єм.

$$P = \sum_{i=1}^{k} P_i,$$

де P_i – парціальний тиск; i – компоненти суміші, k – кількість компонентів.

2.1.10 Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу встановлює залежність тиску ідеального газу від маси його молекул, концентрації та їх середньої квадратичної швидкості.

$$P = \frac{1}{3} m_0 n \overline{\text{v}^2},$$

де P – тиск газу; m_0 – маса молекули; n – концентрація молекул; v^2 – середній квадрат швидкості молекул.

$$P = \frac{2}{3} n \overline{E},$$

де $\overline{E}$ – середня кінетична енергія поступального руху молекули.

$$[P] = Па.$$

2.1.11 Закон Больцмана (рівномірний розподіл енергії за ступенями свободи молекул): На кожен поступальний і обертальний ступені свободи молекули в середньому припадає кінетична енергія $\frac{1}{2}$ *kT*, а на кожен коливальний ступінь – у середньому *kT*.

2.1.12 Середня енергія молекули

$$\overline{E} = \frac{i}{2}kT,$$

де $i = i_{пост} + i_{об} + 2i_{кол}$ – число ступенів свободи молекули; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – стала Больцмана; T – термодинамічна температура газу.

$$[E] = \text{Дж}.$$

2.1.13 Середня квадратична, середня арифметична і найбільш імовірна швидкості молекул:

$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ – середньоквадратичне значення швидкості;

$\langle v_{ар} \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ – середньоарифметичне значення швидкості;

$\langle v_{і} \rangle = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ – найбільш імовірне значення швидкості.

Приклади розв’язання задач

Приклад 2.1.1

Кільце масою $m_{сплава}=1,2$ г зроблено з 14-каратного золота. Скільки атомів чистого золота міститься у кільці?

Дано:	SI	Розв'язання
Au – золото $m_{сплава}=1,2$г 14-каратний сплав	 $=1,2\cdot10^{-3}$кг	У каратах виміряється не тільки маса, але і чистота золота. Причому стовідсоткова чиста речовина приймається за 24 карати.
$N_{золота}-?$		

Тобто $\dfrac{m_{золота}}{m_{сплава}}=\dfrac{14}{24}=0,583$ – це відповідає золоту 583 проби.

Тоді маса чистого золота складає

$$m_{золота}=0,583\cdot m_{сплава}.$$

Із співвідношення $\nu=\dfrac{m}{\mu}=\dfrac{N}{N_A}$ маємо $N=\dfrac{m\cdot N_A}{\mu}$,

де $\mu(Au)=197\dfrac{\text{г}}{\text{моль}}=0,197\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярна маса золота.

Звідки $N_{золота}=\dfrac{0,583\cdot m_{сплава}\cdot N_A}{\mu}$.

Підставимо числові значення:

$$N_{золота}=\frac{0,583\cdot1,2\cdot10^{-3}\cdot6,02\cdot10^{23}}{0,197}=21,4\cdot10^{20}.$$

Приклад 2.1.2

Знайти середню кінетичну енергію обертального руху однієї молекули водню (H_2) при температурі $T=300$К, а також сумарну кінетичну енергію обертального руху всіх молекул водню, якщо кількість речовини $\nu=0,5\,моль$.

Дано:	Розв'язання
$H_2 - водень$ $\nu = 0{,}5$моль $T = 300$К	За законом рівнорозподілу енергії за ступенями свободи $$E_{оберт} = \frac{i}{2}kT,$$
$E_{оберт} - ?$ $E_к - ?$	де $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постійна Больцмана.

Оскільки молекула водню H_2 – двохатомна, то вона має 5 ступенів свободи: 3 ступені свободи поступального руху та 2 ступені свободи обертального руху, тобто $i = 2 + 3 = 5$.

Тому середня кінетична енергія обертального руху молекули водню виражається формулою

$$E_{оберт} = \frac{2}{2}kT = kT.$$

Підставимо числові значення:

$$E_{оберт} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 4{,}14 \cdot 10^{-21}\text{Дж}.$$

Сумарна кінетична енергія руху всіх молекул води

$$E_к = \frac{i}{2}\nu RT.$$

Тоді кінетична енергія молекули водню буде дорівнювати

$$E_к = \frac{5}{2}\nu RT.$$

Підставимо числові значення:

$$E_к = \frac{5}{2}0{,}5 \cdot 8{,}31 \cdot 300 = 3116{,}25\text{Дж} = 3{,}12\text{кДж}.$$

Приклад 2.1.3

Кисень масою $m = 2$ г займає об'єм $V = 1$ л при температурі $t = 47\ °\text{C}$. Знайти середню кінетичну енергію поступального руху однієї молекули, кількість молекул газу, концентрацію, тиск газу на стінки посудині, середню квадратичну швидкість молекул.

Дано:	SI
$O_2 - кисень$	
$m = 2$г	$= 2 \cdot 10^{-3}$кг
$V = 1$л	$= 10^{-3}$м^3
$t = 47°$C	$T = 320$К
$\overline{E} - ?$ $W - ?$ $N - ?$ $n - ?$	

Розв'язання

Енергія поступального руху молекули кисню

$$\overline{E} = \frac{3}{2}kT,$$

де $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – стала Больцмана, T – термодинамічна температура газу.

Підставимо числові значення:

$$\overline{E} = \frac{3}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 320 = 6{,}624 \cdot 10^{-21}\ \text{Дж}.$$

Кількість молекул N можна знайти зі співвідношення

$$\frac{N}{N_A} = \frac{m}{\mu},\ \text{звідки}\ N = \frac{m}{\mu}N_A\ ,$$

де $\mu(O_2) = 2 \cdot 16\,\frac{\text{г}}{\text{моль}} = 32 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярна маса кисню.

Підставимо числові значення:

$$N = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 3{,}76 \cdot 10^{22}.$$

Сумарна кінетична енергія поступального руху всіх молекул

$$W = \overline{E} \cdot N = 6{,}624 \cdot 10^{-21} \cdot 3{,}763 \cdot 10^{22} = 249\ \text{Дж}.$$

Концентрація молекул газу

$$n = \frac{N}{V} = \frac{3{,}763 \cdot 10^{22}}{10^{-3}} = 3{,}763 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

За основним рівнянням молекулярної кінетичної теорії

$$P = nkT,$$

звідки $P = 3{,}763 \cdot 10^{25} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 320 = 1{,}66 \cdot 10^{5}\,\text{Па}$.

Середньоквадратична швидкість молекули газу

$$\langle \text{v}_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

де $R = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – універсальна газова стала.

$$\langle \text{v}_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 320}{32 \cdot 10^{-3}}} = \sqrt{249300} = 499 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2.2 ІДЕАЛЬНИЙ ГАЗ

Основні поняття і формули

Ідеальний газ – це газ, молекули якого є матеріальними точками, а їх взаємодія носить характер абсолютно пружного удару.

