ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи студентів освітнього рівня «Бакалавр»

Частина III

Харків – 2019

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 8 квітня 2019 р., протокол № 7.

Рекомендуються для самостійної роботи студентів освітнього рівня «Бакалавр» факультету УПП всіх форм навчання

Укладачі:

доценти Н. Г. Панченко,
М. Є. Резуненко,
старш. викл. О. В. Рибачук

Рецензент

проф. Р. В. Вовк (ХНУ імені В. Н. Каразіна)

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи студентів освітнього рівня «Бакалавр»

Частина ІІІ

Відповідальний за випуск Резуненко М. Є.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 24.04.19 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк. арк. 3,0. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ЗМІСТ

ЗАВДАННЯ 1. Диференціальне числення функції однієї змінної

Завдання 1.1. Знайти похідну функції.

Варіант 1

1) $y=(\sin x)^3\cdot\left(2x^2-1\right)$; 2) $y=\dfrac{arccos\,x^3}{1+e^{2x}}$; 3) $y=\ln^5\cos(5x+1)-2arctg^4(2^x)$.

Варіант 2

1) $y=\left(2x^5+1\right)\cdot\sqrt{3-x}$; 2) $y=\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)}{\cos x}$;

3) $y=\ln^2(\arcsin 5x)+4^{-\sin x}\cdot ctgx$.

Варіант 3

1) $y=(7x-2)\cdot\sqrt{2x^2-2x+1}$; 2) $y=\dfrac{\arcsin^3 x}{\ln x}$; 3) $y=4^{-x}\cdot\ln^5\left(\sin x^2-1\right)$.

Варіант 4

1) $y=(4x-5)\cdot\sqrt[5]{x+1}$; 2) $y=\dfrac{\ln 2x}{arctg^3 x}$; 3) $y=\arcsin^2(5x)^3+tg^3 2x$.

Варіант 5

1) $y=\left(1-x^2\right)\cdot\sqrt[5]{7-12x^3}$; 2) $y=\dfrac{\ln\sqrt{x^2+1}}{tgx}$; 3) $y=\sqrt[4]{1+\cos x^3}-\arcsin^3 2x$.

Варіант 6

1) $y=tgx\cdot\sqrt{2x^2-3x+7}$; 2) $y=\dfrac{5\sin x^3}{arctg\,3x}$; 3) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}+e^{-\cos^2 3x}}$.

Варіант 7

1) $y=\sqrt[4]{(3x-1)}\cdot\cos x$; 2) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{tg(x+1)}$; 3) $\mathrm{y}=\sin\left(x^4\right)\cdot\cos x+\arcsin^3(2x)$.

Варіант 8

1) $y = 2\sqrt{x} \cdot \cos x$; 2) $y = arctg\,\dfrac{1+x}{1-x}$; 3) $y = \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}} + e^{tgx}$.

Варіант 9

1) $y = \sqrt[7]{8x-3} \cdot tgx$; 2) $y = \dfrac{arctg\sqrt{4x-1}}{e^x}$; 3) $y = \ln^4\left(\sin x + \sqrt{1+\sin 5x}\right)$.

Варіант 10

1) $y = \left(1-2\sqrt{x}\right)^4 \cdot \ln x$; 2) $y = \dfrac{\ln \arccos 2x}{2^x+1}$; 3) $y = \sin\sqrt{1+x^2} + \mathrm{arctg}^4 3x$.

Варіант 11

1) $y = \sqrt[3]{7+5x} \cdot \arcsin x$; 2) $y = \dfrac{\ln\left(x-2^x\right)}{2^{-3x}}$; 3) $y = \arcsin\dfrac{2}{x^4} + arctg\,5x^2$.

Варіант 12

1) $y = x^3 \cdot e^{-4x}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{3x^7}$; 3) $y = \arcsin^5 x^2 + arctg^3 4x$.

Варіант 13

1) $y = \sqrt[4]{\left(1+3x^2\right)} \cdot \cos x$; 2) $y = \dfrac{\ln\left(x^4 - x^5\right)}{tgx}$; 3) $y = \sqrt{arctgx^3} - \arcsin^5\left(x^2+1\right)$.

Варіант 14

1) $y = \sqrt[5]{3x-1} \cdot arctg\,2x$; 2) $y = \dfrac{\sqrt[3]{\ln x + 5}}{tgx}$; 3) $y = \sin^2 x^3 + \arccos^3 5x$.

Варіант 15

1) $y = tg\,2x \cdot \arcsin x$; 2) $y = \dfrac{\sqrt[5]{\left(3x+4x^2\right)}}{3^x}$; 3) $y = \dfrac{1}{2}\ln^5 tgx + \ln\cos\left(x^3+2\right)$.

Варіант 16

1) $y = \sqrt[3]{5+4x-x^2} \cdot \cos x$; 2) $y = \dfrac{\ln\sin\left(2x^3+9\right)}{\sqrt{x}}$;

3) $y = arctg^2\left(\frac{1}{x} + 5x\right) + \sin^5 3x$.

Варіант 17

1) $y = \sqrt[3]{(5x-7)} \cdot e^x$; 2) $y = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\ln\left(x^2+1\right)}$; 3) $y = \sin^3(\cos 4x) + \arcsin^3 2x$.

Варіант 18

1) $y = \left(\sqrt{x^2+7}\right) \cdot 5^{-x}$; 2) $y = \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}\right)^4$; 3) $y = \frac{\arcsin(x+5)}{\arccos\left(x^3\right)} + tg^6(2x)$

Варіант 19

1) $y = \sqrt[5]{\left(3x^2+4x\right)} \cdot tgx$; 2) $y = \frac{\ln(2x+5)}{ctgx}$; 3) $y = \left(\arcsin x^3 + 2x^2\right)^7 + 5^{x^2}$.

Варіант 20

1) $y = \left(\sqrt{x} + \sin x\right) \cdot 4^{-x}$; 2) $y = \frac{\cos x}{\ln \sin x}$;

3) $y = e^{-x^2} \ln^6\left(x - 2x^2\right) + \ln tg\left(x^2+1\right)$.

Варіант 21

1) $\mathrm{y} = \mathrm{x}^6 \sqrt{4 - tgx}$; 2) $y = \frac{\ln^5(1+\cos x)}{arctgx}$; 3) $y = e^{\cos x} \sin^7 x + arctg 4x$.

Варіант 22

1) $y = \left(2x^2 + 4x - 1\right) \cdot 5^x$; 2) $y = \frac{\ln \sin x}{\cos^7 x}$; 3) $y = \frac{2\sin x}{\cos 2x} + 2^{-x} \cdot arctg 4x$.

Варіант 23

1) $y = (2x-7) \cdot tg 3x$; 2) $y = \frac{\ln\left(3 + x + \sqrt{x}\right)}{\arcsin x}$; 3) $y = \frac{3\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} + e^{-x} \cdot arctg 7x$.

