

**ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ**

**Кафедра вищої математики**

**ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ  
ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ**

**ЗАВДАННЯ ТА МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**до виконання індивідуальних завдань з дисципліни**

***«ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ»***

**Харків – 2019**

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 8 квітня 2019 р., протокол № 7.

Призначено для студентів економічного факультету всіх спеціальностей першого освітнього рівня.

Укладачі:

доц. Ю. С. Шувалова,  
старш. викл. О. О. Гончарова

Рецензент

доц. Ю. О. Акімова

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ  
ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

ЗАВДАННЯ ТА МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання індивідуальних завдань з дисципліни

*«ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ»*

Відповідальний за випуск Гончарова О. О.

Редактор Ібрагімова Н. В.

---

Підписано до друку 23.04.19 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк. арк. 3,5. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет  
залізничного транспорту,  
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

## ВСТУП

Методичні вказівки призначено для студентів першого освітнього рівня всіх спеціальностей економічного факультету. Пропонується розв'язання задачі лінійного програмування за допомогою надбудови Microsoft Excel «Пошук розв'язання». Особливу увагу приділено економічному тлумаченню двоїстих оцінок. За отриманими звітами робиться аналіз стійкості оптимального плану та аналіз економіко-математичної моделі на чутливість. Варіанти індивідуальних завдань проілюстровано прикладами з покроковою інструкцією розв'язання на комп'ютері. Для успішного засвоєння тем розділу та виконання завдань слід використовувати лекційний матеріал, а також матеріал, викладений у конспекті лекцій [3] і методичних вказівках [4].

Номери варіантів індивідуальних завдань видаються викладачем.

Розв'язання кожного завдання повинно починатися з повної умови. Електронний файл з розв'язанням завдання та збереженими звітами за запитом викладача може надсилатися електронною поштою. Необхідні звіти мають бути роздруковані і додаватися до розв'язання.

У назві файлу необхідно вказувати номер завдання, прізвище студента і номер групи, наприклад «Завд. 3.2\_Назаренко О.М. 8-2-ЕП». Умови завдання повинні бути записані на робочому аркуші Excel буквально в тому вигляді, у якому завдання було сформульовано, а саме **обов'язково** підписані клітинки для назв змінних, цільової функції та види обмежень. Тоді робочий аркуш можна розглядати як звітний документ. У звітах, які формуються автоматично за інформацією з робочого аркуша, також буде відображатися назва клітинок, яка складається з назв відповідного рядка і стовпця. Тому намагаємося давати стислі та інформативні назви.

Надбудова «Пошук розв'язання» входить до складу Microsoft Excel, починаючи з 5-ї версії, для молодших версій можна скористатися службою підтримки Microsoft Office <https://support.office.com/> та завантажити надбудову в Excel.

## Завдання 1

Побудувати економіко-математичну модель задачі лінійного програмування.

### Варіанти завдань

1 Підприємець придбав приміщення в бізнес-центрі загальною площею 100 кв. м., яке планує здавати в оренду. Заявки на оренду надійшли від власників крамниці, кав'ярні та рекламної агенції. Власникам крамниці потрібне приміщення загальною площею не менше 40 кв. м, рекламній агенції – не менше 10 кв. м. Власники кав'ярні попередили, що можуть взяти в користування вільну площу лише за умови, що вона буде не менше 6 кв. м та не більше 9 кв. м. Підприємець розраховує, що прибуток від здачі в оренду приміщення під крамницю складе 8000 грн/кв. м, прибуток від здачі в оренду приміщення під кав'ярню – 7500 грн/кв. м, під рекламну агенцію – 8500 грн/кв. м. Визначити оптимальний розподіл площі між претендентами на оренду, який забезпечить власнику максимальний прибуток.

2 Підприємство отримало замовлення на виготовлення 12 вікон. Для виготовлення одного вікна необхідно 4 деталі розміром  $1,5 \times 0,8$  м і 2 деталі розміром  $1,5 \times 0,5$  м. На складі є в наявності листи скла розміром  $1,5 \times 1,3$  м, їх можна розрізати на частини необхідних розмірів тільки двома способами. Характеристики розрізання одного листа скла на необхідні деталі вікна вказані в таблиці.

Спосіб розрізання	Кількість деталей, од/лист	
	$1,5 \times 0,8$	$1,5 \times 0,5$
I	0	2
II	1	1

Скласти план розрізання листів скла, тобто визначити скільки листів потрібно розрізати кожним способом так, щоб для виконання замовлення витратити найменшу кількість листів скла.

3 Виробничий цех виготовляє три види продукції А, В та С. Прибуток від реалізації однієї одиниці продукції складає

10 умов. од., 15 умов. од. та 25 умов. од. відповідно. Для виробництва використовуються два види ресурсів, норми витрат ресурсів та запаси ресурсів кожного виду вказані в таблиці.

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів / од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	5	3	10	120
Ресурс 2	5	6	1	200

Маркетингові дослідження свідчать про те, що продукція А користується попитом принаймні вдвічі більшим, ніж продукція В. Скласти план виробництва продукції А, В та С, який забезпечить найбільший прибуток.

4 Підприємець планує вкласти кошти в розмірі 40000 грн. в акції компанії А та компанії В. Для зменшення ризиків, в акції компанії В рекомендовано вкласти принаймні вдвічі більше коштів, ніж в акції компанії А. Дохідність акцій компанії А – 16,5 % річних, акцій компанії В – 15 % річних. Визначити оптимальний розподіл вкладених коштів, за якого підприємець отримає найбільший прибуток.

5 Онлайн-магазин отримав замовлення від двох покупців на купівлю паперових стаканів для харчових продуктів. Першому покупцю потрібно 1000 од., а другому – 1500 од. Товар магазину зберігається на двох складах, кількість товару на кожному складі та вартість доставки з кожного складу вказані в таблиці.

Склад	Вартість доставки, умов. од./од.		Кількість товару, од.
	покупець 1	покупець 2	
1	3	5	2000
2	7	4	3000

Скласти план доставки, тобто визначити скільки одиниць товару з кожного складу потрібно доставити покупцям так, щоб вартість доставки була мінімальною.

6 Підприємство планує шити шкільну форму. На форму для дівчинки потрібно 1,7 м вовни, 2,2 м віскози та 0,05 люд.-тижд. витрат праці. На форму для хлопчика потрібно 1,3 м вовни, 1 м віскози та 0,04 люд.-тижд. витрат праці. Загалом підприємство

має 3000 м вовни, 2000 м віскози та 300 люд.-тижд. витрат праці. За попередньою домовленістю з замовником мають пошити форми для дівчаток вдвічі більше, ніж форми для хлопчиків. Замовник купує форму для дівчинки на 50 грн дорожче собівартості, форму для хлопчика – на 20 грн. Потрібно скласти план виробництва, тобто визначити скільки форми кожного виду необхідно зшити, за якого підприємство отримає найбільший прибуток.

7 Для виробництва постільної білизни необхідно викроїти деталі двох видів А та В, на один комплект потрібно 3 деталі А та 2 деталі В. На підприємстві розроблено два способи розкрою тканини, характеристики розкрою одного рулону тканини задані в таблиці.

Спосіб розкрою	Кількість деталей, од./рулон		Відходи, пог. м/рулон
	деталь А	деталь В	
I	23	16	0,2
II	22	18	0,4

Підприємство отримало замовлення на пошив 80 комплектів постільної білизни. Скласти план виробництва, тобто визначити скільки рулонів потрібно розкроїти кожним способом так, щоб кількість відходів була мінімальною.

8 Пекарня виготовляє з житнього та пшеничного борошна I гатунку хліб «Дарницький» і «Столичний». Кількість борошна кожного виду, яке необхідне для виготовлення однієї одиниці продукції, і запас борошна на добу задані в таблиці.

Сорт борошна	Норма витрат борошна, кг/од. продукції		Запас борошна, кг
	«Дарницький»	«Столичний»	
Житнє	0,4	0,35	40
Пшеничне I гатунок	0,3	0,35	80

Також відомо, що хлібу «Дарницький» реалізують не більше 80 од/доба. Прибуток від реалізації однієї одиниці «Дарницького» складає 7 грн, «Столичного» – 8,5 грн. Скласти план виробництва

хлібу, тобто визначити кількість одиниць хлібу кожного виду, який забезпечить підприємству максимальний прибуток.

9 Підприємство виготовляє вироби А та В. У процесі виготовлення кожен з виробів підлягає обробці на трьох верстатах, норми витрат часу на обробку виробу кожним верстатом вказані в таблиці.

Вид виробу	Норма витрат часу, год/виріб		
	верстат 1	верстат 2	верстат 3
А	0,4	0,3	0,15
В	0,25	0,1	0,2

Верстати мають тижневий ресурс роботи: перший верстат – не більш 40 год, другий та третій – не більш 30 год кожен. Прибуток від реалізації виробу А складає 27 умов. од., виробу В – 35 умов. од. Скласти тижневий план виробництва виробів А та В, який забезпечить підприємству максимальний прибуток.

10 Підприємство планує збільшити виробництво. Для цього двом філіалам потрібно залучити кредитні кошти в розмірі 40000 умов. од. та 55000 умов. од. відповідно. Підприємство звернулося до трьох банків, суми кредиту, які загалом можуть виділити банки, і процентні ставки за кредитами вказані в таблиці.

Філіали	Процентні ставки банків, %/р.		
	банк 1	банк 2	банк 3
I	12	15	13
II	12	18	20
Сума кредиту, умов. од.	30000	50000	50000

Визначити оптимальне розподілення кредитних коштів, за якого загальні витрати підприємства за кредитами за рік були б мінімальними.

11 У розпорядженні автотранспортного підприємства 10 автомобілів вантажопідйомністю 15 т та 10 автомобілів вантажопідйомністю 12 т. Витрати на перевезення однієї тонни вантажу 15-тонником складають 10 умов. од./т, 12-тонником –

6 умов. од./т. Підприємству необхідно виконати замовлення на перевезення 80 т піску. Завантаження автомобілів здійснюється послідовно на вантажному пункті, час роботи якого протягом доби складає 12 год. Тривалість завантаження автомобіля вантажопідйомністю 15 т складає 35 хв, автомобіля вантажопідйомністю 12 т – 20 хв. Підприємство намагається мінімізувати загальні витрати на перевезення. Визначити оптимальну кількість автомобілів кожного типу, які будуть здійснювати перевезення.

12 Для виробництва меблів використовують листи фанери. Для виконання замовлення з них необхідно вирізати не менше 20 деталей типу А, не менше 40 деталей типу В та не менше 60 деталей типу С. Розроблено два способи розкрою листів фанери, характеристики розкрою одного листа фанери різними способами вказані в таблиці.

Спосіб розкрою	Кількість деталей, од./лист		
	деталь А	деталь В	деталь С
I	2	2	3
II	1	3	1

Скласти план розкрою листів фанери, тобто визначити скільки листів потрібно розрізати кожним способом так, щоб для виконання замовлення витратити найменшу кількість листів фанери.

13 Підприємство, що займається переробкою овочів і фруктів, закупило 2 т яблук, 1,5 т груш та 1 т слив. Планується виготовити з них два продукти: сік «Яблучно-грушевий» і сік «Мультивітамін», кількість фруктів, ягід, що необхідна для виготовлення 1 л продукту, і витрати на переробку вказані в таблиці.

Вид продукту	Кількість фруктів, ягід, кг/л продукції		
	яблуко	груша	слива
сік «Яблучно-грушевий»	1	0,5	0
сік «Мультивітамін»	0,9	0,4	0,4



Скласти план виготовлення соку, тобто визначити кількість соку кожного виду так, щоб витратити максимальну кількість ресурсів.

14 Фармацевтична компанія рекламує свою продукцію на телебаченні та на радіо і планує витратити на це 100000 грн. Вартість рекламного ролика, розміщеного на телебаченні, коштує 2200 грн, а на радіо – 180 грн. Компанія має намір використовувати радіорекламу принаймні вдвічі частіше, ніж рекламу на телебаченні. Маркетингові дослідження свідчать про те, що реклама на телебаченні сприяє збільшенню прибутку від реалізації продукції на 5 % витрачених на неї коштів, радіореклама – на 0,25 %. Визначити оптимальний розподіл коштів, які мають витратитися на рекламу на телебаченні та на рекламу на радіо, за якого збільшення прибутку буде найбільшим.

15 Фермерське господарство відвело два поля площею 4 тис. га та 7 тис. га під посіви жита, пшениці, кукурудзи. Середню врожайність культур на кожному полі вказано в таблиці.