Стан деякої маси газу визначається трьома термодинамічними параметрами: тиском, об’ємом і температурою.

2.2.1 Рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона-Менделєєва) встановлює залежність між параметрами стану даної маси ідеального газу – тиском, об’ємом і температурою.

$$PV = \frac{m}{\mu} RT,$$

де $R = k \cdot N_A = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – універсальна газова стала.

Рівняння стану ідеального газу записав Д. І. Менделєєв з об'єднаного газового закону, який знайшов Б. Клапейрон.

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

2.2.2 Ізопроцес – це рівноважний процес, в якому один з параметрів залишається сталим.

Для ідеального газу справедливі закони:

1 *Ізотермічний процес. Закон Бойля-Маріотта:* Для даної маси газу при постійній температурі ($T = const$) добуток тиску газу на його об'єм є величиною сталою.

$$PV = const.$$

На діаграмі в координатах P,V цей процес зображується гіперболою, що називається *ізотермою* (рисунок 2.2.1).

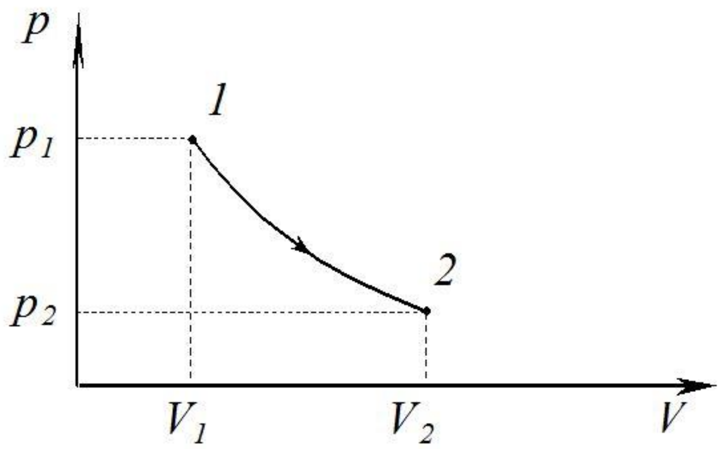


Рисунок 2.2.1

2 *Ізобарний процес. Закон Гей-Люссака:* Об'єм даної маси ідеального газу при постійному тиску ($P = const$) лінійно змінюється із температурою.

$$\frac{V}{T} = const.$$

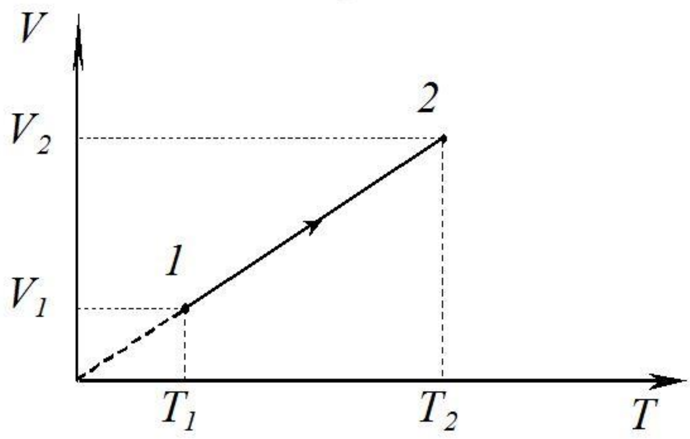


Рисунок 2.2.2

На діаграмі в координатах V,T цей процес зображується прямою, що називається *ізобарою* (рисунок 2.2.2)

3 *Ізохорний процес. Закон Шарля:* Тиск даної маси ідеального газу при постійному об'ємі лінійно змінюється із температурою.

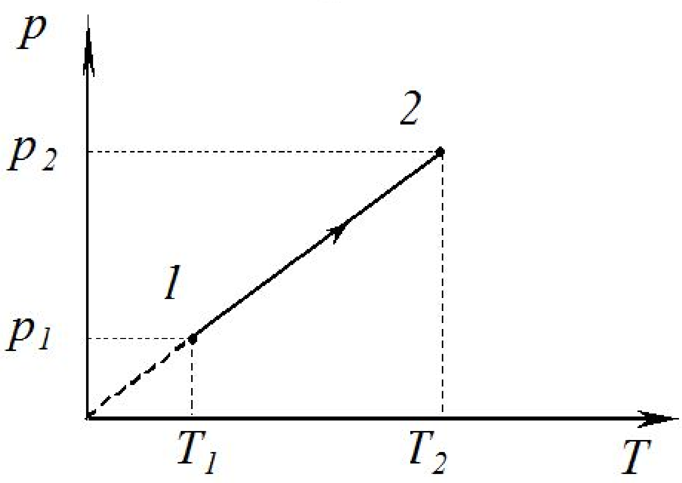


Рисунок 2.2.3

$$\frac{P}{T} = const \quad .$$

На діаграмі в координатах P,T цей процес зображується прямою, що називається ізохорою (рисунок 2.2.3).

Приклади розв'язання задач

Приклад 2.2.1

Азот масою $m = 2$ г при тиску $P = 0{,}2$ МПа займає об'єм $V = 820\,\text{см}^3$. Знайти температуру цього газу за Цельсієм.

Дано:	SI
$N_2 - азот$	
$P = 0{,}2$ МПа	$= 0{,}2 \cdot 10^6$ Па
$V = 820\,\text{см}^3$	$= 820 \cdot 10^{-6}\,\text{м}^3$
$t^{\circ}C - ?$	

Розв'язання

Запишемо рівняння стану ідеального газу:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT,$$

звідки

$$T == \frac{PV\mu}{Rm},$$

де $R = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$л – універсальна газова стала; $\mu(N_2) = 2 \cdot 14 \frac{\text{г}}{\text{моль}} = 28 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярна маса азоту.

Підставимо числові значення:

$$T = \frac{0{,}2 \cdot 10^6 \cdot 820 \cdot 10^{-6} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31} = 276 \text{ К}.$$

Знайдемо температуру за Цельсієм:

$$t^{\circ} = 276 - 273 = 3^{\circ} C.$$

Приклад 2.2.2

Газ було стиснуто ізотермічно від об’єму $V_1 = 8$ л до об’єму $V_2 = 6$ л. Тиск при цьому збільшився на $\Delta P = 4$ кПа. Знайти початковий тиск газу.

Дано:	SI
$T = const$	
$V_1 = 8$ л	$= 8 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^3$
$V_2 = 6$ л	$= 6 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^3$
$\Delta P = 4$кПа	$= 4 \cdot 10^3$ Па
$P_1 - ?$	

Розв'язання

За умови задачі газ стиснуто ізотермічно $T = const$.

