

**МЕХАНІКО-ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра вагонів**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**до виконання контрольної роботи  
та практичних занять  
з дисципліни**

***“ ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛІВАНЬ  
ТА СТІЙКОСТІ РУХОМОГО СКЛАДУ ”***

**Харків – 2017**

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вагонів 22 лютого 2016 р., протокол № 9.

Рекомендовано для студентів усіх форм навчання за освітньою програмою «Вагони та вагонне господарство» спеціальності 273 «Залізничний транспорт».

В основу методичних вказівок до виконання контрольної роботи та практичних занять з дисципліни «Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу» покладено праці та методичні розробки доцента кафедри вагонів В. В. Шевченка.

Укладачі:

доц. Р. І. Візняк,  
старш. викл. А. В. Рибін

Рецензент:

проф. І. Д. Борзилов

## МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольної роботи  
та практичних занять

з дисципліни  
“ *ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ  
ТА СТІЙКОСТІ РУХОМОГО СКЛАДУ* ”

Відповідальний за випуск Рибін А. В.

Редактор Еткало О. О.

---

Підписано до друку 17.10.16 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк. арк. 1,50. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,  
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

## ЗМІСТ

1 Обчислення моментів інерції елементів конструкції вагонів.	4
2 Послідовне й паралельне з'єднання елементів ресорного підвішування вагонів.....	19
3 Поздовжні та поперечні коливання стрижнів.....	25
4 Крутильні кутові коливання твердих тіл.....	33
5 Варіанти завдань та вихідні дані до розрахунків.....	39
Список літератури.....	48

# 1 ОБЧИСЛЕННЯ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЇ ВАГОНІВ

## Короткі теоретичні відомості

Моментом інерції системи матеріальних точок відносно осі (осьовим моментом інерції) називають суму добутків мас точок цієї системи на квадрат їхніх відстаней від цієї осі:

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2. \quad (1.1)$$

Момент інерції системи дорівнює сумі моментів інерції окремих її точок. Момент інерції твердого тіла відносно осі визначається як границя суми моментів часток тіла, коли об'єм і маси їх прямують до нуля, а число часток необмежено зростає:

$$I_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 = \int r^2 dm. \quad 1.2$$

Інтеграл поширюється по всій масі тіла.

Якщо позначити через  $x_i, y_i, z_i$  координати довільної точки якої - небудь матеріальної системи, то квадрати відстаней цієї точки від координатної осі будуть відповідно рівні:

$$y_i^2 + z_i^2; z_i^2 + x_i^2; x_i^2 + y_i^2.$$

Моменти інерції якої-небудь матеріальної системи щодо координатних осей дорівнюватимуть:

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2); I_y = \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2); I_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (1.3)$$

Тоді для твердого тіла

$$I_x = \int_{V_i} (y_i^2 + z_i^2) dm; I_y = \int_{V_i} (z_i^2 + x_i^2) dm; I_z = \int_{V_i} (x_i^2 + y_i^2) dm, \quad (1.4)$$

де  $v_i$  – об'єм будь-якого  $i$ -го тіла, що належить системі.

Згідно з джерелом-посібником [15], де у пункті 1.2.2 наведено теоретичну інформацію про сили, моменти інерції твердих тіл та методику їх розрахунків, що можуть бути використані у вагонобудуванні, для отримання практичних навичок щодо числового розрахунку розробимо відповідні приклади з метою отримання власних результатів за індивідуальним варіантом завдання, згідно з розділом 5 цих методичних вказівок.

### 1.1 Момент інерції стрижня

Стрижні різноманітних поперечних перерізів використовуються як несучі каркасні конструкції вагонів різних типів.

**Задача 1.** Обчислити момент інерції однорідного тонкого стрижня (рисунок 1.1) щільністю  $\rho$  довжиною  $2l$  з постійним перерізом площиною  $\sigma$  відносно осі, що проходить через його середину  $O$  і яка є перпендикулярною до нього у заданій декартовій системі координат.

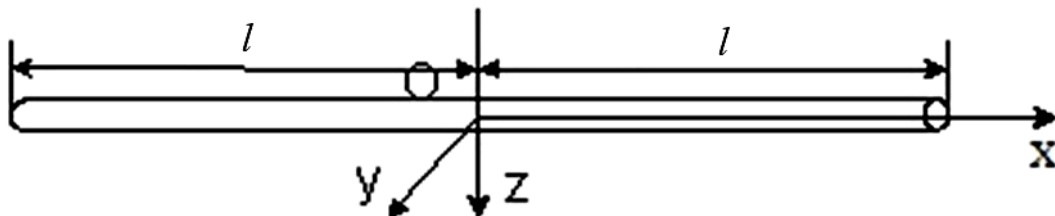


Рисунок 1.1 – Однорідний тонкий стрижень

Тоді момент інерції стрижня відносно осі  $OY$  дорівнює

$$I_{OY} = \int x^2 dm.$$

Розглянемо елемент стрижня довжиною  $dx$ , що розташований на відстані  $x$  від початку координат  $O$ . Маса цього елемента дорівнює

$$dm = \rho \cdot \sigma \cdot dx.$$

Тоді момент інерції однорідного тонкого стрижня набуде вигляду:

$$I_{OY} = \rho \cdot \sigma \cdot \int_{-l}^l x^2 dx, \quad \text{або} \quad \rho \cdot \sigma \cdot \int_{-l}^l x^2 dx \rightarrow \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot \sigma \cdot l^3.$$

Позначимо  $m = 2 \cdot l \cdot \rho \cdot \sigma$ ,

де  $m$  – маса стрижня.

Тоді за деяким наближенням для всіх осей  $OX, OY, OZ$  загальної системи координат остаточно одержимо:

$$I_{OY} = \frac{m \cdot l^2}{3}; I_{OZ} = I_{OY}; I_{OX} = 0.$$

### Приклад

Для стрижня із заданими параметрами розрахувати момент інерції:

$$l = 3 \text{ м};$$

$$\rho = 7800 \text{ кг/м}^3;$$

$$\sigma = 0,001 \text{ м}^2;$$

$$m = 2 \cdot l \cdot \rho \cdot \sigma;$$

$$m = 468 \text{ кг.}$$

$$I_{OY} = I_{OZ} = \frac{m \cdot l^2}{3}; I_{OY} = I_{OZ} = 1.404 \times 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Наведемо формули для моментів інерції деяких простих елементів конструкції вагонів і обчислимо відповідні характеристики.

## 1.2 Тонка прямокутна пластина

Використовується як елементи обшивки несучих конструкцій кузовів вантажних та пасажирських вагонів, кришок люків та торцевих дверей універсальних напіввагонів.

**Задача 2.** Обчислити моменти інерції тонкої прямокутної пластини (рисунок 1.2) довжиною  $a$  та шириною  $b$  відносно осей  $Ox, Oy, Oz$  заданої декартової системи координат:

$$I_{Ox} = \frac{m \cdot b^2}{12}; I_{Oy} = \frac{m \cdot a^2}{12};$$

$$I_{Oz} = I_{Ox} + I_{Oy} = m \cdot \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

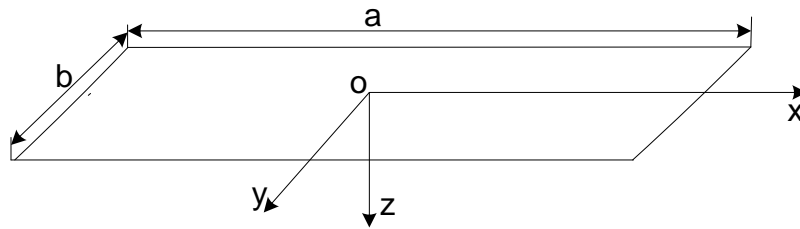


Рисунок 1.2 – Тонка прямокутна пластинка

### Приклад

Для пластини із заданими параметрами розрахувати моменти інерції:

$$b=2 \text{ м}; a=4 \text{ м}; m=20 \text{ кг}.$$

$$I_{Ox} = \frac{m \cdot b^2}{12}, I_{Ox} = 6.667 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; I_{Oy} = \frac{m \cdot a^2}{12}, I_{Oy} = 26.667 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_{Oz} = I_{Ox} + I_{Oy}; I_{Oz} = 33.333 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

### 1.3 Кругла тонка пластинка (кругове кільце)

Може бути розглянута як поперечний переріз котлів вагонів-цистерн різного призначення, елементів конструкції гальмового обладнання вагонів, магістральних повітропроводів поїзда і т. п.

**Задача 3.** Обчислити моменти інерції круглої тонкої пластини (рисунок 1.3) із зовнішнім та внутрішнім діаметром відповідно  $2R$  та  $2r$  відносно осей  $Ox$  та  $Oy$  заданої системи координат  $XOY$ .

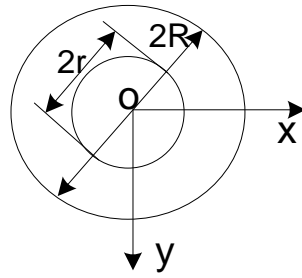


Рисунок 1.3 – Кругла тонка пластина

$$I_{Ox} = I_{Oy} = m \cdot \frac{R^2 + r^2}{4}; I_{Oz} = 2 \cdot I_{Ox} = m \cdot \frac{R^2 + r^2}{2}.$$

### Приклад

Для пластини із заданими параметрами розрахувати моменти інерції:

$$m=5 \text{ кг}; R=0,3 \text{ м}; r=10 \text{ м}.$$

$$I_{Ox} = m \cdot \frac{R^2 \cdot r^2}{4}; I_{Ox} = 1.25 \times 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_{Oz} = m \cdot \frac{R^2 \cdot r^2}{2}; I_{Oz} = 2.5 \times 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

## 1.4 Паралелепіпед

З відповідними припущеннями щодо щільності та твердості насипного вантажу у загальній механіці сипких тіл може використовуватися для обчислення моментів інерції заповнених об'ємів кузовів універсальних та «глуходонних» напіввагонів, вагонів-платформ та вагонів-самоскидів (думпкарів) тощо.