Варіант 24

1) $y = x^5 \cdot \sqrt[3]{x-8}$; 2) $y = \frac{\ln(1+\cos x)}{e^{3x}}$; 3) $y = e^{\cos x} \sin x^3 + arctg 2x$.

Варіант 25

1) $y = 2^x \cdot tg5x$; 2) $y = \dfrac{\ln(3x+1)}{\cos(x^4)}$; 3) $y = \sqrt{\sin x} + 2^{\cos x} \cdot arctgx^3$.

Варіант 26

1) $y = \cos 4x \cdot arctg6x$; 2) $y = \dfrac{5+\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}}$; 3) $y = \ln^7\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right) + \dfrac{\ln x}{ctg(x-3)}$.

Варіант 27

1) $y = \left(\sqrt{4x+3}\right) \cdot \arcsin x$; 2) $y = \dfrac{1}{(6x-1)^3}$; 3) $y = 2^{\sqrt{\sin x}} + \ln^3 tgx^2$.

Варіант 28

1) $y = \sin x \cdot \ln\left(\sqrt{x+9}\right)$; 2) $y = \dfrac{3^x}{\left(1-8x^2\right)^3}$; 3) $\mathrm{y} = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} + 3^{tgx}$.

Варіант 29

1) $y = (\ln 3x) \cdot \sqrt{1-9x}$; 2) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-9x^4}}$; 3) $y = \arccos\dfrac{2-x}{x\sqrt{2}} + e^{-tgx}$.

Варіант 30

1) $y = x\sqrt{1-x^4}$; 2) $y = \dfrac{3^{\cos x}}{\arcsin 3x}$; 3) $y = \ln\left(1+\cos^2 x\right) + e^{-\sin 2x}$.

Завдання 1.2. Знайти диференціал першого та другого порядку.

Варіант 1 $y = e^{x^3}$	**Варіант 11** $y = \dfrac{5}{x+3}$	**Варіант 21** $y = e^{arctgx}$
Варіант 2 $y = (\arcsin x)^2$	**Варіант 12** $y = \sqrt{4-x^2}$	**Варіант 22** $y = \dfrac{x}{x^2-1}$
Варіант 3 $y = \left(1+x^2\right) \cdot arctgx$	**Варіант 13** $y = \sqrt{tgx}$	**Варіант 23** $y = \sqrt{2x-x^2}$

Варіант 4 $y=\sqrt{1+x^2}$	**Варіант 14** $y=e^{\sqrt{x}}$	**Варіант 24** $y=\cos e^{x}+\sin e^{x}$
Варіант 5 $y=tgx$	**Варіант 15** $y=xe^{x^2}$	**Варіант 25** $y=e^{\arcsin x}$
Варіант 6 $y=x^3e^x$	**Варіант 16** $y=\frac{1}{1+x^3}$	**Варіант 26** $y=e^{\arccos x}$
Варіант 7 $y=e^{-x^2}$	**Варіант 17** $y=\frac{1}{7+\sqrt{x}}$	**Варіант 27** $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$
Варіант 8 $y=ctgx$	**Варіант 18** $y=\sqrt{1-x}\arcsin x$	**Варіант 28** $y=e^x\cdot\ln x$
Варіант 9 $y=\arcsin\frac{x}{2}$	**Варіант 19** $y=\log_7 x$	**Варіант 29** $y=\ln(5x+9)$
Варіант 10 $y=\arccos\left(x^4\right)$	**Варіант 20** $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x}\right)$	**Варіант 30** $y=\frac{x-3}{x+4}$

Завдання 1.3. Методом логарифмічного диференціювання знайти похідну функції.

Варіант 1 $y=(\cos x)^{\sin x}$	**Варіант 11** $y=(\sin x)^{\arccos x}$	**Варіант 21** $y=(tg7x)^{\sqrt{3x+1}}$
Варіант 2 $y=(arctgx)^{x^2+1}$	**Варіант 12** $y=(ctg2x)^{\sin x}$	**Варіант 22** $y=(\sin(x+2))^{3\cos x}$
Варіант 3 $y=(tgx)^{x^2+3}$	**Варіант 13** $y=(tg(2x+1))^{x}$	**Варіант 23** $y=(arctgx)^{1/x}$
Варіант 4 $y=(\arccos x)^{x^3+2}$	**Варіант 14** $y=\left(tg\left(x^2+4\right)\right)^{x}$	**Варіант 24** $y=(\cos 5x)^{arctgx}$
Варіант 5 $y=(arctgx)^{1/x}$	**Варіант 15** $y=\left(\frac{x}{x+5}\right)^{x}$	**Варіант 25** $y=(\cos 3\mathrm{x})^{1/x}$

Варіант 6 $y=(tgx)^{\sqrt{x}}$	**Варіант 16** $y=(\cos 5x)^{\sin x}$	**Варіант 26** $y=(\sin x)^{\ln 5x}$
Варіант 7 $y=(\sin 5x)^{x}$	**Варіант 17** $y=(\cos 3x)^{\arcsin x}$	**Варіант 27** $y=\left(\sqrt{4x+3}\right)^{arctgx}$
Варіант 8 $y=(\cos x)^{\ln x}$	**Варіант 18** $y=(\sin(2x+3))^{5x}$	**Варіант 28** $y=\left(5x^2+4\right)^{\cos x}$
Варіант 9 $y=(\ln 7x)^{x}$	**Варіант 19** $y=(tg(2x+7))^{x^3}$	**Варіант 29** $y=(tgx)^{\left(x^3+2\right)}$
Варіант 10 $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$	**Варіант 20** $y=(\cos 7x)^{\ln x}$	**Варіант 30** $y=(tg3x-1)^{\sin x}$

Завдання 1.4. Знайти похідну неявної функції.

Варіант 1 $e^x \sin y$ - $e^y \cos x=0$	**Варіант 11** $y=5x+arctgy$	**Варіант 21** $x-y+7\cos y=0$
Варіант 2 $xy=arctg\,\dfrac{x}{y}$	**Варіант 12** $\sin(xy)+\cos y=0$	**Варіант 22** $5^x+5^y=5^{x+y}$
Варіант 3 $\ln x+e^{-y/x}=5$	**Варіант 13** $y=x\sin y$	**Варіант 23** $xy-y\ln x=3$
Варіант 4 $3^x+3^y=\sin y$	**Варіант 14** $x\ln y+\dfrac{y}{x}=3$	**Варіант 24** $e^{2x}+e^{3y}=xy$
Варіант 5 $x=y+arctgy$	**Варіант 15** $x\cos y-\cos(x-y)=0$	**Варіант 25** $x+y+7\cos y=0$
Варіант 6 $x=\dfrac{x-y}{x+y}$	**Варіант 16** $x+\sqrt{xy}+y=5$	**Варіант 26** $x+y+e^y arctgx=0$
Варіант 7 $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$	**Варіант 17** $x^2-2xy+y^3=1$	**Варіант 27** $\cos x+\sin(xy)=0$
Варіант 8 $\sin y+y\sin x=0$	**Варіант 18** $x^2+3xy+y^3+1=0$	**Варіант 28** $\sin(x+y)=\cos(x+y)$
Варіант 9 $x^4+y^4=x^2y$	**Варіант 19** $y^3-3y+10x=0$	**Варіант 29** $arctgy=x+y$

Варіант 10	Варіант 20	Варіант 30
$3^x+3^y=\cos y$	$y=\cos(x+y)$	$3y^2x=e^y$

Завдання 1.5. Знайти похідну функції, заданої параметрично.