Запишемо закон Бойля-Маріотта:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2,$$

де P_1 – початковий тиск; P_2 – тиск наприкінці процесу.

Зміна тиску $\Delta P = P_2 - P_1$, звідки $P_2 = \Delta P + P_1$. Підставимо P_2 у формулу закону Бойля-Маріотта, отримуємо

$$P_1 V_1 = (\Delta P + P_1) V_2 .$$

Зробимо спрощення: $P_1 V_1 = \Delta P V_2 + P_1 V_2$,

$$P_1 (V_1 - V_2) = \Delta P V_2, \text{ звідки } P_1 = \frac{\Delta P V_2}{V_1 - V_2} .$$

Підставимо числові значення:

$$P_1 = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-3} - 6 \cdot 10^{-3}} = 12 \cdot 10^3 = 12 \text{ кПа} .$$

Приклад 2.2.3

Вуглекислий газ масою $m = 2$ г ізобарно стискають в 2,5 рази, потім його об’єм ізотермічно збільшується на 70 %. Знайти тиск, температуру й об'єм газу в усіх станах. Початкові значення температури та об'єму дорівнюють $t_1^\circ = 130^\circ$C і $V_1 = 75$ л. Зобразити графік процесу в осях (P, V), (P, T), (T,V).

Дано:	SI	Розв'язання
CO_2 – вуглекислий газ $m = 2$ г $V_1 = 75$ л $t_1^\circ = 130^\circ$C $V_2 = V_1/2{,}5$ $P_1 = P_2,\ T_2 = T_3$ $V_3 = 1{,}7\,V_2$	 $= 2 \cdot 10^{-3}$м^3 $= 75 \cdot 10^{-3}$м^3 $= 403$К	Оскільки процес $1 \to 2$ ізобарний, то із закону Гей-Люссака $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, звідки $T_2 = \frac{T_1 V_2}{V_1}$.
$P_i.T_i.V_i - ?$ $i = 1,2,3$		Для ізотермічного процесу $2 \to 3$ $T_2 = T_3$, із закону Бойля-

Маріотта

$$P_2V_2 = P_3V_3.$$

Знайдемо тиск наприкінці процесу:

$$P_3 = \frac{P_2V_2}{V_3}.$$

Початковий тиск P_1 знайдемо з рівняння Клапейрона-Менделєєва:

$$P_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1,$$

звідки $P_1 = \frac{m}{\mu V_1}RT_1$, де $R = 8{,}31\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – універсальна газова стала, $\mu(CO_2) = (12 + 2\cdot 16)\frac{\text{г}}{\text{моль}} = 44\cdot 10^{-3}\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярна маса вуглекислого газу.

Підставимо числові значення:

$$P_1 = \frac{80\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}31\cdot 403}{44\cdot 10^{-3}\cdot 75\cdot 10^{-3}} = 81{,}19\cdot 10^{3}\,\text{Па} = 81{,}19\,\text{кПа}.$$

З умови задачі: $V_2 = V_1/2{,}5$, отримуємо

$$V_2 = \frac{75\cdot 10^{-3}}{2{,}5} = 30\cdot 10^{-3}\,\text{м}^3 = 30\,\text{л}.$$

Знайдемо температуру T_3:

$$T_3 = T_2 = \frac{T_1V_2}{V_1}.$$

Підставимо числові значення при умові $V_2 = V_1/2{,}5$:

$$T_3 = T_2 = \frac{403\cdot V_1/2{,}5}{V_1} = 403/2{,}5 = 161\,\text{К}.$$

З умови задачі об’єм у третьому стані

$$V_3 = 1{,}7\,V_2 = 1{,}7 \cdot 30 = 51\,\text{л}\,.$$

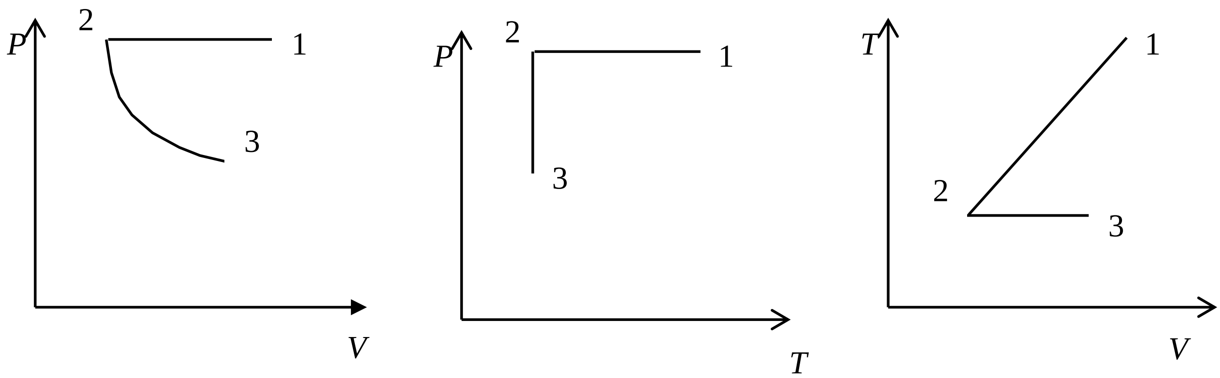
Знайдемо тиск у третьому стані:

$$P_3 = \frac{P_2 V_2}{V_3}\quad .$$

Підставимо числові значення:

$$P_3 = \frac{81{,}19 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{51 \cdot 10^{-3}} = 4{,}78 \cdot 10^4\,\text{Па}\,.$$

Зобразити графік процесу в осях (P, V), (P, T), (T,V) (рисунок 2.2.4).



Приклад 2.2.4

Сірчистий газ (двоокис сірки SO_2) при температурі $t_1^{\circ} = 27^{\circ}\text{C}$ займає об’єм $V = 25\,\text{л}$ і створює тиск $P = 150\,\text{кПа}$. Знайти щільність газу, а також його масу.

Дано:	SI	Розв'язання
SO_2 – двоокис сірки		Густина речовини визначається з формули
$t_1^{\circ} = 27^{\circ}\mathrm{C}$	$= 25\cdot 10^{-3}\,\mathrm{м}^3$	$$\rho = \frac{m}{V}.$$
$V = 25$ л	$= 150\cdot 10^{3}\,\mathrm{Па}$	
$P = 150\,\mathrm{кПа}$		
$\rho, m - ?$		

Запишемо рівняння стану ідеального газу:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT.$$

звідки тиск $P = \frac{1}{\mu}\frac{m}{V}RT$.