Поле	Врожайність культури, ц/га		
	жито	пшениця	кукурудза
I	20	18	25
II	30	25	20

За 1 ц жита господарство одержує 20 умов. од., пшениці – 25 умов. од., кукурудзи – 14 умов. од. Скласти план засіва полів, тобто визначити, яку площу слід відвести господарству під кожную культуру на кожному полі так, щоб одержати максимальний прибуток. Передбачається зібрати не менше 19000 ц жита, 15000 ц пшениці та 300000 ц кукурудзи.

16 Для відгодівлі кролів на фермі в щоденний раціон кожного треба включати не менше 6 од. поживної речовини А, 8 од. поживної речовини В і 12 од. поживної речовини С. Для відгодівлі можна використати два види кормів. Дані про вміст поживних речовин в одному кілограмі кожного корму подано в таблиці.

Вид корму	Кількість поживної речовини, од./кг		
	А	В	С
I	1	3	4
II	2	5	5

Треба скласти раціон, який відповідав би всім вимогам за поживністю і був би найдешевшим, коли відомо, що один кілограм першого корму коштує 12 грн, другого корму – 13 грн.

17 Для пошиву одного виробу необхідно викроїти деталі 1, 2, 3. На виробництві розроблено два способи розкрою тканини. Характеристики розкрою одного рулону тканини та необхідна кількість деталей кожного виду для пошиву одного виробу задані в таблиці. Виробництво отримало замовлення на пошив 500 виробів. На складі в наявності є 18 рулонів необхідної тканини. Скласти план, який забезпечить виконання замовлення, тобто визначити скільки рулонів потрібно розкроїти кожним способом так, щоб кількість відходів була мінімальною.

Спосіб розкрою	Кількість деталей, од./рулон			Відходи, пог. м/рулон
	деталь 1	деталь 2	деталь 3	
I	30	30	50	0,35
II	26	30	60	0,5
Кількість деталей, од./виріб	1	4	2	

18 У фірми, що займається продажем паливно-мастильних матеріалів, на двох базах знаходиться 500 т та 700 т бензину відповідно. Увесь цей бензин потрібно доставити на три автозаправні станції. Вартість перевезення 1 т бензину з кожного складу до кожної з автозаправних станцій, а також кількість бензину, що потребує кожна зі станцій, вказані в таблиці.

База	Вартість перевезення, умов. од./т		
	станція 1	станція 2	станція 3
I	5	7	1
II	2	3	4
Кількість бензину, т	400	600	200

Скласти план перевезення, тобто визначити скільки бензину потрібно доставити з кожної бази до кожної станції так, щоб вартість перевезення була мінімальною.

19 Підприємець планує вкласти кошти в розмірі 50000 умов. од. в акції компанії А та компанії В. Для зменшення ризиків в акції компанії А рекомендовано вкласти коштів принаймні вдвічі більше, ніж в акції компанії В. Дохідність акцій компанії А – 16,5 % річних, акцій компанії В – 22 % річних. Визначити оптимальний розподіл вкладених коштів, за якого підприємець отримає найбільший прибуток, якщо акцій компанії В можна придбати на суму не більше 10000 умов. од.

20 Для виробництва меблів використовують листи фанери. Для виконання замовлення з них необхідно вирізати не менше 18 деталей типу А та не менше 36 деталей типу В. Розроблено три способи розкрою листів фанери, характеристики розкрою одного листа фанери вказані в таблиці.

Спосіб розкрою	Кількість деталей, од./лист	
	деталь А	деталь В
I	2	9
II	5	3
III	4	6

Скласти план розкрою листів фанери, тобто визначити скільки листів потрібно розрізати кожним способом так, щоб для виконання замовлення витратити найменшу кількість листів фанери.

21 Підприємство має 100 м шкіри та 140 м текстилю та 160 люд.-тижд. витрат праці. Планується шити жіночі та чоловічі кросівки. На жіночу пару потрібно 0,3 м шкіри, 0,2 м текстилю та 0,7 люд.-тижд. витрат праці. На чоловічу пару потрібно 0,5 м шкіри, 0,3 м текстилю та 0,5 люд.-тижд. витрат праці. За попередньою домовленістю із замовником мають виробити не менше 120 пар кросівок загалом. Акціонери, які вклали гроші в підприємство та сировину, вимагають прибуток у сумі не менше 1400 грн. Замовник купує жіночі кросівки на 50 грн дорожче собівартості, чоловічі – на 80 грн. Потрібно скласти план пошиву,

тобто визначити скільки кросівок кожного виду необхідно зшити так, щоб отримати найбільший прибуток.

22 До будівельного складу надійшов вантаж: утеплювальний матеріал і клей для теплоізоляції в кількості 140 та 60 од. Вивантаження кожного типу вантажу може виконувати будь-який з двох навантажувачів. Кількість одиниць вантажу, яку може розвантажити механізм за годину роботи, і тривалість роботи на добу кожного навантажувача вказані в таблиці.

Вид розвантажувача	Кількість вантажу, од./год		Тривалість роботи, год/доба
	утеплювальний матеріал	клей для теплоізоляції	
1	8	6	18
2	10	5	12

Вартість години роботи першого навантажувача складає 5 умов. од., а другого – 7 умов. од. Скласти план робіт, тобто визначити тривалість роботи кожного розвантажувача, за якого загальна вартість розвантаження буде мінімальною.

23 Підприємство, що має три філіали, отримало замовлення на випуск 50000 од. нового виду продукції. Воно може виділити додаткові кошти на переобладнання в розмірі 10 млн грн. Характеристики планів для кожного з філіалів вказані в таблиці.

Характеристики	Філіали		
	I	II	III
Витрати на виробництво, од. продукції	100	80	85
Собівартість, од. продукції	50	48	45

Визначити оптимальний розподіл об'ємів виробництва по філіалах, за якого вартість замовлення буде мінімальною.

24 Відділи кредитування комерційного банку планують виділити кредити трьом фірмам. Сума кредиту, яку загалом може виділити перший відділ, складає 60000 умов. од., другий – 40000 умов. од. Процентні ставки за кредитами та кількість кредитних коштів, яких потребують фірми, вказані в таблиці.

Відділи банку	Процентні ставки, %/р.		
	фірма 1	фірма 2	фірма 3
I	11	15	8
II	13	18	10
Потреби в кредиті, умов. од.	30000	20000	40000

Знайти оптимальне розподілення банківських кредитів між фірмами, яке забезпечить банку максимальний прибуток за рік.

25 Підприємець придбав приміщення загальною площею 500 кв. м, яке планує здавати в оренду. Заявки на оренду надійшли від власників фітнес-клубу, кафе та майстерні з ремонту одягу. Власники фітнес-клубу попередили, що можуть взяти в користування вільну площу лише за умови, що вона буде не менше 140 кв. м та не більше 250 кв. м. Власникам кафе потрібне приміщення загальною площею не менше 70 кв. м, а власникам майстерні – не менше 20 кв. м. Підприємець розраховує, що прибуток від здачі в оренду приміщення під фітнес-клуб складе 9000 грн/кв. м, прибуток від здачі в оренду приміщення під кафе – 9400 грн/кв. м, під майстерню – 8500 грн/кв. м. Визначити оптимальний розподіл площі між претендентами на оренду, який забезпечить власнику максимальний прибуток.

26 Виробничий цех виготовляє два види продукції А та В. Прибуток від реалізації однієї одиниці продукції складає 30 грн. та 48 грн відповідно. Для виробництва використовуються три види ресурсів, норми витрат ресурсів і запаси ресурсів кожного виду вказані в таблиці.

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів / од. продукції		Запас ресурсу
	А	В	
Ресурс 1	8	6	500
Ресурс 2	2	1	80
Ресурс 3	0,3	0,5	25

Поставлено умову продукції А виготовити не менше 50 од. Скласти план виробництва продукції А та В, який забезпечить найбільший прибуток.

27 Столярний цех отримав замовлення на виготовлення деталей з фанери. Розроблено два способи розкрою листів фанери. Характеристики розкрою одного листа фанери різними способами та кількість замовлених деталей кожного виду вказані в таблиці.

Спосіб розкрою	Кількість деталей, од./лист				Відходи, кв. м
	деталь А	деталь В	деталь С	деталь D	
I	1	1	1	1	0,8
II	3	0	0	2	1,1
Кількість деталей, од.	100	60	80	120	

Скласти план розкрою листів фанери, тобто визначити скільки листів потрібно розрізати кожним способом так, щоб відходи були мінімальними.

28 Фірма, що займається перевезенням вантажів, планує закупити нові машини вантажомісткістю 3 та 5 т. Всього в гаражі можна розмістити не більше 12 вантажівок. Вартість однієї тритонної вантажівки – 15 тис. умов. од., а п'ятитонної – 21 тис. умов. од., всього виділено 700 тис. умов. од. Скільки вантажівок кожного виду необхідно закупити, щоб загальна вантажомісткість була максимальною.

29 Фермерське господарство відвело три поля площею 7 тис. га, 9 тис. га, 10 тис. га для вирощування буряку та моркви. Середню врожайність культур на кожному полі вказано в таблиці.

Поле	Врожайність культури, ц/га	
	буряк	морква
I	12	15
II	18	25
III	15	20

За 1 центнер буряку господарство одержує прибуток 14 умов. од., за 1 центнер моркви – 13 умов. од. Скласти план засіву полів, тобто визначити яку площу слід відвести під кожен з

культур на кожному полі, щоб одержати максимальний прибуток, коли за планом передбачено зібрати не менше 80000 ц буряку, 50000 ц моркви.

30 Для відгодівлі корів на фермі в щоденний раціон кожної треба включати не менше як 5 од. поживної речовини А, 10 од. поживної речовини В. Для відгодівлі можна використати чотири види кормів. Дані про вміст поживних речовин в одному кілограмі кожного корму та вартість кормів подано в таблиці.

Поживна речовина	Кількість поживних речовин, од./кг			
	Корм I	Корм II	Корм III	Корм IV
А	1	3	6	1
В	3	7	5	3
Ціна, умов. од./кг	4	2	5	3

Треба скласти раціон, тобто визначити кількість кормів кожного виду, який відповідав би всім вимогам за поживністю і вартість якого була б найдешевшою.

## Завдання 2

Знайти обернену матрицю, використовуючи метод жорданових виключень. Перевірити результат за визначенням оберненої матриці.

## Варіанти завдань

1 $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 9 & -5 & 1 \end{pmatrix}$	2 $\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & -6 & 8 \end{pmatrix}$
3 $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ -5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$	4 $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

5 $\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -7 \end{pmatrix}$	6 $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$
7 $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 7 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$	8 $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
9 $\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	10 $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
11 $\begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 8 & 7 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	12 $\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
13 $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ -3 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$	14 $\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
15 $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	16 $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$
17 $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$	18 $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$
19 $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	20 $\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 8 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$
21 $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	22 $\begin{pmatrix} -9 & 7 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$



23 $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	24 $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
25 $\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 8 & 6 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	26 $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
27 $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	28 $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 10 & 5 & -2 \end{pmatrix}$
29 $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	30 $\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

### Приклад розв'язання завдання 2

Знайти обернену матрицю, використовуючи метод жорданових виключень. Перевірити результат за визначенням оберненої матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### Розв'язання

Введемо штучно систему рівнянь, у якій коефіцієнтами при вільних змінних  $x_1, x_2$  є елементи матриці  $A$ .

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 5x_2, \\ y_2 = -3x_1 + x_2. \end{cases} \quad (1)$$

Складемо таблицю для системи (1) (таблиця 1)

Таблиця 1

	$-x_1$	$-x_2$
$y_1$	-2	-5
$y_2$	3	-1

і послідовно замінимо змінну  $x_1$  на  $y_1$ , а  $x_2$  на  $y_2$  за допомогою формалізованого алгоритму Жордана-Гаусса [3, с. 9-11; 4, с. 15-18]. Виразимо  $x_1$ ,  $x_2$  через  $y_1$ ,  $y_2$ . Оскільки система має 2 базисні та 2 вільні змінні, то щоб поміняти їх місцями, алгоритм Жордана-Гаусса буде застосовано двічі.

### *Перше застосування алгоритму<sup>1</sup>*

Поміняємо  $x_1$  та  $y_1$  місцями. Отже,  $a_{11} = -2 \neq 0$  – розв’язувальний елемент. Міняємо місцями заголовки розв’язувальних рядка і стовпчика. Заголовки інших рядків і стовпчиків переписуємо без змін (таблиця 2). На місці розв’язувального елемента записуємо одиницю. Інші елементи розв’язувального рядка переписуємо без змін, інші елементи розв’язувального стовпчика переписуємо з протилежним знаком (таблиця 3).

