ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР

Конспект лекцій

з дисципліни

«ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ»

Частина 2

Харків – 2016

Елементи теорії ігор: Конспект лекцій з дисципліни “Оптимізаційні методи і моделі” / Ю.О. Акімова, О.О. Гончарова, О.І. Удодова, Ю.С. Шувалова, Н.С. Юрчак. – Харків: УкрДУЗТ, 2016. – Ч. 2. – 53 с.

Конспект лекцій містить теоретичний матеріал з розділу «Теорія матричних ігор» дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі». Для успішного засвоєння цього матеріалу необхідне попереднє оволодіння теорією лінійної алгебри, графічним та симплексним методом задачі лінійного програмування, поняттям про двоїстий симплекс-метод. Теоретичний матеріал проілюстровано багатьма прикладами розв'язання задач з розгорнутими поясненнями. Для більш глибокого опрацювання матеріалу, який розглядається у конспекті лекцій, можна скористатися списком наведеної літератури.

Рекомендовано для студентів денної форми навчання напрямів підготовки 6.030504 «Економіка підприємства», 6.030505 «Управління персоналом та економіка праці», 6.030507 «Маркетинг», 6.030508 «Фінанси і кредит», 6.030509 «Облік і аудит». Конспект лекцій також може бути використаний студентами денної форми навчання напрямів підготовки 6.030601 «Менеджмент», 6.070101 «Транспортні технології (залізничний транспорт)».

Іл. 10, табл. 2, бібліогр.: 8 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 9 березня 2016 р., протокол № 7.

Рецензент

канд. фіз.-мат. наук А.П. Рибалко (ХНЕУ)

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР

Конспект лекцій
з дисципліни
«ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ»

Частина 2

Відповідальний за випуск Акімова Ю.О.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 19.04.16 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,0. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

ЗМІСТ

Если люди отказываются верить в простоту математики, то это только потому, что они не понимают всю сложность жизни.

Джон фон Нейман

ВСТУП

Першу статтю з математичної теорії ігор було написано Джоном фон Нейманом у 1928 р., а першу книгу з систематичним викладанням теорії ігор та підходу до аналізу економічних проблем — у 1943 р. ЇЇ фон Нейман написав разом з Оскаром Моргенштерном; вони працювали в Інституті передових досліджень у Принстоні.

Після 1994 р. за досягнення в теорії ігор було вручено кілька Нобелівських премій з економіки. У 2005 р. премію одержали Томас Шеллінг, праці якого є фундаментом сучасного стратегічного аналізу у зовнішній політиці та у бізнесі, та Роберт Ауманн, який підкреслив роль уявлень гравців про міркування інших гравців. У 2007-му — Леонід Гурвгц, який надав точного математичного змісту ідеї про те, що в плановій економіці неможливо створити правильні стимули для економічних суб’єктів гри, в якій гравці, що користуються тільки особистою інформацією, приходять до результату, який потрібен автору гри, Ерик Маскин і Роджер Майєрсон сформулювали загальну задачу створення правильних стимулів і створили найважливішу частину економічної теорії останніх десятиріч — теорію аукціонів.

На практиці часто доводиться мати справу з задачами, в яких необхідно приймати рішення в умовах невизначеності, тобто виникають ситуації, в яких дві (або більше) сторони переслідують різні цілі, а результати будь-якої дії кожної зі сторін залежать від заходів партнера. Такі ситуації, що виникають при грі в шахи, шашки, доміно і т.д., відносяться до конфліктних: результат кожного ходу гравця залежить від ходу супротивника, мета гри - виграш одного з партнерів.

В економіці конфліктні ситуації зустрічаються дуже часто і мають різноманітний характер. До них відносяться, наприклад, взаємини між постачальником і споживачем, покупцем і продавцем, банком і клієнтом. У всіх цих прикладах конфліктна ситуація породжується розбіжністю інтересів партнерів і прагненням кожного з них приймати оптимальні рішення, які найбільшою мірою реалізують поставлені цілі.

При цьому кожному доводиться рахуватися не тільки зі своїми цілями, але й з цілями партнера, і враховувати невідомі заздалегідь рішення, які ці партнери прийматимуть. Для грамотного розв’язання завдань з конфліктними ситуаціями необхідні науково обґрунтовані методи. Такі методи розроблені математичною теорією конфліктних ситуацій, яка носить назву *теорія ігор*.

Задачі теорії матричних ігор відносяться до змагального типу задач і є логічним подовженням класу задач прийняття рішень.

Для розв’язання задач матричних ігор використовують методи лінійної алгебри, графічний метод і як найбільш сучасний – двоїстий симплекс-метод.

У конспекті розглянуто математичну модель та постановку задачі матричної гри, окремо наведені найпростіші випадки - ігри 2х2, 2хn, mх2, а також моделі задач прийняття рішень.

1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАТРИЧНИХ ІГОР

Ознайомимося з основними поняттями теорії ігор. Математична модель конфліктної ситуації називається *грою*, сторони, які беруть участь в конфлікті, - *гравцями*, а результат конфлікту - *виграшем*.

Для кожної формалізованої гри вводяться правила, тобто система умов, яка визначає:

а) варіанти дій гравців;

б) обсяг інформації кожного гравця про поведінку партнерів;

в) виграш, до якого призводить кожна сукупність дій.

Як правило, виграш (або програш) може бути заданий кількісно; наприклад, можна оцінити програш нулем, виграш - одиницею, а нічию - 1/2.

Гра називається *парною*, якщо в ній беруть участь два гравці, і *множинною*, якщо число гравців більше двох. Ми будемо розглядати тільки парні ігри. У них беруть участь два гравці А і В, інтереси яких протилежні, а під *грою* будемо розуміти ряд дій з боку А і В. Гра називається *грою з нульовою сумою*, або *антагоністичною*, якщо виграш одного з гравців дорівнює програшу іншого, тобто для повного завдання гри досить вказати величину одного з них. Якщо позначити a - виграш одного з гравців, b - виграш іншого, то для гри з нульовою сумою $b = - a$, тому досить розглядати, наприклад a.

Вибір і здійснення однієї з передбачених правилами дій називається *ходом* гравця. Ходи можуть бути особистими і випадковими. *Особистий хід* - це свідомий вибір гравцем однієї з можливих дій (наприклад, хід у шаховій грі). Випадковий хід - це випадково обрана дія (наприклад, вибір карти з перетасованої колоди). Надалі ми будемо розглядати тільки особисті ходи гравців. *Стратегією гравця* називається сукупність правил, що визначають вибір його дії при кожному особистому ході в залежності від ситуації, що склалася. Зазвичай в процесі гри при кожному особистому ході гравець робить вибір в залежності від конкретної ситуації. Однак в принципі можливо, що всі рішення прийняті гравцем заздалегідь (у відповідь на будь-яку ситуацію, що склалася). Це означає, що гравець вибрав певну стратегію, яка може бути задана у вигляді списку правил або програми. (Так можна здійснити гру за допомогою ЕОМ). Кожну фіксовану стратегію, яку може обрати гравець, називають *чистою*. Гра називається *скінченною*, якщо у кожного гравця є скінченне число стратегій, і *нескінченною* - в протилежному випадку.

Для того щоб розв'язати гру, слід для кожного гравця обрати стратегію, яка задовольняє умову оптимальності, тобто перший гравець повинен отримувати максимальний виграш, коли другий дотримується своєї стратегії. У той же час другий гравець повинен мати мінімальний програш, якщо перший дотримується своєї стратегії. Такі стратегії називаються *оптимальними*. Оптимальні стратегії повинні також задовольняти умову стійкості, тобто будь-якому з гравців має бути невигідно відмовитися від своєї стратегії в цій грі.

Наведена математична модель має суттєві обмеження:

а) якщо гра не розв'язується у чистих стратегіях, то можна прогнозувати тільки середній виграш (програш) у всіх партіях, вважаючи, що гра повторюється багато разів;

б) метою теорії ігор є визначення *оптимальної стратегії* для кожного гравця. При виборі оптимальної стратегії природно припускати, що обидва гравці поводяться *розумно* з точки зору своїх інтересів, що не завжди виконується у реальному житті;

в) найважливіше обмеження теорії ігор – єдиність виграшу як показника ефективності, в той час як в більшості реальних економічних задач є більше одного показника ефективності. Крім того, в економіці, як правило, виникають завдання, в яких інтереси партнерів не обов'язково антагоністичні.

Незважаючи на всі ці обмеження можна розумно використовувати апарат теорії ігор як пораду до прийняття рішення або аналіз можливих ситуацій.

1.1 Класифікація ігор

Класифікацію ігор можна проводити так: за кількістю гравців, кількістю стратегій, характером взаємодії гравців, характером виграшу, кількістю ходів і т. ін.

1*В залежності від кількості гравців* розрізняють ігри двох і більше ніж двох, *n* гравців. Перші з них найбільш вивчені. Ігри трьох і більше гравців менш досліджені через принципові труднощі і технічні можливості отримання розв'язку. Чим більше гравців, тим більше проблем.

2 *За кількістю стратегій ігри* поділяються на скінченні і нескінченні.

3 *За характером взаємодії* ігри поділяються на безкоаліційні – гравці не мають права вступати в угоди, утворювати коаліції; та коаліційні (кооперативні) – можуть вступати в коаліції. В кооперативних іграх коаліції наперед визначені.

4 *За характером виграшів* ігри поділяються на ігри з нульовою сумою та ігри з ненульовою сумою.

Матрична гра – це скінченна гра з нульовою сумою двох гравців, в якій задається виграш гравця А у вигляді матриці: рядок матриці відповідає номеру стратегії гравця А, стовпець – номеру стратегії гравця В, на перетині рядка і стовпця матриці знаходиться виграш гравця А, що відповідає застосовуваним стратегіям).

Для матричних ігор доведено, що кожна з них має розв'язок, і він може бути легко знайдений шляхом зведення гри до задачі лінійного програмування.

Біматрична гра – це скінченна гра з ненульовою сумою двох гравців, в якій виграші кожного гравця задаються матрицями окремо для відповідного гравця (у кожної матриці рядок відповідає стратегії гравця А, стовпець – стратегії гравця В, на перетині рядків і стовпців першої матриці знаходиться виграш гравця А, у другій матриці – виграш гравця В.)

Для біматричних ігор також розроблено теорію оптимальної поведінки гравців, однак розв'язувати такі ігри складніше, ніж звичайні матричні.

1.2 Матрична гра у чистих стратегіях

Для складання математичної моделі гри введемо деякі припущення:

а) розглядаються тільки парні ігри за участі двох гравців А та В, для визначеності будемо вважати, що А завжди виграє (якщо $c_{ij} < 0$, гравець А програє), а В завжди програє;

б) розглядаються ігри з нульовою сумою;

в) всі результати ходів гравців можна виразити кількісно у вигляді плати за хід;

г) стратегії гравців відомі заздалегідь;

д) гра складається з двох ходів: гравець А обирає одну з стратегій A_i, а гравець B - B_j, при цьому вибір кожного відбувається при повному незнанні вибору один одного.

Нехай гравці мають скінченну кількість можливих дій – вибір однієї з *чистих стратегій,* тоді вибір пари стратегій A_i та B_j однозначно визначає результат c_{ij} - виграш гравця А та програш гравця В. При відомих значеннях c_{ij} виграшу для кожної пари чистих стратегій A_i та B_j можна скласти матрицю виграшів гравця А (програшів гравця В), яку називають *платіжною,* або *матрицею матричної гри*

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \\ [m \times n] \end{array},$$

кожний рядок якої відповідає чистим стратегіям гравця А, а стовпець – гравця В.

Оскільки матрична гра фактично вимагає шукати рішення в умовах невизначеності, то це призводить до того, що основою розв'язку має стати використання одного з критеріїв таких задач.