**Задача 4.** Обчислити моменти інерції паралелепіпеда (рисунок 1.4) довжиною  $a$ , шириною  $b$  та висотою  $c$  відносно осей  $Ox, Oy, Oz$  заданої декартової системи координат:

$$I_{Ox} = m \cdot \frac{b^2 + c^2}{12};$$

$$I_{Oy} = m \cdot \frac{c^2 + a^2}{12};$$



$$I_{OZ} = m \cdot \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

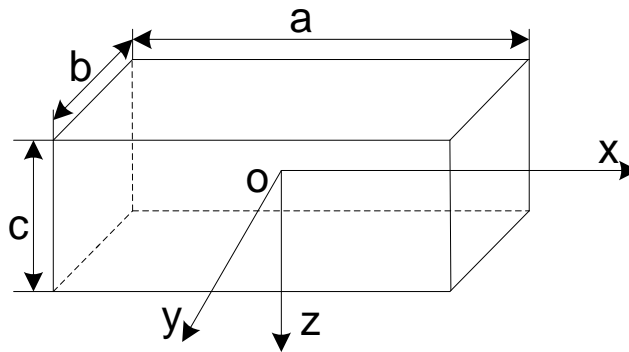


Рисунок 1.4 – Паралелепіпед

### Приклад

Для паралелепіпеда із заданими параметрами розрахувати моменти інерції:

$$m=4 \text{ м}; b=2 \text{ м}; c=3 \text{ м}; m=20 \text{ кг}.$$

$$I_{Ox} = m \cdot \frac{b^2 + c^2}{12} I_{Ox} = 21.667 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_{Oy} = m \cdot \frac{c^2 + a^2}{12} I_{Oy} = 41.667 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_{Oz} = m \cdot \frac{a^2 + b^2}{12} I_{Oz} = 33.333 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

## 1.5 Прямий круговий циліндр

Може бути розглянутий як циліндрична частина котлів усіх вагонів – цистерн, гальмового обладнання вагонів, елементів конструкції кузовів спеціалізованих вагонів окремих типів, наприклад, бункерного вагона для перевезення борошна і т. п.

**Задача 5.** Обчислити моменти інерції прямого кругового циліндра (рисунок 1.5) з довжиною твірної  $l$ , зовнішнім та внутрішнім діаметром відповідно  $2R$  та  $2r$  відносно осей  $Ox, Oy, Oz$  заданої декартової системи координат:

$$I_{Ox} = m \cdot \frac{R^2 + r^2}{4},$$

$$I_{OY} = I_{OZ} = m \cdot \frac{R^2 \cdot r^2 + \frac{1}{3} l^2}{4}.$$

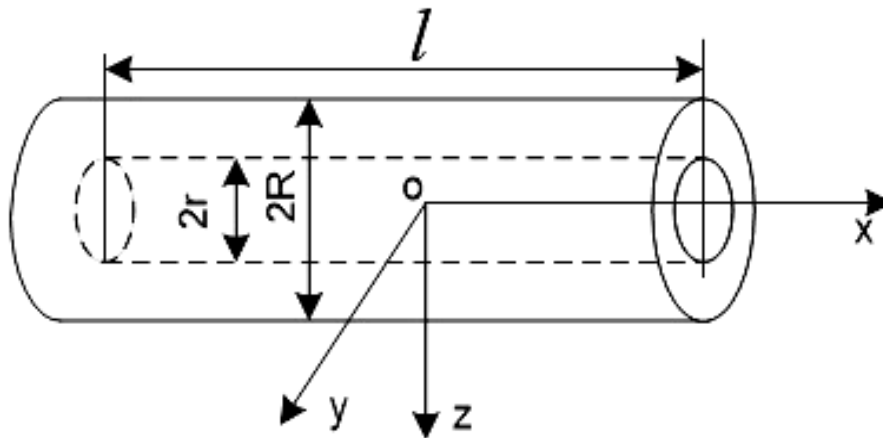


Рисунок 1.5 – Прямий круговий циліндр

### Приклад

Для циліндра із заданими параметрами розрахувати моменти інерції:

$$m=5 \text{ кг}; R=0,3 \text{ м}; r=0,1 \text{ м}; l=1,0 \text{ м}.$$

$$I_{Ox} = m \cdot \frac{R^2 \cdot r^2}{4}; I_{Ox} = 1,25 \times 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_{Oy} = m \cdot \frac{R^2 \cdot r^2 + \frac{1}{3} \cdot l^2}{4}; I_{Oy} = 4,179 \times 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; I_{Oz} = I_{Oy}; I_{Oz} = 4,179 \times 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

## 1.6 Обчислення моментів інерції кузовів вантажних вагонів

**Задача 6.** Обчислити моменти інерції кузова вантажного вагона із заданими параметрами його конструкційних вузлів відносно центральних осей OX, OY, OZ загальної системи координат.

Згідно з теоретичною методикою, що також наведена у джерелі-посібнику [15, пункт 1.2.2], отримаємо числові результати розрахунку моментів інерції кузова універсального напіввагона.

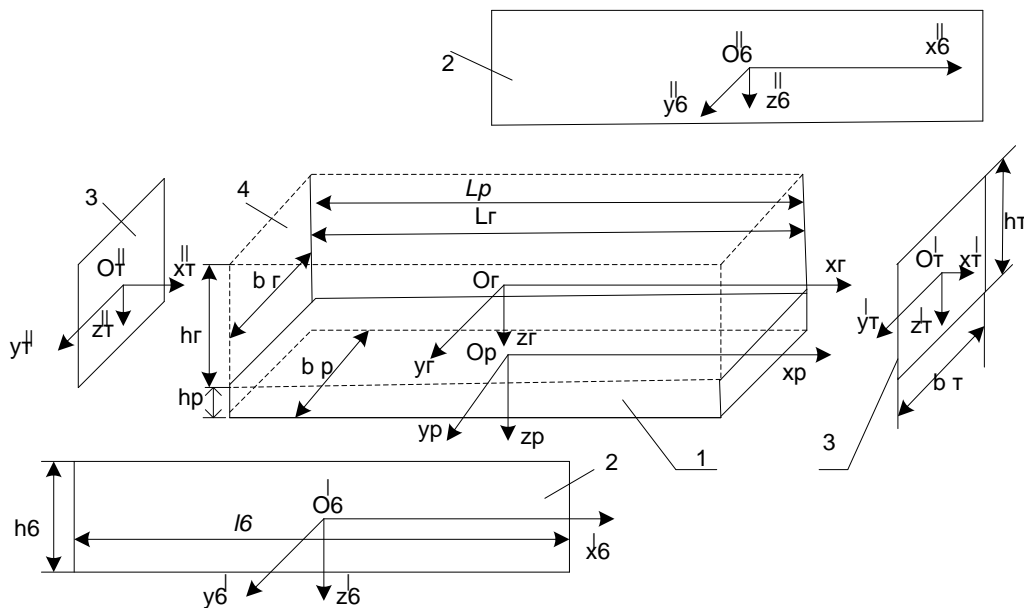
## Приклад

Для кузова універсального напіввагона (рисунок 1.6) із заданими параметрами його конструкційних вузлів кузова обчислити моменти інерції.

Значення моментів інерції кузова визначається за формулами:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \sum_{i=1}^n [I_{oxi} + m_i(y_i^2 + z_i^2)]; \\
 I_y &= \sum_{i=1}^n [I_{oyi} + m_i(z_i^2 + x_i^2)]; \\
 I_z &= \sum_{i=1}^n [I_{ozi} + m_i(x_i^2 + y_i^2)];
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

де  $I_{oxi}, I_{oyi}, I_{ozi}$  – моменти інерції вузлів (складових модульних частин) відносно власних центральних осей.



1 – рама – паралелепіпед; 2 – бічні стіни – пластини;  
 3 – торцеві стіни – пластини; 4 – вантаж – паралелепіпед

Рисунок 1.6 – Кузов напіввагона із вантажем (розкладення за складовими модульними частинами)

### Рама вагона

Прийmemo такі розмірності параметрів:

- маса рами:  $m_p = 3000$  кг;
- ширина рами:  $b_p = 2.8$  м;
- довжина рами:  $l_p = 12$  м;
- висота рами:  $h_p = 0.2$  м.

Моменти інерції рами дорівнюватимуть:

$$I_{xp} = m_p \cdot \frac{b_p^2 + h_p^2}{12}; I_{xp} = 1.97 \times 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$
$$I_{yp} = m_p \cdot \frac{h_p^2 + l_p^2}{12}; I_{yp} = 3.01 \times 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$
$$I_{zp} = m_p \cdot \frac{l_p^2 + b_p^2}{12}; I_{zp} = 3.796 \times 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

### Бічні стіни:

- маса бічної стіни:  $m_b = 4000$  кг;
- висота бічної стіни:  $h_b = 2$  м;
- довжина бічної стіни:  $l_b = 12$  м.

Моменти інерції бічних стін дорівнюватимуть:

$$I_{xb} = m_b \cdot \frac{h_b^2}{12}; I_{xb} = 1.333 \times 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$
$$I_{yb} = m_b \cdot \frac{h_b^2 + l_b^2}{12}; I_{yb} = 4.933 \times 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$
$$I_{zb} = m_b \cdot \frac{l_b^2}{12}; I_{zb} = 4.8 \times 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

### Торцеві стіни

Прийmemo такі розміри:

- маса торцевої стіни:  $m_t = 2000$  кг;
- ширина торцевої стіни:  $b_t = 2.8$  м;
- висота торцевої стіни:  $h_t = 2$  м.

$$I_{Xt} = m_t \cdot \frac{b_t^2 + h_t^2}{12}; I_{Xt} = 197.3 \times 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_{Yt} = m_t \cdot \frac{h_t^2}{12}; I_{Yt} = 666.667 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_{Zt} = m_t \cdot \frac{b_t^2}{12}; I_{Zt} = 1.307 \times 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

### Вантаж

Приймемо такі розміри:

- маса вантажу:  $m_{\Gamma} = 70000$  кг;
- ширина вантажу:  $b_{\Gamma} = 2.8$  м;
- висота вантаж:  $h_{\Gamma} = 2$  м;
- довжина вантажу:  $l_{\Gamma} = 12$  м.