Варіант 1 $\begin{cases} x=\cos 3t, \\ y=\ln\sin 3\mathrm{t}. \end{cases}$	**Варіант 11** $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\dfrac{1}{1-t}. \end{cases}$	**Варіант 21** $\begin{cases} x=e^{-2t}, \\ y=e^{-3t}. \end{cases}$
Варіант 2 $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=3\sin t. \end{cases}$	**Варіант 12** $\begin{cases} x=arctgt, \\ y=\dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$	**Варіант 22** $\begin{cases} x=e^{-5t}, \\ y=t^3+5. \end{cases}$
Варіант 3 $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=\cos 2t \end{cases}.$	**Варіант 13** $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=\sin^2 t. \end{cases}$	**Варіант 23** $\begin{cases} x=\arccos t, \\ y=\sqrt{t-t^2}. \end{cases}$
Варіант 4 $\begin{cases} x=t-\cos 3t, \\ y=\sin^2 t. \end{cases}$	**Варіант 14** $\begin{cases} x=5t^4+t^2, \\ y=\ln t. \end{cases}$	**Варіант 24** $\begin{cases} x=t\cos t, \\ y=\sin t. \end{cases}$
Варіант 5 $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=2t-1. \end{cases}$	**Варіант 15** $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=\sin^2 t. \end{cases}$	**Варіант 25** $\begin{cases} x=e^{2t}, \\ y=e^{3t}. \end{cases}$
Варіант 6 $\begin{cases} x=t^3, \\ y=\ln t^2. \end{cases}$	**Варіант 16** $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t). \end{cases}$	**Варіант 26** $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=\sin 3t. \end{cases}$
Варіант 7 $\begin{cases} x=t\cos t, \\ y=t\sin t. \end{cases}$	**Варіант 17** $\begin{cases} x=arctgt, \\ y=\ln(1+4t). \end{cases}$	**Варіант 27** $\begin{cases} x=(1+\cos 2t)\cdot t, \\ y=(1-\cos 3t)\cdot t. \end{cases}$
Варіант 8 $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$	**Варіант 18** $\begin{cases} x=\ln t+5t, \\ y=t^3. \end{cases}$	**Варіант 28** $\begin{cases} x=2t, \\ y=t^3+2t. \end{cases}$
Варіант 9 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t^2. \end{cases}$	**Варіант 19** $\begin{cases} x=\cos t+t^2, \\ y=\sin t. \end{cases}$	**Варіант 29** $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=\cos t. \end{cases}$

Варіант 10	**Варіант 20**	**Варіант 30**
$\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{t}. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3 - 2t. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

Завдання 1.6. Знайти границю функції, використовуючи правило Лопіталя.

Варіант 1 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, x - x}{x - \sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\sin x}$.	**Варіант 11** 1) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 e^{-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+0} (\sin x)^{tgx}$	**Варіант 21** 1) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{9}{x^2-1}}$
Варіант 2 1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$	**Варіант 12** 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+0} (\arcsin x)^{tgx}$	**Варіант 22** 1) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\pi - 2arctgx}{e^{3/x} - 1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
Варіант 3 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$	**Варіант 13** 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 7^x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^x + x\right)^{1/x}$	**Варіант 23** 1) $\lim\limits_{x\to 1} \sin(x-1) tg \dfrac{\pi x}{2}$; 2) $\lim\limits_{x\to \pi/4} (tgx)^{tg 2x}$
Варіант 4 1) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sin x - \sin 4}{x - 4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} \left(tg \dfrac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$	**Варіант 14** 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{arctgx}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+0} (ctgx)^x$	**Варіант 24** 1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\cos \dfrac{7}{x}\right)^x$
Варіант 5 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1+x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+0} (ctgx)^{1/\ln x}$	**Варіант 15** 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$	**Варіант 25** 1) $\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{\ln(x-3)}{\ln\left(e^x - e^3\right)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+0} \left(\dfrac{1}{arctgx}\right)^{\frac{1}{2\ln x}}$

Варіант 6	Варіант 16	Варіант 26
1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$	1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{3/x^2}$	1) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{ctgx}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$
Варіант 7	**Варіант 17**	**Варіант 27**
1) $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$	1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}(\cos 5x)^{4/x^2}$	1) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{tgx}{tg3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$
Варіант 8	**Варіант 18**	**Варіант 28**
1) $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\ln tg7x}{\ln tg2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}$	1) $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{1/x}$	1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\left(e^{2x}+x\right)^{1/x}$
Варіант 9	**Варіант 19**	**Варіант 29**
1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\left(\sin 1/x\right)}$	1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin 7x}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$	1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\sin\pi x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}$
Варіант 10	**Варіант 20**	**Варіант 30**
1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-arctgx}{4x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to0+0}x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$	1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{7}{x-1}}$	1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{1/x}$

ЗАВДАННЯ 2. Застосування диференціального числення до дослідження функцій

Завдання 2.1. Для функції $y=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ знайти:

1) точки екстремуму та інтервали монотонності;
2) точки перегину, інтервали опуклості і увігнутості;
3) найбільше і найменше значення функції на проміжку $[a;b]$.

Варіант	a_3	a_2	a_1	a_0	a	b
1	-2	3	12	1	0	3
2	1	-3	-24	-2	-1	1
3	1	-3	3	3	2	5
4	2	7	4	4	-3	-1
5	1	4	5	-5	0	3
6	1	1,5	0	6	-2	1
7	3	6	3	-7	-0,5	2
8	3	0	-36	8	1	4
9	1	-1	-1	-9	0	3
10	1	-3	3	10	-1	2
11	2	5	4	-11	-2	0
12	2	-1	-8	12	-3	1
13	1	6	0	-13	-2	2
14	5	15	15	14	-2	1
15	4	5	-2	-15	-3	0
16	-2	-3	12	16	-1	3
17	-1	3	9	-17	1	4
18	4	-10	3	18	1	2
19	1	-6	-15	-19	2	6
20	2	-7	8	20	-1	2
21	5	10	0	-21	-1	1
22	1	12	48	22	-5	-2
23	-2	9	-12	-23	0	3
24	3	-1	-11	24	-2	0
25	4	-9	6	-25	0	2
26	-4	3	0	26	-1	1
27	-1	4	3	-27	-2	1
28	4/3	5	6	28	-1	3
29	-2/3	4	10	-29	-3	1
30	2	-9	12	30	0	1,5

Завдання 2.2. Дослідити функцію і побудувати ескіз її графіка.