Критерій вибору стратегії. Виходячи з принципу «обережності», обирають рішення, яке засноване на виборі найліпшого результату з найгірших, тобто на використанні *максимінного критерію* для першого гравця:

- ✓ перший гравець А обирає **рядок** так, щоб виграш був найбільшим при будь-яких діях гравця В. Для цього у кожному рядку він визначає **мінімальний елемент**. Після цього обирає рядок з **найбільшим з них**;

і *мінімаксного критерію* для другого:

- ✓ другий гравець В обирає **стовпець** так, щоб його програш був найменшим. Для цього в кожному стовпчику він визначає **максимальний елемент**, після цього обирає стовпчик з **найменшим з них**.

$$
\begin{array}{cl}
 & \xrightarrow{\qquad\quad \min \qquad\quad} \\
\max\Bigg\downarrow & \left.\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}\begin{matrix} \min c_{1j} \\ \min c_{2j} \\ \dots \\ \min c_{mj} \end{matrix}\right\} \max_{A_i}\left\{\min_{B_j} c_{ij}\right\} = \alpha \\
 & \underbrace{\max c_{i1}\ \max c_{i2} \dots \max c_{in}}_{\min\limits_{B_j}\left\{\max\limits_{A_i} c_{ij}\right\} = \beta}
\end{array}
.
$$

Значення α називають *нижньою ціною гри.*

$$\boxed{\alpha = \max_{A_i}\left\{\min_{B_j}\left\{c_{ij}\right\}\right\}}\ . \tag{1.2.1}$$

Значення β називають *верхньою ціною гри.*

$$\boxed{\beta = \min_{B_j}\left\{\max_{A_i}\left\{c_{ij}\right\}\right\}}\ . \tag{1.2.2}$$

При грі у чистих стратегіях верхня та нижня ціни гри збігаються. Точка $(i;j)$, координатами якої є номери вибраних стратегій, в такому випадку називається *сідловою точкою*, значення $c_{ij}=V$ – *ціною гри*.

$$\boxed{\alpha = \beta = V}. \tag{1.2.3}$$

Розберемо ці критерії на прикладі.

Приклад. Дві компанії A та B продають два види серцевих ліків. Компанія A рекламує продукцію в Інтернеті (A_1), телебаченні (A_2) та в рекламних газетах (A_3). Компанія B додатково до використання Інтернету (B_1), телебачення (B_2) та рекламних газет (B_3) розсилає також поштою рекламні брошури (B_4). Від того, наскільки вміло та інтенсивно буде проведено рекламну кампанію, кожна з фірм зможе залучити на свій бік частину клієнтів конкуруючої компанії. Наведена матриця характеризує відсоток клієнтів, залучених або втрачених компанією A (матриця ”платежів” тут задана безпосередньо, оскільки відсоток клієнтів є джерелом отриманих додаткового прибутку або втрат).

$$\begin{array}{c|cccc} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \hline A_1 & 8 & -2 & 9 & -3 \\ A_2 & 6 & 5 & 6 & 8 \\ A_3 & -2 & 4 & -9 & 5 \end{array}.$$

Для зручності правіше матриці випишемо найменший виграш у відповідному рядку, знизу – найбільший програш у відповідному стовпці

$$\xrightarrow{\min}$$

$$\max\downarrow \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 9 & -3 \\ 6 & 5 & 6 & 8 \\ -2 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -3 \\ 5 \\ -9 \end{array}. \\ \begin{array}{cccc} 8 & 5 & 6 & 8 \end{array} \end{array} \qquad (1.2.4)$$

Застосовуємо *максимінний критерій* для першого гравця, тобто знаходимо значення максимального виграшу α з найгірших значень c_{ij} в разі використання трьох можливих стратегій поведінки A_i і при будь-якій відповіді другого гравця. Для наданого прикладу обираємо найбільше з виписаних справа від матриці (1.2.4) значень, отже, за формулою (1.2.1) маємо

$$\alpha = \max_{A_i}\{-3;5;-9\} = 5.$$

Доповненням цього результату є номер стратегії першого гравця, яка забезпечує такий виграш. Це друга стратегія – A_2.

Другий гравець для вибору оптимальної стратегії використовує *мінімаксний критерій*, тобто шукає величину програшу β, найменшого з найбільших для кожного з своїх чотирьох альтернативних "ходів" B_j при будь-якій відповіді першого гравця. В нашому випадку обираємо найменше з виписаних знизу від матриці (1.2.4) значень, отже, за формулою (1.2.2) маємо

$$\beta = \min_{B_j} \{8;5;9;8\} = 5.$$

Значення β досягається при використанні другим гравцем другої стратегії – B_2 (збігання номерів стратегій є випадковим).

Ми отримали результат, коли верхня та нижня ціна гри однакові. За формулою (1.2.3) ціна гри

$$V = \alpha = \beta = 5.$$

Отже, висновок для наведеного прикладу: ціна гри V=5 (змістове тлумачення: виграш на користь компанії *A*, оскільки її ринок збільшиться на 5 %), сідлова точка – (*2;2*) - це номери оптимальних стратегій обох компаній, які показують, що обом компаніям слід проводити рекламу на телебаченні.

Наявність сідлових точок – це скоріше виключення. Однак є різновид ігор, які завжди мають сідлову точку. Це *ігри з повною інформацією*. Так називається гра, в якій кожен гравець при кожному особистому ході знає повну попередню історію розвитку гри. Прикладами таких ігор можуть бути шахи, шашки, нарди і т.ін. В теорії ігор доводиться, що кожна гра з повною інформацією має сідлову точку, а отже, розв’язується у чистих стратегіях.

1.3 Матрична гра у мішаних стратегіях

Якщо $\alpha \neq \beta$, а точніше $\alpha < \beta$, то це означає, що не існує єдиних стратегій для першого і другого гравців для отримання оптимального результату. Тоді логіка гри вимагає ”змішувати” стратегії при повторенні однакових ігор з ймовірнісними ”ваговими” коефіцієнтами з метою отримати оптимальну ціну гри $\alpha < V < \beta$, тобто підвищити виграш і знизити програш, зводячи їх значення до ціни гри. Зміст ймовірнісних ”вагових” коефіцієнтів полягає у знаходженні ймовірностей вибору тієї або іншої стратегії, які утворюють *вектори мішаних стратегій* для кожного гравця.

Для першого гравця вектор мішаних стратегій

$$\vec{p} = \left(p_1, p_2, \dots p_m \right),$$

де p_i $(i = 1,\dots,m)$ –ймовірність вибору першим гравцем стратегії A_i.

Для другого гравця вектор мішаних стратегій

$$\vec{q} = \left(q_1, q_2, \dots q_n \right),$$

де q_j $(j = 1,\dots,n)$ –ймовірність вибору другим гравцем стратегії B_j.

Оскільки якісь стратегії будуть обов'язково використані, вектору мішаних стратегій притаманна властивість

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Матрична гра у чистих стратегіях є окремим випадком гри у мішаних стратегіях. Вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ у випадку гри у чистих стратегіях мають нульові компоненти, окрім значень $p_i=q_j=1$ (якщо $(i;j)$ – сідлова точка).

Для розв'язання матричної гри у мішаних стратегіях, а саме, знаходження ціни гри і оптимального значення векторів мішаних стратегій $\left(\vec{p}^*; \vec{q}^* \right)$, які утворюють *сідлову точку* цієї гри, вводиться *платіжна функція гри*

$$f\left(\vec{p}; \vec{q} \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} p_i q_j . \tag{1.3.1}$$

Тепер дамо точне визначення поняття *сідлової точки*, яке розтлумачує мотивацію такої назви. *Сідловою точкою* $\left(\vec{p}^*; \vec{q}^* \right)$ платіжної функції (1.3.1) називають таку точку, яка забезпечує виконання ланцюга нерівностей

$$f\left(\vec{p}; \vec{q}^* \right) \le f\left(\vec{p}^*; \vec{q}^* \right) \le f\left(\vec{p}^*; \vec{q} \right). \tag{1.3.2}$$

Зміст цієї системи нерівностей полягає в тому, що сідлова точка, компонентами якої є два типи змінних, одночасно виконує роль точки максимуму по одному типу змінних (у даному випадку по компонентах вектора $\vec{p}$) і точки мінімуму (по компонентах вектора $\vec{q}$). В геометричному сенсі точку, яка одночасно виконує роль точки максимуму і точки мінімуму, можна виявити на гіперболічному параболоїді (рисунок 1.3.1), який за своєю формою нагадує сідло. Гіперболічний параболоїд можна подати як поверхню, одержану сковзанням параболи, яка є перерізом цієї поверхні площиною YOZ, вздовж параболи, яка є перерізом цієї поверхні площиною XOZ. На такій поверхні знайдеться точка, що буде точкою максимуму для однієї параболи і одночасно точкою мінімуму для другої параболи.

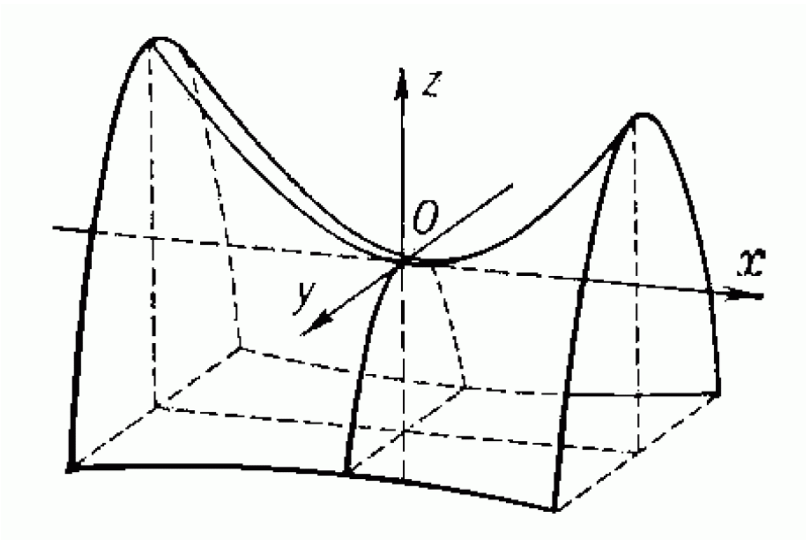


Рисунок 1.3.1 – Гіперболічний параболоїд

Іншими словами можна тлумачити ланцюг нерівностей (1.3.2) як необхідність знайти оптимальні вектори мішаних стратегій, тобто ймовірності, з якими треба використовувати певні стратегії обом гравцям при повторенні матричної гри багаторазово, які б забезпечували першому гравцю виграш, не менший ніж при використанні будь-яких інших стратегій, а другому гравцю – програш, не більший ніж при використанні будь-яких інших стратегій.

Для практичного знаходження сідлової точки використовують умови, еквівалентні визначенню (1.3.2), які відображаються у *теоремі Неймана*[1].

[1] Теорему було вперше доведено фон Нейманом у 1928 р. Відомі доведення цієї теореми досить складні. Тому наведемо лише формулювання.

Теорема Неймана. Кожна скінченна гра має хоча б один розв’язок (можливо, в області мішаних стратегій).

Нехай $V = f\left(\vec{p}^*, \vec{q}^*\right)$ - розв'язок матричної гри (ціна гри) у мішаних стратегіях, тоді будь-яка скінченна матрична гра у мішаних стратегіях має сідлову точку, для компонент якої необхідно та достатньо виконання умов, що задані системою нерівностей (відзначимо, що згідно з постановкою задачі $\alpha < V < \beta$)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq V, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq V \end{cases} \tag{1.3.3}$$

(нерівностей першого типу –n, другого типу –m).

Практично оптимальні значення $\left(\vec{p}^*, \vec{q}^*\right)$ знаходяться з лінійної системи $m+n+2$ рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i = V, \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = V, \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \end{cases} \tag{1.3.4}$$

Отримана система є лінійною відносно невідомих V, p_i ($i = 1,...,m$), q_j ($j = 1,...,n$), оптимальні значення яких знаходяться методами лінійної алгебри.

У випадку, коли система багатовимірна, цей метод вважається неефективним.

1.4 Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Розглянемо більш сучасну постановку *матричної гри як двоїстої задачі лінійного програмування* [3,4].