Моменти інерції вантажу:

$$I_{x\Gamma} = m_{\Gamma} \cdot \frac{b_{\Gamma}^2 + h_{\Gamma}^2}{12}; I_{x\Gamma} = 6.907 \times 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_{y\Gamma} = m_{\Gamma} \cdot \frac{h_{\Gamma}^2 + l_{\Gamma}^2}{12}; I_{y\Gamma} = 8.633 \times 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_{z\Gamma} = m_{\Gamma} \cdot \frac{l_{\Gamma}^2 + b_{\Gamma}^2}{12}; I_{z\Gamma} = 8.857 \times 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Визначимо положення центра мас усього кузова, згідно із рисунком 1.7, поділивши його спочатку на окремі модульні вузли-блоки, а потім об'єднуючи їх у єдину геометричну систему. З умови симетричності конструкції відомо, що центр мас перебуває на перетині осей ОХ і ОУ. Так як сума всіх сил дорівнює їх рівнодіючій, то після поділу на  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup> (прискорення вільного падіння) за деяким припущенням знаходимо:

$$2 \cdot m_b \cdot \left( \frac{h_b}{2} + \frac{h_p}{2} \right) + 2 \cdot m_t \cdot \left( \frac{h_{\Gamma}}{2} + \frac{h_p}{2} \right) + m_{\Gamma} \cdot \left( \frac{h_{\Gamma}}{2} + \frac{h_p}{2} \right) = m_k \cdot z_k. \quad (1.6)$$

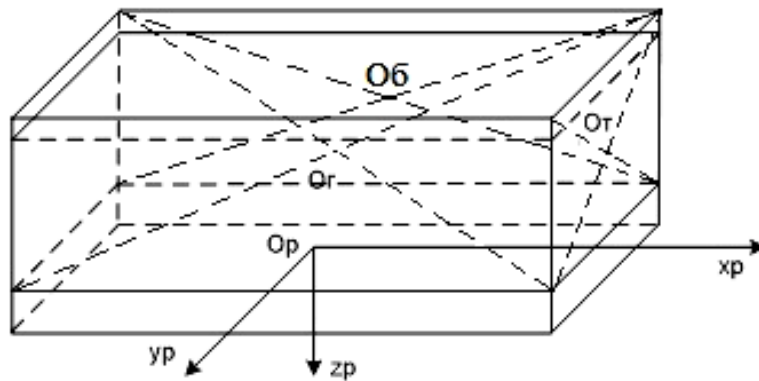


Рисунок 1.7 – Схема для геометричного визначення положення центра мас кузова напіввагона із вантажем

Звідси:

- маса кузова:

$$m_k = 2 \cdot m_b + 2 \cdot m_t + m_\Gamma + m_p; m_k = 8.5 \times 10^4 \text{ кг};$$

- висота центра маси:

$$z_k = \frac{m_b \cdot (h_b + h_p) + m_t \cdot (h_t + h_p) + m_\Gamma \cdot \left(\frac{h_\Gamma + h_p}{2}\right)}{m_k}; \quad (1.7)$$

$$z_k = 1.061 \text{ м.}$$

Обчислюємо моменти інерції кузова напіввагона відносно центральних осей OX, OY, OZ.

$$I_x = I_{xp} + m_p \cdot z_k^2 + 2 \cdot I_{xb} + \left[ 2 \cdot m_b \cdot \left(\frac{h_b + h_p}{2} - z_k\right)^2 \right] + 2 \cdot I_{xt} + 2 \times$$

$$\times m_t \times \left[\frac{(h_t + h_p)}{2} - z_k\right]^2 + I_{x\Gamma} + m_\Gamma \cdot \left(\frac{h_\Gamma + h_p}{2} - z_k\right)^2; \quad (1.8)$$

$$I_x = 8.115 \times 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_y = I_{yp} + m_p \cdot z_k^2 + 2 \cdot I_{yb} + \left[ 2 \cdot m_b \cdot \left(\frac{h_b + h_p}{2} - z_k\right)^2 \right] + 2 \cdot I_{yt} +$$

$$+ \left[ 2 \cdot m_t \times \left[\frac{(h_t + h_p)}{2} - z_k\right]^2 + I_{y\Gamma} + m_\Gamma \cdot \left(\frac{h_\Gamma + h_p}{2} - z_k\right)^2 \right]; \quad (1.9)$$

$$I_y = 9.698 \times 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_z = I_{zp} + m_p \cdot z_k^2 + 2 \cdot I_{zb} + 2 \cdot m_6 \left( \frac{h_6 + h_p}{2} - z_k \right)^2 + \left[ 2 \cdot I_{zt} + 2 \cdot m_t \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{(h_t + h_p)}{2} - z_k \right]^2 + I_{zb} + m_\Gamma \cdot \left( \frac{h_\Gamma + h_p}{2} - z_k \right)^2 \right]; \quad (1.10)$$

$$I_z = 1.026 \times 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

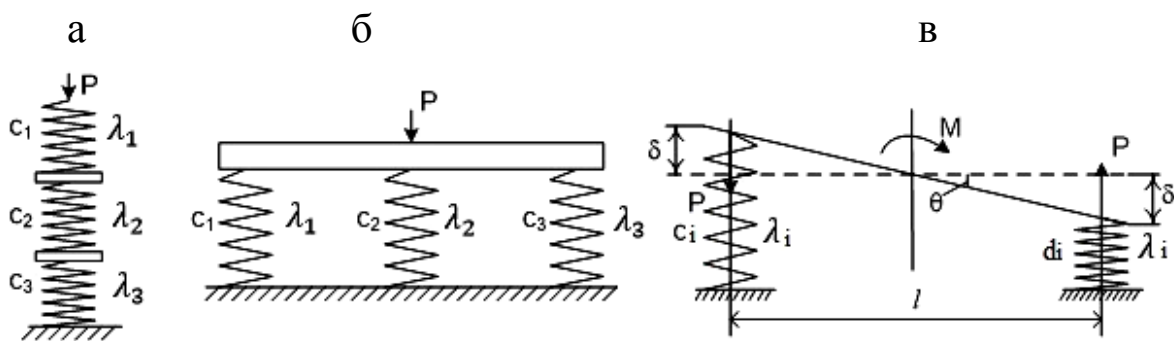
Також можна визначити  $I_z$  за такою формулою:

$$I_{zz} = I_{zp} + 2 \cdot I_{z6} + 2 \cdot I_{zt} + I_{z\Gamma}, \quad (1.11)$$

$$I_{zz} = 1.022 \times 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Як видно, відносна помилка розрахунків складає 0,4 %, тому може використовуватись замість формули (1.10).

## 2 ПОСЛІДОВНЕ Й ПАРАЛЕЛЬНЕ З'ЄДНАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ РЕСОРНОГО ПІДВІШУВАННЯ ВАГОНІВ



а – послідовне з'єднання; б – паралельне з'єднання;  
 в – визначення кутової жорсткості надресорної балки візка;

$c_1, c_2, c_3$  – жорсткість пружин;

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – гнучкість пружин

Рисунок 2.1 – Схеми розрахунку характеристик ресорного підвішування вагонів

**Задача 7.** Паралельне з'єднання елементів ресорного підвішування ходової (екіпажної) частини вагона (рисунок 2.1, б).

Загальний прогин  $f$ , м, дорівнює прогину кожної пружини окремо:

$$f = f_1 = f_2 = f_3; \quad (2.1)$$

для кожної пружини виконуються умови:

$$P_1 = \frac{f_1}{\lambda_1}, P_2 = \frac{f_2}{\lambda_2}, P_3 = \frac{f_3}{\lambda_3}; \quad (2.2)$$

сила  $P$  дорівнює загальній сумі сил:

$$P = P_1 + P_2 + P_3, \quad (2.3)$$

тоді

$$P = \left( \frac{f_1}{\lambda_1} + \frac{f_2}{\lambda_2} + \frac{f_3}{\lambda_3} \right) = f \cdot \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \right), \quad (2.4)$$

Так як

$$P = \frac{f}{\lambda}, \text{ то } \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}, \lambda = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_2 \cdot \lambda_3}. \quad (2.5)$$

Якщо  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , то  $\lambda = \frac{\lambda_1^3}{3\lambda_1^2} = \frac{\lambda_1}{3}$ .

Виражаючи сили через жорсткість пружин, маємо:

$$P_1 = f \cdot c_1, \quad P_2 = f \cdot c_2, \quad P_3 = f \cdot c_3, \quad P = f \cdot c, \quad (2.6)$$

тоді

$$c = c_1 + c_2 + c_3. \quad (2.7)$$

### Приклад

Ресорне підвішування вагона складається з чотирьох ресорних комплектів. Жорсткість кожного ресорного комплекту  $c_p = 1000 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ . Визначити сумарну жорсткість підвішування вагона.



Розв'язання

Сумарна жорсткість:  $c = 4 \cdot c_p$ ;  $c = 4 \times 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ .

Завдання: визначити сумарну гнучкість ресорного підвішування:

$$\lambda = \frac{1}{c}; \lambda = \frac{1}{4 \cdot 10^3} = 0,25 \frac{\text{м}}{\text{кН}}$$

**Задача 8.** Послідовне з'єднання елементів (рисунок 2.1, а).

$$P = P_1 = P_2 = P_3; \quad (2.8)$$

$$f = f_1 + f_2 + f_3; \quad (2.9)$$

$$f = P \cdot \lambda; f_1 = P \cdot \lambda_1; f_2 = P \cdot \lambda_2; f_3 = P \cdot \lambda_3; \quad (2.10)$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \quad (2.11)$$

Так як

$$\lambda = \frac{1}{c}, \text{ то } \frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}, \quad (2.12)$$

або

$$c = \frac{c_1 \cdot c_2 \cdot c_3}{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}. \quad (2.13)$$

### Приклад

Ресорне підвішування пасажирського вагона складається з чотирьох ресорних комплектів. Кожний ресорний комплект включає центральне й надбуксове підвішування. Жорсткість пружин одного комплекту центрального підвішування

$$c_p = 60 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

Жорсткість надбуксових пружин, які встановлені відносно одного буксового вузла:

$$c_b = 1630 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

Завдання: визначити сумарну жорсткість ресорного підвішування вагона.

Розв'язання

Сумарна жорсткість надбуксового ресорного підвішування:

$$c_{\text{НБ}} = 8 \cdot c_6; c_{\text{НБ}} = 1.304 \times 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{м}};$$

сумарна жорсткість пружин центрального підвішування:

$$c_{\text{ЦЕН}} = 4 \cdot c_6; c_{\text{ЦЕН}} = 240 \frac{\text{кН}}{\text{м}};$$

сумарна жорсткість ресорного підвішування вагона:

$$c_{\text{ВАГ}} = \frac{c_{\text{НБ}} \cdot c_{\text{ЦЕН}}}{c_{\text{НБ}} + c_{\text{ЦЕН}}}; c_{\text{ВАГ}} = 235.663 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

Завдання: визначити сумарну гнучкість ресорного підвішування:

$$\lambda_{\text{ВАГ}} = \frac{1}{c_{\text{ВАГ}}}; \lambda_{\text{ВАГ}} = \frac{1}{235,663} = 4,24 \frac{\text{м}}{\text{кН}}.$$

**Задача 9.** Кутова жорсткість (рисунок 2.1, в) – це величина, що чисельно дорівнює моменту, який поверне надресорну балку ходової частини (візка) на кут, що дорівнює умовній одиниці:

$$M = c_k \cdot q, c_k = \frac{M}{q}, \quad (2.14)$$

де  $q$  – узагальнена кутова координата.