Варіант	$y=f(x)$	Варіант	$y=f(x)$
1	$y=\frac{(x-5)^2}{2x-1}$	**2**	$y=\left(\frac{x+3}{x+4}\right)^3$
3	$y=\frac{x^3+4x}{x^2}$	**4**	$y=\frac{2x}{x^2-4}$
5	$y=\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2$	**6**	$y=\frac{x-3}{(x+5)^2}$
7	$y=\frac{2x+1}{(x-3)^2}$	**8**	$y=\frac{x^3+8}{x^2}$
9	$y=\frac{x^2-9}{x^2-4}$	**10**	$y=\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)^2$
11	$y=\frac{(x+2)^2}{(x+3)^3}$	**12**	$y=\frac{2x+5}{x^2-4}$
13	$y=\frac{x^2-16}{x^2}$	**14**	$y=\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2$
15	$y=\frac{x-1}{(x-3)^2}$	**16**	$y=\frac{x^2+5}{2x^2}$
17	$y=\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$	**18**	$y=\frac{3x-2}{(x-4)^2}$
19	$y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$	**20**	$y=\left(\frac{x+4}{x-3}\right)^2$
21	$y=\frac{x^2-9}{2x}$	**22**	$y=\frac{x+1}{x^2-9}$
23	$y=\frac{5x-4}{(x+2)^2}$	**24**	$y=\frac{x^3-8}{(x+1)^2}$
25	$y=\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$	**26**	$y=\frac{3x^2}{(x-3)^2}$
27	$y=\frac{x^2}{x^2-1}$	**28**	$y=\frac{x^3+1}{5x^2}$
29	$y=\left(\frac{2-x}{1-x}\right)^2$	**30**	$y=\frac{2x+6}{25-x^2}$

ЗАВДАННЯ 3. Теорія функцій кількох змінних

Завдання 3.1. Задано функцію $z = f(x;y)$, точку $M_0(x_0;y_0)$ і вектор $\vec{a}$. Знайти:

1) частинні похідні першого та другого порядку;
2) повний диференціал першого та другого порядку;
3) $grad\, z$ в точці $M_0(x_0;y_0)$;
4) похідну за напрямом вектора $\vec{a}$ в точці $M_0(x_0;y_0)$;
5) вектор нормалі до поверхні $z = f(x;y)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$.

Варіант	$z = f(x;y)$	$M_0(x_0;y_0)$	$\vec{a}(a_x;a_y)$
1	$z=5x^2+4(y-1)^2+3xy^3-4$	(1; 1)	(-3; 4)
2	$z=x^3y^2-2(x-2)^2+3x^4y+7$	(1; -1)	(3; 4)
3	$z=4xy-2(y-1)^3+8x^2y-y+5$	(2; 1)	(1; -2)
4	$z=2y^5+5x^2y+x^3-4x+5y+4$	(-1; 1)	(-8; -6)
5	$z=y^4x^3-3(x+5)^2+x^2y+5$	(-4; 0)	(-3; $\sqrt{7}$)
6	$z=3x^4+5y^2x-2y^3+7x-6$	(-2; 3)	(4; -3)
7	$z=7y^2+4(y-2)^2+5xy^3-7$	(-1; 2)	(-12; 5)
8	$z=12xy-2(y-1)^3+3xy^2-6y+8$	(-2; 1)	(-$\sqrt{7}$; 3)
9	$z=4x^2y^3-3(x+3)^2+7x^4y+9$	(-1; 2)	($\sqrt{5}$;-2)
10	$z=2x^5+3y^2x+y^3-4x+5y-10$	(1; -1)	(-6; 8)
11	$z=7x^2+5(y-1)^2+2xy^3+11$	(0; 1)	(-1; 7)
12	$z=3x^2y^3+5(x+1)^2+6x\ y^3+12$	(1; 0)	(-2; 6)
13	$z=9xy+2(y+5)^3-7x^2y-8y+5$	(-1; 0)	(12; -5)
14	$z=x^2y^3-3(x-1)^2+4xy^4+14$	(1; -1)	(-12; -5)
15	$z=3x^4+8(y+2)^3+6xy^2+15$	(1; -2)	(-4; -3)
16	$z=7x^2-4(y-1)^3+7xy^3-16$	(4; 2)	(-3; -$\sqrt{7}$)
17	$z=3x^2-5(y-2)^3+4x^3y-17$	(-3; 2)	(1; -3)
18	$z=18xy-2(y-1)^3+x^4y+8x+1$	(-3; 1)	(-$\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$)
19	$z=3x^5+5y^2x+y^4-3x+2y-19$	(0; -1)	(6; 8)
20	$z=2x^3y^2-3(x-3)^2+5x^4y+20$	(3; 1)	($\sqrt{7}$; -3)

21	$z=8y^2-3(x-1)^2+4xy^2+14$	(0; -1)	(2; -1)
22	$z=13xy-(x-1)^3+7x^2y+8x+22$	(1; 3)	(4; -3)
23	$z=x^4y^3+5(y+3)^2+3x^3y^2+23$	(1; 1)	(-3; 4)
24	$z=10y^2-5(x-3)^2-3xy^4+24$	(4; 1)	(-1; -2)
25	$z=3xy-2(1-x)^2-6x^2y-y^3+25$	(2; 3)	(1; 3)
26	$z=4y^5+5x^3y+2x^3-5y-26$	(3; 2)	(5; $\sqrt{11}$)
27	$z=8y^3-6(x+5)^2-3xy^2+27$	(-5; 3)	($\sqrt{2}$; -$\sqrt{2}$)
28	$z=7y^4-8(x+2)^3+6xy^2+28$	(-2; 1)	(-$\sqrt{7}$; 3)
29	$z=x^4y^3+3(x-1)^2+7x^3+5y^2+29$	(1; 3)	(-3; 4)
30	$z=10xy+(y-2)^3-7x^2y-x^4+30$	(-2; 2)	(-1; -3)

Завдання 3.2. Для заданої функції $z=f(x;y)$ знайти:

1) градієнт і похідну за напрямом вектора $\vec{a}$ в точці $M_0(x_0;y_0)$;

2) рівняння нормалі до поверхні $z=f(x;y)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$;

3) рівняння дотичної площини до поверхні $z=f(x;y)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$.