Для створення математичної моделі задачі вводяться нові змінні

$$x_i = \frac{p_i}{V}, i = 1,...,m; \; y_j = \frac{q_j}{V}, j = 1,...,n. \qquad (1.4.1)$$

Введення таких змінних дозволяє побудувати цільові функції прямої та двоїстої задач з необхідними вимогами їх мінімізації або максимізації

$$z = \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i}{V} = \frac{1}{V}, \qquad \Phi = \sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} q_j}{V} = \frac{1}{V}. \qquad (1.4.2)$$

Для першого гравця вимога до гри зводиться до забезпечення максимального значення V, навпаки, для другого гравця – в досягненні мінімального значення V. Ці вимоги є основою для створення *функцій цілі* задачі лінійного програмування відносно змінних x_i та y_j (очевидно, що оскільки z і Φ є величинами, оберниними до V, то вимоги до них будуть прямо протилежними).

Система обмежень може бути складена з системи нерівностей (1.3.3), якщо кожну нерівність поділити на **додатну величину *V***.

На основі наведених міркувань формулюється двоїста ЗЛП.

Пряма задача (для першого гравця)	Двоїста задача (для другого гравця)
$z = x_1 + x_2 + ... + x_m \to \min$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1$ (n умов), $x_i \ge 0, \; i = 1,...,m$	$\Phi = y_1 + y_2 + ... + y_n \to \max$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1$ (m умов),

	$y_j \ge 0,\ \ j = 1,...,n.$

У рамках обговорення розв’язання двоїстої ЗЛП у [3,4]., застосовуючи двоїстий симплекс-метод для задачі на мінімум, знайдемо оптимальне значення плану $X^* = \left\{ x_i^* \right\}$, $i = 1,...,m$; відновимо значення оптимального плану $Y^* = \left\{ y_j^* \right\}$, $j = 1,...,n$, а також знайдемо оптимальну ціну гри

$$V = \frac{1}{z_{\min}} = \frac{1}{\Phi_{\max}}.$$

За цими даними за допомогою формул (1.4.1) визначимо оптимальні вектори мішаних стратегій

$$\vec{p}^* = \left\{ p_i^* \right\},\ p_i^* = x_i^* \cdot V,\ i = 1,...,m;$$

$$\vec{q}^* = \left\{ q_j^* \right\},\ q_j^* = y_j^* \cdot V,\ j = 1,...,n.$$

Сукупність цих трьох результатів ($V, \vec{p}^*, \ \vec{q}^*$) і є розв’язком матричної гри у мішаних стратегіях.

Для спрощення розв’язання матричної гри перед створенням моделі її постановки намагаються зменшити розмір матриці платежів з умов усунення заздалегідь невигідних стратегій у порівнянні з будь-якою іншою для обох гравців.

Таким чином, розв’язання матричної гри $m \times n$ еквівалентно розв’язанню ЗЛП. Зазначимо, що й навпаки, для будь-якої ЗЛП можна побудувати еквівалентну задачу теорії ігор. Цей зв’язок є корисним, оскільки існують наближені методи розв’язання задач теорії ігор (тут ми не будемо на них зупинятися), які виявляються простішими, них «класичні» методи лінійного програмування.

1.5 Спрощення платіжної матриці

Введемо *правила спрощення платіжної матриці* з поясненням їх фактичного змісту.

1 Якщо в платіжній матриці є дублюючі стратегії, тобто однакові рядки (стовпці), то всі однакові, окрім одного рядка (стовпця), викреслюються.

2 Викреслюються *рядки*, всі елементи яких *не перевищують* відповідних елементів будь-якого іншого рядка, тобто позбавляємось рядків, які відповідають стратегіям першого гравця, які заздалегідь дають не більші виграші при будь-якій відповіді другого гравця, ніж будь-яка інша стратегія.

3 Викреслюються *стовпці*, всі елементи яких *не менше відповідних* елементів будь-якого іншого стовпця, тобто позбавляємось стовпців, які відповідають стратегіям другого гравця, які заздалегідь дають не менші програші при будь-якій відповіді першого гравця, ніж будь-яка інша стратегія.

4 Для постановки задачі у спрощеному вигляді, а саме тільки з невід'ємними коефіцієнтами, матриця платежів приводиться до матриці з невід'ємними елементами шляхом *додавання до кожного елемента матриці абсолютної величини мінімального від'ємного елемента*. Щоб компенсувати штучність цієї дії, від отриманого значення ціни гри віднімається відповідний доданок.

Зауваження. В отриманих значеннях оптимальних векторів мішаних стратегій елементам (ймовірностям вибору відповідної стратегії) з номерами викреслених альтернатив (рядків – для першого гравця, стовпців – для другого) присвоюється нульове значення.

Продемонструємо приклади побудування платіжної матриці змістової задачі та розв'язання матричної гри з прямокутною платіжною матрицею.

Приклад. Університетські команди *A* та *B* визначають свої стратегії гри (A_i, $i=1,...,4$ – для першого гравця; B_j, $j=1,...,4$ – для другого) у національній універсіаді з баскетболу. Оцінюючи можливості своїх "лавок запасних", кожний тренер опрацював по чотири варіанти заміни гравців протягом гри. Здатність кожної команди виконувати дво-, триочкові та штрафні кидки є основним фактором, що визначає результат гри. Наведена далі таблиця (платіжна матриця) містить очки чистого виграшу команди *A* протягом одного володіння м'ячем у залежності від стратегій, які плануються кожною командою.

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Визначити тип матричної гри.

Переконавшись у неможливості спростити платіжну матрицю, знайдемо нижню та верхню ціни гри за формулами (1.2.1), (1.2.2)

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\min} & \\ \max\big\downarrow & \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -2 \\ -3 \\ -2 \\ -2 \end{array} \\ & \begin{array}{cccc} 3 & 3 & 4 & 2 \end{array} & \end{array}.$$

$$\alpha = \max\{-2;-3;-2;-2\} = -2; \ \beta = \min\{3;3;2;4\} = 2.$$

Тобто $\alpha \neq \beta$, що є ознакою гри у мішаних стратегіях, а ціна гри знаходиться в інтервалі

$$-2 < V < 2.$$

Пропонуємо самостійно знайти її точне значення та вектори мішаних стратегій.

Приклад. Розв'язати матричну гру з заданою платіжною матрицею

$$\begin{array}{c|cccc} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \hline A_1 & 1 & 9 & 6 & 0 \\ A_2 & 2 & 3 & 8 & 4 \\ A_3 & -5 & -2 & 10 & 3 \\ A_4 & 7 & 4 & 7 & 5 \end{array}.$$

Проведемо спрощення платіжної матриці, викреслюючи по-перше, третій стовпець; по-друге, третій рядок, і остаточно, другий рядок

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ -5 & -2 & 10 & 3 \\ 7 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}\end{array} \sim \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} B_1 \quad B_2 \quad B_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -5 & -2 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}\end{array} \sim \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\begin{array}{c} B_1 \quad B_2 \quad B_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}\end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} B_1 \quad B_2 \quad B_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}\end{array}.$$

Знайдемо нижню та верхню ціни гри за формулами (1.2.1), (1.2.2)

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\min} \\ \max\downarrow \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 & 9 & 5 \end{matrix} \end{array}.$$

$$\alpha = \max\{0;4\} = 4;\ \beta = \min\{7;9;5\} = 5.$$

Отримали випадок, коли $\alpha \neq \beta$, тобто матричну гру у мішаних стратегіях з ціною гри в межах інтервалу: $4 < V < 5$.

Вводимо вектори мішаних стратегій для першого та другого гравців

$$\vec{p} = (p_1; p_2; p_3; p_4) = (p_1; 0; 0; p_4);$$
$$\vec{q} = (q_1; q_2; q_3; q_4) = (q_1; q_2; 0; q_4).$$

Для математичної постановки задачі розв'язання цієї гри як двоїстої задачі лінійного програмування вводимо компоненти планів для першого та другого гравців

$$X = (x_1, x_2), \text{ де } x_1 = \frac{p_1}{V},\ x_2 = \frac{p_4}{V};$$
$$Y = (y_1, y_2, y_3), \text{ де } y_1 = \frac{q_1}{V},\ y_2 = \frac{q_2}{V},\ y_3 = \frac{q_4}{V}.$$

Модель заданої матричної гри як двоїстої задачі лінійного програмування [3,4] виглядає так:

$z = x_1 + x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \ge 1 \\ 9x_1 + 4x_2 \ge 1 \\ 5x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$	$\Phi = y_1 + y_2 + y_2 \to \max$ $\begin{cases} y_1 + 9y_2 \le 1 \\ 7y_1 + 4y_2 + 5y_3 \le 1 \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0 \end{cases}$

Більш докладно методи розв'язання задач лінійного програмування було наведено у [3,4]. За розробленим алгоритмом розв'язуємо двоїстим симплекс-методом задачу на мінімум.

Створюємо першу симплекс-таблицю:

1)	*-x₁*	*-x₂*	*1*
x_3	*-1*	*-7*	*-1*
x_4	*-9*	*-4*	*-1*
x_5	*0*	*-5*	*-1*
z	*-1*	*-1*	*0*

План $X_0=(0;0;-1;-1;-1)$ не є опорним. Обираємо за розв'язуючий другий рядок і знаходимо $\min\left\{\frac{-1}{-9};\frac{-1}{-4}\right\}=\frac{1}{9}$, що обумовлює назвати головним - елемент *-9*. Перетворюємо симплекс-таблицю методом жорданових виключень:

2)	$-x_4$	$-x_2$	1
x_3	-1/9	-59/9	-8/9
x_1	-1/9	4/9	1/9
x_5	0	-5	-1
z	-1/9	-5/9	1/9

План $X_1=(-1/9;0;-8/9;0;-1)$ не є опорним. Обираємо як розв'язуючий перший рядок і знаходимо $\min\left\{\frac{-1/9}{-1/9};\frac{-5/9}{-59/9}\right\}=\frac{5}{59}$, що дає підставу назвати головним елемент *-59/9*.

3)	$-x_4$	$-x_3$	1
x_2	1/59	-9/59	8/59
x_1	-7/59	4/59	3/59
x_5	5/59	-45/59	-9/59
z	-6/59	-5/59	11/59

План $X_2=(3/59;8/59;0;0;-9/59)$ знов не є опорним. Маємо тільки один варіант вибору розв'язуючого рядка – третій. Створюємо відношення для вибору головного елемента: $\min\left\{\frac{-5/59}{-45/59}\right\}=\frac{5}{45}$. Тобто головний елемент *-45/59*. Сподіваючись на отримання остаточної симлекс-таблиці, визначаємо елементи останніх рядів.

4)	$-x_4$	$-x_5$	1

x_2			9/45
x_1			1/45
x_3			9/45
z	-5/45	-5/45	10/45

Отримаємо оптимальний план задачі на мінімум $X^*=(1/45;9/45;9/45;0;0)$ з ціною гри $V=\frac{1}{z}=\frac{45}{10}=4{,}5\in(4;5)$.

Відновлюємо оптимальний план задачі на максимум за правилом

$$\begin{array}{cc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}.$$

Отже, оптимальний план задачі на максимум $Y^*=(0;5/45;5/45;0;0)$.

Знаходимо оптимальні значення компонентів векторів мішаних стратегій

$$p_1^*=x_1^*\cdot V=\frac{1}{45}\cdot\frac{45}{10}=\frac{1}{10};\ p_4^*=x_2^*\cdot V=\frac{9}{45}\cdot\frac{45}{10}=\frac{9}{10}\ \Rightarrow$$

$$\vec{p}^*=\left(\frac{1}{10};0;0;\frac{9}{10}\right);$$

$$q_1^*=y_1\cdot V=0;\ q_2^*=y_2^*\cdot V=\frac{5}{45}\cdot\frac{45}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2};$$

$$q_4^*=y_3^*\cdot V=\frac{5}{45}\cdot\frac{45}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \vec{q}^*=\left(0;\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right).$$

Остаточний вигляд відповіді розв'язаної матричної гри у мішаних стратегіях містить три складові

$$V = 4,5; \ \vec{p}^* = \left(\frac{1}{10}; 0; 0; \frac{9}{10} \right); \ \vec{q}^* = \left(0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2} \right).$$

Ця відповідь означає, що для досягнення оптимальної ціни гри *V=4,5* першому гравцю при неодноразовому повторенні "гри" (точніше, конкурентної ситуації) слід взагалі не використовувати другу та третю стратегії, а серед першої та четвертої у переважній більшості "ігор" використовувати четверту. Другому гравцю в аналогічній ситуації не рекомендовано використовувати першу та третю стратегії поведінки, а другу та четверту – у рівних пропорціях.