При дії на балку моменту  $M$  на опорні пружини діють зусилля

$$P = \frac{M}{l}. \quad (2.15)$$

Під дією зусиль ресорний комплект стиснеться на величину

$$\delta = \frac{P}{c}, \quad (2.16)$$

Так як

$$\delta = \frac{l}{2} \cdot \theta, \quad (2.17)$$

де  $\theta$  – кут повороту балки, який дорівнює

$$\theta = \frac{2 \cdot \sigma}{l} = \frac{2 \cdot P}{c \cdot l} + \frac{2 \cdot M}{c \cdot l^2}. \quad (2.18)$$

Із цієї рівності одержимо

$$\frac{M}{\theta} = \frac{c \cdot l^2}{2}, \quad \frac{M}{\theta} = c_k. \quad (2.19)$$

Отже,

$$c_k = \frac{c \cdot l^2}{2}. \quad (2.20)$$

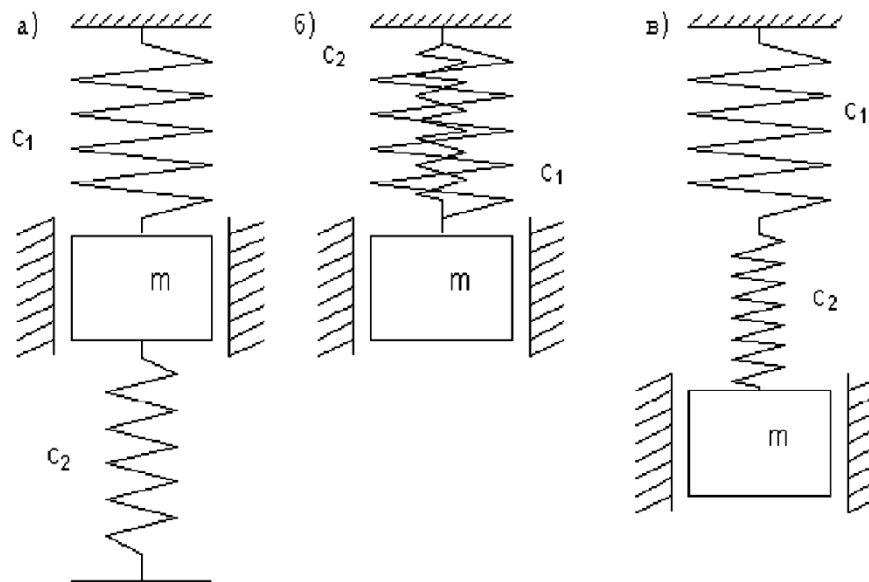
### Приклад

Вихідні дані:  $c = 100000 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1.018 \text{ м}$ .

Розв'язання

$$c_k = \frac{c \cdot l^2}{2}; \quad c_k = 5.182 \times 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

**Задача 10.** Для систем, що зображені на рисунку 2.2, визначити власні лінійні та кругові частоти і періоди коливань, побудувати залежності  $\nu = f(m; c); T = f(m; c); \omega = f(\nu; T)$ .



а – подвійний двобічний підвіс; б – однобічний подвійний підвіс;  
в – однобічний послідовний підвіс

Рисунок 2.2 – Пружні коливальні системи

### Приклад

Вихідні дані:  $m = 10$  кг;  $c_1 = 1000$  кН/м;  $c_2 = 500$  кН/м.

Розв'язання:

Для рисунка 2.2, а:

$$c = c_1 + c_2;$$

$$c = 150 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

Тоді частота власних коливань системи визначається за формулою

$$\nu^* = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad (2.21)$$

$$\nu^* = 12.247 \text{ рад/с.}$$

Відомо, що частота власних коливань  $\nu^*$  може бути прирівняна до кругової (кутової) частоти  $\omega$ , або циклічної частоти за цикл  $2\pi$  радіан, тому

$$\omega = \nu^* = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

$$\omega = 2\pi \cdot \nu, \quad (2.22)$$

де  $\nu$  – лінійна частота:

$$\nu = \frac{1}{T}; \quad (2.23)$$

$$\sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{2\pi}{T},$$

де  $T$  – період, с.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}} = 0,51 \text{ с.}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,51} = 1,96 \text{ Гц.}$$

Для рисунка 2.2, б:

$$c = c_1 + c_2; \quad c = 150 \frac{\text{кН}}{\text{м}}; \quad \nu^* = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \nu^* = 12.247 \text{ рад/с}; \quad T = 0,51 \text{ с};$$

$$\nu = 1,96 \text{ Гц.}$$

Оскільки характеристики системи однакові, то для рисунка 2.2, в:

$$c = \frac{c_1 + c_2}{c_1 + c_2}, \quad (2.24)$$

$$\nu = 5,774 \text{ 1/с.}$$

$$\nu^* = \sqrt{\frac{c}{m}};$$

$$T = 1,1 \text{ с}; \quad \nu = 0,9 \text{ Гц.}$$

З метою отримання аналітичних навичок будемо графіки залежностей динамічних характеристик за декількома змінними точками. Прогнозований характер залежностей наведений на рисунку 2.3.

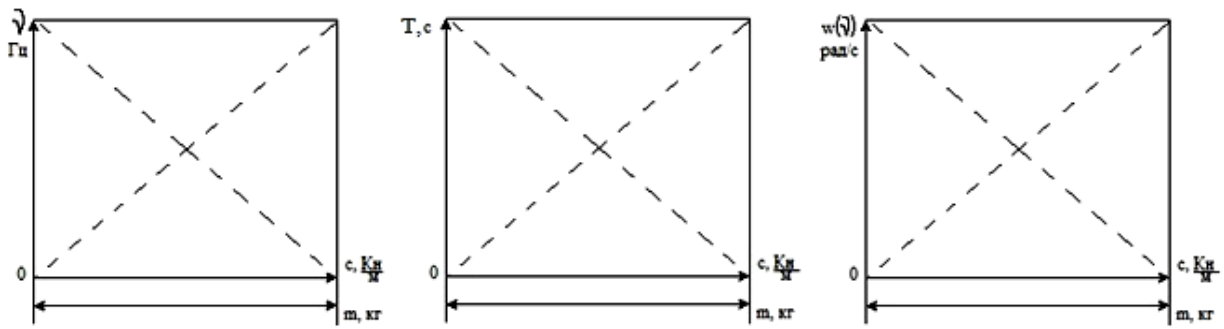


Рисунок 2.3 – Графіки вірогідних залежностей динамічних характеристик коливальної системи

**Задача 11.** Дослідимо вимушені коливання механічної системи.

Визначення коефіцієнта числа витків циліндричної пружини та центробіжної сили (рисунок 2.4).

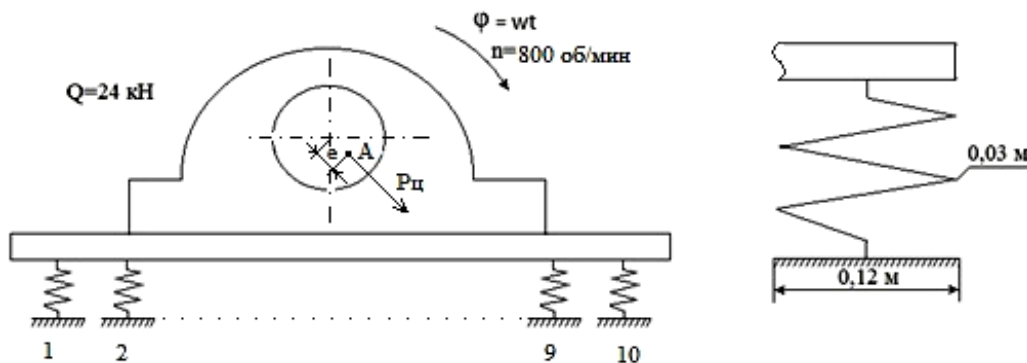


Рисунок 2.4 – Неврівноважена електромеханічна система

### Приклад

Двигун вагою 24 кН встановлено на 10 однакових пружинах діаметром  $D = 12$  см. Діаметр перерізу витка пружини  $d = 3$  см; модуль зсуву матеріалу пружини  $G = 0,8 \cdot 10^7$  Н/см<sup>2</sup>,  $n = 800$  об/хв. Визначити число витків пружини, необхідне для того, щоб динамічний коефіцієнт установки дорівнював 0,2; розрахувати центробіжну силу  $P_{ц}$ , що діє на неуврівноважену електричну машину.

Відомо, що коли  $\frac{w}{v} = 1$ , настає явище резонансу, при якому коефіцієнт динамічності  $\mu \rightarrow \infty$  і коливання необмежено зростають, що остаточно призведе до руйнування самої системи у непередбачуваних місцях (зв'язках).

$$\mu = \frac{1}{[1 - \frac{w^2}{v^2}]}; \quad (2.25)$$

позначимо  $\xi = \frac{w}{v}$ ,

тоді

$$\mu = \frac{1}{1 - \xi^2},$$

де  $\omega$ ;  $v$  – відповідно частоти вимушених та власних коливань.

Необхідно знайти значення  $\xi$ , при якому  $\mu = 0,2$ .

Знаходимо показник резонансу механічної системи методом підбору. Надамо  $\mu$  ряд значень методом підбору:

$\xi = 2$	$\mu = \frac{1}{1 - \xi^2}$	$\mu = 0,33;$
$\xi = 2,2$	$\mu = \frac{1}{1 - \xi^2}$	$\mu = 0,26;$
$\xi = 2,4$	$\mu = \frac{1}{1 - \xi^2}$	$\mu = 0,21;$
$\xi = 2,5$	$\mu = \frac{1}{1 - \xi^2}$	$\mu = 0,19;$
$\xi = 2,45$	$\mu = \frac{1}{1 - \xi^2}$	$\mu = 0,2.$

Так як частота вимушених коливань може бути прирівняна до частоти обертання вала електродвигуна, то запишемо:

$$w = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60}. \quad (2.26)$$

$$w = 83,776 \text{ c}^{-1}.$$

Розрахуємо необхідне значення власної частоти коливань:

$$\xi = \frac{w}{v}; \quad \xi = 2,45.$$

$$v = \frac{w}{\xi}, \quad v = 34,194 \frac{1}{\text{c}} \text{ Гц.}$$

Відповідно повинна виконуватися рівність

$$\sqrt{\frac{c}{m}} = v.$$

Підставимо у цю рівність вираз і отримаємо масу двигуна:

$$m = \frac{24000}{9,81} = 2,446 \cdot 10^3 \text{ кг.}$$

Остаточно знаходимо необхідну жорсткість усіх пружин системи:

$$c = v^2 \cdot m = 2,865 \cdot 10^3 \text{ Н/м;}$$

жорсткість однієї пружини:

$$c_1 = \frac{c}{10}; \quad c_1 = 286,465 \text{ Н/м,}$$

$$\text{тобто } c_1 = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n} = 286,465 \text{ Н/м; } n = \frac{(G \cdot d^4)}{(8 \cdot D^3 \cdot 286,465)} = 16,363.$$

Слід прийняти принаймні 17 витків, так як збільшення числа витків знижує жорсткість системи і зменшує динамічний коефіцієнт. Якщо прийняти  $n < 16,5$ , то динамічний коефіцієнт буде більшим, ніж задано за умовою.