Враховуючи формулу для густини, отримуємо

$$P = \frac{\rho RT}{\mu}, \text{ звідки } \rho = \frac{P\mu}{RT},$$

де $\mu(SO_2) = (32 + 2\cdot 16)\frac{\text{г}}{\text{моль}} = 64\cdot 10^{-3}\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярна маса двоокисі сірки.

Підставимо числові значення:

$$\rho = \frac{150\cdot 10^{3}\cdot 64\cdot 10^{-3}}{8{,}31\cdot 300} = 3{,}85\,\text{кг}/\text{м}^3.$$

Масу речовини знайдемо за формулою

$$m = \rho\cdot V.$$

Підставимо числові значення:

$$m = 3{,}85\cdot 25\cdot 10^{-3} = 96{,}3\cdot 10^{-3}\,\text{кг} = 96{,}3\,\text{г}.$$

2.3 ЗАКОНИ ТЕРМОДИНАМІКИ

Основні поняття і формули

Термодинаміка вивчає загальні властивості макроскопічних систем, що знаходяться у стані термодинамічної рівноваги, і процеси переходів між цими станами.

2.3.1 Внутрішня енергія ідеального газу дорівнює сумі кінетичних енергій всіх молекул, оскільки взаємодія між молекулами відсутня:

- для одного моля газу

$$U_\mu = \frac{i}{2} kTN_A = \frac{i}{2} RT, \qquad [U] = \text{Дж};$$

- для будь-якої маси газу

$$U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} RT,$$

де i – число ступенів свободи молекули, μ – молярна маса газу.

2.3.2 Числом ступенів свободи тіла називається найменша кількість координат, що повністю визначають положення його в просторі.

2.3.3 Кількість теплоти – це міра зміни внутрішньої енергії, яка відбувається без здійснення механічної роботи.

2.3.4 Теплоємністю тіла ($C_{тіла}$) називається величина, що дорівнює кількості теплоти, яку треба передати тілу, щоб збільшити його температуру на 1К.

$$C_{тіла} = \frac{\delta Q}{dT}, \qquad [C_{тіла}] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

- *Питома теплоємність речовини* – кількість теплоти, що необхідна для нагрівання 1кг речовини на 1К.

$$c = \frac{dQ}{m \cdot dT}, \qquad [c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

• *Молярна теплоємність* – кількість теплоти, що необхідна для нагрівання одного моля речовини на 1К.

$$C_\mu = \frac{dQ}{\nu\, dT}, \qquad [C_\mu] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

• Співвідношення між питомою та молярною теплоємностями:

$$c = \frac{C}{\mu},$$ де μ – молярна маса речовини.

2.3.5 Рівнянням Майєра показує, що молярна теплоємність при постійному тиску більша за теплоємність при постійному об'ємі на величину R- універсальної газової сталої.

$$C_p = C_V + R,$$

де $C_V = \frac{i}{2}R$ і $C_p = \frac{i+2}{2}R$, i – число ступенів свободи молекули.

2.3.6 Перший закон термодинаміки: Кількість теплоти δQ, переданої системі, іде на збільшення внутрішньої енергії системи та на здійснення системою роботи над зовнішніми тілами.

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

де δQ – кількість теплоти, що підводиться до термодинамічної системи; dU – зміна внутрішньої енергії системи; δA – робота, виконана системою проти зовнішніх сил.

2.3.7 Застосування першого закону термодинаміки до найпростіших термодинамічних процесів:

• *ізохорний процес* ($V = const$). Оскільки $dV = 0$, то $\delta A = 0$, тобто газ не виконує роботи.

$$dQ = dU.$$

Вся теплота, що передається газу при постійному об'ємі, іде на збільшення його внутрішньої енергії, тобто на нагрівання всієї маси газу.

Для довільної маси газу

$$dQ = dU = \frac{m}{\mu} C_V dT; \qquad \Delta U = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T.$$

• *ізобарний процес* ($P = const$). В ізобарному процесі при передачі газу масою m кількості теплоти δQ його внутрішня енергія зростає на величину dU і він виконує роботу A.

$$\delta Q = dU = \frac{m}{\mu} C_V dT + PdV ,$$

де $dU = \frac{m}{\mu} C_V \ dT$ *або* $\Delta U = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1)$.

Робота, виконана газом при ізобарному процесі:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV = P(V_2 - V_1) \quad \text{або} \quad A = \frac{m}{\mu} R\,(T_2 - T_1);$$

• *ізотермічний процес* ($T = const$). Оскільки dT = 0, то в ізотермічному процесі внутрішня енергія dU = 0. Тому з першого закону термодинаміки виходить, що і вся кількість теплоти, передана газу, іде на виконання роботи проти зовнішніх сил.

$$\delta Q = PdV .$$

Робота при ізотермічному розширенні маси газу

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{P_1}{P_2} .$$

2.3.8 Адіабатний процес – це процес, що відбувається без теплообміну між фізичною системою і зовнішнім середовищем, тобто $\delta Q = 0$ (рисунок 2.3.1).

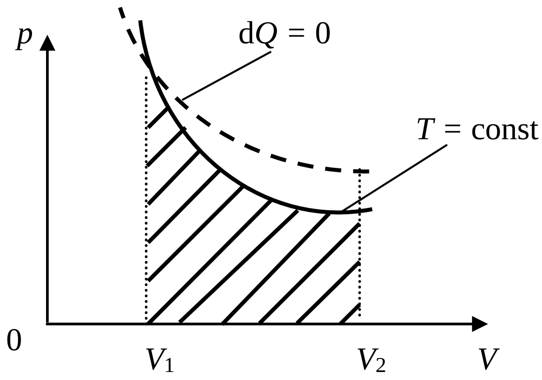


Рисунок 2.3.1

Тому з першого закону термодинаміки виходить, що зовнішня робота виконується системою за рахунок зміни внутрішньої енергії системи.

$$\delta A = -dU.$$

Знак «мінус» означає, що позитивна робота виконується при зменшенні внутрішньої енергії.

Адіабатний процес описується рівнянням Пуассона:

$$PV^{\gamma} = const,$$
$$TV^{\gamma - 1} = const,$$

або $\quad T^{\gamma} P^{1-\gamma} = const, \quad або \quad T\,P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const,$

де $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V} = \dfrac{c_p}{c_V} = \dfrac{i+2}{i}$ – стала адіабати (коефіцієнт Пуассона).

Робота при адіабатному процесі

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\lambda - 1}\right) = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\lambda - 1}\right), \text{ де } P_1 V_1 = \frac{m}{\mu}\, RT_1 .$$

2.3.9 Другий закон термодинаміки: Неможливий процес, єдиним результатом якого є перетворення теплоти, одержаної від нагрівача, в еквівалентну їй роботу.