1.6 Аналітичний метод розв'язання матричної гри 2x2

Якщо матрична гра $m \times n$ не має сідлової точки, то знаходження розв'язків є досить складною задачею, особливо при великих m та n. Інколи, як було зазначено вище, задачу вдається спростити, зменшуючи кількість стратегій, закреслюючи заздалегідь невигідні. Найбільш простими випадками скінченних ігор, які можна завжди розв'язати елементарними способами є ігри 2×2, $2 \times n$, $m \times 2$.

Розглянемо гру 2×2 з платіжною матрицею $\underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ без сідлової точки[2]. Ще одним методом розв'язання такої гри є *аналітичний метод*. Розв'язанням гри є оптимальні мішані стратегії гравців $\vec{p}^* = (p_1^*, p_2^*)$ і $\vec{q}^* = (q_1^*, q_2^*)$. Очевидно, що $p_1^* + p_2^* = 1, \ q_1^* + q_2^* = 1$.

Використання гравцем А своєї оптимальної мішаної стратегії гарантує йому отримання середнього виграшу, не меншого ніж

[2] Випадок гри з сідловою точкою розглядався у п. 1.2

ціна гри V. При цьому, якщо гравець В дотримується своєї оптимальної мішаної стратегії, то середній виграш гравця А буде дорівнювати V, якщо гравець В не використовує свою оптимальну стратегію, то середній виграш гравця А буде більше V.

Для знаходження оптимальної мішаної стратегії $\vec{p}^* = (p_1^*, p_2^*)$ гравця А і відповідної ціни гри V необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = V, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = V, \\ \quad p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \tag{1.6.1}$$

Перше рівняння визначає математичне сподівання виграшу гравця А при використанні ним стратегії $\vec{p}^*$ проти стратегії B_1, друге рівняння визначає математичне сподівання виграшу гравця А при використанні ним стратегії $\vec{p}^*$ проти стратегії B_2; третє рівняння – властивість компонентів мішаної стратегії гравця.

Прирівнюючи вирази для V з рівнянь системи і враховуючи, що $p_1 + p_2 = 1,$ отримаємо оптимальні значення компонентів вектора мішаних стратегій гравця А:

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \tag{1.6.2}$$

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Аналогічно для гравця В: для знаходження оптимальної мішаної стратегії $\vec{q}^* = (q_1^*, q_2^*)$ і відповідної ціни гри V вирішуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = V, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = V, \\ \quad q_1 + q_2 = 1. \end{cases} \tag{1.6.3}$$

Отримаємо оптимальні значення компонентів вектора мішаних стратегій гравця В:

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{1.6.4}$$

Ціна гри V є загальною для обох гравців.

Приклад 1. Розв’язати матричну гру з заданою платіжною матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Знайдемо нижню та верхню ціни гри за формулами (1.2.1), (1.2.2)

$$\begin{array}{ccc} & \text{min} & \\ \text{max}\downarrow & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}, \\ & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} & \end{array}$$

$$\alpha = \max\{1, 1\} = 1, \ \beta = \min\{2, 3\} = 2,$$

Отримали випадок, коли $\alpha \neq \beta$, тобто матричну гру у мішаних стратегіях з ціною гри в межах інтервалу: $1 \le V \le 2$. Гра не має сідлової точки. Оптимальний розв’язок слід шукати, використовуючи вектори мішаних стратегій.

Вводимо вектори мішаних стратегій для першого та другого гравців $\vec{p} = (p_1, p_2)$, $\vec{q} = (q_1, q_2)$.

За формулами (1.6.2), (1.6.4) знаходимо оптимальні стратегії кожного гравця та ціну гри:

$$p_1^* = \frac{1-2}{1+1-3-2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3},\ p_2^* = \frac{1-3}{-3} = \frac{2}{3},$$
$$q_1^* = \frac{1-3}{-3} = \frac{2}{3},\ q_2^* = \frac{1-2}{-3} = \frac{1}{3},$$
$$V = \frac{1\cdot 1-3\cdot 2}{-3} = \frac{5}{3}.$$

Відповідь. Оптимальні мішані стратегії гравців $\vec{p}^* = \left(\frac{1}{3},\ \ \frac{2}{3}\right)$ і $\vec{q}^* = \left(\frac{2}{3},\ \ \frac{1}{3}\right)$ відповідно, ціна гри складає $V = \frac{5}{3}$.

Дана відповідь означає таке:

− якщо перший гравець з імовірністю 1/3 буде застосовувати першу стратегію і з імовірністю 2/3 другу, то при досить великій кількості ігор з даною матрицею його виграш в середньому складе не менше 5/3 ;

− якщо другий гравець з імовірністю 2/3 буде застосовувати першу стратегію і з імовірністю 1/3 другу, то при досить великій кількості ігор з даною матрицею його програш в середньому складе не більше 5/3 .

1.7 Геометричний метод розв’язання матричної гри

Ігри 2x2, 2xn, mx2 можна розв’язувати геометрично. Якщо немає сідлової точки, то ці ігри розв’язуються у мішаних стратегіях, а ціна гри належить інтервалу $(\alpha;\beta)$.

1.1 Матрична гра 2x2

Розглянемо гру 2x2. Для знаходження ймовірностей (p_1, p_2) і ціни гри V в прямокутній системі координат в точках $x=0$, $x=1$ осі Ox відбудуємо перпендикуляри і позначимо їх A_1 і A_2 – відповідно до стратегій гравця A. На перпендикулярах A_1 і A_2

будемо відкладати виграші гравця А, які відповідають цим чистим стратегіям.

Зобразимо стратегію B_1: на прямій A_1 відкладемо a_{11}, а на прямій A_2 відкладемо a_{21}. З'єднаємо ці точки і отримаємо пряму B_1B_1 (рисунок 1.7.1.1).

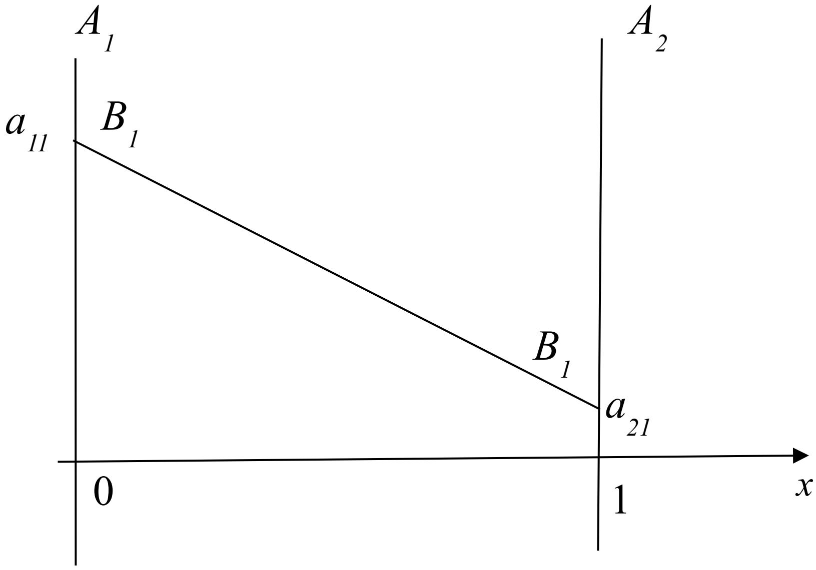


Рисунок 1.7.1.1 – Графічна інтерпретація стратегії B_1

Аналогічно зобразимо стратегію B_2, відклавши на прямій A_1 значення a_{12}, а на прямій A_2 – значення a_{22}, отримаємо пряму B_2B_2 (рисунок 1.7.1.2)

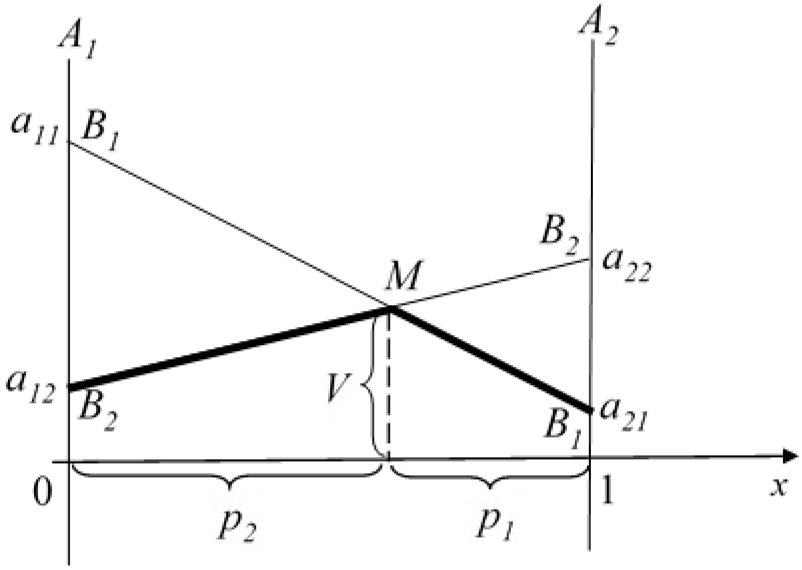


Рисунок 1.7.1.2 – Графічна інтерпретація гри 2×2 для гравця А

Кожній точці на відрізку [0; 1] відповідає мішана стратегія гравця А, причому p_2 – відстань від цієї точки до нуля, а p_1 – відстань від цієї точки до точки 1 (рисунок 1.7.1.2).

При $p_1 = 0$ гравець А застосовує свою другу чисту стратегію. Якщо при цьому гравець В застосовує свою першу чисту стратегію, то виграш гравця А дорівнює a_{21}, а якщо гравець В застосовує свою другу чисту стратегію, то виграш гравця А дорівнює a_{22}.

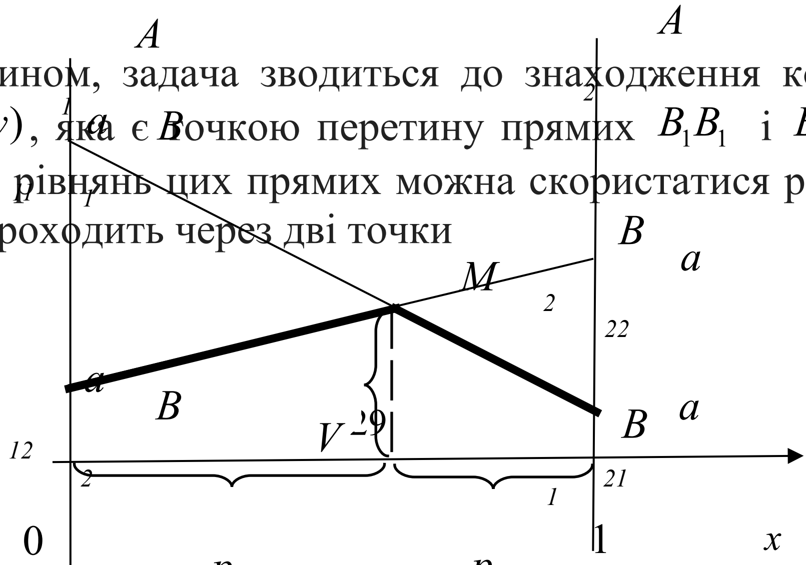
При p_1=1 гравець А застосовує свою першу чисту стратегію. Якщо при цьому гравець В застосовує свою першу чисту стратегію, то виграш гравця А дорівнює a_{11}, а при застосуванні гравцем В другої чистої стратегії – a_{12}.

Відповідно до максимінного критерію, гравець А повинен вибрати таку мішану стратегію, яка гарантує йому максимальний гарантований виграш при будь-яких діях гравця В. Точка М перетину відрізків прямих B_1B_1 і B_2B_2 і визначає як оптимальну ціну гри V, так і оптимальні ймовірності p_1 і $p_2 = 1 - p_1$, які відповідають оптимальній мішаній стратегії гравця А, тобто дає розв'язок системи рівнянь (1.6.1).