Визначимо центробіжну силу  $P_{ц}$ , яка діє на механічну систему, за формулою

$$P_{ц} = m \cdot \omega^2 \cdot e, \quad (2.27)$$

де  $e$  – зміщення центра обертання (ексцентриситет),

$$P_{ц} = 2446 \cdot (83,7)^2 \cdot 0,003 = 51,43 \text{ кН;}$$

тобто вже при  $e = 3$  мм невірноважена маса досягає 51,43 кН (5,24 т), що суттєво вплине на характер вимушених коливань та подальше зниження надійності та працездатності динамічної системи.



### 3 ПОЗДОВЖНІ ТА ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ СТРИЖНІВ

**Задача 12.** Розглянемо власні поздовжні коливання стрижня, на кінці якого підвішений вантаж вагою  $P=mg$ , де  $m$  – маса вантажу,  $g$  – прискорення сили ваги. Відхилення центра маси вантажу, що викликане деяким початковим впливом, для довільного моменту часу  $t$  позначимо  $y$ . При цьому відхиленні виникає пружна сила  $P_{пр}$ , яка повертає вантаж у стан рівноваги.

Вважаємо, що зв'язок між силою  $P_{пр}$  і динамічним переміщенням  $y$  такий же, що й для статичної задачі, тоді

$$y_{ст} = P\delta; \quad (3.1)$$

де  $\delta$  – переміщення точки прикладення вантажу від дії одиничної сили  $P=1Н$ :

$$\delta = \frac{P \cdot l}{E \cdot F}, \quad (3.2)$$

або при  $P=1Н$

$$\delta = \frac{1 \cdot l}{E \cdot F},$$

де  $E$  – модуль пружності,  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа;

$F$  – площа перерізу,  $m^2$ .

Статичне переміщення вантажу  $y_{ст} = P \cdot \frac{1}{c}$ , або  $P = c \cdot y_{ст}$ ,

де  $c$  – жорсткість системи, тобто сила пружності, що відповідає переміщенню, яке дорівнює одиниці.

З цього загалом випливає:

$$c = \frac{1}{\delta}.$$

Відповідно до принципу Даламбера (рисунок 3.1) складаємо диференціальне рівняння власних коливань стрижня, яке запишемо у вигляді

$$m\ddot{y} + cy = 0. \quad (3.3)$$

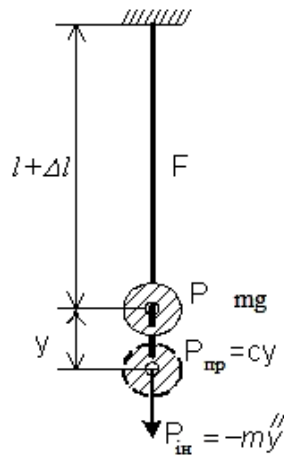


Рисунок 3.1 – Схема дії зусиль на стержень при поєздовжніх коливаннях

Поділимо обидві частини на  $m$  і позначимо  $\omega^2 = \frac{c}{m}$ , одержимо  $\omega = \nu^* = \sqrt{\frac{c}{m}}$  – кругова частота власних коливань системи.

Загальний розв’язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + A_2 \sin(\omega \cdot t). \quad (3.4)$$

Вводимо початкові умови задачі:

$$\text{при } t=0 \quad y = y_0; \quad \dot{y} = v_0.$$

Визначаючи довільні постійні, одержимо

$$y = y_0 \cos(\omega \cdot t) + v_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\omega}. \quad (3.5)$$

Можна записати в іншій формі:

$$y = A \sin(\omega \cdot t + a) . \quad (3.6)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}. \quad (3.7)$$

$$a = \text{atan} \left( \frac{A_2}{A_1} \right) = \left( \frac{v_0}{\omega \cdot y_0} \right). \quad (3.8)$$

### Приклад

Довжина стрижня  $l=1\text{ м}$ ;

діаметр стрижня  $d=0,02\text{ м}$ ;

маса вантажу  $m=10\text{ кг}$ ;

модуль пружності  $E=2 \cdot 10^{11}\text{ Н/м}^2$ ;

початкова швидкість вантажу  $v_0=0,5\text{ м/с}$ ;

початкове переміщення вантажу  $y_0 = 0$ .

Розв'язання:

Площа поперечного перерізу стрижня (коло):

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \quad F = 3.142 \times 10^{-4}\text{ м}^2.$$

Переміщення точки вантажу від дії одиничної сили  $P=1\text{ Н}$ .

$$\delta = \frac{1 \cdot l}{E \cdot F} \delta = 1.592 \times 10^{-8}\text{ м};$$

жорсткість  $c = \frac{1}{\delta}; c = 6.283 \times 10^7\text{ Н/м}$ .

кругова частота власних коливань системи:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \omega = 2.507 \times 10^3 \frac{1}{\text{с}}, [\text{Гц}];$$

період коливань:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}; \quad T = 2.504 \times 10^{-3}, \text{ с};$$

лінійна частота коливань стрижня тоді

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \nu = 398\text{ Гц}.$$

амплітуда коливань

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad A = 1.995 \times 10^{-4}\text{ м}.$$

Візьмемо для розрахунку, наприклад,  $y_0=0,1$  м/с, оскільки при  $y_0=0$  та  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Тоді початкова фаза:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{v_0}{\omega y_0}\right), \quad \alpha = \arctg\left(\frac{0,5}{2,507 \cdot 10^3 \cdot 0,1}\right) = 0,114.$$

**Задача 13.** Консольна балка, із закріпленим на кінці вантажем (рисунок 3.2):

довжина стрижня  $l = 1$  м;  
 модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ .

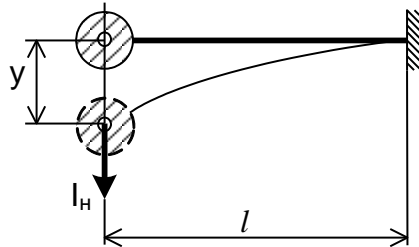


Рисунок 3.2 – Схема консольної балки із вантажем на кінці

Балка має прямокутний поперечний переріз:

ширина перерізу  $b=0.03$  м;

висота перерізу  $h=0.07$  м;

маса вантажу  $m = 10$  кг;

початкова швидкість вантажу  $v_0 = 0.5$  м/сек;

початкове переміщення вантажу  $y_0 = 0$ .

**Приклад**

Відомо, що момент інерції поперечного перерізу стрижня:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad (3.9)$$

тоді отримаємо у числовому вигляді:

$$I = 8.575 \times 10^{-7} \text{ м}^4.$$

Переміщення точки прикладання вантажу від дії одиничної сили  $P=1\text{Н}$ :

$$\delta = \frac{1 \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}; \quad (3.10)$$

$$\delta = 1.944 \times 10^{-6} \text{ м.}$$

Жорсткість дорівнює:  $c = \frac{1}{\delta}$ ;  $c = 5.145 \times 10^5 \text{ Н/м}$ .

Кругова частота власних коливань системи:

$$\omega = \nu^* = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \omega = 226.826 \text{ Гц.}$$

Період коливань  $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$ ;  $T = 0.028 \text{ с}$ .

Лінійна частота  $\nu = \frac{1}{T}$ ;  $\nu = 35,71 \text{ Гц}$ .

Амплітуда коливань  $A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$ ,  $A = 2.204 \times 10^{-3} \text{ м}$ .

Статичний прогин  $y = \frac{m \cdot 9.81}{c}$ ,  $y = 1.905 \times 10^{-4} \text{ м}$ .

**Задача 14.** Скласти диференціальне рівняння коливань балки із вантажем на жорстко-пружному (рисунок 3.3) підвісі. Визначити кругову частоту власних коливань, лінійну частоту та період.

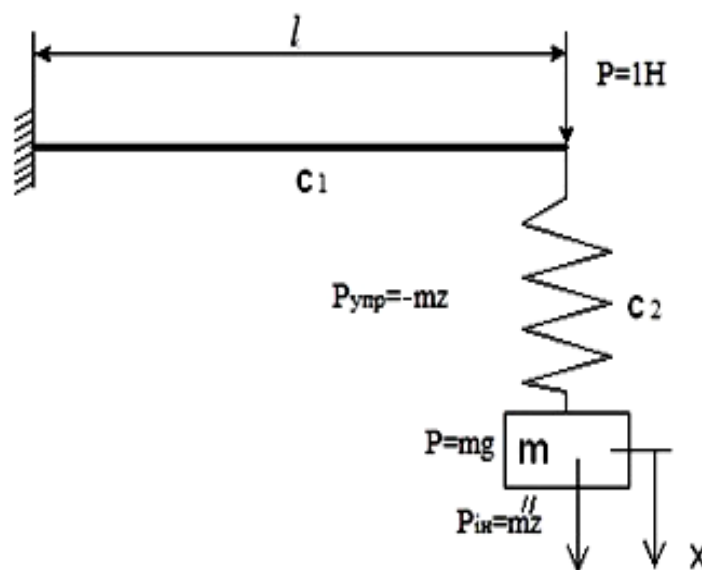


Рисунок 3.3 – Схема дії зусиль на балку із вантажем

Прогин балки в місці закріплення пружини від дії сили, рівної 1Н:

$$\delta = \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot I}.$$

Балку можна замінити умовною пружиною, що має жорсткість:

$$c_1 = \frac{1}{\delta}.$$

$$c_1 = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3}. \quad (3.11)$$

Відомо, що при послідовному з'єднанні еквівалентний прогин (гнучкість) становить

$$\delta_e = \frac{1}{c_e} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}. \quad (3.12)$$

Тоді

$$c_e = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} = \frac{3 \cdot E \cdot I \cdot c_2}{8 \cdot E \cdot I + c_2 \cdot L^3}. \quad (3.13)$$

Визначимо характеристики коливального процесу.