Варіант	$z=f(x;y)$	$M_0(x_0;y_0)$	$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$
1	$z=ln(e^x+e^y)$	(0; 0)	$\vec{i}+2\vec{j}$
2	$z=\arcsin\frac{xy^2}{2}$	(1; -1)	$-3\vec{i}-4\vec{j}$
3	$z=3^{x^2+2\sqrt{xy}}$	(1; 1)	$12\vec{i}+5\vec{j}$
4	$z=\sqrt{x}\,sin(x^2+y)$	(1; -1)	$4\vec{i}-3\vec{j}$
5	$z=\ln(3x^2+4y^2)$	(3; 1)	$2\vec{i}-\vec{j}$
6	$z=\frac{e^y}{x-y^2}$	(2; 1)	$8\vec{i}-6\vec{j}$
7	$z=ln(x^2+3y^2)$	(4; 2)	$5\vec{i}-12\vec{j}$
8	$z=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$	(3; 4)	$-3\vec{i}+4\vec{j}$

9	$z = sin^2(x^3 y)$	$(1;\ \pi/4)$	$2\vec{i} + \vec{j}$
10	$z = \sqrt{10 + x^2 + y^2}$	(1; 1)	-3$\vec{i}$ +4$\vec{j}$
11	$z = arcctg(x^2 y)$	(1; -1)	2$\vec{i}$ - $\vec{j}$
12	$z = arctg\,\frac{y^2}{x}$	(1; 1)	-4$\vec{i}$ +3$\vec{j}$
13	$z = cos^2(xy^3)$	$(\pi/4;\ 1)$	$\vec{i}$ -2$\vec{j}$
14	$z = \sqrt{x^3 y + 3y^4}$	(2; 1)	-3$\vec{i}$ -4$\vec{j}$
15	$z = arctg(x^2 + y^2)$	(3; 4)	-12$\vec{i}$ -5$\vec{j}$
16	$z = \sqrt{4xy + 3y^2}$	(2; 1)	3$\vec{i}$ +4$\vec{j}$
17	$z = ln(3x^2 + 5y^2)$	(1; 1)	3$\vec{i}$ +2$\vec{j}$
18	$z = arctg(3x + y^2)$	(2; 3)	-4$\vec{i}$ -3$\vec{j}$
19	$z = \sqrt{9 + x^2 + y^2}$	(2; -2)	5$\vec{i}$ +12$\vec{j}$
20	$z = e^x(\sin y + x\cos y)$	$(1;\ \pi/2)$	-$\vec{i}$ +7$\vec{j}$
21	$z = (x^3 + 4)^{ln\,y}$	(1; e)	6$\vec{i}$ -8$\vec{j}$
22	$z = arccos\,\frac{y^2}{x}$	(2; 1)	-5$\vec{i}$ +12$\vec{j}$
23	$z = ln(x^2 + 3^y)$	(2; 0)	-$\vec{i}$ -3$\vec{j}$
24	$z = \sqrt{16x^2 + 7xy^3}$	(1; -1)	3$\vec{i}$ +7$\vec{j}$
25	$z = (sin\,x + cos\,y)^3$	$(\pi/2;\ 0)$	-6$\vec{i}$ -8$\vec{j}$
26	$z = \sqrt{3xy + 5y^2}$	(2; 5)	4$\vec{i}$ -8$\vec{j}$
27	$z = ln\left(y + \frac{x}{y}\right)$	(1; 2)	9$\vec{i}$ -10$\vec{j}$
28	$z = \sqrt{28 - x^2 + 6y^2}$	(3; 1)	2$\vec{i}$ -6$\vec{j}$
29	$z = arcsin\left(\frac{x^2}{2y}\right)$	(-1; 1)	5$\vec{i}$ +6$\vec{j}$
30	$z = ln\left(cos\,\frac{x}{y} + 1\right)$	$(\pi;\ 2)$	7$\vec{i}$ - $\vec{j}$

Завдання 3.3. Знайти екстремум заданої функції.

Варіант	а) $z=f(x;y)$	б) $z=f(x;y)$
1	$z=2x^2+y^2-6x-12y$	$z=6x^3+6y^3-18xy+7$
2	$z=2x^2+3y^2+10x+2xy$	$z=6xy-3x^2-y^3+8$
3	$z=x^2+3y^2-3xy+9y-6x+3$	$z=-4y^3+x^2-4xy+4y-1$
4	$z=xy-x^2-y^2+4$	$z=-64x^3-y^3+12xy-6$
5	$z=2xy-3x^2-2y^2+12y-6x+9$	$z=x^3+6y^2-12xy+10$
6	$z=x^2+y^2+xy-2x-y+6$	$z=x^3+3xy^2-15x-12y+14$
7	$z=4x^2+y^2+2xy+12y$	$z=6-x-2x^2-3xy-y^3$
8	$z=40(x-y)+5x^2+4y^2+88$	$z=x^3+3xy^2-39x+36y-8$
9	$z=9x^2+y^2-6y+3xy$	$z=x^3+3xy^2-51x-24y+54$
10	$z=3x^2+y^2-3xy+9y-6x+10$	$z=x^3+8y^3+12xy-1$
11	$z=12(x-y)-3x^2-y^2+7$	$z=24x-12y-2x^3-y^2$
12	$z=8x+8y-2x^2-4y^2+12$	$z=2x^3-3x^2-9y^2+18xy-18y+5$
13	$z=2yx-3y^2-4x+8y-13$	$z=2y^3-3y^2-6x^2+12xy-12x+4$
14	$z=3x^2+y^2+3xy-15x+5y+7$	$z=\dfrac{x^3}{3}+y^2-4x-4y$
15	$z=15(x+y)-3x^2-5y^2$	$z=36xy-2x^3-3y^2+45$
16	$z=6x^2+y^2-16x+2xy$	$z=x^3+8y^3-6xy+1$
17	$z=yx+y^2+x^2+6y$	$z=x^3+27y^3+18xy+15$
18	$z=18(x+y)-x^2-y^2$	$z=-2x^3+18y^2-24yx+6x-10$
19	$z=19+6x-x^2-y^2-xy$	$z=x^3-y^3-27xy+11$
20	$z=\dfrac{3}{2}x^2+y^2+2xy+y$	$z=-2x^3+\dfrac{1}{4}y^2-yx+4x+5$
21	$z=2xy-2x^2-4y^2$	$z=2y^3+6x^2y-36x-60y+55$
22	$z=x^2+y^2+xy-11x-22y$	$z=-64x^3-y^3-24xy-26$
23	$z=14(x-y)-x^2-7y^2+23$	$z=12xy-x^3-6y^2+9$
24	$z=2xy-5x^2-3y^2+2$	$z=8x^3+y^3+6xy+10$
25	$z=2y^2+5x^2-y-5xy$	$z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+10$
26	$z=18x+8y-9x^2-4y^2+26$	$z=2x^3+2y^3-6xy+5$

27	$z=6x^2+3y^2+8xy+12x$	$z=y^3+x^3-18xy-12$
28	$z=8(x+y)-x^2-y^2$	$z=3x^2+y^3-6xy-6x-18y+9$
29	$z=10x^2+5y^2+5xy-7x+29$	$z=4x^3+4y^3+16xy+25$
30	$z=3xy-x^2-y+6x$	$z=18xy-2x^3+3y^2+7$

Завдання 3.4. Знайти найбільше і найменше значення функції $z=z(x;y)$ в замкненій області D, яка обмежена заданими лініями.