Таблиця 2

	$-y_1$	$-x_2$
$x_1$		
$y_2$		

Таблиця 3

	$-y_1$	$-x_2$
$x_1$	1	-5
$y_2$	-3	

Інші елементи таблиці знаходимо за «правилом прямокутника»

$$a'_{22} = (-2) \cdot (-1) - (-5) \cdot 3 = 17,$$

---

<sup>1</sup> Для полегшення сприйняття матеріалу перше застосування алгоритму Жордана-Гауса описано досить докладно, при розв’язанні індивідуальних завдань таблиці 2, 3 показувати не потрібно.

і записуємо в таблицю 4. Усі елементи отриманої таблиці ділимо на величину розв'язувального елемента  $a_{11} = -2$ , отримаємо нову таблицю (таблиця 5).

Таблиця 4

	$-y_1$	$-x_2$
$x_1$	1	-5
$y_2$	-3	17

Таблиця 5

	$-y_1$	$-x_2$
$x_1$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$y_2$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{17}{2}$

### *Друге застосування алгоритму*

Поміняємо  $x_2$  та  $y_2$  місцями. Отже, у таблиці 5 розв'язувальний елемент  $a'_{22} = -\frac{17}{2} \neq 0$ . У результаті перетворень алгоритму маємо проміжкову таблицю 6 та остаточну таблицю 7.

Таблиця 6

	$-y_1$	$-y_2$
$x_1$	$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{17}{2}\right) - \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$
$x_2$	$\frac{3}{2}$	1

Таблиця 7

	$-y_1$	$-y_2$
$x_1$	$\frac{1}{2} : \left(-\frac{17}{2}\right) = -\frac{1}{17}$	$-\frac{5}{2} : \left(-\frac{17}{2}\right) = \frac{5}{17}$
$x_2$	$\frac{3}{2} : \left(-\frac{17}{2}\right) = -\frac{3}{17}$	$1 : \left(-\frac{17}{2}\right) = -\frac{2}{17}$

Випишемо з таблиці 7 обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & -\frac{5}{17} \\ \frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо результат за визначенням оберненої матриці, а отже, що  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ , де  $E$  – одинична матриця.

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & -\frac{5}{17} \\ \frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} + \frac{15}{17} & \frac{5}{17} - \frac{5}{17} \\ \frac{6}{17} - \frac{6}{17} & \frac{15}{17} + \frac{2}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

**Зауваження.** Обернена матриця для матриці  $3 \times 3$  методом жорданових виключень знаходиться аналогічно. Система рівнянь, яка штучно вводиться, буде складатися з трьох рівнянь, які залежать від трьох вільних змінних, і відповідно таблиця буде більшого розміру. Також потрібно буде поміняти місцями і змінні  $x_3, y_3$ . Тобто алгоритм потрібно застосувати тричі.

### Завдання 3

3.1 Розв'язати задачу лінійного програмування геометричним методом.

3.2 Розв'язати задачу лінійного програмування за допомогою надбудови «Пошук розв'язання» MS Excel. Роздрукувати звіт про результати.

3.3 Побудувати задачу, двоїсту до заданої.

### Варіанти завдань

<p>1</p> <p><math>F = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,</math></p> $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	<p>2</p> <p><math>F = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min,</math></p> $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 6, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	<p>3</p> <p><math>F = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max,</math></p> $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
--	---	--

<p>4</p> $F = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 2, \\ x_1 \leq 6, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>5</p> $F = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 2, \\ x_2 \geq 1, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>6</p> $F = 3x_1 + x_2 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 4, \\ x_2 \geq 1, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
<p>7</p> $F = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>8</p> $F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1 \leq 6, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>9</p> $F = x_1 - 3x_2 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 2, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
<p>10</p> $F = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 1, \\ x_1 \leq 5, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>11</p> $F = 4x_1 + x_2 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>12</p> $F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 9, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 2, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
<p>13</p> $F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \leq 3, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>14</p> $F = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 6x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 2, \\ x_1 \leq 5, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>15</p> $F = 5x_1 - 2x_2 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 \leq 7, \\ x_2 \geq 1, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

<p>16</p> $F = 3x_1 + x_2 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \geq 5, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 \leq 7, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>17</p> $F = -4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 \leq 5, \\ x_2 \geq 2, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>18</p> $F = x_1 + 3x_2 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 2, \\ x_2 \geq 1, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
<p>19</p> $F = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 2, \\ x_1 \leq 6, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>20</p> $F = -x_1 + 4x_2 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 3, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>21</p> $F = x_1 - 4x_2 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 3, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 2, \\ x_2 \geq 1, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
<p>22</p> $F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \leq 7, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>23</p> $F = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_2 \geq 1, \\ x_2 \leq 5, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>24</p> $F = 4x_1 - x_2 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 2, \\ x_2 \leq 7, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
<p>25</p> $F = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1 \geq 3, \\ x_2 \geq 1, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>26</p> $F = x_1 + 3x_2 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 5, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>27</p> $F = x_1 - 3x_2 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ 4x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_2 \geq 2, \\ x_2 \leq 6, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

<p>28</p> $F = -x_1 + 4x_2 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 \leq 5, \\ x_2 \leq 3, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>29</p> $F = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 \leq 5, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	<p>30</p> $F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ -x_1 + 5x_2 \geq 54, \\ x_1 \leq 7, \\ x_2 \leq 5, \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
---	---	---

### Приклад розв'язання завдання 3.1

Розв'язати задачу лінійного програмування геометричним методом.

$$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \geq 2, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

#### Розв'язання

Спочатку будемо область допустимих розв'язків (докладніше про правила побудови та види області допустимих розв'язків див. роботи [3, с. 11-14; 4, с. 9-10]).

Побудуємо пряму  $3x_1 + x_2 = 6$ , для цього достатньо визначити дві точки, через які вона проходить. Нехай  $x_1 = 0$ , тоді  $3 \cdot 0 + x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 6$ . Нехай  $x_2 = 0$ , тоді  $3x_1 + 0 = 6 \Rightarrow x_1 = \frac{6}{3} = 2$ .

Отже, пряма проходить через точки (0;6) та (2;0) (рисунок 1).

Лінійна нерівність  $3x_1 + x_2 \geq 6$  визначає півплощину. Візьмемо довільну точку, яка не належить прямій, наприклад  $O(0;0)$ . Перевіримо, чи задовольняють її координати нерівність:  $3 \cdot 0 + 0 \geq 6$  – неправильно. Тобто  $O(0;0)$  не належить заданій

півплощині. Домовимося штрихувати ту півплощину, яка нам не потрібна. Отже, штрихуємо ту півплощину, яка містить точку  $O$ .

Аналогічно побудуємо пряму  $-x_1 + x_2 = 4$ , вона проходить через точки  $(0;4)$  та  $(-4;0)$ . Координати точки  $O(0;0)$  задовольняють нерівність:  $-1 \cdot 0 + 0 \leq 4$  – правильно. Тобто,  $O(0;0)$  належить заданій півплощині. Отже, штрихуємо ту півплощину, яка не містить точку  $O$  (непотрібну півплощину).

Побудуємо пряму  $x_1 = 4$ , це пряма, яка проходить паралельно осі  $Ox_2$  через точку  $(4;0)$ . Для визначення півплощини, яку задає нерівність  $x_1 \leq 4$ , візьмемо точку  $O(0;0)$ :  $0 \leq 4$  – правильно. Тобто  $O(0;0)$  належить заданій півплощині. Штрихуємо непотрібну праву півплощину.

Аналогічно побудуємо пряму  $x_2 = 2$ , це пряма, яка проходить паралельно осі  $Ox_1$  через точку  $(0;2)$ . Координати точки  $O(0;0)$  не задовольняють нерівність:  $0 \geq 2$  – неправильно. Тобто  $O(0;0)$  не належить заданій півплощині. Штрихуємо непотрібну нижню півплощину.

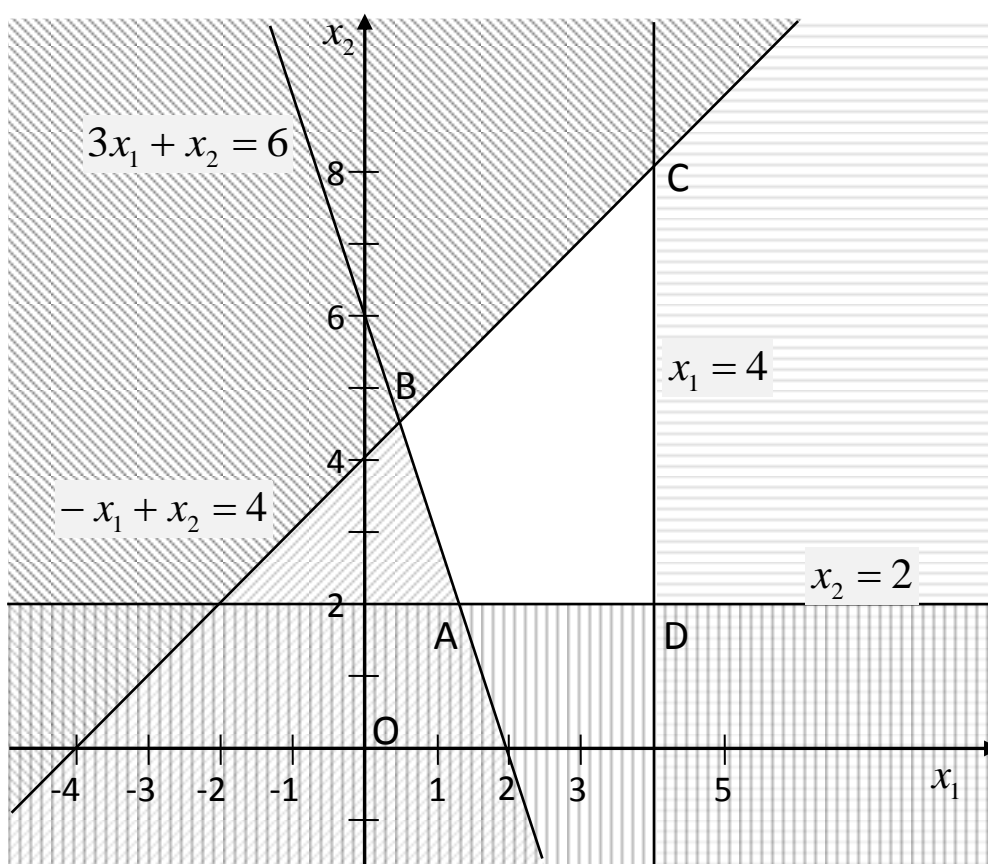


Рисунок 1



Частина площини, яка залишилася наприкінці незаштрихованою, і є розв'язком системи нерівностей.

Внаслідок умови невід'ємності  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$  область допустимих розв'язків завжди розташована в першій чверті.<sup>2</sup> В нашому випадку незаштрихована фігура лежить тільки в першій чверті. Тобто багатокутник ABCD – область допустимих розв'язків (рисунок 1).

Далі, щоб спростити сприйняття побудови, штриховку області недопустимих розв'язків на рисунку 2 вилучено.

Тепер розглянемо поведінку цільової функції  $F = x_1 + 2x_2$  (докладніше про поведінку цільової функції та знаходження її найбільшого або найменшого значення в області допустимих розв'язків див. в роботі [3, с. 15-20]). Вектор нормалі  $\bar{N} = (1; 2)$ . Будуємо початкове положення цільової функції  $F_0 = F(O) = 0$  перпендикулярно до вектора  $\bar{N}$ , через початок координат. Лінія рівня  $F(O) = 0$  не має спільних точок з допустимою областю. Отже, для знаходження мінімального значення цільової функції зсуваємо лінію рівня в напрямку вектора  $\bar{N}$  до першої точки допустимої області – це точка А (рисунок 2). Отже,  $F_{\min} = F(A)$ .

Точка А – це точка перетину прямої АВ та прямої AD. Тому

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6, \\ x_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2 = 6, \\ x_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = 4, \\ x_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1\frac{1}{3}, \\ x_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow A\left(1\frac{1}{3}; 2\right).$$

$$\text{Тобто } F_{\min} = F(A) = 1\frac{1}{3} + 2 \cdot 2 = \frac{4 + 4 \cdot 3}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

$$\text{Відповідь: } \min F = 5\frac{1}{3} \text{ досягається в точці } A\left(1\frac{1}{3}; 2\right).$$

**Зауваження.** Для знаходження максимального значення цільової функції лінію рівня з початкового положення зсуваємо в напрямку вектора  $\bar{N}$  до найдалшої точки допустимої області – це точка С (рисунок 2). Отже,  $F_{\max} = F(C)$ .

---

<sup>2</sup> Якщо незаштрихована фігура – розв'язок системи нерівностей – виходить за межі першої чверті, тоді областю допустимих розв'язків є тільки та її частина, яка належить першій чверті.