Довжина стрижня  $l = 1$  м;

модуль пружності  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>;

маса вантажу  $m = 10$  кг;

момент інерції поперечного перерізу балки  $I = 8,6 \cdot 10^{-7}$  м<sup>4</sup>;

жорсткість пружини  $c_2 = 200$  кН/м.

### Приклад

Еквівалентна жорсткість:  $c_e = \frac{3 \cdot E \cdot l \cdot c_2}{8 \cdot E \cdot l + c_2 \cdot L^3}$ ,  $c_e = 6,548 \cdot 10^4$  Н/м.

Диференціальне рівняння коливального руху запишемо у такому вигляді:

$$\ddot{m}x + c_e z = 0;$$

$$\omega = \nu^* = \sqrt{\frac{c_e}{m}}, \quad \nu^* = 80,921 \text{ Гц};$$

$$T = \frac{2\pi}{\nu^*}, \quad T = 0,078\text{с};$$

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \nu = 12,82 \text{ Гц} .$$

**Задача 15.** Балка на двох опорах, що завантажена посередині (рисунок 3.4).

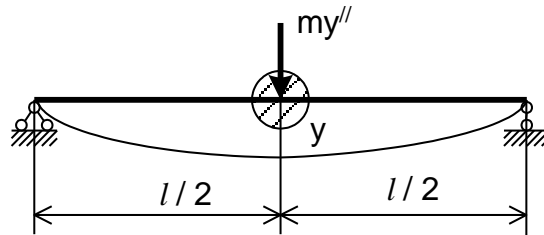


Рисунок 3.4 – Схема балки на двох опорах, яка завантажена посередині

Визначити характеристики та побудувати графік коливального процесу.

Довжина стрижня  $l = 1$  м;

модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м.

Балка має прямокутний поперечний переріз:

ширина перерізу  $b = 0.03$  м;

висота перерізу  $h = 0.07$  м;

маса вантажу  $m = 10$  кг;

початкова швидкість вантажу  $v_0 = 0$  м/с;

початкове переміщення вантажу  $y_0 = 0,5$  м.

### Приклад

Момент інерції поперечного перерізу стрижня

$$I = \frac{bh^3}{12}; \quad I = 8.575 \cdot 10^7 \text{ м}^4.$$

Переміщення точки прикладання вантажу від дії одиничної сили  $P = 1$  Н:

$$\delta = \frac{1 l^3}{48 EI}; \quad (3.14)$$

$$\delta = 1.215 \cdot 10^{-7} \text{ м};$$

жорсткість:  $c = \frac{1}{\delta}$ ;  $c = 8,232 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$ ;

кругова частота власних коливань системи:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \omega = 907.304 \text{ Гц};$$

період коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 6,925 \cdot 10^{-3} \text{ с};$$

лінійна частота:

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \nu = 144 \text{ Гц};$$

амплітуда коливань:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad A = 0,5 \text{ м};$$

статичний прогин:

$$y = \frac{m \cdot 9.81}{c}; \quad y = 1,19 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

початкова фаза:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{v_0}{\omega \cdot y_0}\right); \quad \alpha = \arctg\left(\frac{0}{907.304 \cdot 0.05}\right) = 0.$$

Візьмемо  $v_0 = 0,1 \text{ м/с}$ , оскільки при  $v_0 = 0, \alpha = 0$ , тоді остаточно  $\alpha = 0,063$ .

Переміщення вантажу виконується згідно з наближеним тригонометричним законом і дискретно дорівнює:



$$y(t)=A \cdot \sin(\omega \cdot t + a); \quad y(t) = 0,05 \sin(907,304 \cdot 0 + 0) = 0,496 \text{ м.}$$

Задаємо інтервал часу  $t = [0, 0.001 \dots 0.1]$  з кроком  $p = 0,001$  м.

Побудуємо графік переміщень у коливальному процесі з використанням програмного комплексу MathCAD (рисунок 3.5).

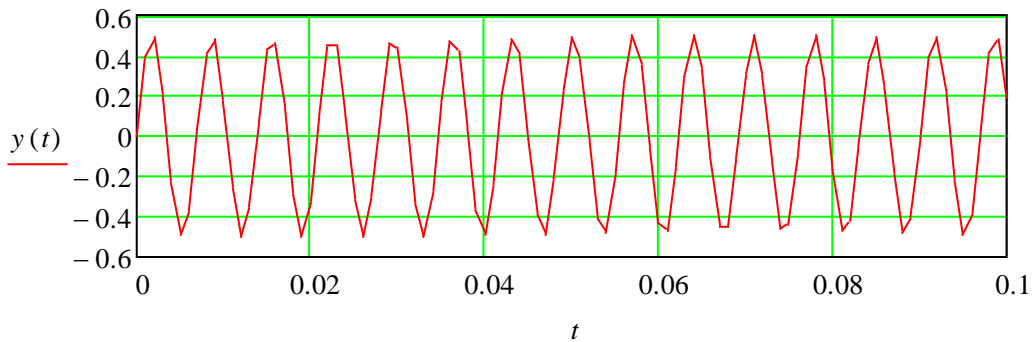


Рисунок 3.5 – Характер коливального руху (графік змінення переміщень балки із вантажем  $y(t)$  від часу  $t$ )

Як видно, це гармонічні коливання конструкції з максимальною амплітудою,  $A = 0,05$  м.

#### 4 КРУТИЛЬНІ КУТОВІ КОЛИВАННЯ ТВЕРДИХ ТІЛ

**Задача 16.** Коливання диска (абсолютно жорсткого), що закріплений на пружному стержні. Диск при цьому є одномасовою системою.

Диференціальне рівняння обертання тіла навколо нерухомої осі запишемо у вигляді

$$I \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi = M, \quad (4.1)$$

де  $\varphi$  – кут повороту;

$M$  – момент прикладених до тіла сил відносно осі обертання;

$I$  – момент інерції щодо тієї ж осі.

Момент  $M$  створюється силами пружності стрижня і дорівнює  $c \cdot \varphi$

$$c = \frac{GI_p}{l}, \quad (4.2)$$

де  $l$  – довжина стрижня;

$I_p$  – полярний момент інерції,  $m^4$ .

Тоді диференціальне рівняння руху диска запишемо у вигляді

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi + p^2 \cdot \varphi = 0, \quad (4.3)$$

де  $p = \sqrt{\frac{c}{I}}$  – частота власних коливань диска, Гц.

### Приклад

Визначити частоту крутильних коливань системи (рисунок 4.1) при таких даних:

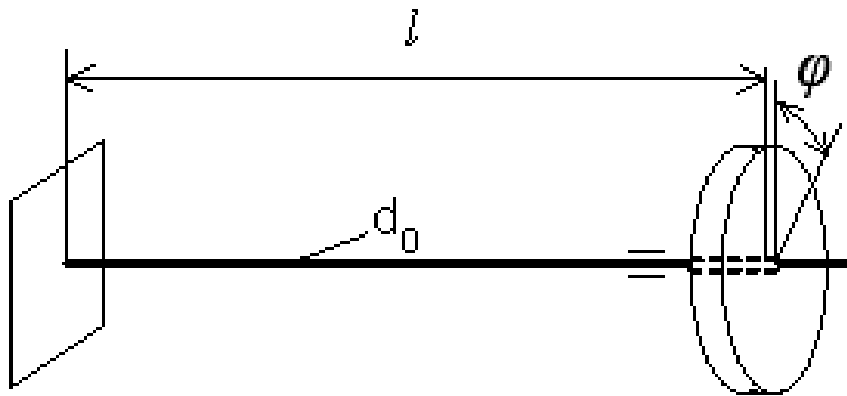


Рисунок 4.1 – Схема одномасової коливальної системи «диск – стрижень»

діаметр диска  $d = 0,30$  м;

товщина диска  $b = 0,2$  м;

діаметр вала  $d_0 = 0,01$  м;

довжина вала  $l = 0,8$  м;

приймаємо, що матеріал дисків і самого вала – сталь конструкційна.

## Приклад

Момент інерції маси диска:

$$I = b \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{32} \cdot \frac{y}{g} ; \quad (4.4)$$

$$I = 126,5 \text{ с}^2/\text{м}.$$

Полярний момент інерції поперечного перерізу вала:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d_0^2}{32}; \quad (4.5)$$
$$I_p = 0,098 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Коефіцієнт жорсткості вала при крутінні:

$$c = \frac{G \cdot I_p}{l} ; \quad c = 98,17 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Частота власних коливань диска:

$$p = \sqrt{\frac{c}{I}}; \quad p = 0,881 \text{ м/с (Гц)};$$

Період та лінійна частота коливань диска відповідно:

$$T = \frac{2\pi}{p}; \quad T = 7,12 \text{ с}.$$

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \nu = 0,14 \text{ Гц}.$$

**Задача 17.** Коливання двомасової системи.

Короткі теоретичні відомості

На диски діють дві рівні і протилежно направлені пари скручувальних сил, які в деяку мить раптово зникають.

Для деякої миті  $t > 0$  кути повороту дисків рівні  $\varphi_2$  і  $\varphi_1$ , а відносний кут повороту рівний  $\varphi_2 - \varphi_1$ . Момент сил пружності вала рівний  $c(\varphi_2 - \varphi_1)$  і діє на кожен з дисків.

Позначивши через  $I_1$  і  $I_2$  моменти інерції мас дисків відносно осі вала, отримаємо рівняння руху:

$$I_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_1 = c \cdot (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (4.6)$$

$$I_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2 = -c \cdot (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (4.7)$$

Мінус у лівій частині другого рівняння поставлений тому, що пружний момент, що діє на другий диск, направлений по ходу стрілки годинника (негативний момент).