Варіант	$z=z(x;y)$	Область D
1	$z=x^2+2xy-10$	$y=0$, $y=x^2-4$
2	$z=x^2+2xy-y^2-2x+2y$	$y=0$, $y=x+2$, $x=2$
3	$z=2x^3-xy^2+y^2$	$y=0$, $y=6$, $x=0$, $x=1$
4	$z=3x^2+3y^2-x-y+1$	$y=0$, $x-y=1$, $x=5$
5	$z=3x^2-2x+3y^2-2y+2$	$y=0$, $x+y=1$, $x=0$
6	$z=x^2-2xy-y^2+4x+1$	$y=0$, $x+y=-1$, $x=-3$
7	$z=xy-2x-y$	$y=0$, $y=4$, $x=0$, $x=3$
8	$z=xy-3x-2y$	$y=0$, $y=4$, $x=0$, $x=4$
9	$z=2x^2+2xy-0{,}5y^2-4x$	$y=2x$, $y=2$, $x=0$
10	$z=-9x^2+6xy-9y^2+4x+4y$	$y=0$, $y=2$, $x=0$, $x=1$
11	$z=x^2-2xy+2{,}5y^2-2x$	$y=0$, $y=2$, $x=0$, $x=3$
12	$z=3x+y-xy$	$y=x$, $y=4$, $x=0$
13	$z=xy-x-2y$	$y=x$, $y=0$, $x=3$
14	$z=x^2+2xy-y^2-4x$	$y=0$, $x-y+1=0$, $x=3$
15	$z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$	$y=0$, $x+y=3$, $x=0$
16	$z=4-2x^2-y^2$	$y=0$, $y=\sqrt{1-x^2}$
17	$z=5x^2-3xy+y^2$	$y=0$, $y=1$, $x=0$, $x=1$
18	$z=x^2+2xy+8y-4x$	$y=0$, $y=2$, $x=0$, $x=1$
19	$z=x^2-2x+y^2-2y+8$	$y=0$, $x+y=1$, $x=0$
20	$z=3x+6y-x^2-xy-y^2$	$y=0$, $y=1$, $x=0$, $x=1$
21	$z=x^2+2xy-y^2-4x$	$y=0$, $y=x+1$, $x=3$
22	$z=2x^2y-x^3y-x^2y^2$	$y=0$, $x+y=6$, $x=0$
23	$z=5x^2+3xy+y^2+4$	$y=-1$, $y=1$, $x=-1$, $x=1$

24	$z=x^3+y^3-3xy$	$y=-1,\ y=2,\ x=0,\ x=2$
25	$z=2x^2+3y^2+1$	$y=0,\ y=4-x^2$
26	$z=x^2+2xy-y^2+4x$	$y=0,\ x+y+2=0,\ x=0$
27	$z=4(x-y)-x^2-y^2$	$x+2y=4,\ x-2y=4,\ x=0$
28	$z=x^2+xy-2$	$y=0,\ y=4x^2-4$
29	$z=x^2y(4-x-y)$	$y=0,\ y=6-x,\ x=0$
30	$z=0{,}5x^2-xy$	$y=8,\ y=2x^2$

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

Диференціальне числення функції однієї змінної

Для знаходження похідної функції необхідно використовувати таблицю похідних основних елементарних функцій (таблиця 1) і правила диференціювання.

Таблиця 1 – Похідні основних елементарних функцій

$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,	$(\sin x)'=\cos x$	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)'=e^x$	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)'=a^x\ln a$		$(\mathrm{tg}\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{arctg}\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
		$(\mathrm{ctg}\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{arcctg}\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Основні правила диференціювання:

1) якщо $C=const$, то $C'=0$;

2) $(C\cdot f(x))'=C\cdot f'(x)$, де $C=const$;

3) $(f_1(x)\mp f_2(x))' = f_1'(x)\mp f_2'(x)$;

4) $(f_1(x)\cdot f_2(x))' = f_1'(x)\cdot f_2(x)+f_1(x)\cdot f_2'(x)$;

5) $\left(\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \dfrac{f_1'(x)\cdot f_2(x) - f_1(x)\cdot f_2'(x)}{(f_2(x))^2}$.

6) якщо $y = f(x)$ і $x = f^{-1}(y)$, то $\left(f^{-1}(y)\right)' = \dfrac{1}{f'(x)}$ (похідна оберненої функції);

7) якщо $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то $y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t'}$, $x'(t) \neq 0$ (похідна функції, заданої параметрично);

8) якщо задана складена функція $y = f(g(x))$, то $y_x' = f_g' \cdot g_x'$ (похідна складеної функції);

9) якщо змінні x та y пов'язані функціональним співвідношенням $F(x, y) = 0$, тобто у вигляді рівняння не розв'язаного відносно залежної змінної y, тоді знаходять похідні лівої і правої частини рівності $F(x, y) = 0$, враховуючи, що y залежить від x. Потім отримане рівняння розв'язують відносно y_x' (похідна неявної функції);

10) для степенево-показникової функції $y = [f(x)]^{g(x)}$ використовують метод логарифмічного диференціювання. Для цього спочатку необхідно прологарифмувати обидві частини рівності $y = [f(x)]^{g(x)}$:

$$\ln y = \ln[f(x)]^{g(x)} \text{ або } \ln y = g(x)\cdot \ln f(x).$$

Потім знайти похідну y' неявної функції $\ln y = g(x)\cdot \ln f(x)$, тобто

$$\frac{1}{y}\cdot y' = g'(x)\cdot \ln f(x) + g(x)\cdot \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$$

і виразити y':

$$y' = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left\{ g'(x)\cdot \ln f(x) + g(x)\cdot \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) \right\}.$$

Завдання 1.1. Знайти похідну функції.

1) $y=\left(tg^4x\right)\cdot\left(2x^2-1\right)$; 2) $y=\dfrac{\arcsin x^3}{\sqrt{x}+e^{2x}}$; 3) $y=\ln^4\sin(5x+1)-2arctg^3(5^x)$.

Розв'язання

1) $y=\left(tg^4x\right)\cdot\left(2x^2-1\right)$.

Оскільки $\left(tg^4x\right)'=4tg^3x\cdot(tgx)'=4tg^3x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$, а $\left(2x^2-1\right)'=4x$, то за формулою похідної добутку двох функцій отримаємо

$$y'=\left(\left(tg^4x\right)\right)'\cdot\left(2x^2-1\right)+\left(tg^4x\right)\cdot\left(2x^2-1\right)'=4tg^3x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\left(2x^2-1\right)+tg^4x\cdot 4x;$$

2) $y=\dfrac{\arcsin x^3}{\sqrt{x}+e^{2x}}$.

$$\left(\arcsin x^3\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}}\cdot\left(x^3\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^6}}\cdot 3x^2,\ \left(e^{2x}\right)'=e^{2x}\cdot(2x)'=e^{2x}\cdot 2,$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Використовуючи формулу похідної частки двох функцій, маємо

$$y'=\frac{\left(\arcsin x^3\right)'\cdot\left(\sqrt{x}+e^{2x}\right)-\arcsin x^3\cdot\left(\sqrt{x}+e^{2x}\right)'}{\sqrt{x}+e^{2x}}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^6}}\cdot 3x^2\cdot\left(\sqrt{x}+e^{2x}\right)-\arcsin x^3\cdot\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+2e^{2x}\right)}{\left(\sqrt{x}+e^{2x}\right)^2};$$