2.3.10 Робота A, що здійснюється двигуном, дорівнює різниці кількості теплоти Q_1, яку газ отримує від нагрівача, і кількості теплоти Q_2, яку віддає холодильнику.

$$A = Q_1 - Q_2 .$$

2.3.11 Коефіцієнт корисної дії (ККД) – відношення роботи, до кількості теплоти, отриманої від нагрівача.

$$\eta = \frac{A}{Q_1}100\%, \quad \text{або} \quad \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}100\%.$$

2.3.12 Цикл Карно – оборотний круговий процес, що складається з двох ізотерм та двох адіабат.

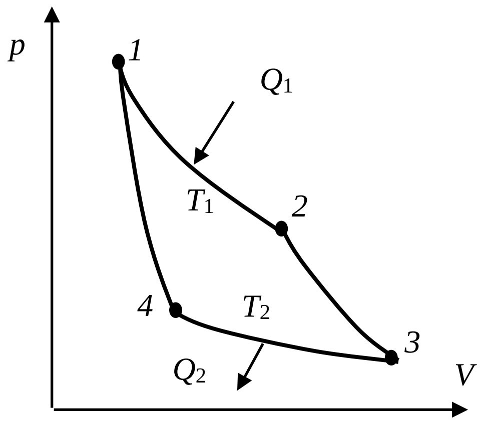


Рисунок 2.3.2

Цикл Карно зображено на рисунку 2.3.2:

1-2 – ізотерма розширення;
2-3 – адіабата розширення;
3-4 – ізотерма стискування;
4-1 – адіабата стискування.

Формула ККД цикла Карно, має такий вигляд:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}100\%,$$

де T_1 – абсолютна температура нагрівача, T_2 – абсолютна температура холодильника.

Приклади розв'язання задач

Приклад 2.3.1

Чадний газ (CO) у кількості $\nu = 2\text{моля}$ адіабатично розширюється, при цьому його температура зменшується на $\Delta T = 50\,°\text{C}$, а потім його тиск ізохорно збільшується і стає на 30 % більше первинного. Знайти тиск, температуру й об'єм газу в кінцевому стані. Початковий тиск газу складає $P_1 = 4\,\text{МПа}$, об'єм дорівнює $V_1 = 2\text{ л}$.

Дано:	SI	Розв'язання
CO – чадний газ $\nu = 2$моль $\Delta t = 50°$C $P_3 = 1{,}3P_1$ $V_2 = V_3$ $P_1 = 4$МПа $V_1 = 2\text{л} = 2\cdot 10^{-3}\,\text{м}^3$	 $\Delta T = 50$К $= 4\cdot 10^{-6}$Па $= 2\cdot 10^{-3}\text{м}^3$	З рівняння Клапейрона-Менделєєва $PV = \frac{m}{\mu}RT$ Початкова температура газу $T_1 == \frac{P_1V_1}{\nu\, R}$,
$P_3, T_3, V_3 - ?$		

де $R = 8{,}31\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – універсальна газова стала.

Підставимо числові значення:

$$T_1 = \frac{4\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^{-3}}{2\cdot 8{,}31} = 481\,\text{К}.$$

Температура в другому стані

$$T_2 = T_1 - \Delta T = 481 - 50 = 431\,\text{К}.$$

Для знаходження тиску та об’єму в другому стані запишемо рівняння Пуассона:

$$P_1^{1-\gamma}T_1^{\gamma} = P_2^{1-\gamma}T_2^{\gamma},\ \text{або}\ P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma},$$

де $\gamma = 1 + \frac{2}{i}$ – показник адіабати, i – число ступенів свободи молекули газу.

Оскільки CO – двохатомна молекула i =5,
тоді показник адіабати $\gamma = 1 + \frac{2}{5} = 1{,}4$.
Знайдемо тиск у другому стані:

$$P_2 = P_1\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_1\left(\frac{T_1}{T_1 - \Delta T}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_1\left(\frac{1}{1-\Delta T/T_1}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$

Підставимо вираз для T_1, маємо

$$P_2 = P_1\left(\frac{1}{1-\Delta T \nu R/P_1 V_1}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_1\left(\frac{1}{1-\Delta T/T_1}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$

Підставимо числові значення:

$$P_2 = 4\cdot 10^6\left(\frac{1}{1-50/481}\right)^{\frac{1,4}{1-1,4}} = 4\cdot 10^6 \cdot 1{,}116^{-3,5} = 2{,}72\cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Об'єм газу в другому стані

$$V_2 = V_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Підставимо числові значення:

$$V_2 = 2\cdot 10^{-3}\left(\frac{4}{2{,}72}\right)^{\frac{1}{1,4}} = 2\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}47^{0,714} = 2{,}63\cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

З умови задачі $V_2 = V_3$, звідки випливає, що об'єм наприкінці процесу

$$V_3 = 2{,}63\cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Тиск наприкінці процесу збільшується на 30 %, тобто

$$P_3 = 1{,}3P_1 = 1{,}3\cdot 4\cdot 10^6 = 5{,}2\cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Температуру газу наприкінці процесу знайдемо із закону Шарля:

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_3}{T_3}, \text{ звідки } T_3 = T_2 \frac{P_3}{P_2}.$$

Підставимо числові значення $T_3 = 431 \frac{5,2}{2,72} = 824 \text{ К}$.

Приклад 2.3.2

Газ здійснює процес, показаний на рисунку 2.3.3. Знайти роботу, яку виконав газ за два процеси.

Дано:	SI
$V_1 = 2$ дм^3	$= 2 \cdot 10^{-3}$ м^3
$P_1 = 0,6$ МПа	$= 6 \cdot 10^5$ Па
$T_1 = T_2$	
$V_2 = 6$ дм^3	$= 6 \cdot 10^{-3}$ м^3
$P_2 = 0,2$ МПа	$= 2 \cdot 10^5$ Па
$V_3 = 9$ дм^3	$= 9 \cdot 10^{-3}$ м^3
$P_3 = 0,7$ МПа	$= 7 \cdot 10^5$ Па
$A_{1.3}$ – ?	