Поділивши перше рівняння на друге і віднявши перше рівняння від другого, отримаємо

$$-\left(\frac{c}{I_2} + \frac{c}{I_1}\right) \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2 - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_1. \quad (4.8)$$

Введемо в рівняння відносний кут повороту дисків  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

Тоді рівняння набуде вигляду:

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi + p^2 \cdot \varphi = 0, \quad (4.9)$$

де

$$p = \sqrt{\frac{c \cdot (I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2}}. \quad (4.10)$$

Переріз, який не бере участі в коливаннях, називається вузлом коливань. Вище було показано, що

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi_2 - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_1 = 0.$$

Позначаючи через  $a$  амплітуди кутових переміщень, отримаємо прискорення:

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1 = -a_1 \cdot p^2 \cdot \sin(p \cdot t + a). \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi_2 = -a_2 \cdot p^2 \cdot \sin(p \cdot t + a). \quad (4.12)$$

Тому

$$I_1 \cdot a_1 = I_2 \cdot a_2, \text{ звідки } \frac{a_1}{a_2} = \frac{-I_2}{I_1}.$$

Тобто відношення амплітуд коливань дисків зворотно-пропорційне відношенню їх моментів інерції. Знак мінус означає, що відхилення відбуваються в різні боки. З рисунка 4.2 видно, що при цьому відстані від вузла коливань до кінців вала відповідно складають:

$$a = \frac{I_2}{I_1 + I_2} \cdot l. \quad (4.13)$$

$$b = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \cdot l. \quad (4.14)$$

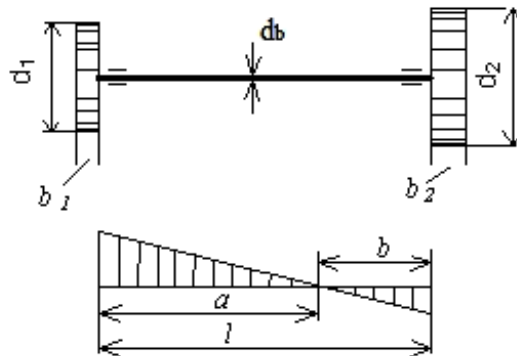


Рисунок 4.2 – Схема двомасової коливальної системи «диск – стрижень»

### Приклад

$$\begin{aligned} d_1 &= 30 \text{ см;} \\ \gamma &= 7800 \text{ кг/м}^3; \\ d_1 &= 0,20 \text{ м;} \end{aligned}$$

$$G = 0.85 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$b_1 = 0,02 \text{ м};$$

$$b_2 = 0,015 \text{ м};$$

$$d_0 = 0,01 \text{ м};$$

$$l = 0,80 \text{ м}.$$

Момент інерції маси диска, відповідно першого та другого:

$$I_1 = b_1 \cdot \frac{\pi \cdot d_1^4}{32} \cdot \frac{\gamma}{g}, \quad I_1 = 126.5 \text{ (м}^4\text{)}.$$

$$I_2 = b_2 \cdot \frac{\pi \cdot d_2^4}{32} \cdot \frac{\gamma}{g}, \quad I_2 = 18.741 \text{ (м}^4\text{)}.$$

Полярний момент інерції поперечного перерізу вала:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d_0^2}{32}, \quad I_p = 0,098 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Коефіцієнт твердості вала при крутінні:

$$c = \frac{GI_p}{l}, \quad ; \quad : 98,17 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Власна частота коливань вала з дисками:

$$p = \sqrt{\frac{c \cdot (I_1 + I_2) \cdot g}{I_1 \cdot I_2}}, \quad p = 76.801 \text{ Гц}.$$

Вузол коливань розташовується поблизу меншого диска, оскільки  $a < b$ :

$$a = \frac{I_2}{I_2 + I_1} \cdot l = 0,10323 \text{ м}.$$

$$b = \frac{I_1}{I_2 + I_1} \cdot l = 0,69677 \text{ м}.$$

Приблизно можна вважати вал затисненим у нерухомому більшому диску. Тоді власні частоти дисків визначаємо за формулами:

$$p_1 = \sqrt{\frac{c}{I_1}}, \quad p_1 = \sqrt{\frac{98,17}{126,5}} = 0,881 \text{ Гц.}$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{c}{I_2}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{98,17}{18,741}} = 2,29 \text{ Гц.}$$

знайдемо власну частоту  $p$  з помилкою близько 7 %.

$$T_1 = \frac{2\pi}{p_1}, \quad T_1 = 7,1 \text{ с.}$$

$$p_1 = \frac{1}{T_1}, \quad p_1 = 0,14 \text{ Гц.}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{p_2}, \quad T_2 = 2,7 \text{ с.}$$

$$p_2 = \frac{1}{T_2}, \quad p_2 = 0,37 \text{ Гц.}$$

## 5 ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ТА ВИХІДНІ ДАНІ ДО РОЗРАХУНКІВ

За останньою цифрою навчального шифру залікової книжки студента треба обрати необхідний варіант завдання, при цьому не має значення, скільки цифр у шифрі. Наприклад, якщо номер навчального шифру 345, або 75, треба обирати п'ятий варіант завдання з вихідними даними. Наприклад, згідно з таблицею 5.1 до задачі 1 це:  $\ell = 3,8 \text{ м}$ ,  $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $G = 0,014 \text{ м}^2$ . Якщо номер навчального шифру закінчується цифрою 0, тобто 450, або 100, треба обирати десятий варіант завдання з вихідними даними. Наприклад, згідно з таблицею 5.1 також до задачі 1 це вихідні дані:  $\ell = 5 \text{ м}$ ,  $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $G = 0,03 \text{ м}^2$ . У такий же спосіб обираються варіанти інших задач за змістом методичних вказівок.

1 Стрижень  
Задача 1 (рисунок 1.1, таблиця 5.1).

Таблиця 5.1

Варіант	$\ell$ , м	$\rho$ , $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	G, м <sup>2</sup>
1	3	7800	0,01
2	3,5	7800	0,015
3	4	7800	0,02
4	3,2	7800	0,012
5	3,8	7800	0,014
6	4,2	7800	0,022
7	4,5	7800	0,025
8	3,3	7800	0,011
9	3	7800	0,01
10	5	7800	0,03

2 Тонка прямокутна пластина  
Задача 2 (рисунок 1.2, таблиця 5.2).

Таблиця 5.2

Варіант	m, кг	a, м	b, м
1	20	0,4	0,2
2	10	0,2	0,1
3	15	0,3	0,15
4	25	0,42	0,23
5	30	0,45	0,25
6	32	0,45	0,28
7	12	0,22	0,13
8	22	0,35	0,18
9	28	0,43	0,24
10	50	0,5	0,3



3 Кругла тонка пластина  
Задача 3 (рисунок 1.3, таблиця 5.3).

Таблиця 5.3

Варіант	m, кг	r, м	R, м
1	5	0,1	0,3
2	6	0,15	0,35
3	7	0,2	0,4
4	4	0,08	0,25
5	4,5	0,09	0,28
6	5,5	0,18	0,33
7	6,5	0,19	0,38
8	7,5	0,22	0,43
9	8	0,25	0,45
10	10	0,3	0,6

4 Паралелепіпед  
Задача 4 (рисунок 1.4, таблиця 5.4).

Таблиця 5.4

Варіант	a, м	b, м	c, м	m, кг
1	0,4	0,2	0,3	20
2	0,3	0,15	0,25	15
3	0,5	0,3	0,4	25
4	0,6	0,4	0,5	30
5	0,35	0,13	0,28	18
6	0,45	0,3	0,4	23
7	0,7	0,5	0,6	35
8	0,43	0,28	0,32	22
9	0,75	0,55	0,65	40
10	0,53	0,31	0,42	28

5 Прямий круговий циліндр  
Задача 5 (рисунок 1.5, таблиця 5.5).

Таблиця 5.5

Варіант	m, кг	r, м	R, м	ℓ, м
1	5	0,1	0,3	1
2	6	0,08	0,2	0,8
3	7	0,09	0,25	0,9
4	4	0,09	0,28	0,95
5	4,5	0,15	0,35	1,2
6	5,5	0,18	0,38	1,4
7	6,5	0,16	0,37	1,1
8	7,5	0,19	0,39	1,45
9	8	0,22	0,42	1,5
10	10	0,25	0,5	2

6 Розрахунок моментів інерції кузова вагона (на прикладі кузова універсального напіввагона) \*

Задача 6 (рисунок 1.6, таблиця 5.6).

Таблиця 5.6

Варіант	Тип
1	Критий універсальний 4-вісний вагон
2	Універсальна 4-вісна цистерна (для світлих нафтопродуктів)
3	8-вісний універсальний на піввагон або 4-вісний глухо донний напіввагон
4	4-вісна універсальна платформа
5	8-вісна універсальна цистерна (для світлих нафтопродуктів)
6	4-вісний критий вагон-хопер для цементу
7	4-вісний критий вагон-хопер для мінеральних добрив
8	4-вісний вагон-хопер для зерна
9	6-вісний вагон-самоскид
10	4-вісний вагон бункерного типу (нафтобітум або мука)

\* Розміри основних частин – вузлів: рами, бокових стін, торцевих стін, бортів, бункерів, а також вантажу (вантажопідйомність вагона заданого типу) – прийняти згідно з технічними характеристиками і техніко-економічними параметрами («галузевий каталог вантажних вагонів» залізничної колії 1520 мм).

Задача 7. Для підвішування вантажного візка ЦНП-ХЗ (18-100 і модифікації) – (рисунок 2.1,б, таблиця 5.7).

Таблиця 5.7

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C_p \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	10000	9000	9800	10500	11000	8850	9500	9900	10250	8900

Задача 8. Для підвішування пасажирського візка КВЗ (ТВЗ) – ЦНДІ(І,ІІ) – (рисунок 2.1,а):

а) центрального (таблиця 5.8)

Таблиця 5.8

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C_p \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	750	755	760	765	770	775	745	740	780	800

б) надбуксового (таблиця 5.9)

Таблиця 5.9

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C_b, \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	1325	1350	1335	1340	1345	1350	1320	1315	1350	1370

Задача 9. Кутова жорсткість надресорної балки пасажирського візка КВЗ(ТВЗ) – ЦНДІ (І,ІІ) (рисунок 2.1,в, таблиця 5.10).

Таблиця 5.10

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	100	110	120	95	90	85	80	115	125	98
$\ell, \text{м}$	2,036	2,040	2,050	2,060	2,045	2,030	2,010	2,020	1,95	1,9

Задача 10. Визначення частот і періодів коливань для механічних систем (рисунок 2.2, таблиця 5.11). Побудувати графік залежностей:  $v = f(m; C)$ ;  $T = f(m; C)$ ;  $\omega = f(v; T)$ .

Таблиця 5.11

Варіант	m, кг	C <sub>1</sub> , кН/м	C <sub>2</sub> , кН/м
1	10	1000	550
2	15	1050	600
3	20	1100	650
4	25	1150	700
5	30	1200	750
6	35	1250	800
7	40	1300	850
8	45	1350	900
9	50	1400	950
10	55	1450	1000

Задача 11. Вимушені коливання механічної системи. Визначення коефіцієнта динамічності числа витків циліндричної пружини та центробіжної сили (рисунок 2.4, таблиця 5.12).