Точка С – це точка перетину прямої ВС та прямої CD. Тому

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 = 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 + x_2 = 4, \\ x_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 8, \\ x_1 = 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 8, \\ x_1 = 4; \end{cases} \Rightarrow C(4;8).$$

Тобто  $F_{\max} = F(C) = 4 + 2 \cdot 8 = 20$ .

**Відповідь:**  $\max F = 20$  досягається в точці  $C(4;8)$ .

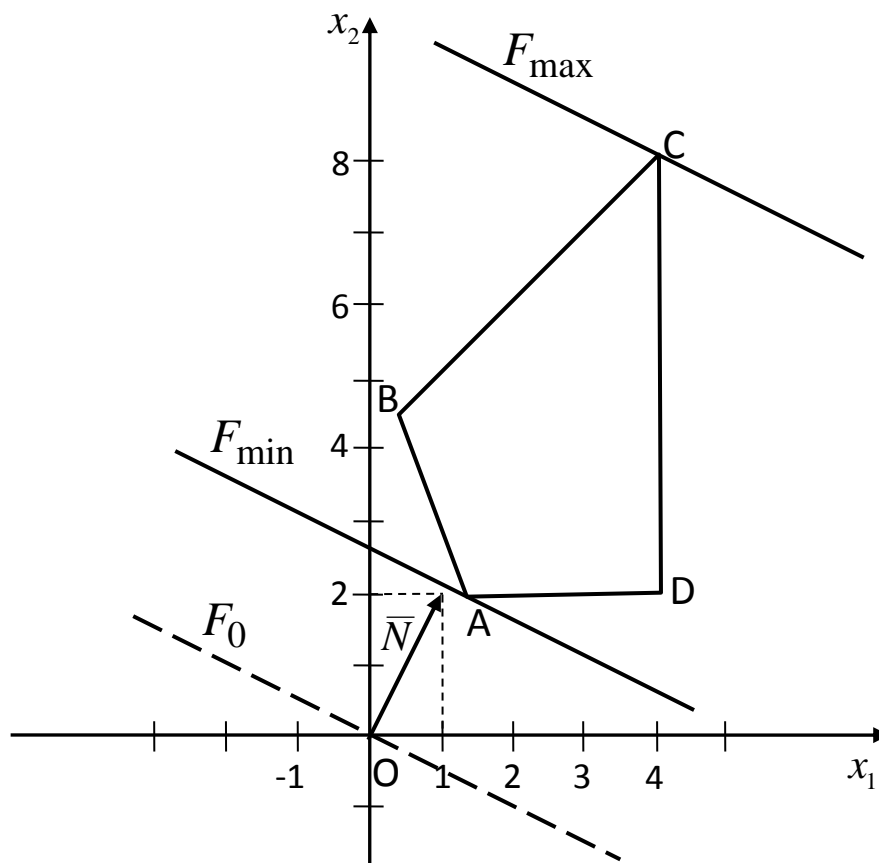


Рисунок 2

### Приклад розв'язання завдання 3.2

Розв'язати задачу лінійного програмування за допомогою надбудови «Пошук розв'язання» MS Excel. Роздрукувати звіт про результати.

$$\begin{aligned} \min F &= x_1 + 2x_2, \\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \geq 2, \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

### Розв'язання

У цьому прикладі наведемо докладне пояснення розв'язання задачі лінійного програмування засобами Excel.

#### *Перший етап. Підготовка аркуша EXCEL*

Відкриваємо Microsoft Excel і створюємо нову книгу, зберігаємо її ім'я у форматі «Завд. 3.2\_Прізвище ініціали Номер групи». Аркуш 1 перейменовуємо відповідно до виданого варіанта, наприклад «Варіант 31». Детальніше правила описані у вступі.

Резервуємо клітинки для умовних назв змінних задачі. У нашому прикладі дві змінні  $x_1$ ,  $x_2$ , тому нам знадобляться дві клітинки, наприклад В3, С3. Підписуємо їх назвами змінних. У наступному рядку залишаємо вільними відповідно клітинки В4, С4 для значень змінних  $x_1$ ,  $x_2$ , які будуть знайдені за допомогою надбудови «Пошук розв'язання» (рисунок 3).

	A	B	C	D	E	F
1	Розв'язання ЗЛП за допомогою надбудови «Пошук розв'язання»					
2		Змінні				
3		x1	x2			
4						
5						

Рисунок 3

Формуємо цільову функцію  $F = x_1 + 2x_2$ : у клітинку А6 вписуємо її позначення  $F$ , а у клітинки В6, С6 її коефіцієнти 1 та 2 при  $x_1$ ,  $x_2$  відповідно. Клітинку D6 резервуємо під оптимальне

значення цільової функції, яке буде знайдено за допомогою надбудови «Пошук розв'язання»<sup>3</sup> (рисунок 4).

	A	B	C	D	E	F
1	Розв'язання ЗЛП за допомогою надбудови «Пошук розв'язання»					
2	Змінні					
3		x1	x2			
4						
5	Коефіцієнти цільової функції			Значення		
6	F	1	2			
7						

Рисунок 4

Формуємо обмеження задачі. У нашому випадку їх чотири:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \geq 2. \end{cases}$$

У клітинки B8, C8 заносимо коефіцієнти лівої частини першого обмеження: коефіцієнт при x1 у стовпчик B, при x2 у стовпчик C відповідно. Аналогічно в рядки 9, 10, 11 заносимо коефіцієнти інших обмежень. Клітинки D8, D9, D10, D11 поки що залишаються вільними (рисунок 5).

	A	B	C	D	E	F
5	Коефіцієнти цільової функції			Значення		
6	F	1	2			
7						
8		3	1			
9		-1	1			
10		1	0			
11		0	1			
12						

Рисунок 5

<sup>3</sup> Клітинки B4, C4, D6, які зарезервовано під змінювані значення, можна виділити кольором для наочності.

Далі в стовпчик Е умовно записуємо задані знаки обмежень, а у стовпчик F вписуємо відповідні праві частини обмежень (рисунок 6).

	A	B	C	D	E	F
2		Змінні				
3		x1	x2			
4						
5		Коефіцієнти цільової функції		Значення		
6	F	1	2			
7						
8		3	1		>=	6
9		-1	1		<=	4
10		1	0		<=	4
11		0	1		>=	2
12						

Рисунок 6

У клітинках D6, D8, D9, D10, D11 створюємо формули за допомогою функції СУММПРОИЗВ. Для того щоб отримати значення цільової функції у клітинці D6, виділяємо цю клітинку мишею та у віконці «вставка функції» пишемо =СУММПРОИЗВ (зазвичай лівіше з'являється підказка і можна активувати її). У вікні «аргументи функції» у якості масиву 1 вказуємо B4:C4 (клітинки зарезервовані під значення змінних), у якості масиву 2 – B6:C6 (відповідні коефіцієнти цільової функції) (рисунок 7).

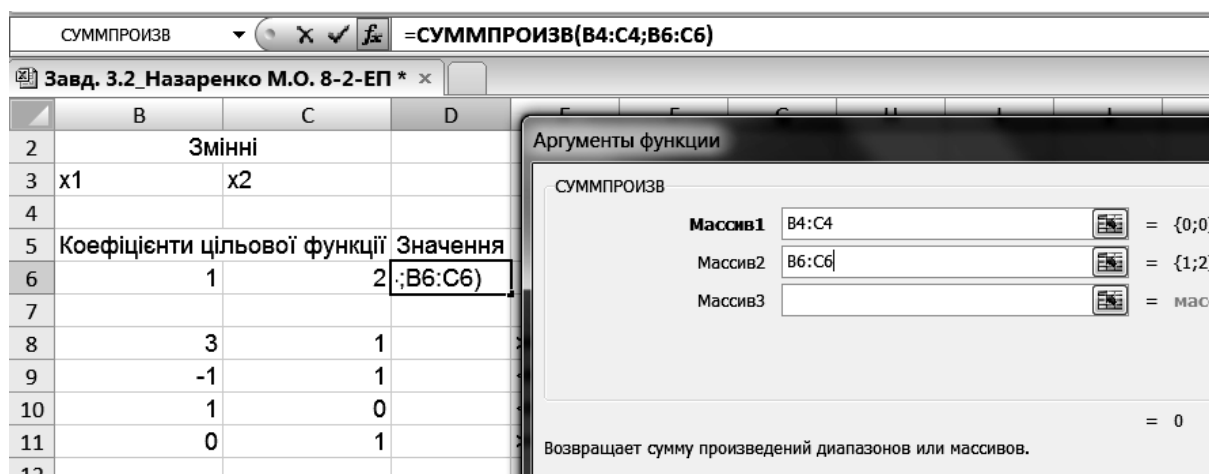


Рисунок 7

Аналогічно по черзі заповнюємо клітинки D8, D9, D10, D11, формуючи значення лівої частини обмежень. Виділяємо відповідну клітинку і у віконці «вставка функції» пишемо =СУММПРОИЗВ, у вікні «аргументи функції» у якості масиву 1 вказуємо B4:C4 (клітинки зарезервовані під значення змінних), у якості масиву 2 – клітинки коефіцієнтів відповідного обмеження (B8:C8, B9:C9, B10:C10 або B11:C11). Підготовка робочого аркуша завершена (рисунок 8).

	A	B	C	D	E	F
2		Змінні				
3		x1	x2			
4						
5		Коефіцієнти цільової функції		Значення		
6	F	1	2	0		
7						
8		3	1	0 >=		6
9		-1	1	0 <=		4
10		1	0	0 <=		4
11		0	1	0 >=		2

Рисунок 8

### ***Другий етап. Використання надбудови «Пошук розв'язання»***

Виділяємо мишею клітинку D6, зарезервовану під значення цільової функції та викликаємо надбудову «Пошук розв'язання». З'являється віконце «Поиск решения»<sup>4</sup>. У ньому встановлюємо максимальне чи мінімальне значення цільової функції, що потрібно знайти, для розв'язання цієї задачі обираємо «установить целевую ячейку равной минимальному значению». У віконці «изменяя ячейки» вказуємо масив, що зарезервовано під значення змінних B4:C4 (рисунок 9).

<sup>4</sup> Надалі будемо службові повідомлення та назви в русифікованій версії Excel оформляти курсивом у лапках без перекладу.

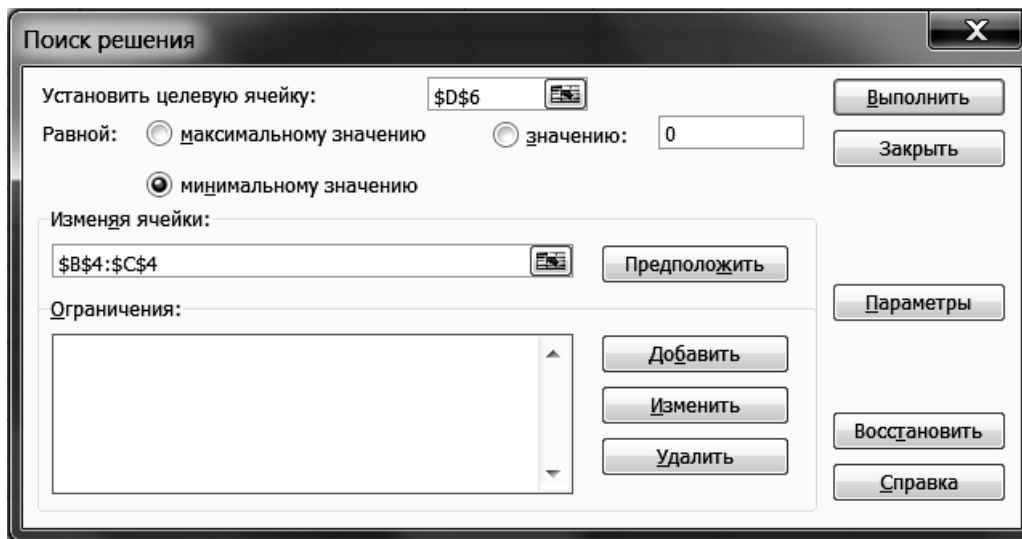


Рисунок 9

Далі у віконці «ограничения» формуємо обмеження задачі. Наприклад, для того щоб додати перше обмеження, натискаємо «добавить», відкривається віконце «Добавление ограничения». У ньому в якості «ссылка на ячейку» обираємо клітинку D8, у сусідньому віконці вибираємо знак  $\geq$  та в останньому «ограничение» вказуємо клітинку F8 (рисунок 10). Натискаємо «добавить», аналогічно вводимо наступні обмеження.