Розв'язання

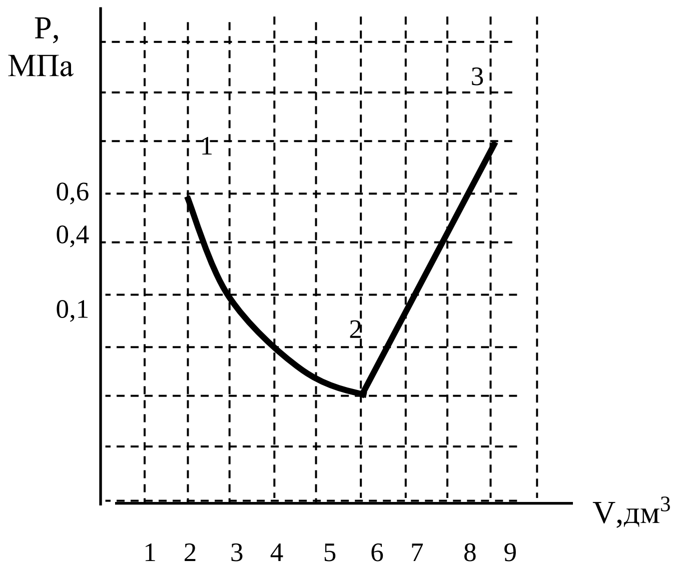


Рисунок 2.3.3

Робота визначається як площа під кривою, тобто $A_{1.3} = A_{1.2} + A_{2.3}$.

З умови задачі процес $(1 \to 2)$ ізотермічний, робота газу при цьому процесі

$$A_{1,2} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Процес $(2 \to 3)$ не має назви, роботу обчислимо як площу трапеції, яка складається з прямокутника і трикутника:

$$A_{1,2} = P_2(V_3 - V_2) + \frac{1}{2}(V_3 - V_2)(P_3 - P_2) = (V_3 - V_2)\left(P_2 + \frac{P_3}{2} - \frac{P_2}{2}\right) = \frac{1}{2}(V_3 - V_2)(P_3 + P_2)$$

Тоді робота газу за цикл $(1 \to 3)$

$$A_{1,3} = P_1V_1 \ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{1}{2}(V_3 - V_2)(P_3 + P_2).$$

Підставимо числові значення:

$$A_{1,3} = 12 \cdot 10^2 \ln 3 + 1{,}5 \cdot 9 \cdot 10^2 = 26{,}7 \cdot 10^2 \text{ Дж}.$$

Приклад 2.3.3

Визначити збільшення внутрішньої енергії, кількість теплоти та роботу розширення $m = 30$ г азоту при постійному тиску, якщо його об'єм збільшився у 5 разів. Початкова температура газу складає $T_1 = 270$ К.

Дано:	SI
N_2 – азот	
$m = 30$ г	$= 30 \cdot 10^{-3}$ кг
$T_1 = 270$ К	
$\frac{V_2}{V_1} = 5$	
$\Delta U - ?\ A - ?\ \Delta Q - ?$	

Розв'язання

Зміна внутрішньої енергії газу виражається з формули

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T, \text{ де } \Delta T = T_2 - T_1,$$

де i – число ступенів свободи молекули газу; $R = 8{,}31\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – універсальна газова стала;

$\mu(N_2) = (2 \cdot 16)\frac{\text{г}}{\text{моль}} = 28 \cdot 10^{-3}\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Із закону Гей-Люссака

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

температура в другому стані $T_2 = \frac{V_2 T_1}{V_1}$, звідки $T_2 = 5 \cdot 270 = 1350$ К.

Підставимо числові значення:

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot \frac{30 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} 8{,}31(1350 - 270) = 24040 = 24 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Робота газу буде визначатися процесом ізобаричного розширення газу

$$A = P\Delta V = \frac{m}{\mu} R\Delta T .$$

Підставимо числові значення:

$$A = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} 8{,}31(1350 - 270) = 9616 = 9{,}616 \cdot 10^{3}\,\text{Дж} .$$

За першим законом термодинаміки:

$$\Delta Q = \Delta U + A.$$

Підставимо числові значення:

$$\Delta Q = 9{,}616 \cdot 10^{3} + 24{,}040 \cdot 10^{3} = 33{,}656 \cdot 10^{3}\,\text{Дж}.$$

Приклад 2.3.4

Теплова машина, що працює за циклом Карно, використовується для підняття у резервуарі температури до $T_2 = 250$ К при температурі навколишнього середовища $t_1 = 27$ °С. За один цикл від резервуара відводиться $Q_2 = 3{,}15$ кДж теплоти. Знайти механічну роботу одного циклу.

Дано:	SI
$t_1 = 27°\text{C}$	
$T_2 = 250K$	
$Q_2 = 3{,}15\text{кДж}$	$= 3{,}15 \cdot 10^{3}\,\text{Дж}$
A -?	

Розв'язання

Термічний коефіцієнт корисної дії теплової машини

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1},$$

де Q_1 – кількість теплоти, отриманої від нагрівача; Q_2 – кількість теплоти, яка віддається холодильнику; A – робота машини за цикл.

Коефіцієнт корисної дії циклу Карно (ККД)

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

З'єднаємо формули для ККД, отримуємо

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

після скорочень $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$, звідки $Q_1 = \frac{Q_2 T_1}{T_2}$.

Робота машини за цикл

$$A = \frac{Q_2 T_1}{T_2} - Q_2 = Q_2\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right).$$

Температура нагрівача теплової машини

$$T_1 = t_1 + 273 = 27 + 273 = 300\ \text{К}.$$

Підставимо числові значення:

$$A = 3{,}15 \cdot 10^3 \left(\frac{300}{250} - 1\right) = 3{,}15 \cdot 10^3 \cdot 0{,}2 = 630\ \text{Дж}.$$

2.4 ЯВИЩА ПЕРЕНЕСЕННЯ

Основні поняття і формули

Процеси перенесення – це процеси, що приводять систему в стан термодинамічної рівноваги. До явищ перенесення відносяться:

- дифузія – перенесення маси;
- теплопровідність – перенесення енергії у вигляді тепла;
- внутрішнє тертя або в'язкість – перенесення імпульсу.

2.4.1 Дифузія – це процес вирівнювання концентрації, що супроводжується переміщуванням частинок речовин, які перебувають у контакті, з області з більшою концентрацією в область, де концентрація цих молекул менше.

2.4.2 Теплопровідність – це процес, що існує при умові наявності різниці температур.

2.4.3 В'язкість – це виникнення сил тертя між шарами газу або рідини, що переміщаються паралельно один одному з різними швидкостями.

2.4.4 Середня частота зіткнень однієї молекули за одиницю часу

$$z = \sqrt{2}\pi d^2 n_0 \langle \mathrm{v} \rangle .$$

2.4.5 Середня довжина вільного пробігу молекул газу – шлях, який проходить молекула між двома послідовними зіткненнями.

$$\lambda = \frac{\langle \mathrm{v} \rangle}{\mathrm{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0},$$

де n_0 – концентрація молекул; d – ефективний діаметр молекули;

або $$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma n_0},$$

де $\sigma = \pi d^2$ – площа ефективного перерізу зіткнень молекули.