Ламана B_2MB_1 (на рисунку 1.7.1.2 виділено напівжирним) визначає мінімальні можливі середні виграші гравця А при використанні ним своїх мішаних стратегій. Найвища точка $M(x, y)$ ламаної B_2MB_1 – визначає найкращий середній виграш гравця А з усіх мінімальних, вона відповідає оптимальній мішаній стратегії гравця А, при цьому

$$p_1^* = 1 - x,\ p_2^* = x,\ V = y.$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження координат точки $M(x, y)$, яка є точкою перетину прямих B_1B_1 і B_2B_2. Для знаходження рівнянь цих прямих можна скористатися рівнянням прямої, що проходить через дві точки



$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

з урахуванням того, що пряму B_1B_1 визначають точки $B_1(0, a_{11})$ і $B_1(1, a_{21})$, а пряму B_2B_2 – точки $B_2(0, a_{12})$ і $B_2(1, a_{22})$.

Для гравця B оптимальна мішана стратегія знаходиться аналогічно, але точка M визначається як найнижча точка верхньої ламаної A_1MA_2 – напівжирна ламана на рисунку 1.7.1.3.

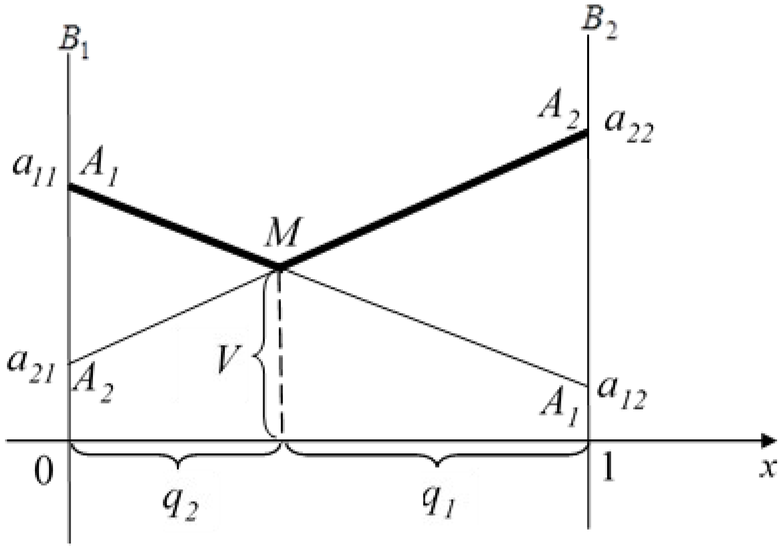


Рисунок 1.7.1.3 – Графічна інтерпретація гри 2×2 для гравця B

Координати точки $M(x, y)$ знаходимо, як координати точки перетину прямих A_1A_1 і A_2A_2, компоненти оптимальної мішаної стратегії $\vec{q}^*=(q_1^*, q_2^*)$ гравця B і ціну гри V можна знайти за такими формулами:

$$q_1^*=1-x,\ q_2^*=x,\ V=y.$$

Приклад 2. Розв'язати матричну гру з прикладу 1 геометричним способом.

Знайдемо оптимальну мішану стратегію для гравця А. Для цього побудуємо стратегії гравця А, як це було показано на рисунках 1.7.1.1 та 1.7.1.2.

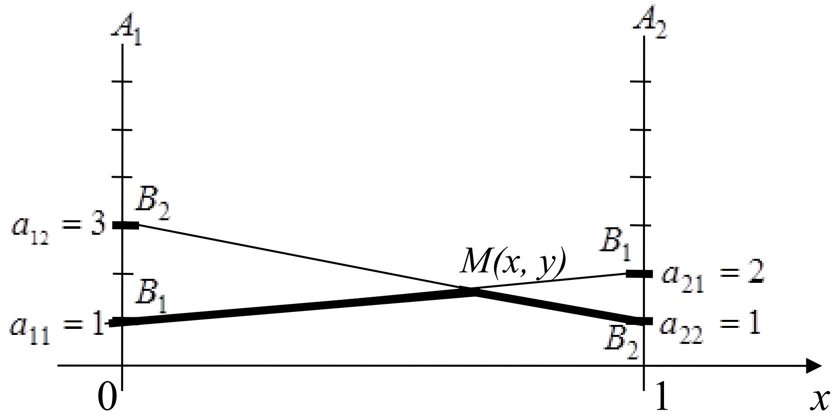


Рисунок 1.7.1.4 – Графічна інтерпретація гри з прикладу 1 для гравця А

Знайдемо координати точки $M(x, y)$ на рисунку 1.7.1.4 як координати точки перетину прямих B_1B_1 і B_2B_2. Запишемо рівняння прямої B_1B_1 з урахуванням того, що пряму B_1B_1 визначають точки $B_1(0, 1)$ і $B_1(1, 2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 1}{2 - 1} \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow y = x + 1.$$

Запишемо рівняння прямої B_2B_2 з урахуванням того, що пряму B_2B_2 визначають точки $B_2(0, 3)$ і $B_2(1, 1)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 3}{1 - 3} \Rightarrow x = \frac{y - 3}{-2} \Rightarrow y = 3 - 2x.$$

Розв’язуючи систему рівнянь $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$, отримаємо розв’язок $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{5}{3}$.

Отже, $p_1^* = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $p_2^* = \frac{2}{3}$, $V = \frac{5}{3}$.

Знайдемо оптимальну мішану стратегію для гравця В. Для цього побудуємо стратегії гравця В, як це було показано на рисунку 1.7.1.3.

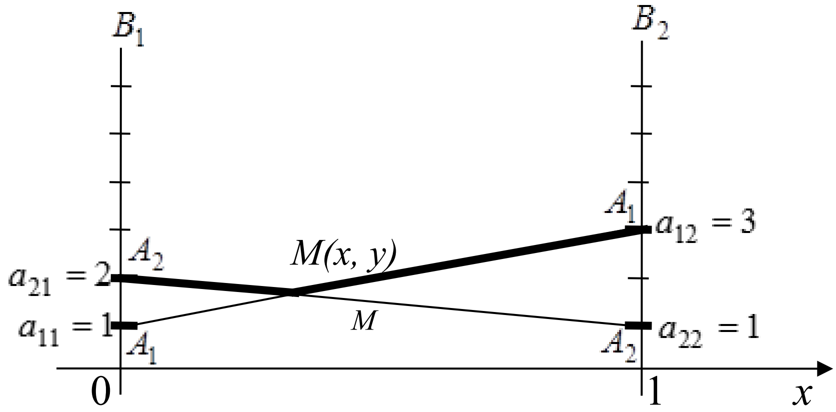


Рисунок 1.7.1.5 – Графічна інтерпретація гри з прикладу 1 для гравця В

Знайдемо координати точки $M(x, y)$ на рисунку 1.7.1.5 як координати точки перетину прямих A_1A_1 і A_2A_2. Запишемо рівняння прямої A_1A_1 з урахуванням того, що пряму A_1A_1 визначають точки $A_1(0, 1)$ і $A_1(1, 3)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 1}{3 - 1} \Rightarrow 2x = y - 1 \Rightarrow y = 2x + 1.$$

Запишемо рівняння прямої A_2A_2 з урахуванням того, що пряму A_2A_2 визначають точки $A_2(0, 2)$ і $A_2(1, 1)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 2}{1 - 2} \Rightarrow -x = y - 2 \Rightarrow y = 2 - x.$$

Вирішуючи систему рівнянь $\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = 2-x \end{cases}$, отримаємо розв'язок $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{5}{3}.$

Отже, $q_1^* = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},\ q_2^* = \frac{1}{3},\ V = \frac{5}{3}.$

Відповідь. Оптимальні мішані стратегії гравців $\vec{p}^* = \left(\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} \right)$ і $\vec{q}^* = \left(\frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3} \right)$ відповідно, ціна гри складає $V = \frac{5}{3}.$

1.2 Матрична гра 2xn

Нехай гра задана платіжною матрицею

$$\underset{2\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв'язання гри у мішаних стратегіях *геометричним методом*:

а) для кожної з n стратегій гравця В побудуємо відповідний їй відрізок на площині;

б) знайдемо нижню межу виграшу, одержуваного гравцем А, і визначимо точку на нижній межі, яка відповідає найбільшому виграшу;

в) виділимо дві активні стратегії гравця В, відрізки яких проходять через дану точку, і далі розглядаємо тільки ці дві стратегії гравця В.

Отже, розв'язання гри $2\times n$ звелося до гри з матрицею 2×2.

Приклад. Розв'язати матричну гру з заданою платіжною матрицею

$$A = \underset{2\times 4}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Знайдемо нижню та верхню ціни гри за формулами (1.2.1), (1.2.2)

$$\begin{array}{c} \min \\ \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 4 & 3 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \Big\downarrow \max ,$$

$$\alpha = \max\{1, 1\} = 1,\ \beta = \min\{4, 3, 3, 4\} = 3,$$

Отже, $\alpha \neq \beta$, ціна гри знаходиться в межах інтервалу: $1 \le v \le 3$. Гра не має сідлової точки. Оптимальний розв'язок слід шукати в області мішаних стратегій.

Побудуємо на площині стратегії гравця А (рисунок 1.7.2.1).

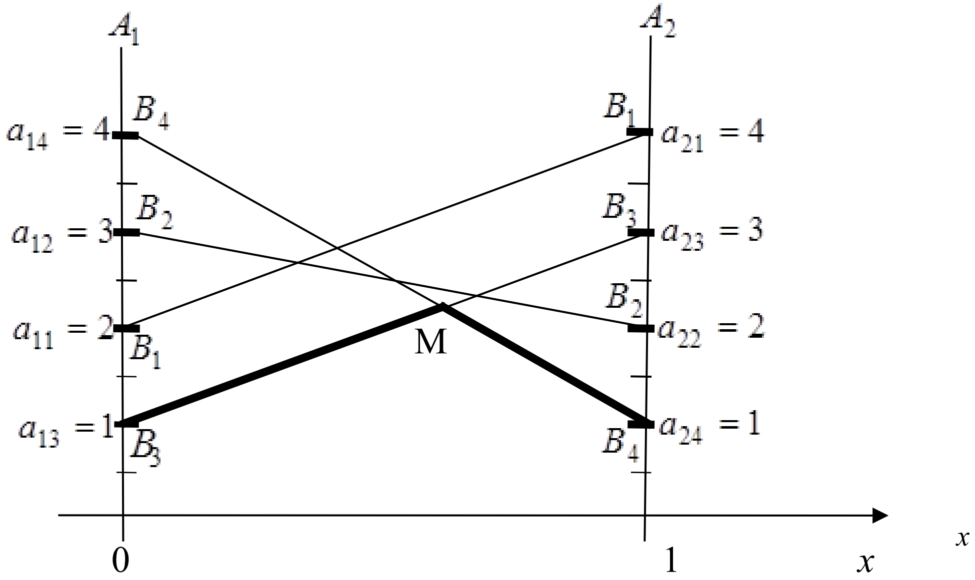


Рисунок 1.7.2.1 – Графічна інтерпретація гри $2 \times n$ для гравця А

Нижньою межею виграшу для гравця А є ламана B_3MB_4. Стратегії B_3 та B_4 є активними стратегіями гравця В. Координати точки їх перетину $M\,(x, y)$ визначають оптимальні стратегії гравців і ціну гри. Другому гравцеві невигідно застосовувати стратегії B_1 і B_2, тому ймовірність їх застосування дорівнює нулю, тобто $q_1 = q_2 = 0$.

Розв'язання гри зводиться до розв'язання гри з матрицею 2×2

$$\underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha = \max\{1, 1\} = 1,\ \beta = \min\{3, 4\} = 3,\ \alpha \neq \beta,\ 1 \le V \le 3.$$

За формулами (1.6.2), (1.6.4) знаходимо оптимальні стратегії кожного гравця і ціну гри:

$$p_1^* = \frac{2}{5},\ p_2^* = \frac{3}{5},\ q_1^* = 0,\ q_2^* = 0,\ q_3^* = \frac{3}{5},\ q_4^* = \frac{2}{5}, V = \frac{11}{5}.$$

Відповідь. Оптимальні мішані стратегії гравців $\vec{p}^* = \left(\frac{2}{5},\ \ \frac{3}{5}\right)$ і $\vec{q}^* = \left(0,\ \ 0,\ \ \frac{3}{5},\ \ \frac{2}{5}\right)$, ціна гри складає $V = \frac{11}{5}$.