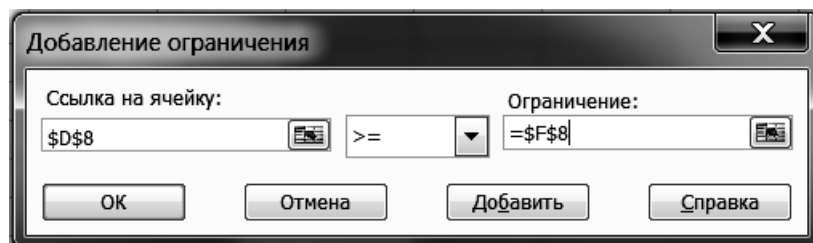


Рисунок 10

Натискаючи «ОК», закриваємо віконце «добавить ограничения» і бачимо, що введені обмеження з'явилися в полі «ограничения» віконця «Поиск решения» (рисунок 11).

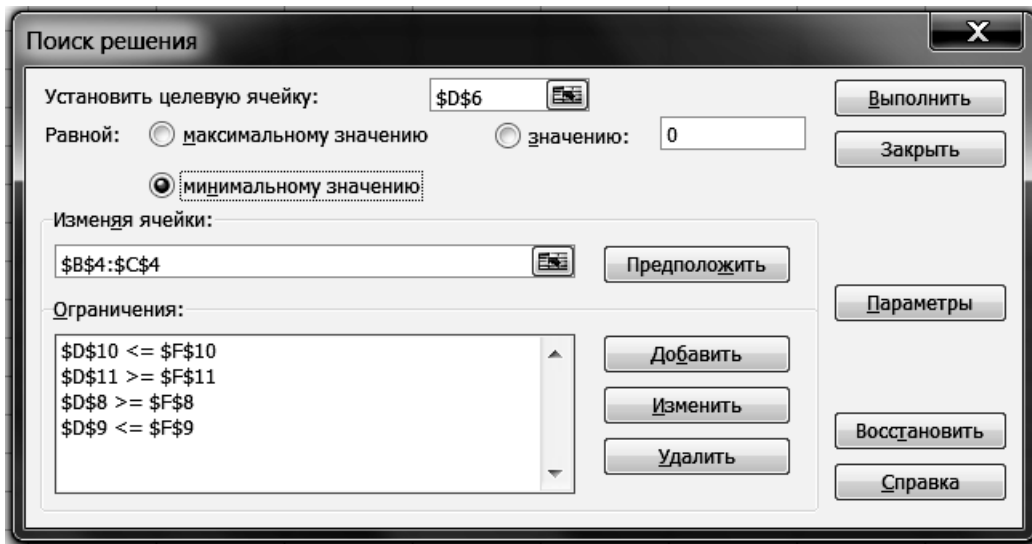


Рисунок 11

Наступний крок: обираємо «Параметри» та відмічаємо пункти «линейная модель», «неотрицательные значения» (рисунок 12).

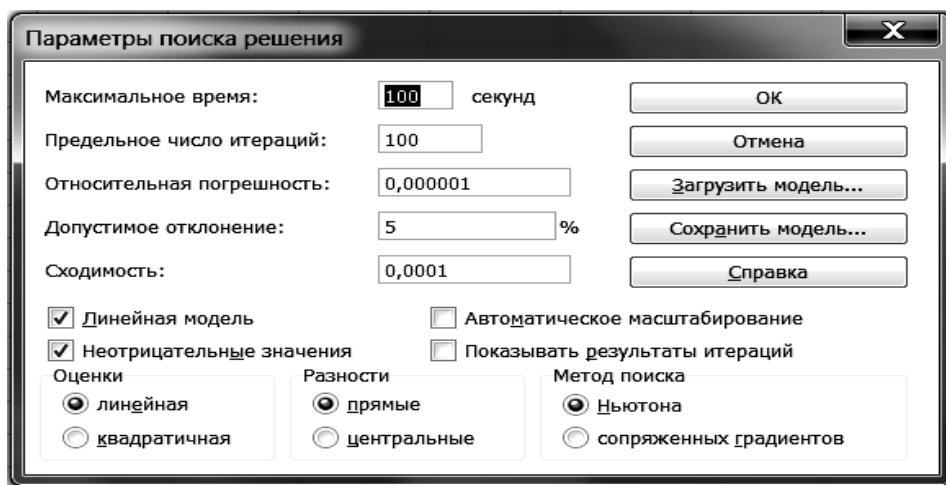


Рисунок 12

Підготовку завершено. Щоб запустити надбудову, обираємо «Выполнить». Отримали у вікні «Результаты поиска решения» повідомлення про успішно знайдений оптимальний розв'язок. Результати обчислень заносяться в зарезервовані заздалегідь клітинки: змінні у B4, C4, значення функції у D6 (рисунок 13). Отже, виписуємо з цих клітинок оптимальні значення змінних і мінімальне значення функції.



Відповідь:  $\min F = 5,3333..$  при  $x_1=1,3333..$ ,  $x_2=2$ .

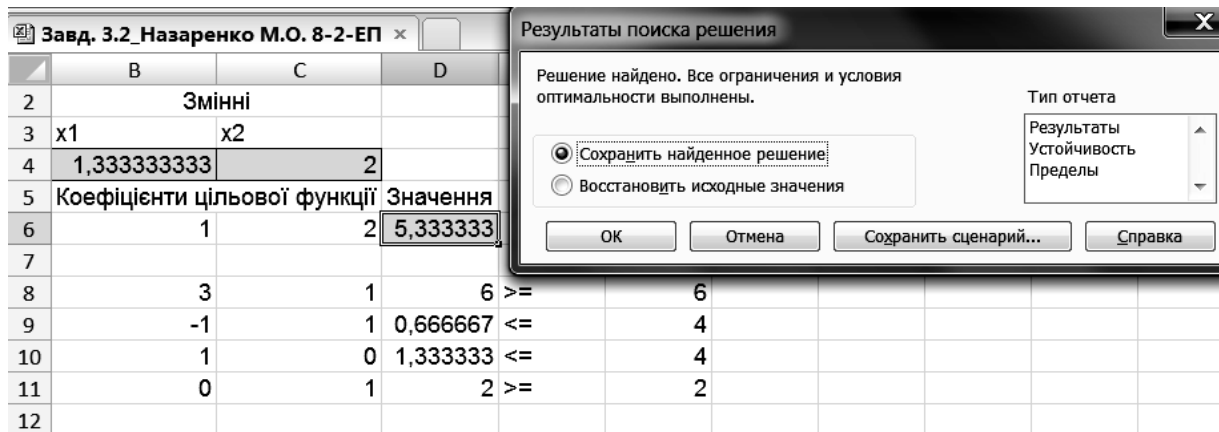


Рисунок 13

Також «Поиск решений» дає можливість представити результати у вигляді звітів. Так, у вікні «Результаты поиска решения» в області «Тип отчета» можна вибрати для формування звіту «Результат», «Устойчивость», «Пределы» (рисунок 14). Для оформлення розв'язку цієї задачі виділимо для формування звіт «Результаты», який буде розміщений на окремому аркуші робочої книги. Звіт у роздрукованому вигляді додаємо до розв'язання.

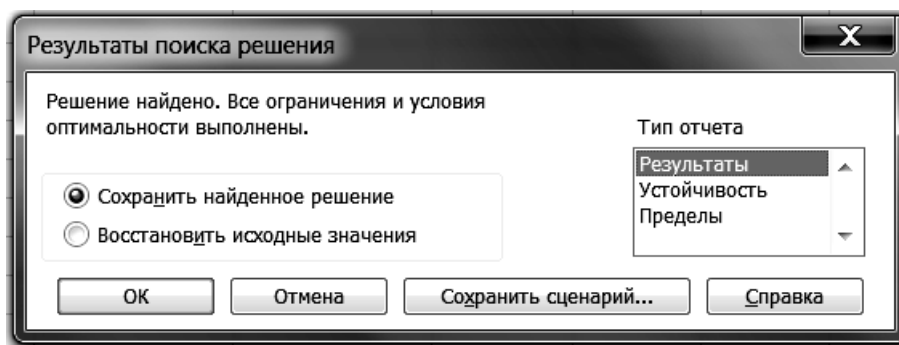


Рисунок 14

Розглянемо докладніше зміст звіту «Отчет по результатам» (рисунок 15). Якщо ви дотримувались правил оформлення назви файлу та робочого аркушу (див. правила оформлення вище), зверху буде відображено номер завдання, ПІБ, номер групи та номер варіанта.

## Целевая ячейка (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$D\$6	F Значення	0	5,333333333

## Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$B\$4	x1	0	1,333333333
\$C\$4	x2	0	2

## Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
\$D\$8	Значення	6	\$D\$8>=\$F\$8	связанное	0
\$D\$9	Значення	0,666666667	\$D\$9<=\$F\$9	не связан.	3,333333333
\$D\$10	Значення	1,333333333	\$D\$10<=\$F\$10	не связан.	2,666666667
\$D\$11	Значення	2	\$D\$11>=\$F\$11	связанное	0

Рисунок 15

Звіт складається з трьох таблиць.

Перша таблиця «Целевая ячейка» містить інформацію про цільову функцію. Відображено, на максимум чи на мінімум було розв'язано задачу, назву функції, її вихідне та оптимальне значення.

Таблиця «Изменяемые ячейки» містить інформацію про змінні задачі: їх назву x1 та x2, вихідне та оптимальне значення. Вихідні значення змінних дорівнюють 0, оскільки ми не заповнюємо клітинки B4, C4, зарезервовані під їх значення. Тому і вихідне значення цільової функції дорівнює 0. Це відповідає початковому положенню лінії рівня, яка проходить через початок координат, у графічному методі розв'язання. Оптимальні значення цільової функції та змінних, що відображені у стовпцях «Результат»:  $x_1=1,3333\dots$ ,  $x_2=2$ , мінімальне значення функції  $\min F = 5,3333$ , дублюють дані, вписані з робочого аркуша.

У таблиці «Ограничения» перевіряються всі обмеження. Обмеження, помічені як «связанное», відповідають у графічному методі розв'язання тим прямим, на перетині яких знаходиться

точка, у якій цільова функція досягає оптимального значення. Столпчик «Значение» показує значення лівих частин нерівностей при підстановці в них оптимальних значень  $x_1$  та  $x_2$ . Отже, значення лівої та правої частин «связанных» нерівностей однакові і тому «Разница» дорівнює 0.

Запишемо обмеження задачі в канонічному вигляді [3, с. 6-7]:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_5 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_6 = 4, \\ x_1 + x_7 = 4, \\ x_2 - x_8 = 2, \end{cases}$$

тоді бачимо, що столпчик «Разница» дає значення додаткових змінних:  $x_5 = 0$ ,  $x_6 \approx 3,33$ ,  $x_7 \approx 2,67$ ,  $x_8 = 0$ .

**Зауваження щодо розв'язання задачі на максимум.** Для знаходження максимального значення цільової функції  $F = x_1 + 2x_2$  необхідно після виклику надбудови у віконці «Поиск решения» обрати «установить целевую ячейку равной максимальному значению». Після завершення роботи надбудови отримали у вікні «Результаты поиска решения» повідомлення про успішно знайдений оптимальний розв'язок. Тоді з клітинок B4, C4 виписуємо оптимальні значення змінних задачі, з клітинки D6 – мінімальне значення функції (рисунок 16).

**Відповідь:**  $\max F = 20$  при  $x_1=4$ ,  $x_2=8$ .

	B	C	D
2	Змінні		
3	x1	x2	
4	4	8	
5	Коефіцієнти цільової функції		Значення
6	1	2	20
7			
8	3	1	20 >= 6
9	-1	1	4 <= 4
10	1	0	4 <= 4
11	0	1	8 >= 2

Рисунок 16

Також в області «*Тип отчета*» виділимо для формування звіту про результати, який у роздрукованому вигляді додаємо до розв'язання.

**Зауваження щодо збігу розв'язків.** Як бачимо, розв'язки задачі лінійного програмування на знаходження максимуму функції, отримані геометричним методом і знайдені в Excel за допомогою надбудови «*Поиск решений*», співпадають. Розв'язки задачі лінійного програмування на знаходження мінімуму функції, отримані геометричним методом і знайдені в Excel за допомогою надбудови «*Поиск решений*», записані в різних чисельних форматах, але також співпадають. Для уникнення розбіжностей можна встановити для клітинок B4, C4, зарезервованих для значень змінних задачі, чисельний формат «*дробный*».

**Зауваження щодо можливих результатів роботи надбудови.** Після запуску надбудови «*Поиск решения*» у вікні «*Результаты поиска решения*» також можемо отримати такі результати:

1 «*Значения целевой ячейки не сходятся*» – це означає, що значення цільової функції прямує до нескінченості,  $\max F(\min F) = \infty$ .

2 «*Поиск не может найти подходящего решения*», у цьому випадку система обмежень несумісна і задача не має розв'язку.