2.4.6 Ефективним діаметром молекули називається мінімальна відстань, на яку зближуються центри двох молекул при зіткненні. Ефективний діаметр залежить від швидкості молекул, тобто від температури.

2.4.7 Закон Фіка: Маса газу m, що переноситься у результаті дифузії через перпендикулярну до осі x плоску поверхню площею ΔS за час $\Delta \tau$ при градієнті густини домішки вздовж цієї осі $\frac{d\rho}{dx}$.

$$m = -D\frac{d\rho}{dx}\Delta S\Delta\tau,$$

де $D = \frac{1}{3}\langle \mathrm{v}\rangle\langle\lambda\rangle$ – коефіцієнт дифузії.

Знак «мінус» показує, що перенесення маси відбувається у напрямку зменшення густини.

2.4.8 Закон Ньютона: Сила внутрішнього тертя F між двома шарами газу площею ΔS, що рухається з різними швидкостями,

$$F = -\eta\frac{du}{dz}\Delta S,$$

де $\eta = \frac{1}{3}\rho\langle \mathrm{v}\rangle\langle\lambda\rangle$ – коефіцієнт динамічної в'язкості; $\frac{du}{dz}$ – градієнт швидкості течії газу в перпендикулярному до ΔS напрямі.

$$[\eta] = \text{Па}\cdot\text{с}.$$

Знак мінус вказує, що імпульс переноситься у напрямку зменшення швидкості.

2.4.9 Закон Фур'є: Кількість теплоти, яка переноситься внаслідок теплопровідності за час $\Delta\tau$ через плоску поверхню ΔS при градієнті температури $\frac{dT}{dx}$, перпендикулярному до ΔS:

$$Q = -\chi\frac{dT}{dx}\Delta S\Delta\tau,$$

де $\chi = \frac{1}{3}\rho c_{\mathrm{V}}\langle \mathrm{v}\rangle\langle\lambda\rangle$, або $\chi = \frac{i}{6}n_0 k\langle \mathrm{v}\rangle\langle\lambda\rangle$ – коефіцієнт теплопровідності.

$$[\chi] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}.$$

Знак «мінус» показує, що при теплопровідності теплова енергія переноситься у напрямку зменшення температури.

Коефіцієнти дифузії, теплопровідності і в'язкості пов'язані один з одним співвідношеннями

$$\chi = c_V \eta = \rho c_V D .$$

Приклади розв’язання задач

Приклад 2.4.1

Знайти середню довжину вільного пробігу молекули водню, якщо густина речовини в момент кипіння $\rho = 7\text{кг/м}^3$. Ефективний діаметр молекули водню $d = 0,23\text{нм}$. Газ вважати ідеальним.

Дано:	SI	Розв'язання
H_2 - водень $\rho = 7\text{кг/м}^3$ $d = 0,23\text{нм}$	 $= 0,23 \cdot 10^{-3}\text{м}$	Середня довжина вільного пробігу молекули $$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$
$\lambda - ?$		

Концентрація молекул $n = \dfrac{\rho}{m_0}$,

де $m_0 = \dfrac{\mu}{N_A}$ − маса однієї молекули.

Підставимо масу однієї молекули, отримуємо

$$n = \frac{\rho N_A}{\mu},$$

де $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\text{моль}^{-1}$ – число Авогадро;

$\mu(H_2) = 2\dfrac{\text{г}}{\text{моль}} = 2 \cdot 10^{-3}\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярна маса водню.

Знайдемо довжину вільного пробігу молекул:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 \frac{\rho N_A}{\mu}} = \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho N_A}.$$

Підставимо числові значення:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14(2{,}3 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 7 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}} = 2 \cdot 10^{-9}\, м.$$

Приклад 2.4.2

У посудині за нормальних умов знаходиться кисень. Знайти середню кількість зіткнень молекул у цьому об’ємі за час $t = 2с$. Ефективний діаметр молекул кисню складає $d_{єф} = 0{,}27$нм.

Дано:	SI
O_2 – кисень	
$P = 10^{-5}\, Па$	
$T = 273K$	
$d_{'эф} = 0{,}27 нм$	$= 0{,}27 \cdot 10^{-9}$ м
$\overline{\lambda} - ?$	

Розв'язання

Середню кількість зіткнень молекул за час t можна визначити за формулою:

$$Z = z \cdot t.$$

Середня кількість зіткнень молекул в одиницю часу

$$\overline{z} = \sqrt{2}\,\pi d^2 n \,\langle \mathrm{v} \rangle,$$

де n – концентрація молекул; $\langle \mathrm{v} \rangle$ – середня арифметична швидкість молекул.

З основного рівняння МКТ

$$P = nkT,$$

знайдемо концентрацію молекул:

$$n = \frac{P}{kT}, \text{ де } k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}} \text{ – стала Больцмана.}$$

Середня арифметична швидкість молекул

$$\text{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \text{ де } R = 8{,}31\,\frac{Дж}{моль \cdot К} \text{ – універсальна газова стала.}$$

Підставимо формули, знайдемо середню кількість зіткнень молекул в одиницю часу:

$$\bar{z} = \sqrt{2}\pi d\ \frac{\rho}{kT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \frac{4d^2}{k}\sqrt{\frac{\pi R}{T\mu}}.$$

Середня кількість зіткнень молекул

$$Z = \frac{4d^2 t}{k}\sqrt{\frac{\pi R}{T\mu}}.$$

Підставимо числові дані:

$$Z = \frac{4 \cdot 10^5 (2{,}7 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 2}{1{,}38 \cdot 10^{-23}}\sqrt{\frac{8{,}31 \cdot 3{,}14}{273 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}} = 4 \cdot 10^9.$$

Приклад 2.4.3

Водень знаходиться при температурі $T = 125К$ і тиску $P = 1{,}7 \cdot 10^{-15}\,Па$. Знайти час, протягом якого рухається молекула водню між послідовними зіткненнями, якщо ефективний діаметр його молекул складає $d = 0{,}22 нм$.

Дано:	SI	Розв'язання
$P=1,7\cdot 10^{-15}\,Па$ $T=125К$ $d=0,22нм$	$=2,2\cdot 10^{-10}\,м$	Час зіткнення молекул: $\tau=\frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}}$,
$\tau-?$		

де $\bar{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 n}$ – довжина вільного пробігу молекул; $\bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$, – середня арифметична швидкість.

Підставимо швидкість і довжину вільного пробігу, отримуємо

$$\tau=\frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}},$$

Концентрацію молекул знайдемо з основного рівняння МКТ

$$P=nkT,\ \text{звідки}\ n=\frac{P}{kT},$$

де $k=1,38\cdot 10^{-23}\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – стала Больцмана.