Дана відповідь означає:

– якщо перший гравець з імовірністю 2/5 буде застосовувати першу стратегію і з імовірністю 3/5 другу, то при досить великій кількості ігор з даною матрицею його виграш в середньому складе не менше 11/5;

– якщо другий гравець з імовірністю 3/5 буде застосовувати третю стратегію, з імовірністю 2/5 четверту і не буде використовувати першу і другу стратегії, то при досить великій кількості ігор з даною матрицею його програш в середньому складе не більше 11/5.

1.3 Матрична гра m × 2

Нехай гра $m \times 2$ задана платіжною матрицею

$$\underset{m\times 2}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}.$$

Розв’язання гри у мішаних стратегіях *геометричним методом* може бути отримано аналогічно *випадку 1.7.2:*

а) для кожної з m стратегій гравця А побудуємо відповідний їй відрізок на площині;

б) знайдемо верхню межу програшу, одержуваного гравцем В, і визначимо точку на верхній межі, що відповідає найменшому програшу;

в) виділимо дві активні стратегії гравця А, відрізки яких проходять через дану точку, і далі розглядаємо тільки ці дві стратегії гравця А.

Отже, розв’язання гри $m\times 2$ звелося до гри з матрицею 2×2.

Приклад 4. Розв’язати матричну гру з заданою платіжною матрицею

$$\underset{4\times 2}{A}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо нижню та верхню ціни гри за формулами (1.2.1), (1.2.2)

$$\begin{array}{cc} & \min \\ \max\downarrow & \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 4 & 6 \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\alpha=\max\{3,2,0,-1\}=3,\ \beta=\min\{4,6\}=4,$$

Отже, $\alpha \neq \beta$, ціна гри знаходиться в межах інтервалу: $3 \leq V \leq 4$.

Гра не має сідлової точки. Оптимальний розв'язок слід шукати в області мішаних стратегій.

Побудуємо на площині відрізки, які відповідають стратегіям першого гравця – рисунок 1.7.3.1.

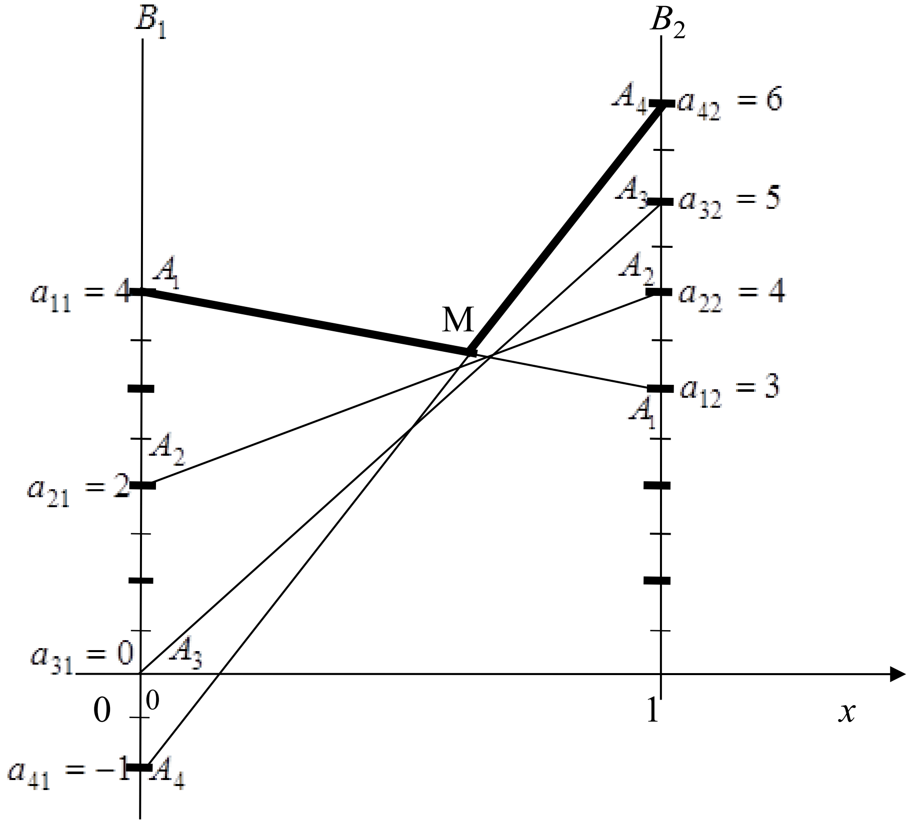


Рисунок 1.7.3.1 – Графічна інтерпретація гри $m \times 2$ для гравця В

Верхньою межею програшу для гравця В є ламана $A_1 M A_4$. Стратегії A_1 і A_4 є активними стратегіями гравця А. Координати точки їх перетину $M\,(x, y)$ визначають оптимальні стратегії гравців і ціну гри. Першому гравцеві невигідно застосовувати стратегії A_2 і A_3, тому ймовірність їх застосування дорівнює нулю, тобто $p_2 = p_3 = 0$. Розв'язання гри зводиться до розв'язання гри з матрицею 2×2 $\underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$:

$\alpha = \max\{3, -1\} = 3,\ \beta = \min\{4, 6\} = 4,\ \alpha \neq \beta,\ 3 \leq V \leq 4.$

За формулами (1.6.2), (1.6.4) знаходимо оптимальні стратегії кожного гравця і ціну гри:

$$p_1^* = \frac{7}{8},\ p_4^* = \frac{1}{8},\ q_1^* = \frac{3}{8},\ q_2^* = \frac{5}{8},\ V = \frac{27}{8}.$$

Відповідь. Оптимальні мішані стратегії гравців $\vec{p}^* = \left(\frac{7}{8},\quad 0,\quad 0,\quad \frac{1}{8}\right)$ і $\vec{q}^* = \left(\frac{3}{8},\quad \frac{5}{8}\right)$, ціна гри складає $V = \frac{27}{8}$.

Дана відповідь означає :

– якщо перший гравець з імовірністю 7/8 буде застосовувати першу стратегію, з імовірністю 1/8 четверту і не буде використовувати другу і третю стратегії, то при досить великій кількості ігор з даною матрицею його виграш в середньому складе не менше 27/8;

– якщо другий гравець з імовірністю 3/8 буде застосовувати першу стратегію і з імовірністю 5/8 другу, то при досить великій кількості ігор з даною матрицею його програш в середньому складе не більше 27/8 .

Отже, за допомогою геометричного методу можна визначати оптимальну стратегію як гравця А, так і гравця В, причому в обох випадках використовується мінімаксний критерій, але в другому випадку будується не нижня, а верхня межа виграшу і на ній визначається не максимум, а мінімум.

Зауваження. Якщо платіжна матриця містить від’ємні числа, то для графічного розв’язання задачі краще перейти до нової матриці з невід'ємними елементами, для чого до елементів вихідної матриці достатньо додати відповідне позитивне число. Розв’язання гри при цьому не зміниться, а ціна гри збільшиться на це число.

2. ЗАДАЧІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Незважаючи на тісний зв’язок задач прийняття рішень та матричних ігор, вони мають одну, дуже характерну відмінність: у прийнятті рішень бере участь *одна особа*, у матричній грі – *дві*, які мають *конкуруючі цілі*.

1.1 Класифікація задач прийняття рішень

Типи задач прийняття рішень пов’язані з обсягом даних, який має особа, що приймає рішення. І тому класифікація задач визначається ступенем доброякісності даних, які використовуються при прийнятті рішення.

1*Задачі прийняття рішень в умовах визначеності*. В цьому випадку дані надійно визначені. Можна вважати, що моделі лінійного програмування теж відносяться до прийняття рішень в умовах визначеності, але лише у тих випадках, коли альтернативні рішення можна зв'язати між собою точними лінійними функціями. Але саме у розділі "Прийняття рішень в умовах визначеності" розглядають ситуацію, яка дає можливість використовувати інший підхід до прийняття рішень. Ця ситуація характеризується випадками, коли, наприклад, для ідей, почуттів, емоцій визначаються деякі кількісні показники, які забезпечують числову шкалу переваг для можливих альтернативних рішень. Цей підхід відомий як *метод аналізу ієрархій*.

2 *Задачі прийняття рішень в умовах ризику*. В цьому випадку дані можна описати за допомогою ймовірнісних розподілів. Крім того, з'являється поняття *вартості рішення*, що приймається. Ця вартість відбиває очікуваний прибуток чи зроблені витрати, і саме очікувана вартість описується ймовірнісними розподілами. Метод прийняття рішення ґрунтується на *критерії значення, що очікується*, відповідно до якого альтернативні рішення порівнюються з точки зору максимізації прибутку або мінімізації витрат.

3 *Задачі прийняття рішень в умовах невизначеності.* Прийняття рішення в цих умовах, як і в умовах ризику, ґрунтується на обранні альтернативних рішень за допомогою відомих вартостей рішень, які утворюють *матрицю платежів*. Вартість платежу, з іншого боку, залежить від тих об'єктивних обставин, з якими стикається особа в момент прийняття рішення, але відомим є тільки коло цих обставин, і немає жодних відомостей, навіть у ймовірнісному сенсі, відносно того, яка ситуація очікується. Ці обставини називають *"станами природи"*.

Серед задач цього класу зустрічаються динамічні або марковські задачі прийняття рішень, в яких процес прийняття рішень проводиться поетапно впродовж деякого періоду, і при цьому відомими вважаються перехідні матриці змін станів природи за один період в рамках марковського процесу з дискретним часом.

Отже, аналізуючи три можливі випадки прийняття рішень, можна відмітити: у першому випадку дані для прийняття рішення надійно визначені; у третьому – вони не визначені; другий випадок є проміжним за якістю даних.

Розглянемо усі три випадки на відповідних прикладах.

1.2 Прийняття рішень в умовах визначеності

Приклад. Відділ кадрів звузив пошук майбутнього співробітника до трьох кандидатур: Бориса (Б), Ігоря (І) та Михайла (М). Кінцевий відбір заснований на трьох критеріях:

співбесіда (С), досвід роботи (Д) та рекомендації (Р). При цьому у відділі кадрів вироблена така шкала переваг: ”вага” співбесіди вдвічі перевищує ”вагу” досвіду роботи і, навпаки, вважається, що рекомендаціям надається в 4 рази більше значення, ніж співбесіді, рекомендації цінуються у 5 разів більше, ніж досвід роботи. Відділом кадрів проведені співбесіди, зібрані дані відносно досвіду роботи претендентів та їх рекомендацій, що теж відбилося у відповідних коефіцієнтах, які будуть наведені нижче. Треба визначитись, якого з трьох кандидатів слід прийняти на роботу.

Загальна структура методу ієрархій може включати декілька ієрархічних рівнів зі своїми критеріями. Наведена задача має єдиний рівень ієрархії – вибір відділу кадрів – з трьома критеріями: співбесіда, досвід роботи та рекомендації.

Важливою складовою методу аналізу ієрархій є визначення *відносних вагових коефіцієнтів* для оцінки альтернативних рішень. Це визначення включає створення *матриці парних порівнянь*, яка відбиває думку особи, що приймає рішення, відносно важливості різних критеріїв. Матриця парних порівнянь A розміром $[n \times n]$ будується для n критеріїв за таким принципом. Її елемент a_{ij}, який приймає значення від 1 до 9 і стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпця (номери рядів одночасно віддзеркалюють однакові критерії), відбиває думку, ”в скільки разів” критерій i вважається важливішим за критерій j. Очевидно, що за таким принципом побудування матриці порівняння її діагональні елементи $a_{ii}=1$, а якщо, наприклад, елемент $a_{ij}=5$, то $a_{ji}=1/5$.