### Приклад розв'язання завдання 3.3

Побудувати задачу, двоїсту до заданої.

$$\begin{aligned} F &= x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \geq 2, \end{cases} & \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. & \end{aligned} \quad (2)$$

### Розв'язання

Для того щоб скласти двоїсту задачу використовуємо правила побудови двоїстих задач [3, с. 25; 4, с. 27]:

1) запишемо всі обмеження-нерівності вихідної задачі (2) як нерівності, що мають знак « $\leq$ ». Для цього нерівності  $3x_1 + x_2 \geq 6$  та  $x_2 \geq 2$  помножимо на  $(-1)$ , отримаємо систему обмежень:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 \leq -6, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 4, \\ -x_2 \leq -2 ; \end{cases}$$

2) при обмеженнях типу « $\leq$ » цільова функція прямої задачі повинна задаватися на відшукання максимуму. У нашій задачі (2) вона задана на мінімум, помножимо її на  $(-1)$ , отримаємо

$$(-F) = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \max .$$

Цільова функція двоїстої задачі буде задаватися на відшукання мінімуму;

3) чотирьом обмеженням прямої задачі відповідає чотири невідомих  $y_1, y_2, y_3, y_4$  у двоїстій задачі;

4) двом невідомим  $x_1, x_2$  прямої задачі відповідає два обмеження двоїстої;

5) у прямій задачі всі обмеження-нерівності, тому в двоїстій задачі невідомі  $y_1, y_2, y_3, y_4$  – невід'ємні;

6) у прямій задачі невідомі  $x_1, x_2$  – невід'ємні, тоді у двоїстій задачі їм відповідають обмеження-нерівності, які мають знак « $\geq$ »;

7) формуємо матриці систем обмежень прямої та двоїстої задачі відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вільні члени обмежень прямої задачі  $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  є коефіцієнтами

при відповідних змінних цільової функції двоїстої задачі, коефіцієнти цільової функції прямої задачі  $(-1 \quad -2)$  є вільними членами системи обмежень двоїстої задачі.

Отримали таку двоїсту задачу:

$$G = -6y_1 + 4y_2 + 4y_3 - 2y_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -3y_1 - y_2 + y_3 \geq -1, \\ -y_1 + y_2 - y_4 \geq -2, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0, \quad y_4 \geq 0. \end{cases}$$

#### Завдання 4

Для заданої задачі оптимального виробничого планування потрібно:

4.1 Побудувати економіко-математичну модель задачі.

4.2 Побудувати двоїсту задачу. Дати економічну інтерпретацію.

4.3 Розв'язати пряму задачу за допомогою надбудови «Пошук розв'язання» MS Excel. Роздрукувати звіти про результати і стійкість.

4.4 Розв'язати двоїсту задачу за допомогою надбудови «Пошук розв'язання» MS Excel. Роздрукувати звіти про результати і стійкість.

4.5 Виконати економічний аналіз задачі за роздрукованими звітами:

а) зробити економічний аналіз оптимальних планів прямої та двоїстої задачі;

б) оцінити, як при реалізації оптимального плану випуску продукції використовуються ресурси; вказати інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів ресурсів;

в) для кожного з дефіцитних ресурсів з'ясувати, чи зміниться структура оптимального плану (асортимент продукції),

якщо обсяги запасів дефіцитного ресурсу окремо збільшити на 15 % за інших однакових умов. Якщо структура плану не зміниться, вказати як збільшиться прибуток;

г) оцінити рентабельність кожного виду продукції та інтервали можливої зміни прибутку від реалізації одиниці продукції у процентах;

д) оцінити, як зміниться максимальний прибуток, якщо за інших однакових умов прибуток від реалізації одиниці продукції:

- виду А зменшиться на 1,5 умов. од. (для парних варіантів),
- виду В зменшиться на 1 умов. од. (для непарних варіантів).

### В а р і а н т и з а в д а н ь

Підприємство може виробляти три види продукції А, В, С. У процесі виробництва використовується три види ресурсів (наприклад сировина (та/або обладнання, праця, тощо)). Норми витрат ресурсів на одиницю продукції за видами та запаси ресурсів кожного виду вказані в таблиці. Також в таблиці вказаний прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду. Визначити план виробництва даної продукції, який забезпечить найбільший прибуток.

1

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	7	6	3	300
Ресурс 2	1	5	8	250
Ресурс 3	10	4	2	170
Прибуток/од. продукції	11	7	4	

2

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	2	3	7	220
Ресурс 2	1	4	4	200
Ресурс 3	2	0	6	90
Прибуток/од. продукції	5	8	9	

3

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	15	10	12	1000
Ресурс 2	7	8	9	800
Ресурс 3	4	6	3	500
Прибуток/од. продукції	12	9	10	

4

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	9	7	2	700
Ресурс 2	4	6	5	600
Ресурс 3	1	0	8	650
Прибуток/од. продукції	12	11	10	

5

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	5	8	4	450
Ресурс 2	9	4	10	680
Ресурс 3	10	5	7	500
Прибуток/од. продукції	12	20	15	

6

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	6	9	5	550
Ресурс 2	4	12	6	460
Ресурс 3	7	10	8	400
Прибуток/од. продукції	6	12	7	

7

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	2	9	1	280
Ресурс 2	9	4	10	620
Ресурс 3	1	5	4	360
Прибуток/од. продукції	9	8	12	



8

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	15	3	6	700
Ресурс 2	7	6	5	800
Ресурс 3	2	12	6	650
Прибуток/од. продукції	10	9	9	

9

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	3	2	1	700
Ресурс 2	5	8	6	900
Ресурс 3	9	12	15	1500
Прибуток/од. продукції	3	4	5	

10

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	5	3	2	350
Ресурс 2	1	2	5	240
Ресурс 3	4	5	4	300
Прибуток/од. продукції	9	10	8	

11

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	5	12	3	250
Ресурс 2	9	2	8	350
Ресурс 3	5	10	10	550
Прибуток/од. продукції	25	24	20	

12

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	10	4	7	500
Ресурс 2	1	6	3	500
Ресурс 3	5	10	10	800
Прибуток/од. продукції	5	3	3	

13

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	5	7	4	800
Ресурс 2	3	4	8	650
Ресурс 3	6	2	3	250
Прибуток/од. продукції	7	10	6	

14

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	12	5	15	900
Ресурс 2	8	12	0	900
Ресурс 3	5	5	8	450
Прибуток/од. продукції	12	10	17	

15

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	2	6	4	750
Ресурс 2	3	0	6	500
Ресурс 3	10	7	5	800
Прибуток/од. продукції	10	8	9	

16

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	3	5	7	800
Ресурс 2	5	0	3	550
Ресурс 3	5	6	1	350
Прибуток/од. продукції	7	5	3	

17

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	5	8	1	800
Ресурс 2	5	4	10	900
Ресурс 3	5	2	5	420
Прибуток/од. продукції	9	7	11	

18

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	A	B	C	
Ресурс 1	13	10	9	1100
Ресурс 2	5	8	7	900
Ресурс 3	4	5	9	980
Прибуток/од. продукції	7	6	9	

19

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	A	B	C	
Ресурс 1	2	5	4	500
Ресурс 2	6	1	6	350
Ресурс 3	3	5	2	600
Прибуток/од. продукції	3	6	5	

20

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	A	B	C	
Ресурс 1	0	10	15	2000
Ресурс 2	18	4	10	1500
Ресурс 3	5	6	6	800
Прибуток/од. продукції	15	12	17	

21

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	A	B	C	
Ресурс 1	12	6	9	800
Ресурс 2	6	10	5	700
Ресурс 3	4	4	6	320
Прибуток/од. продукції	10	8	10	

22

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	A	B	C	
Ресурс 1	8	7	9	600
Ресурс 2	1	4	10	400
Ресурс 3	12	6	0	320
Прибуток/од. продукції	6	6	9	

23

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	1	3	4	280
Ресурс 2	3	1	3	200
Ресурс 3	5	2	1	330
Прибуток/од. продукції	8	14	10	

24

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	7	2	5	700
Ресурс 2	0	5	6	550
Ресурс 3	5	6	3	500
Прибуток/од. продукції	2	1	4	

25

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	1	5	12	1000
Ресурс 2	6	7	5	1100
Ресурс 3	10	8	0	1000
Прибуток/од. продукції	9	10	7	

26

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	4	7	9	550
Ресурс 2	8	4	5	700
Ресурс 3	9	6	10	800
Прибуток/од. продукції	12	9	9	

27

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	1	5	8	1100
Ресурс 2	10	6	4	700
Ресурс 3	12	10	9	900
Прибуток/од. продукції	4	3	2	

28

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	8	7	4	950
Ресурс 2	9	8	6	900
Ресурс 3	5	10	9	1200
Прибуток/од. продукції	8	11	10	

29

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	4	5	6	800
Ресурс 2	10	12	8	2000
Ресурс 3	7	1	3	500
Прибуток/од. продукції	5	5	6	

30

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	1	4	5	550
Ресурс 2	2	3	1	300
Ресурс 3	3	2	0	280
Прибуток/од. продукції	8	6	5	

### Приклад розв'язання завдання 4.1

Побудувати економіко-математичну модель задачі.

Підприємство може виробляти три види продукції А, В, С. У процесі виробництва використовується три види ресурсів (наприклад сировина (та/або обладнання, праця, тощо)). Норми витрат ресурсів на одиницю продукції за видами та запаси ресурсів кожного виду вказані в таблиці. Також у таблиці вказаний прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду. Визначити план виробництва даної продукції, який забезпечить найбільший прибуток.

Вид ресурсу	Норма витрат ресурсів/од. продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
Ресурс 1	6	2	5	180
Ресурс 2	5	7	5	400
Ресурс 3	1	6	2	350
Прибуток/од. продукції	8	6	7	

### Розв'язання

Позначимо через  $x_1$  кількість продукції виду А, через  $x_2$ ,  $x_3$  – кількість продукції виду В та виду С відповідно.

У рамках описаних технологій витрати ресурсу першого виду на виробництво всієї продукції виду А складають  $6x_1$ , на виробництво всієї продукції виду В –  $2x_2$ , а виду С –  $5x_3$ . Загальні витрати ресурсу першого виду складають  $6x_1 + 2x_2 + 5x_3$ . Оскільки запаси ресурсів обмежені, то цей вираз не може перевищувати величину запасу ресурсів першого виду – 180, отже маємо  $6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 180$ .

Проводячи аналогічні міркування для всіх видів ресурсів, отримаємо такі нерівності системи обмежень:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 180, \\ 5x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq 400, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 350. \end{cases}$$

До наведеної системи обмежень слід додати обмеження на невід'ємність змінних  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , оскільки кількість продукції будь-якого виду не може бути від'ємною величиною. Тобто  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ .

Прибуток, який можна отримати від виробництва всієї продукції виду А, дорівнює  $8x_1$ , від виробництва всієї продукції виду В –  $6x_2$ , продукції виду С –  $7x_3$ . Тобто маємо функцію сумарного прибутку (цільову функцію)  $F = 8x_1 + 6x_2 + 7x_3$ . За умовою потрібно забезпечити найбільший прибуток, отже  $F \rightarrow \max$ .

Таким чином, задача виробничого планування полягає в знаходженні таких змінних  $x_1, x_2, x_3$ , які задовольняють задачу лінійного програмування

$$\begin{aligned}
 & F = 8x_1 + 6x_2 + 7x_3 \rightarrow \max, \\
 & \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 180, \\ 5x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq 400, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 350, \end{cases} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

### Приклад розв'язання завдання 4.2

Побудувати двоїсту задачу. Дати економічну інтерпретацію.

#### Розв'язання

Побудуємо задачу, двоїсту до прямої задачі (3). Кожному обмеженню прямої задачі поставимо у відповідність невід'ємні змінні  $y_1, y_2, y_3$  (докладно правила побудови двоїстої задачі див. роботи [3, с. 25; 4, с. 27], а також приклад розв'язання завдання 3.3).

Формуємо розширену матрицю системи обмежень прямої задачі, у яку, окрім коефіцієнтів при змінних у системі обмежень, включаємо стовпець вільних членів системи обмежень, а також рядок з коефіцієнтів при змінних цільової функції. Транспонуємо отриману матрицю:

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 5 & 180 \\ 5 & 7 & 5 & 400 \\ 1 & 6 & 2 & 350 \\ \hline 8 & 6 & 7 & \end{array} \right), \quad A^T = \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 7 & 6 & 6 \\ 5 & 5 & 2 & 7 \\ \hline 180 & 400 & 350 & \end{array} \right).$$

Запишемо двоїсту задачу:

$$G = 180y_1 + 400y_2 + 350y_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 6y_1 + 5y_2 + y_3 \geq 8, \\ 2y_1 + 7y_2 + 6y_3 \geq 6, \\ 5y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 7, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

### ***Економічна інтерпретація***

Змінні двоїстої задачі є *оцінками* одиниці відповідного ресурсу, їх інколи називають «**тінковими цінами**». У тому сенсі, що це не ціна за ресурс на ринку, а оцінка «цінності» ресурсу для підприємства. На відміну від «зовнішніх» цін на продукцію, які відомі заздалегідь, ціни ресурсів  $y_1, y_2, y_3$  є «внутрішніми», вони визначаються в результаті розв'язання задачі.