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2\cdot\frac{P}{kT}}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}\sqrt{\frac{\pi\,\mu}{8RT}}.$$

Підставимо числові значення:

$$\tau=\frac{1,38\cdot 10^{-23}\cdot 125}{\sqrt{2}\cdot 3,14(2,2\cdot 10^{-10})^2\cdot 1,7\cdot 10^{-15}}\sqrt{\frac{3,14\cdot 2\cdot 10^{-3}}{8\cdot 8,31\cdot 125}}=4,15\cdot 10^{9}\ \text{с}.$$

Приклад 2.4.4

Знайти коефіцієнт теплопровідності вуглекислого газу (CO_2), в'язкість якого дорівнює $\eta = 14 \cdot 10^{-6}\ Па \cdot c$.

Дано:	Розв'язання
CO_2 $\eta = 14 \cdot 10^{-6}$ Па · с.	Коефіцієнт теплопровідності $$\chi = \frac{1}{3}\rho\bar{\lambda}\bar{\mathrm{v}}c_v,$$
$\chi - ?$	

де $c_v = \dfrac{C_v}{\mu}$ – питома теплоємність речовини при постійному об'ємі, $C_v = \dfrac{i}{2}R -$ молярна теплоємність при постійному об'ємі.

Коефіцієнт в'язкості знаходимо за формулою $\eta = \dfrac{1}{3}\rho\bar{\lambda}\bar{\mathrm{v}}$,

Підставимо зазначені формули у формулу для коефіцієнта теплопровідності, отримуємо

$$\chi = \eta c_v = \eta \cdot \frac{C_v}{\mu} = \eta \cdot \frac{\frac{i}{2}R}{\mu} = \frac{\eta \cdot iR}{2\mu},$$

де $i = 6$ – число ступенів свободи молекули вуглекислого газу, $\mu(CO_2) = (12 + 2 \cdot 16)\dfrac{\text{г}}{\text{моль}} = 44 \cdot 10^{-3}\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярна маса вуглекислого газу.

Підставимо числові значення:

$$\chi = \frac{14 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 8{,}31}{2 \cdot 44 \cdot 10^{-3}} = \frac{698{,}04 \cdot 10^{-3}}{88} = 7{,}93 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ
з теми «Молекулярна фізика. Основи термодинаміки»

1 Визначити кількість речовини водню, який заповнює об'єм $V = 3$ л, якщо концентрація молекул складає $n = 2 \cdot 10^{18}$ м$^{-3}$.

2 Визначити концентрацію молекул кисню у посудині при тиску $P = 0{,}2$ кПа і температурі, при якій середня квадратична швидкість молекул кисню дорівнює $\text{v} = 2{,}7\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$.

3 Ідеальний газ при тиску $P_1 = 0{,}5$ МПа і об'ємі $V_1 = 100$ см^3 ізобарно розширюється, при цьому його температура змінюється від $t_1 = 20\ °\text{C}$ до $t_2 = 500\ °\text{C}$. Потім його тиск ізотермічно зменшується у два рази. Знайти об'єм газу при цьому тиску. Нарисувати графік цих процесів в осях (P, V).

4 При тиску $P_1 = 500$ кПа знаходиться повітря масою $m = 50$ г і займає об'єм $V_1 = 400$ л. Після адіабатичного процесу тиск газу став дорівнювати $P_2 = 600$ кПа. Знайти температуру газу при цьому тиску.

5 Знайти зміну внутрішньої енергії та роботу двохатомного газу, який изобарно збільшує свій об'єм у балоні від $V_1 = 5$ л до $V_2 = 10$ л при тиску $P = 50$ кПа.

6 Під час ізобарного нагрівання $m = 40$ г неону його температура змінилася на $\Delta t = 20\ °C$. Яку кількість теплоти отримав газ? Молярна маса неону складає ($M_r = 20\frac{\text{г}}{\text{моль}}$).

7 Температура нагрівача складає $t_1 = 150\ °\text{C}$, а холодильника – $t_2 = 20\ °\text{C}$. Від нагрівача взято $\text{Q} = 1$ кДж теплоти. Знайти роботу, яку витрачає теплова машина.

8 Знайти ККД теплового двигуна потужністю $N = 50$ кВт, якщо за $t = 10$ с він передає навколишньому середовищу кількість теплоти $\text{Q} = 1$ МДж?

9 При деяких умовах коефіцієнт дифузії і динамічної в'язкості азоту відповідно дорівнюють $D = 20{,}9\,\text{мм}^2/\text{с}$ та $\eta = 17{,}7\,\text{мкПа} \cdot \text{с}$. Розрахувати за цими даними коефіцієнт теплопровідності молекул.

10 Розрахувати коефіцієнт динамічної в’язкості водяної пари при тиску $P = 10^5\,\text{Па}$ і температурі $t = 17\,°\text{C}$, якщо середня довжина вільного пробігу молекул водяної пари дорівнює $\lambda = 138\,\text{нм}$, а середня арифметична швидкість молекул водяної пари – $\text{v} = 584\,\text{м/с}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Трофимова, Т. И. Курс физики [Текст] : учеб. пособие / Т. И. Трофимова. – 7-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2001. – 542 с.

2 Детлаф, А. А. Курс физики [Текст] / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высш. шк., 2001. – 718 с.

3 Савельев, И. В. Курс общей физики [Текст] / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1977. – Т. 1. – 233 с.

4 Савельев, И. В. Курс общей физики [Текст] / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1978. – Т. 2. – 233 с.

5 Сивухин, Д. В. Общий курс физики [Текст]. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1979. – 520 с.

6 Сивухин, Д. В. Общий курс физики [Текст]. Т. 2. Молекулярная физика и термодинамика / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1979. – 552 с.

7 Вовк, Р. В. Механіка і молекулярна фізика [Текст] : навч. посібник / Р. В. Вовк, А. В. Попов. – Харків : УкрДУЗТ, 2011. – 184 с;

8 Зачек, І. Р. Фізика [Текст] / І. Р. Зачек, Б. М. Романишин. – Львів : Львівська політехніка, 2002. – 231 с.

9 Задачі з фізики [Текст] / А. В. Попов, Р. В. Вовк, Н. В. Глейзер [та ін.]. – Харків : УкрДАЗТ, 2008. – 92 с.

10 Иродов, И. Е. Основные законы механики [Текст] / И. Е. Иродов. – М. : Высш. шк., 1985. – 238 с.

11 Чертов, А. Г. Задачник по физике для втузов [Текст] / А. Г. Чертов. – 4-е изд., испр. – М. : Интеграл – Пресс, 1988. – 544 с.

12 Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики [Текст] : учеб. пособие / В. С. Волькенштейн. – 11-е изд., перераб. –М. : Наука. – Физматлит,1985. – 384 с.