Тоді за умовами задачі

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} C & Д & P \end{array} \\ A = \begin{array}{c} C \\ Д \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} \quad 11/2 \quad 8 \quad 29/20$$

Після проведеного тестування з трьома претендентами відділ кадрів оформив результати також у вигляді трьох (для кожного критерію) матриць порівняння A^C, $A^Д$, A^P по трьох претендентах

$$A^C = \begin{array}{c} \\ Б \\ I \\ M \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Б & I & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1/5 \\ 1/4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}; \qquad A^Д = \begin{array}{c} \\ Б \\ I \\ M \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Б & I & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 2 \\ 3 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array};$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} \quad 19/12 \quad 9 \quad 26/5 \qquad\qquad \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \quad 9/2 \quad 10/3 \quad 7/2$$

$$A^P = \begin{array}{c} \\ Б \\ I \\ M \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Б & I & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} \quad 3 \quad 7/2 \quad 5/2$$

Відносні вагові коефіцієнти знаходяться за такою методикою. Спочатку складаються матриці вагових коефіцієнтів з відповідних матриць порівняння діленням елемента кожного стовпця на суму елементів цього стовпця, яка підрахована і показана під матрицями порівняння. Отже, побудуємо матриці вагових коефіцієнтів

$$k_A = \begin{array}{c} \\ C \\ Д \\ P \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & Д & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2/11 & 2/8 & 5/29 \\ 1/11 & 1/8 & 4/29 \\ 8/11 & 5/8 & 20/29 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{c} \\ C \\ Д \\ P \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & Д & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}25 & 0{,}17 \\ 0{,}09 & 0{,}125 & 0{,}16 \\ 0{,}727 & 0{,}625 & 0{,}67 \end{pmatrix} \end{array};$$

$$k^C = \begin{array}{c} \\ Б \\ I \\ M \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Б & I & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 12/19 & 3/9 & 20/26 \\ 4/19 & 1/9 & 1/26 \\ 3/19 & 5/9 & 5/26 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{c} \\ Б \\ I \\ M \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Б & I & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}63 & 0{,}33 & 0{,}77 \\ 0{,}21 & 0{,}11 & 0{,}038 \\ 0{,}158 & 0{,}56 & 0{,}19 \end{pmatrix} \end{array};$$

$$k^{Д} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} Б & I & M \end{array} \\ \begin{array}{c} Б \\ I \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} 2/9 & 1/10 & 4/7 \\ 6/9 & 3/10 & 1/7 \\ 1/9 & 6/10 & 2/7 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} Б & I & M \end{array} \\ \begin{array}{c} Б \\ I \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} 0,222 & 0,1 & 0,571 \\ 0,667 & 0,3 & 0,143 \\ 0,111 & 0,6 & 0,287 \end{pmatrix} \end{array};$$

$$k^{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} Б & I & M \end{array} \\ \begin{array}{c} Б \\ I \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} 1/4 & 1/7 & 2/5 \\ 2/4 & 2/7 & 1/5 \\ 1/4 & 4/7 & 2/5 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} Б & I & M \end{array} \\ \begin{array}{c} Б \\ I \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} 0,25 & 0,14 & 0,4 \\ 0,5 & 0,29 & 0,2 \\ 0,25 & 0,57 & 0,4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Остаточно значення вагових коефіцієнтів знаходяться як середні арифметичні по кожному рядку.

Наприклад, з матриці *А*: $k^{C}=(0,18+0,25+0,17)/3\approx 0,2;$ аналогічно $k^{Д}\approx 0,125;$ $k^{P}\approx 0,675$. Величини вагових коефіцієнтів свідчать про те, що відділ кадрів найбільшого значення надає рекомендаціям претендента, і значно менше уваги приділяє результатам співбесіди, а досвід роботи вважає майже неважливим. Необхідно перевірити, щоб сума коефіцієнтів дорівнювала одиниці, щоб їх величини дійсно можна було порівнювати *(0,2+0,125+0,675=1)*. Так були визначені вагові коефіцієнти кожного критерію ієрархії. Аналогічно знаходимо вагові коефіцієнти кожного претендента (альтернативного рішення) за кожним критерієм:

$$k_{Б}^{C} = 0,58;\ k_{I}^{C} = 0,12;\ k_{M}^{C} = 0,3;$$
$$k_{Б}^{Д} = 0,298;\ k_{I}^{Д} = 0,37;\ k_{M}^{Д} = 0,332;$$
$$k_{Б}^{P} = 0,26;\ k_{I}^{P} = 0,33;\ k_{M}^{P} = 0,41.$$

Кожен з цих коефіцієнтів демонструє ступінь успішності проходження кожним претендентом тестування за кожним критерієм з точки зору відділу кадрів.

На підставі отриманих результатів доцільно побудувати структурну схему цієї задачі прийняття рішень з єдиним ієрархічним рівнем з трьома критеріями і трьома альтернативними рішеннями (рисунок 2.2.1).

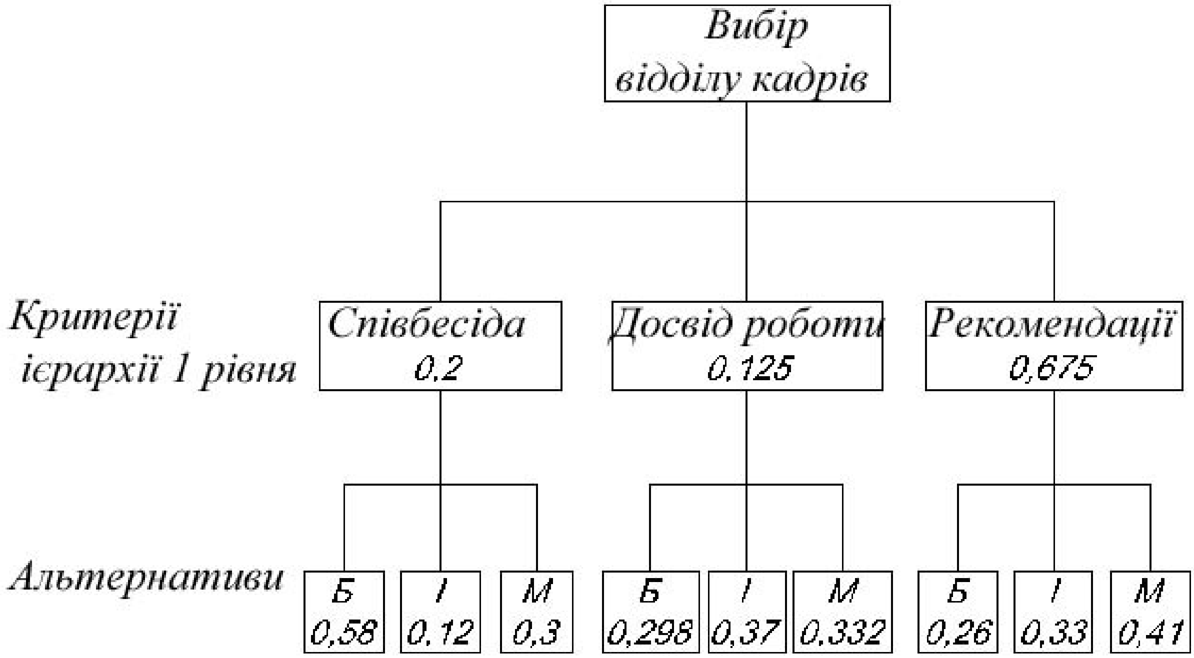


Рисунок 2.2.1 – Структурна схема задачі прийняття рішень

Остаточна оцінка кандидатів ґрунтується на обчисленні *комбінованого вагового коефіцієнта* для кожного з них, а саме:

$$k_Б=0,2\times0,58+0,125\times0,298+0,675\times0,26=0,32875;$$

$$k_I=0,2\times0,12+0,125\times0,37+0,675\times0,33=0,293;$$

$$k_M=0,2\times0,3+0,125\times0,332+0,675\times0,41=0,37825.$$

На базі цих обчислень найвищий бал отримує кандидат Михайло, що надає йому переваги при прийнятті на роботу, тобто оптимальним рішенням відділу кадрів є вибір Михайла серед усіх претендентів.

Зрозуміти, як може виникнути *II* –й рівень ієрархії, можна, наприклад, у такій ситуації, коли остаточно приймає рішення директор підприємства, який користується рекомендаціями, наприклад, відділу кадрів та ще якогось особового відділу - *I* –й рівень ієрархії з коефіцієнтами ваги з точки зору директора, а критерії цих двох відділів – це *II*-й рівень ієрархії.

1.3 Прийняття рішень в умовах ризику

Приклад. Нехай якась юридична особа воліє вкласти на фондовій біржі 10000 грошових одиниць в акції однієї з двох компаній: *A* або *B*. Акції компанії *A* є ризикованими, але можуть принести 50 % прибутку від суми інвестицій протягом наступного року. Якщо умови фондової біржі будуть несприятливими, сума інвестицій може знецінитись на 20 %. Компанія *B* забезпечує безпеку інвестицій з 15 % прибутком в умовах підвищення котирування на біржі та тільки 5 % - в умовах зниження котирування. Усі аналітичні публікації, з якими можна ознайомитись (а вони завжди є наприкінці року), з ймовірністю 60 % прогнозують підвищення котирувань, а з ймовірністю 40 % - зниження котирувань. В яку компанію слід вкласти гроші?

Критерій очікуваного рішення зводиться або до максимізації прибутку, або до мінімізації очікуваних витрат. Розв'язання наданої задачі спрямовано на пошук рішення для підвищення прибутку. В цьому прикладі, як і в усіх прикладах задачі прийняття рішень в умовах ризику, передбачається, що прибуток (витрати), пов'язаний з кожним альтернативним рішенням, є випадковою величиною.

У наведеному прикладі розглядається нескладна ситуація, що зв'язана з прийняттям рішення при наявності скінченної кількості альтернатив і точних значень *матриці доходів* (поява *матриці платежів* є принциповою відмінністю таких задач від задач прийняття рішень в умовах визначеності).

Інформація задачі може бути підсумована у таблиці 2.3.1 або подана у вигляді *дерева розв'язків*.

Таблиця 2.3.1

Альтернативне рішення	Прибуток від інвестицій за один рік	
	При підвищенні котирувань (гр. од.)	При зниженні котирувань (гр. од.)
Акції компанії *A*	5000	-2000
Акції компанії *B*	1500	500
Ймовірність події	0,6	0,4

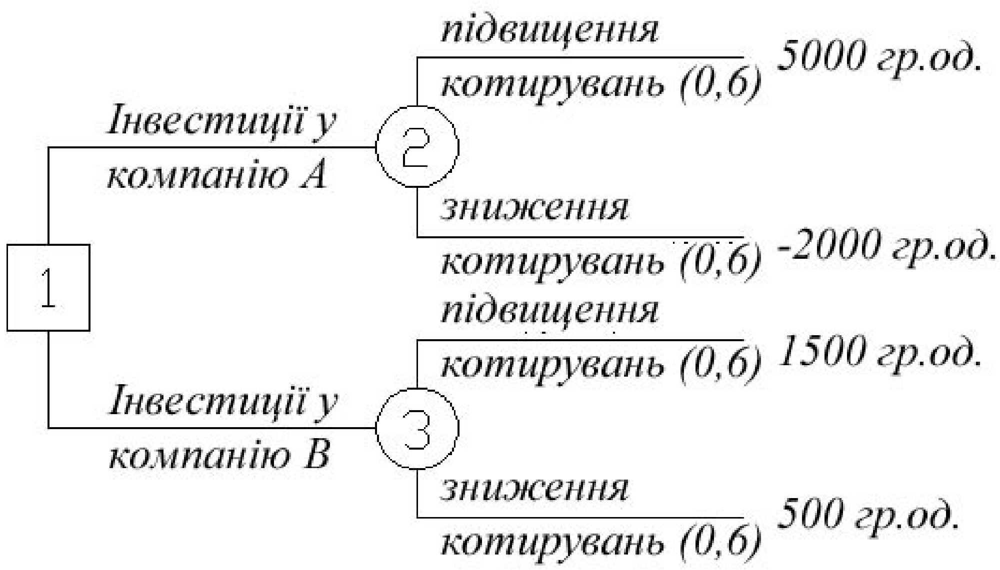


Рисунок 2.3.1 – Дерево розв’язків

На рисунку 2.3.1 використовується два типи вершин: квадратик являє ”вирішальну” вершину, кружечок - ”випадкову”. Таким чином, з вершини 1 (”вирішальної”) виходять дві гілки, які відображують альтернативи, пов’язані з купівлею акцій компаній *A* або *B*. Далі дві гілки, що виходять з ”випадкових” вершин 2 і 3, відповідають ситуаціям підвищення і зниження котирування на біржі з ймовірностями їх можливих появ і відповідними платежами.