3) $y=\ln^4\sin(5x+1)-2arctg^3(5^x)$.

$$\left(\ln^4\sin(5x+1)\right)'=4\ln^3\sin(5x+1)\cdot\left(\ln\,\sin(5x+1)\right)'=$$

$$=4\ln^3\sin(5x+1)\cdot\frac{1}{\sin(5x+1)}\cdot\left(\sin(5x+1)\right)'=4\ln^3\sin(5x+1)\cdot\frac{5\cos(5x+1)}{\sin(5x+1)},$$

$$\left(2arctg^3(5^x)\right)' = 6arctg^2(5^x)\cdot\left(arctg(5^x)\right)' =$$

$$= 6arctg^2(5^x)\cdot\left(arctg(5^x)\right)' \frac{1}{1+\left(5^x\right)^2}\cdot\left(5^x\right)' = 6arctg^2(5^x)\cdot\left(arctg(5^x)\right)' \frac{5^x\ln 5}{1+\left(5^x\right)^2}.$$

Тоді

$$y' = 20\ln^3\sin(5x+1)\cdot\frac{\cos(5x+1)}{\sin(5x+1)} - 6arctg^2(5^x)\cdot\frac{5^x\cdot\ln 5}{1+5^{2x}}.$$

Відповідь: 1) $y' = 4tg^3x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\left(2x^2-1\right)+tg^4x\cdot 4x$;

2) $y' = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^6}}\cdot 3x^2\cdot\left(\sqrt{x}+e^{2x}\right)-\arcsin x^3\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+2e^{2x}\right)}{\left(\sqrt{x}+e^{2x}\right)^2}$;

3) $y' = 20\ln^3\sin(5x+1)\cdot\dfrac{\cos(5x+1)}{\sin(5x+1)} - 6arctg^2(5^x)\cdot\dfrac{5^x\cdot\ln 5}{1+5^{2x}}$.

Завдання 1.2. Знайти диференціал функції та похідну другого порядку.

$y = xe^x$.

Розв’язання

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x_0)$ в точці x_0, то вираз $f'(x_0)\cdot\Delta x$ називається диференціалом функції в цій точці і позначається символом $dy(x_0)$, тобто $dy(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x$. Диференціал незалежної змінної ототожнюється з її приростом $dx = \Delta x$. Таким чином, для будь-якої диференційованої функції $y = f(x)$ використовують формулу для знаходження диференціала

$$dy = f'(x)\cdot dx.$$

Якщо похідну $f'(x)$ повторно диференціювати, то одержимо похідну другого порядку функції $y = f(x)$, і вона позначається $f''(x), y'', \frac{d^2y}{dx^2}$.

Таким чином, знаходимо диференціал функції $y = xe^x$

$$dy = \left(xe^x\right)' dx = \left(e^x + xe^x\right) dx = (1+x)e^x dx$$

і похідну другого порядку

$$y'' = \left(e^x + xe^x\right)' = 2e^x + xe^x = (2+x)e^x.$$

Відповідь: $dy = (1+x)e^x dx$, $y'' = (2+x)e^x$.

Завдання 1.3. Методом логарифмічного диференціювання знайти похідну функції $y = (tgx)^{x^3+1}$.

Розв'язання

Прологарифмуємо обидві частини рівності $y = (tgx)^{x^3+1}$:

$$\ln y = \ln (tgx)^{x^3+1}, \ \ln y = \left(x^3+1\right) \cdot \ln(tgx).$$

Знаходимо похідну y' неявної функції:

$$\begin{aligned}
&(\ln y)' = \left(\left(x^3+1\right) \cdot \ln(tgx)\right)', \\
&\frac{1}{y} \cdot y' = \left(x^3+1\right)' \cdot \ln(tgx) + \left(x^3+1\right) \cdot (\ln(tgx))', \\
&\frac{1}{y} \cdot y' = 3x^2 \cdot \ln(tgx) + \left(x^3+1\right) \cdot \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}, \\
&\frac{1}{y} \cdot y' = 3x^2 \cdot \ln(tgx) + \left(x^3+1\right) \cdot \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}, \\
&\frac{1}{y} \cdot y' = 3x^2 \cdot \ln(tgx) + \left(x^3+1\right) \cdot \frac{2}{\sin 2x}, \\
&y' = (tgx)^{x^3+1} \cdot \left\{3x^2 \cdot \ln(tgx) + \left(x^3+1\right) \cdot \frac{2}{\sin 2x}\right\}.
\end{aligned}$$

Відповідь: $y' = \left\{3x^2 \cdot \ln(tgx) + \left(x^3+1\right) \cdot \frac{2}{\sin 2x}\right\} \cdot (tgx)^{x^3+1}$.

Завдання 1.4. Знайти похідну неявної функції $\sin(xy)+e^y=1$.

Розв'язання

Продиференціюємо обидві частини рівності $\sin(xy)+e^y=1$:

$$\left(\sin(xy)+e^y\right)'=(1)',$$
$$\cos(xy)\cdot(xy)'+e^y\cdot y'=0,$$
$$\cos(xy)\cdot(y+xy')+e^y\cdot y'=0,$$
$$y'\cdot\left(x\cos(xy)+e^y\right)=-y\cos(xy),$$
$$y'=-\frac{y\cos(xy)}{x\cos(xy)+e^y}.$$

Відповідь: $y'=-\dfrac{y\cos(xy)}{x\cos(xy)+e^y}$.

Завдання 1.5. Знайти похідну функції, заданої параметрично

$$\begin{cases} x=arcctgt, \\ y=\dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання

За формулою $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, $x'(t)\neq 0$ отримаємо

$$\begin{cases} x'_t=-\dfrac{1}{1+t^2}, \\ y'_t=t, \end{cases} \Rightarrow y'_x=\frac{t}{-\dfrac{1}{1+t^2}}=-t\left(1+t^2\right)=-t-t^3.$$

Відповідь: $y'_x=-t-t^3$.

Завдання 1.6. Знайти границю функції, використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{ctgx}$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

Для розкриття невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ та $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ використовують правило Лопіталя, яке полягає в такому.

Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$:

1) неперервні, диференційовані та $g'(x)\neq 0$ в деякому околі точки $x=a$;

2) наближаються до нуля (або $\pm\infty$) при $x\to a$;

3) існує границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінченна або нескінченна), то існує і $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причому $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Правило Лопіталя справедливе і при $a=\pm\infty$. Правило Лопіталя може застосовуватись повторно. На кожному етапі застосування слід користуватись тотожними перетвореннями, а також комбінувати це правило з будь-якими іншими способами обчислення границь.