Таблиця 5.12

Варіант	Q, кг	D, м	d, м	n, об/хв	E, МПа	e, м
1	24	0,12	0,03	800	$8 \cdot 10^5$	0,005
2	25	0,13	0,032	600	$8 \cdot 10^5$	0,002
3	20	0,14	0,035	400	$8 \cdot 10^5$	0,0025
4	21	0,15	0,04	500	$8 \cdot 10^5$	0,0045
5	23	0,17	0,043	1000	$8 \cdot 10^5$	0,006
6	22	0,16	0,045	900	$8 \cdot 10^5$	0,01
7	26	0,11	0,023	1100	$8 \cdot 10^5$	0,015
8	28	0,17	0,025	850	$8 \cdot 10^5$	0,007
9	27	0,18	0,038	1200	$8 \cdot 10^5$	0,012
10	30	0,2	0,042	1150	$8 \cdot 10^5$	0,02

Задача 12. Поздовжні та поперечні коливання стрижнів, (рисунок 3.1, таблиця 5.13). Визначити  $\delta$ ,  $c$ ,  $\nu^*$ ,  $T$ ,  $\omega$  (власну кругову частоту, лінійну частоту і період коливань).

Таблиця 5.13

Варіант	m, кг	ℓ, м	d, м	v <sub>0</sub> , м/с	y <sub>0</sub> , м	E, МПа
1	10	1	0,02	0,5	0	2,1·10 <sup>5</sup>
2	11	1,5	0,03	0,6	0,1	2,1·10 <sup>5</sup>
3	12	2	0,04	0,65	0,05	2,1·10 <sup>5</sup>
4	13	2,5	0,05	0,4	0,06	2,1·10 <sup>5</sup>
5	14	3	0,06	0,45	0,025	2,1·10 <sup>5</sup>
6	15	3,5	0,07	0,55	0,03	2,1·10 <sup>5</sup>
7	16	4	0,08	0,52	0,035	2,1·10 <sup>5</sup>
8	17	4,5	0,09	0,48	0,015	2,1·10 <sup>5</sup>
9	18	5	0,1	0,4	0,02	2,1·10 <sup>5</sup>
10	20	6	0,12	0,35	0,04	2,1·10 <sup>5</sup>

Задача 13. Консольна балка, несуча на кінці вантаж (рисунок 3.2, таблиця 5.14). Визначити  $v^*$ ,  $T$ ,  $\omega$ ,  $A$ ,  $y$  – статичний прогин.

Таблиця 5.14

Варіант	m, кг	b, м	h, м	V <sub>0</sub> , м/с	y <sub>0</sub> , м	E, МПа	ℓ, м
1	10	0,08	0,07	0,5	0	2,1·10 <sup>5</sup>	2,5
2	9	0,04	0,08	0,6	0,1	2,1·10 <sup>5</sup>	2,0
3	8	0,05	0,09	0,65	0,05	2,1·10 <sup>5</sup>	1,8
4	7	0,02	0,04	0,4	0,06	2,1·10 <sup>5</sup>	1,7
5	6	0,01	0,03	0,45	0,025	2,1·10 <sup>5</sup>	1,6
6	12	0,07	0,1	0,55	0,03	2,1·10 <sup>5</sup>	3,0
7	11	0,035	0,075	0,52	0,035	2,1·10 <sup>5</sup>	2,8
8	8,5	0,04	0,08	0,48	0,015	2,1·10 <sup>5</sup>	1,9
9	10,5	0,075	0,1	0,4	0,02	2,1·10 <sup>5</sup>	2,8
10	15	0,08	0,12	0,35	0,04	2,1·10 <sup>5</sup>	3,5

Задача 14. Коливання балки з вантажем на жорстко–пружньому підвісі (рисунок 3.3, таблиця 5.15). Визначити:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12},$$

$$C_{\text{б(балки)}} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{\ell^3};$$

$$C_{\text{п(подвеса)}} = \frac{6 \cdot d^4}{8 \cdot h \cdot D^3}$$

Еквівалентна жорсткість:

$$C_e = \frac{C_b \cdot C_{\text{п}}}{C_b + C_{\text{п}}}; \omega, \vartheta^*, T, \vartheta.$$

Таблиця 5.15

Варіант	m, кг	ℓ, м	b, м	h, м	d, м	D, м	n	E, МПа
1	10	1	0,02	0,03	0,01	0,1	10	$2,2 \cdot 10^5$
2	11	1,1	0,025	0,04	0,015	0,12	9	$2,2 \cdot 10^5$
3	12	1,2	0,03	0,05	0,02	0,15	8	$2,2 \cdot 10^5$
4	13	1,3	0,035	0,06	0,025	0,17	7	$2,2 \cdot 10^5$
5	14	1,4	0,04	0,065	0,03	0,2	6	$2,2 \cdot 10^5$
6	15	1,5	0,045	0,07	0,035	0,22	7	$2,2 \cdot 10^5$
7	16	1,6	0,05	0,075	0,04	0,25	5	$2,2 \cdot 10^5$
8	17	1,7	0,055	0,08	0,045	0,27	8	$2,2 \cdot 10^5$
9	18	1,8	0,06	0,085	0,05	0,3	6	$2,2 \cdot 10^5$
10	20	2	0,08	0,1	0,055	0,35	4	$2,2 \cdot 10^5$

Задача 15. Балка на двох опорах, несуча посередині вантаж (рисунок 3.4, таблиця 5.16). Визначити  $v^*$ ,  $T$ ,  $A$ ,  $y$ ,  $\alpha$ ,  $y(t)$ .  $t=0 \dots 0,1$ , step  $1 \cdot 10^{-3}$ .

Таблиця 5.16

Варіант	m, кг	ℓ, м	b, м	h, м	$V_0$ , м/с	$y_0$ , м	E, МПа
1	10	1	0,03	0,07	0	0,05	$2,1 \cdot 10^5$
2	11	1,5	0,04	0,08	0,1	0,055	$2,1 \cdot 10^5$
3	12	2	0,05	0,1	0,15	0,06	$2,1 \cdot 10^5$
4	12,5	2,5	0,06	0,12	0,2	0,065	$2,1 \cdot 10^5$
5	13	3	0,07	0,15	0,25	0,07	$2,1 \cdot 10^5$
6	13,5	3,5	0,08	0,17	0,3	0,075	$2,1 \cdot 10^5$
7	14	4	0,09	0,19	0,35	0,08	$2,1 \cdot 10^5$
8	14,5	4,5	0,01	0,2	0,4	0,085	$2,1 \cdot 10^5$
9	15	5	0,015	0,25	0,45	0,09	$2,1 \cdot 10^5$
10	16	6	0,02	0,3	0,5	0,1	$2,1 \cdot 10^5$

Задача 16. Абсолютно жорсткий диск, закріплений на пружному стрижні (одномасова система) – (рисунок 3.4, таблиця 5.17).

Як позначення власної частоти при пружних коливаннях дисків на стрижні замість  $\vartheta^*$  прийняли  $\rho$ .

Визначити:  $I$ ,  $I_p$ ,  $C$ ,  $\rho \sim \nu^* \omega$  – власна колова частота,  $T$ ,  $\vartheta$ .

Таблиця 5.17

Варіант	d, м	b, м	d <sub>0</sub> , м	ℓ, м	γ, т/м <sup>3</sup>	E, МПа
1	0,3	0,02	0,01	0,8	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
2	0,35	0,025	0,015	0,95	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
3	0,4	0,03	0,02	0,9	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
4	0,45	0,035	0,025	0,95	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
5	0,5	0,04	0,03	1,0	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
6	0,55	0,045	0,035	1,5	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
7	0,6	0,05	0,04	2	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
8	0,65	0,055	0,045	2,5	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
9	0,7	0,06	0,05	3	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
10	0,75	0,065	0,055	3,5	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>

Задача 17. Абсолютно жорсткий диск, закріплений на пружному стрижні (двомасова система) – (рисунок 4.2, таблиця 5.18). Визначити:  $I$ ,  $I_p$ ,  $C$ ,  $\rho \sim \nu^*(\omega)$ ,  $T$ ,  $\vartheta$ , а і b – вузли коливань, м.

Варіант	d <sub>1</sub> , м	d <sub>2</sub> , м	b <sub>1</sub> , м	b <sub>2</sub> , м	d <sub>0</sub> , м	ℓ, м	γ, т/м <sup>3</sup>	E, МПа
1	0,3	0,35	0,02	0,01	0,01	0,8	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
2	0,35	0,4	0,025	0,015	0,015	0,85	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
3	0,4	0,45	0,03	0,02	0,02	0,9	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
4	0,45	0,5	0,035	0,025	0,025	0,95	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
5	0,5	0,55	0,04	0,03	0,03	1,0	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
6	0,55	0,6	0,045	0,035	0,035	1,5	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
7	0,6	0,65	0,05	0,04	0,04	2	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
8	0,65	0,7	0,055	0,045	0,045	2,5	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
9	0,7	0,75	0,06	0,05	0,5	3	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>
10	0,75	0,8	0,065	0,06	0,055	3,5	7,85	0,85·10 <sup>5</sup>

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Политехника, 1990. – 272 с.
- 2 Пановко Я. Г., Губанова Н. Н. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
- 3 Магнус Курт. Колебания: Введение и исследования колебательных систем. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
- 4 Лазарян В. А. Динамика вагонов. – М.: Трансжелдориздат, 1964. – 255 с.
- 5 Вершинский С. В., Данилов В. Н., Челноков И. И. Динамика вагона. – М.: Транспорт, 1978. – 352 с.
- 6 Трофимова Т. Н. Физика в таблицах и формулах. – М.: Дрофа, 2004. – 432 с.
- 7 Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1968. – 478 с.
- 8 Яблонский А. А. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1984. – 423 с.
- 9 Вайнберг Д. В., Писаренко Г. С. Механические колебания и их роль в технике. – М.: Наука, 1965. – 276 с.
- 10 Бабаков И. М. Теория колебаний. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
- 11 Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. – СПб.: Лань, 2005. – 440 с.
- 12 Алфутов Н. А., Колесников К. С. Устойчивость движения и равновесия. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 256 с.
- 13 Алфутов, Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
- 14 Лукин В. В., Шадур, Л. А., Котуранов В. Н. и др. Конструирование и расчет вагонов / Под ред. В. В. Лукина. – М.: УМК МПС России, 2000. – 731 с.
- 15 Дьомін Ю. В., Черняк Г. Ю. Основи динаміки вагонів [Текст]. – К.: КУЕТТ, 2003. – 270 с.
- 16 Советский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1986. – 1600 с.
- 17 Писаренко Г. С. Соппротивление материалов / Под ред. Г. С. Писаренко. – К.: Вища школа, 1986. – 775 с.