Отже, виходячи зі схеми рисунка 2.3.1, отримаємо очікуваний прибуток за рік для кожної з двох альтернатив.

Для акцій компанії *A*: $5000\times0{,}6+(-2000)\times0{,}4=2200$ гр. од.

Для акцій компанії *B*: $1500\times0{,}6+500\times0{,}4=1100$ гр. од.

Очевидно, що рішенням, які ґрунтуються на зроблених обчисленнях, є купівля акцій компанії *A*.

Існують більш складні ситуації вибору рішень в умовах ризику, пов’язані або з ситуацією, коли платіж є математичною функцією альтернативних рішень, або у випадках інших критеріїв очікуваного значення. Такі випадки описані в спеціальній літературі [6,7].

1.4 Прийняття рішень в умовах невизначеності

Приклад. Спортивна федерація підбирає місце для будівництва спортивного табору для проведення літніх зборів. Адміністрація вважає, що число учасників збору може бути 200, 250, 300 або 350 осіб. Вартість літнього табору повинна бути мінімальною, оскільки він будується для того, щоб задовольнити мінімальні потреби учасників. Відхилення у бік зменшення або збільшення відносного рівня потреб у зручностях спричинять за собою додаткові витрати, які можуть бути обумовленими спорудженням надлишкових (невживаних) потужностей або, навпаки, втратою можливості отримати прибуток у випадку, коли деякі потреби не виконуються (втратою учасників, яких не задовольнить рівень зручностей). Слід прийняти оптимальне рішення, з точки зору вкладених витрат, на яку кількість учасників будувати табір.

Нехай позначення A_1-A_4 $(i=1,\ldots,4)$ - альтернативні рішення, а саме можливі розміри табору (на 200, 250, 300 або 350 осіб); а S_1-S_4 $(j=1,\ldots,4)$ – стани природи, тобто можливі об’єктивні обставини, з якими може зіткнутися адміністрація табору (та сама кількість осіб, яка відвідає табір). Збігання альтернативних рішень і станів природи є притаманною ознакою тільки цієї задачі, а взагалі не є обов’язковим. Обчислена матриця платежів (витрат), кожний елемент якої c_{ij} є величиною витрат при зіткненні вибору A_i-ї альтернативи та приїзду кількості осіб, що відповідає S_j-му стану природи. Отже, матриця платежів для даної задачі має вигляд

$$\left\{ c_{ij} \right\} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 10 & 18 & 25 \\ 8 & 7 & 12 & 23 \\ 21 & 18 & 12 & 21 \\ 30 & 22 & 19 & 15 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Основною рисою, яка притаманна задачам прийняття рішень в умовах невизначеності, є повна відсутність відомостей, навіть у ймовірнісному сенсі, які об’єктивні обставини (стани природи) реалізуються для особи, що приймає рішення.

Слід також відмітити, що природним є мінімальне значення витрат на головній діагоналі матриці платежів, тому що саме ці елементи відбивають ситуацію, коли прийняте альтернативне рішення збіглось саме з тією ситуацією, що очікувалась.

1.5 Критерії для аналізу ситуації, що пов'язана з прийняттям рішення

Необхідність альтернативного вибору обумовила розвиток певних критеріїв для аналізу ситуації, що пов'язана з прийняттям рішення. Ці критерії різняться за ступенем консерватизму, який виявляє індивідуум перед лицем невизначеності.

1 *Критерій Лапласа* спирається на *принцип недостатньої основи*, сенс якого в тому, що оскільки розподіл ймовірностей станів $p(S_i)$ невідомий, то немає причин вважати їх неоднаковими. Тобто використовується *оптимістичне* припущення, що ймовірності всіх станів природи однакові між собою, $p(S_1)=p(S_2)=\ldots=p(S_n)=1/n$. Якщо при цьому c_{ij} становить прибуток (витрати), то найліпшим рішенням є те, яке забезпечує

$$\max_{A_i}\left(\min_{A_i}\right)\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\right\}. \qquad (2.5.1)$$

Оскільки задача сформульована на мінімізацію витрат, оптимальним буде вибір тієї альтернативи, яка дає мінімальний середньоймовірнісний платіж. Отже, ймовірності $p(S_j)=1/4,\ j=1,\ldots,4$, тоді очікувані значення витрат для можливих рішень обчислюються так:

$$M\{A_1\}=\frac{1}{4}(5+10+18+25)=14500\,\textit{гр.од.}$$

$$M\{A_2\}=\frac{1}{4}(8+7+12+23)=12500\,\textit{гр.од.}\leftarrow \textit{мінімум}$$

$$M\{A_3\}=\frac{1}{4}(21+18+12+21)=18000\,\textit{гр.од.}$$

$$M\{A_4\}=\frac{1}{4}(30+22+19+15)=21500\,\textit{гр.од.}$$

Отримані результати свідчать про те, що оптимальним вибором за критерієм Лапласа буде вибір альтернативи A_2.

2 *Максимінний (мінімаксний) критерій* базується на консервативній, обережній поведінці особи, що приймає рішення, і зводиться до вибору найліпшої альтернативи з найгірших. Якщо c_{ij} - прибуток (витрати), то відповідно до максимінного (мінімаксного) критерію обирається рішення, що забезпечує

$$\max_{A_i}\left\{\min_{S_j}\left\{c_{ij}\right\}\right\}$$
$$\left(\min_{A_i}\left\{\max_{S_j}\left\{c_{ij}\right\}\right\}\right) \qquad (2.5.2)$$

Для сформульованої задачі використовується мінімаксний критерій: знаходимо мінімальне значення платежу серед максимальних витрат для всіх альтернативних рішень (максимальних значень у кожному рядку)

$$\min_{A_i}\left\{25;23;21;30\right\} = 21.$$

Цей результат свідчить про те, що за мінімаксним критерієм оптимальним вибором є вибір альтернативи A_3.

3 *Критерій Севіджа* намагається пом'якшити консерватизм максимінного (мінімаксного) критерію шляхом заміни матриці платежів $\left\{c_{ij}\right\}$ *матрицею збитку* $\left\{r_{ij}\right\}$, яка визначається таким чином:

$$r_{ij} = \max_{A_i}\left\{c_{ij}\right\} - c_{ij}, \text{ якщо } c_{ij} \text{ - прибуток,}$$
$$r_{ij} = c_{ij} - \min_{A_i}\left\{c_{ij}\right\}, \text{ якщо } c_{ij} \text{ - втрати.} \qquad (2.5.3)$$

А потім до отриманої матриці втрат використати максимінний або мінімаксний критерій.

Створюємо матрицю втрат за другим зразком (2.5.3) за допомогою віднімання мінімальних значень стовпця (а саме чисел 5, 7, 12, 15) від елементів відповідних стовпців

$$\left\{ r_{ij} \right\} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 10 \\ 3 & 0 & 0 & 8 \\ 16 & 11 & 0 & 6 \\ 25 & 15 & 7 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Застосовуємо мінімаксний критерій до отриманої матриці втрат

$$\min_{A_i}\left\{ 10;8;16;25 \right\} = 8,$$

який дає результат оптимального вибору альтернативи A_2.

4 *Критерій Гурвіца* охоплює ряд різноманітних підходів до прийняття рішень – від найбільш оптимістичного до найбільш песимістичного. Нехай $0 \le \alpha \le 1$, тоді рішенню A_i, обраному за критерієм Гурвіца, відповідає те, для якого виконуються умови

$$\max_{A_i}\left\{ \alpha \max_{S_j}\left\{ c_{ij} \right\} + (1-\alpha)\min_{S_j}\left\{ c_{ij} \right\} \right\}, \text{ якщо } c_{ij} \text{ - прибуток,}$$

$$\min_{A_i}\left\{ \alpha \min_{S_j}\left\{ c_{j} \right\} + (1-\alpha)\max_{S_j}\left\{ c_{ij} \right\} \right\}, \text{ якщо } c_{ij} \text{ - втрати.} \qquad (2.5.4)$$

Параметр α - *показник оптимізму*. Якщо α =0, критерій Гурвіца стає консервативним, тому що його використання еквівалентно використанню звичайного максимінного (мінімаксного) критерію. Якщо α =1, критерій Гурвіца стає надто оптимістичним, тому що розраховує на найліпші з найліпших умов. Для конкретизації ступеня оптимізму (чи песимізму) відповідним чином обирається величина α з інтервалу [0,1]. В багатьох випадках вибір α = 0,5 є найбільш зваженим.

Оберемо α = 0,5. Тоді для розв’язання задачі на мінімум будуємо сукупність других рівностей у виразі (2.5.4)

Таблиця 2.5.1

Альтернатива	Мінімум рядків	Максимум рядків	α (мінімум рядка)+ +(1-α)(максимум рядка)
A_1	5	25	$0,5\cdot 5+0,5\cdot 25=15$
A_2	7	23	$0,5\cdot 7+0,5\cdot 23=15$
A_3	12	21	$0,5\cdot 12+0,5\cdot 21=16,5$
A_4	15	30	$0,5\cdot 15+0,5\cdot 30=22,5$

Таблиця 2.5.1 ілюструє, що, згідно з критерієм Гурвіца, зі зваженим значенням показника оптимізму оптимальними можна вважати альтернативні рішення A_1 або A_2. (Пропонуємо впевнитись самостійно, що, наприклад, при обранні більш консервативного значення α=0,25 оптимальним є вибір альтернативи A_3).

Є природним для особи, що приймає рішення, проаналізувати результати, отримані за всіма критеріями, і віддати перевагу тій альтернативі, яка частіше зустрічається як оптимальний результат. У даному випадку – це альтернативне рішення A_2, тобто побудова табору з розрахунку на прибуття 250 осіб. Хоча можна припустити й інші мотиви прийняття остаточного рішення.

Приклади задачі прийняття рішення в умовах невизначеності з метою одержання максимального прибутку показані у методичних вказівках [1]. Теорія і приклади Марковських задач прийняття рішень в умовах невизначеності як задач динамічного програмування розібрані у методичних вказівках [1] та у конспекті лекцій [2].

Список літератури

1 Дослідження операцій [Текст]: метод. вказівки для студентів економічних спеціальностей денної та безвідривної форми навчання / Н.С. Юрчак, Н.І. Волохова, О.О. Думіна – Харків: УкрДАЗТ, 2005. – 58 с. [№ 1298].

2 Юрчак, Н.С. Математичні методи в задачах управління транспортними системами [Текст]: конспект лекцій / Н.С. Юрчак, С.Д. Бронза, О.О. Гончарова – Харків: УкрДАЗТ, 2012.

3 Математичне програмування [Текст]: завдання і метод. вказівки до виконання контрольної роботи / О.О. Думіна, О.І. Удодова. – Харків: УкрДАЗТ, 2006. – Ч. 1.

4 Лінійне програмування [Текст]: конспект лекцій / Ю.О. Акімова, О. О. Думіна, О.І. Удодова, Ю.С. Шувалова. – Харків: УкрДАЗТ, 2014.

5 Исследование операций в экономике [Текст]: учеб. пособие для вузов /Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Юнити, 2005. – 407 с.

6 Вентцель, Е.С. Исследование операций [Текст] / Е.С. Вентцель – М.: Советское радио, 1972. — 552 с.

7 Вентцель, Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология [Текст]: учеб. пособие для вузов / Е.С. Вентцель – М: Дрофа, 2004. – 208 с.

8 Кузнецов, А.В. Высшая математика: математическое программирование [Текст] / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. – М.: Высшая школа, 1994. – 286 с.