Отже, потрібно визначити такий набір оцінок  $y_1, y_2, y_3$  ресурсів, щоб загальна вартість усіх ресурсів  $G = 180y_1 + 400y_2 + 350y_3$  була мінімальною.

Обмеження двоїстої задачі дозволяють *оцінити* рентабельність плану випуску продукції, тобто наявність чи відсутність невиробничих витрат. Для рентабельної продукції, що входить до оптимального плану, характерна повна відсутність невиробничих витрат, тобто витрати на ресурси при виробництві одиниці такої продукції дорівнюють прибутку за одиницю продукції. Вважаємо, що на початку (за умовою задачі) виробництво будь-якої продукції нерентабельне, отже:

- витрати на ресурси  $6y_1 + 5y_2 + y_3$  при виробництві одиниці продукції А не менші, ніж прибуток 8 умов. од. від її реалізації;

- витрати на ресурси  $2y_1 + 7y_2 + 6y_3$  при виробництві одиниці продукції В не менші, ніж прибуток 6 умов. од. від її реалізації;

- витрати на ресурси  $5y_1 + 5y_2 + y_3$  при виробництві одиниці продукції С не менші, ніж прибуток 7 умов. од. від її реалізації.



### Приклад розв'язання завдання 4.3

Розв'язати пряму задачу за допомогою надбудови «Пошук розв'язання» MS Excel. Роздрукувати звіти про результати і стійкість.

#### Розв'язання

Для задачі (3) оформляємо робочий аркуш Excel аналогічно до прикладу розв'язання завдання 3.2. Для наочності **обов'язково** підписуємо клітинки для назв змінних (у цій задачі їх три), для цільової функції. При формуванні обмежень, окрім виду обмежень («≤»), також зазначимо їх назву-зміст: Ресурс 1, Ресурс 2 і т. д.

Тобто для прямої задачі

$$F = 8x_1 + 6x_2 + 7x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 180, \\ 5x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq 400, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 350, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

робочий аркуш Excel буде мати вигляд як на рисунку 17).

Завд. 4.3 Назаренко М.О. 8-2-П * x							
	A	B	C	D	E	F	G
1	Розв'язання ЗЛП за допомогою надбудови «Пошук розв'язання»						
2	Змінні						
3		x1	x2	x3			
4							
5		Коефіцієнти цільової функції			Значення		
6	F	8	6	7		0	
7							
8	Ресурс 1	6	2	5	0 <=		180
9	Ресурс 2	5	7	5	0 <=		400
10	Ресурс 3	1	6	2	0 <=		350

Рисунок 17

Використовуємо надбудову «Пошук розв'язання».

Отримали у вікні «Результаты поиска решения» повідомлення про успішно знайдений оптимальний розв'язок. Результати обчислень заносяться в зарезервовані заздалегідь клітинки: змінні у В4, С4, D4, значення функції у Е6 (рисунок 18). Отже, виписуємо з цих клітинок оптимальні значення змінних та максимальне значення функції.

**Відповідь:**  $\max F = 396,25$  при  $x_1=14,375$ ,  $x_2=46,875$ ,  $x_3=0$ .

The image shows a screenshot of an Excel spreadsheet with the Solver Results dialog box open. The spreadsheet contains the following data:

	A	B	C	D	E
1	Розв'язання ЗЛП за допомогою надбудови «Пошук розв'язання»				
2	Змінні				
3		x1	x2	x3	
4		14,375	46,875	0	
5		Коефіцієнти цільової функції			Значення
6	F	8	6	7	396,25
7					
8	Ресурс 1	6	2	5	180 <= 180
9	Ресурс 2	5	7	5	400 <= 400
10	Ресурс 3	1	6	2	295,625 <= 350

The Solver Results dialog box is titled "Результаты поиска решения" and contains the following text: "Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены." It has two radio buttons: "Сохранить найденное решение" (selected) and "Восстановить исходные значения". There are "OK", "Отмена", and "Со..." buttons at the bottom.

Рисунок 18

В області «Тип отчета» виділимо для виведення звіту «Результаты», «Устойчивость» (рисунок 14). Звіти про результати і стійкість у роздрукованому вигляді додаємо до розв'язання.

#### Приклад розв'язання завдання 4.4

Розв'язати двоїсту задачу за допомогою надбудови «Пошук розв'язання» MS Excel.

#### Розв'язання

Для задачі (4) оформляємо робочий аркуш Excel аналогічно до прикладу розв'язання завдання 3.2. Зверніть увагу на інші назви змінних, цільової функції, а також інший зміст обмежень двоїстої задачі.

Тобто для двоїстої задачі

$$G = 180y_1 + 400y_2 + 350y_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 6y_1 + 5y_2 + y_3 \geq 8, \\ 2y_1 + 7y_2 + 6y_3 \geq 6, \\ 5y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 7, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, \end{cases}$$

робочий аркуш Excel буде мати вигляд, як на рисунку 19.

Завд. 4.4_Назаренко М.О. 8-2-ЕП * x							
	A	B	C	D	E	F	G
1	Розв'язання двоїстої ЗЛП за допомогою надбудови «Пошук розв'язання»						
2	Змінні						
3		y1	y2	y3			
4							
5		Коефіцієнти цільової функції			Значення		
6	G	180	400	350	0		
7							
8	A	6	5	1	0 >=		8
9	B	2	7	6	0 >=		6
10	C	5	5	2	0 >=		7
11							

Рисунок 19

Використовуємо надбудову «Пошук розв'язання».

Отримали у вікні «Результаты поиска решения» повідомлення про успішно знайдений оптимальний розв'язок. З клітинок B4, C4, D4 виписуємо оптимальні значення змінних, з клітинки E6 – мінімальне значення функції (рисунок 20).

**Відповідь:**  $\min G = 396,25$  при  $y_1=0,8125$ ;  $y_2=0,625$ ;  $y_3=0$ .

	B	C	D	E	F
1	двоїстої ЗЛП за допомогою надбудови «Пошук розв				
2	Змінні				
3	y1	y2	y3		
4	0,8125	0,625	0		
5	Коефіцієнти цільової функції			Значення	
6	180	400	350	396,25	
7					
8	6	5	1	8 >=	8
9	2	7	6	6 >=	6
10	5	5	2	7,1875 >=	7

**Результаты поиска решения**

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Сохранить найденное решение

Восстановить исходные значения

OK Отмена Сохр

Рисунок 20

В області «Тип отчета» виділимо для виведення звіти «Результаты», «Устойчивость» (рисунок 14), які додаємо до розв'язання в роздрукованому вигляді.

**Зауваження.** Оптимальні значення цільових функції прямої задачі (3) і двоїстої задачі (4) збігаються, а саме  $\max F = \min G = 396,25$ . Цей факт підтверджує виконання першої теореми двоїстості (див. [3, с. 29-31]) і свідчить про правильність розрахунків.

### Приклад розв'язання завдання 4.5

Виконати економічний аналіз задачі за роздрукованими звітами.

#### Розв'язання:

а) для того, щоб зробити економічний аналіз оптимальних планів задач (3), (4), розглянемо звіти «Отчет по результатам». Докладніше про те, які дані містить звіт «Отчет по результатам», що був сформований після розв'язання задачі лінійного програмування за допомогою надбудови Excel, вже йшлося в прикладі розв'язання завдання 3.2.

Отже, маємо екстремальне значення цільової функції:  $\max F = 396,25$ , оптимальні значення змінних:  $x_1=14,375$ ,  $x_2=46,875$ ,  $x_3=0$  (рисунок 21). Згадаємо позначення прямої задачі: через  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  позначено кількість продукції виду А, виду В та

виду С відповідно. Цільова функція задачі – це функція сумарного прибутку (див. приклад розв’язання завдання 4.1).

Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам

Рабочий лист: [Завд. 4.3\_Назаренко М.О. 8-2-П.xlsx]Варіант31

Отчет создан: 01.03.2019 16:07:16

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$E\$6	F Значення	0	396,25

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$B\$4	x1	0	14,375
\$C\$4	x2	0	46,875
\$D\$4	x3	0	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
\$E\$8	Ресурс 1 Значення	180	\$E\$8<=\$G\$8	связанное	0
\$E\$9	Ресурс 2 Значення	400	\$E\$9<=\$G\$9	связанное	0
\$E\$10	Ресурс 3 Значення	295,625	\$E\$10<=\$G\$10	не связан.	54,375

Рисунок 21

**Відповідь:** підприємство отримає максимальний прибуток 396,25 умов. од., якщо випускатиме 14,375 од. продукції виду А та 46,875 од. продукції виду В. Випуск продукції С не передбачається.

Розглянемо звіт «Отчет по результатам» двоїстої задачі (4) (рисунок 22).

Целевая ячейка (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$E\$6	G Значення	396,25	396,25

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$B\$4	y1	0,8125	0,8125
\$C\$4	y2	0,625	0,625
\$D\$4	y3	0	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
\$E\$8	A Значення	8	\$E\$8>=\$G\$8	связанное	0
\$E\$9	B Значення	6	\$E\$9>=\$G\$9	связанное	0
\$E\$10	C Значення	7,1875	\$E\$10>=\$G\$10	не связан.	0,1875

Рисунок 22

Маємо екстремальне значення цільової функції  $\min G = 396,25$ , оптимальні значення змінних:  $y_1=0,8125$ ;  $y_2=0,625$ ;  $y_3=0$ . Згадаємо економічну інтерпретацію двоїстої задачі: змінні двоїстої задачі є *оцінками* одиниці відповідного ресурсу (тіншовими цінами). Цільова функція двоїстої задачі – це функція сумарної вартості ресурсів (див. приклад розв'язання завдання 4.2).

**Відповідь:** мінімальна загальна вартість всіх ресурсів 396,25 умов. од. Оптимальні оцінки (тіншові ціни) ресурсів 1, 2, 3 дорівнюють 0,8125 умов. од., 0,625 умов. од. та 0 умов. од. відповідно.

Оптимальні значення цільових функції прямої задачі (3) та двоїстої задачі (4) збігаються, а саме  $\max F = \min G = 396,25$ . Економічний зміст цього збігу полягає в тому, що підприємству однаково або виробляти продукцію за оптимальним планом  $x_1=14,375$ ,  $x_2=46,875$ ,  $x_3=0$  та отримати максимальний прибуток  $\max F = 396,25$ , або продати ресурси за оптимальними цінами

$y_1=0,8125$ ;  $y_2=0,625$ ;  $y_3=0$  та компенсувати від продажу рівні прибутку мінімальні витрати на ресурси  $\min G = 396,25$ .

### Зауваження

Розглянемо звіти «Отчет по результатам» (рисунки 21, 22), таблиці «Ограничения». У цих таблицях перевіряються лінійні обмеження, у стовпчику «Різниця» записані різниці між лівими і правими частинами обмежень. Запишемо обмеження прямої та двоїстої задачі в канонічному вигляді (див. [3, с. 6-7]):

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 180, \\ 5x_1 + 7x_2 + 5x_3 + x_5 = 400, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_6 = 350, \end{cases} \quad \begin{cases} 6y_1 + 5y_2 + y_3 - y_4 = 8, \\ 2y_1 + 7y_2 + 6y_3 - y_5 = 6, \\ 5y_1 + 5y_2 + 2y_3 - y_6 = 7, \end{cases}$$

Якщо згадати економічний зміст обмежень (див. приклад розв'язання завдань 4.1 та 4.2), то побачимо, що додаткові змінні прямої задачі показують залишок відповідного ресурсу, випишемо їх значення зі стовпця «разниця»:  $x_4=0$ ,  $x_5=0$ ,  $x_6=54,375$ . Додаткові змінні двоїстої задачі показують різницю між витратами на виробництво одиниці продукції кожного виду та прибутку, отриманого при реалізації одиниці продукції, випишемо їх значення зі стовпця «разниця»:  $y_4=0$ ;  $y_5=0$ ;  $y_6=0,1875$ .

Запишемо відповідність змінних прямої та двоїстої задачі:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1=14,375, & x_2=46,875, & x_3=0 & x_4=0, & x_5=0, & x_6=54,375, \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4=0; & y_5=0; & y_6=0,1875. & y_1=0,8125; & y_2=0,625; & y_3=0. \end{array}$$

Для них виконується умова додаткової нежорсткості: додатнім змінним однієї задачі відповідають нульові змінні іншої. Саме завдяки цій властивості ми далі будемо робити висновок про дефіцитні ресурси та рентабельність продукції, використовуючи звіти тільки прямої задачі (3);

б) оцінимо, як при реалізації оптимального плану випуску продукції використовуються ресурси. Залежно від того, повне чи часткове використання ресурсів передбачене оптимальним планом прямої задачі, ресурси можна умовно поділити на

дефіцитні (ресурс використано повністю) і недефіцитні (ресурс використано неповністю).

Розглянемо звіт «Отчет по результатам» (рисунок 21) прямої задачі, таблицю «Ограничения». У стовпчику «Значения» наведено кількість ресурсів, яку використано для забезпечення оптимального плану випуску продукції. Так, бачимо, що ресурсу 1 використано 180 од., ресурсу 2 – 400 од., ресурсу 3 – 295,625 од. У стовпчику «Разница» вказана кількість залишків ресурсів. Як бачимо, ресурс 1 і ресурс 2 використано повністю (залишок дорівнює нулю), тобто ці ресурси – дефіцитні. Ресурсу 3 залишилося 54,375 од., він використаний неповністю, тобто ресурс 3 – не дефіцитний. Саме про це і свідчать записи в стовпчику «Статус»: якщо ресурс використаний повністю (дефіцитний), тоді у стовпчику «Статус» записано «связанное», якщо ресурс був використаний неповністю (недефіцитний), у стовпчику «Статус» побачимо «не связанное».

Також оцінити, як при реалізації оптимального плану випуску продукції використовуються ресурси, можна, якщо розглянути звіт «Отчет по устойчивости» прямої задачі (рисунок 23). Цей звіт є більш інформативним, частково дані цього звіту повторюють звіт «Отчет по результатам». У таблиці «Ограничения» стовпчик «Теневая цена» вказує на цінність одиниці відповідного ресурсу (тіньову ціну). Додатні тіньові ціни ресурсів вказують на дефіцитність найцінніших ресурсів, якщо тіньова ціна дорівнює нулю, тоді такий ресурс є недефіцитним. Як бачимо, ресурс 1 і ресурс 2 є дефіцитними (тіньові ціни 0,8125 та 0,625 є додатними), ресурс 3 – недефіцитний (тіньова ціна дорівнює нулю). Залишок невикористаного ресурсу 3 знайдемо як різницю між значенням у стовпчику «Ограничение Правая часть» і значенням у стовпчику «Результ. значение». Тобто маємо  $350 - 295,625 = 54,375$  умов. од. ресурсу 3 залишаться невикористаними.

**Відповідь:** при такому оптимальному плані випуску ресурси першого та другого видів будуть використані повністю, вони – дефіцитні. Ресурс 3 буде використано неповністю, він є недефіцитним, невикористаними залишаться 54,375 од. ресурсу.



## Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$4	x1	14,375	0	8	10	0,24
\$C\$4	x2	46,875	0	6	5,2	1,2
\$D\$4	x3	0	-0,1875	7	0,1875	1E+30

## Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$E\$8	Ресурс 1 Значення	180	0,8125	180	300	65,71428571
\$E\$9	Ресурс 2 Значення	400	0,625	400	51,17647059	250
\$E\$10	Ресурс 3 Значення	295,625	0	350	1E+30	54,375

Рисунок 23

За допомогою звіту «Отчет по устойчивости», таблиці «Ограничения» також можна вказати інтервали стійкості двоїстих оцінок для кожного ресурсу відносно зміни запасів ресурсів. У стовпчику «Теневая цена» вказані значення двоїстих оцінок відповідних ресурсів. Також тіньова ціна вказує, наскільки збільшиться значення цільової функції при збільшенні запасів ресурсу на одну одиницю за умови зміни запасів ресурсів у допустимих межах. Стовпчики «допустимое увеличение», «допустимое уменьшение» вказують, наскільки ми можемо збільшувати (зменшувати) окремо запаси ресурсів, при тому, що їхня тіньова ціна не зміниться. Також не зміниться структура оптимального плану (асортимент продукції). Отже, для нашого оптимального плану, відповідні оцінки ресурсів (тіньові ціни) не зміняться, якщо запаси ресурсу 1 змінювати в межах (180-65,72; 180+300) од. або запаси ресурсу 2 змінювати в межах (400-250; 400+51,18) од. або запаси ресурсу 3 змінювати в межах (350 – 54,375; +∞) од. Те, що верхня межа для ресурсу 3 є нескінченно великою, є наслідком того, що ресурс 3 є недефіцитним (використаний неповністю). Структура оптимального плану не зміниться, тобто підприємству для отримання максимального прибутку необхідно, як і раніше,

випускати продукцію тільки виду А та виду В (кількість цієї продукції зміниться). Значення максимального прибутку для нового плану зміниться.

**Відповідь:** структура оптимального плану (асортимент продукції) не зміниться, оцінки ресурсів (тіньові ціни) не зміняться, якщо запаси ресурсу 1 змінювати в межах (114,28; 480) од. або запаси ресурсу 2 змінювати в межах (150; 451,18) од.; або запаси ресурсу 3 змінювати в межах (295,625;  $+\infty$ ) од.;

в) з'ясуємо, чи зміниться структура оптимального плану (асортимент продукції), якщо обсяги запасів дефіцитних ресурсів збільшити на 15 % за інших однакових умов. Розглянемо дефіцитний ресурс 1 (тіньова ціна 0,8125 є додатною). Якщо його обсяги збільшаться на 15 %, тобто на  $180 \cdot 0,15 = 27$  од., то структура оптимального плану (асортимент продукції) не зміниться, бо допустиме збільшення запасів ресурсу 1 у стовпчику «*допустимое увеличение*» дорівнює 300 од. У такому випадку можемо обчислити, як збільшиться прибуток. А саме при збільшенні обсягів ресурсу 1 на 27 од. значення цільової функції збільшиться відповідно на  $0,8125 \cdot 27 = 21,9375$  умов. од. Розглянемо дефіцитний ресурс 2 (тіньова ціна 0,625 є також додатною). Якщо його обсяги збільшаться на 15 %, тобто на  $400 \cdot 0,15 = 60$  од., то структура оптимального плану (асортимент продукції) зміниться, бо допустиме збільшення запасів цього ресурсу у стовпчику «*допустимое увеличение*» дорівнює лише 51,176 од.

**Відповідь:** при збільшенні обсягів ресурсу 1 на 27 од. структура плану не зміниться, сумарний прибуток збільшиться відповідно на 21,9375 умов. од. При збільшенні обсягів ресурсу 2 на 60 од. зміниться структура оптимального плану. Для визначення сумарного прибутку потрібно розв'язувати задачу з новою умовою.

**Зауваження щодо структури оптимального плану.** Дійсно, якщо обсяг ресурсу 1 збільшити на 27 од., тоді його обсяг складатиме  $180 + 27 = 207$ . Розв'яжемо задачу з новими даними за допомогою надбудови «Пошук розв'язання» (рисунок 24). Як бачимо, максимальне значення функції тепер складає  $\max F = 418,1875$ , що дійсно на 21,9375 умов. од. більше, ніж було, коли обсяг ресурсу 1 складав 180. Значення змінних  $x_1$ ,  $x_2$

змінилися, але структура плану не змінилася – підприємству для досягнення оптимального плану вигідно, як і раніше, випускати продукції виду А та продукцію виду В. Випуск продукції С не передбачається;

	A	B	C	D	E		
2		Змінні					
3		x1	x2	x3			
4		20,28125	42,65625	0			
5		Коефіцієнти цільової функції			Значення		
6	F	8	6	7	418,1875		
7							
8	Ресурс 1	6	2	5	207	<=	207
9	Ресурс 2	5	7	5	400	<=	400
10	Ресурс 3	1	6	2	276,21875	<=	350

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Сохранить найденное решение

Восстановить исходные значения

OK Отмена Сохранить

Рисунок 24

г) для того щоб оцінити рентабельність кожного виду продукції, розглянемо звіт «Отчет по устойчивости» прямої задачі (рисунок 23), таблицю «Изменяемые ячейки». У стовпчику «Нормир. стоимость» вказана нормована вартість – показник, який характеризує зміну значення цільової функції при примусовому внесенні одиниці відповідної продукції до оптимального плану. Якщо значення цього стовпчика для відповідної продукції дорівнює нулю, то продукція рентабельна. Оскільки в нашому звіті нормована вартість для продукції А та В дорівнює нулю, то ця продукція рентабельна. Продукція С нерентабельна, оскільки її нормована вартість дорівнює (-0,1875), це значення виражає величину збитків при примусовому включенні одиниці цієї продукції до оптимального плану. З іншого боку, якщо прибуток від реалізації цієї продукції збільшиться на цю величину, то продукція стане рентабельною і ввійде до оптимального плану.

**Відповідь:** при такому оптимальному плані продукція видів А та В є рентабельною. Продукція виду С є нерентабельною, при включенні одиниці цієї продукції до оптимального плану примусово прибуток зменшиться на 0,1875 од.

Стовпчики «допустимое увеличение», «допустимое уменьшение» таблиці «Изменяемые ячейки» дають можливість зробити аналіз плану на чутливість. А саме вказати інтервали

можливої зміни *прибутку від реалізації одиниці продукції (ціни)* кожного з видів продукції, при яких оптимальний план виробництва не зміниться (відповідне значення максимального прибутку зміниться).

Для нашої задачі маємо: знайдений оптимальний план не зміниться, якщо ціна продукції А 8 умов. од. зміниться в межах (7,76; 18) умов. од.; або ціна продукції В 6 умов. од. зміниться в межах (4,8; 11,2) умов. од. Також можемо зробити висновок, що ціну продукції С 7 умов. од. можна зменшувати необмежено (цей факт є наслідком того, що продукція С була нерентабельною і не планувалася до випуску в оптимальному плані), збільшення ціни продукції С можливе до 7,1875 умов. од.

У відповіді можливі коливання прибутку від реалізації одиниці продукції (ціни) кожного виду, які не змінять оптимальний план виробництва, вкажемо у відсотках.

**Відповідь:** оптимальний план виробництва не зміниться, якщо за інших однакових умов прибуток від реалізації одиниці продукції (ціна) зміниться так:

- для продукції А – зменшиться не більше, ніж на  $0,24 \cdot 100\% : 8 = 3\%$ , або збільшиться менше, ніж на  $10 \cdot 100\% : 8 = 125\%$ ;

- для продукції В – зменшиться не більше, ніж на  $1,2 \cdot 100\% : 6 = 20\%$ , або збільшиться менше, ніж на  $5,2 \cdot 100\% : 6 \approx 86,7\%$ ;

- для продукції С – зменшиться як завгодно або збільшиться менше, ніж на  $0,1875 \cdot 100\% : 7 \approx 2,68\%$ ;

а) за допомогою таблиці «*Изменяемые ячейки*» (рисунок 23) оцінимо, як зміниться максимальний прибуток, якщо прибуток від реалізації одиниці продукції виду В зменшиться на 1 умов. од. (для непарного варіанта 31)<sup>5</sup>. Оскільки допустиме зменшення прибутку від реалізації одиниці продукції виду В 1,2 умов. од., тоді зменшення на 1 умов. од. не змінить оптимальний план, але максимальний прибуток зменшиться на  $46,875 \cdot 1 = 46,875$  умов. од.

---

<sup>5</sup> Якщо прибуток від реалізації одиниці продукції виду А зменшиться на 1,5 умов. од. (для парних варіантів), оптимальний план зміниться. Для визначення максимального прибутку задачу потрібно розв'язувати наново.

**Відповідь:** оптимальний план не зміниться, максимальний прибуток зменшиться на 46,875 умов. од.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Навчальний посібник з курсу: «Оптимізаційні методи та моделі» для спеціальностей «Облік і аудит, Фінанси і кредит, Маркетинг, Економічна кібернетика» / В. А. Кривень, В. Б. Валяшек, Л. І. Цимбалюк, Г. В. Козбур. Тернопіль : Вид-во ТНТУ, 2015. 83 с.

2 Математичне програмування : підруч. для студ. ВНЗ / О. О. Єгоршин, Л. М. Малярець ; Харківський національний економічний ун-т. Харків : ВД «ІНЖЕК», 2006. 383 с.

3 Лінійне програмування : конспект лекцій / Ю. О. Акімова, О. О. Думіна, О. І. Удодова, Ю. С. Шувалова. Харків : УкрДАЗТ, 2014. 48 с.

4 Думіна О. О., Удодова О. І. Математичне програмування. Завдання і методичні вказівки до виконання контрольної роботи. Харків : УкрДАЗТ, 2007. Ч. 1. 54 с.