Розкриття невизначеностей типу $[0\cdot\infty]$ *та* $[\infty-\infty]$

У цих випадках слід за допомогою алгебраїчних перетворень звести цю невизначеність до невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, а далі використовувати правило Лопіталя:

а) нехай $f(x)\to 0, g(x)\to\infty$ при $x\to a$. Перетворимо $f(x)\cdot g(x)$ таким чином: $f\cdot g=\frac{f}{\frac{1}{g}}$ або $f\cdot g=\frac{g}{\frac{1}{f}}$. Тоді маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при $x\to a$;

б) нехай $f(x) \to +\infty, g(x) \to +\infty$ при $x \to a$. Перетворимо вираз $f(x) - g(x)$ таким чином: $f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g}}$. Маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x \to a$.

Розкриття невизначеностей типу $\left[1^\infty\right], \left[\infty^0\right], \left[0^0\right]$.

У всіх трьох випадках розглядаємо границі виразу $(f(x))^{g(x)}$ при $x \to a$, причому:

якщо $f \to 1, g \to \infty$, маємо невизначеність типу $\left[1^\infty\right]$;

якщо $f \to \infty, g \to 0$, маємо невизначеність типу $\left[\infty^0\right]$;

якщо $f \to 0, g \to 0$, маємо невизначеність типу $\left[0^0\right]$.

Перетворимо вираз $(f(x))^{g(x)}$ таким чином: $\lim\limits_{x \to a} f^g = \lim\limits_{x \to a} e^{g \ln f} = e^{\lim\limits_{x \to a} g \ln f}$. У всіх трьох випадках вираз $g \ln f$ при $x \to a$ представляє невизначеність типу $[0 \cdot \infty]$. До такого ж результату приходимо, якщо попередньо прологарифмуємо ліву та праву частини рівності: $y = f^g; \ln y = g \ln f \Rightarrow y = e^{g \ln f}$ або $f^g = e^{f \ln f}$.

Отже, розв'яжемо приклади. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя:

1) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 1}{xe^x} = \frac{3}{e}.$$

Відповідь: $\frac{3}{e}$.

2)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{ctgx} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x\right| =$$
$$= -\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = -\lim_{x \to 0} x = 0.$$

Відповідь: 0.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-x} = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$= 3\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 6\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

Відповідь: 0.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x - \sin 2x}{4x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0} \frac{2 - \cos 2x\cdot 2}{3x^2} =$

$= \frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x} = \frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{x} = \frac{1}{3}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = [1^\infty] = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= e^{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}} = e^{3A}$.

Знайдемо границю $A = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos 2x}{x^2}$ за правилом Лопіталя:

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 2x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos 2x}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2}{2x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{-2x}{2x} = -2.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{3\cdot(-2)} = e^{-6}$.

Відповідь: e^{-6}.

Завдання 2.1.

Для функції $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 5$ знайти:

а) точки екстремуму та інтервали монотонності;

б) точки перегину, інтервали опуклості і увігнутості;

в) найбільше і найменше значення функції на проміжку $[2;4]$.

Розв'язання

а) функція $f(x)$ називається зростаючою (спадною) на інтервалі (a,b), якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in (a,b)$, таких що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$).

Інтервали зростання і спадання функції називаються інтервалами монотонності функції (рисунок 1).

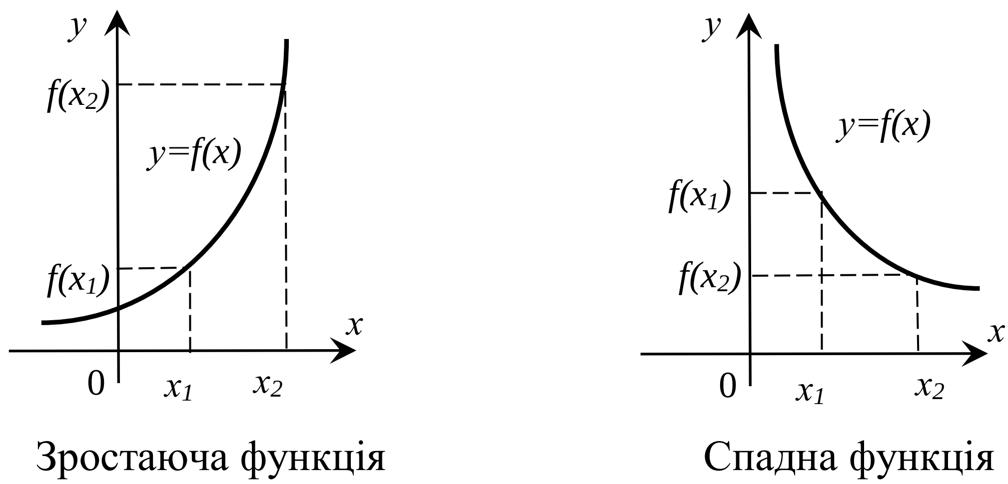

Рисунок 1 – Монотонні функції

Якщо функція $f(x)$ диференційована на інтервалі (a,b) і її похідна зберігає свій знак на цьому інтервалі, то вона монотонна на (a,b), а саме:

- зростає у випадку $f'(x) > 0$;
- спадає у випадку $f'(x) < 0$.

Монотонність функції може порушуватися в точках, де її похідна або дорівнює нулю, або не існує. Такі точки називаються критичними точками першого роду. Точки, у яких перша похідна дорівнює нулю, називаються стаціонарними.

Точка x_0 називається точкою максимуму (мінімуму) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, що для будь-якого x з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки мінімуму і максимуму називаються точками екстремуму функції $f(x)$.

Якщо функція має в точці x_0 екстремум, то ця точка є критичною. Це необхідна умова існування екстремуму. Для знаходження екстремальних точок з множини критичних необхідно застосовувати достатню умову екстремуму, яка полягає в дослідженні знака першої похідної при переході через критичну точку.

Таким чином, для дослідження функції на екстремум і інтервали монотонності необхідно:

1 Знайти область визначення функції.

2 Знайти критичні точки першого роду функції.

3 Визначити точки максимумів і мінімумів. (Якщо похідна змінює знак з мінус на плюс при переході через критичну точку x_0, то x_0 - точка мінімуму функції $f(x)$, а якщо з плюс на мінус, то x_0 — точка максимуму функції $f(x)$. Екстремумами можуть бути лише точки, які належать області визначення функції.) Обчислити значення функції в точках екстремуму.

Знайдемо точки екстремуму та інтервали монотонності функції $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 5$.

1 Область визначення функції: $x \in (-\infty;\infty)$.

2 Знаходження критичних точок першого роду.

$y' = 6x^2 - 24x + 18 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$.

Така функція має лише стаціонарні точки, оскільки її похідна визначена на всій множині дійсних чисел.

Ці точки розділяють область визначення функції на три інтервали монотонності: $(-\infty;1), (1;3), (3;\infty)$.

3 Визначимо знак похідної на кожному інтервалі:

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;3)$	3	$(3;\infty)$
$y'(x)$	+	0	—	0	+
$y(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Відповідь: на інтервалах $(-\infty;1)$ і $(3;\infty)$ функція зростає, а на $(1;3)$ - спадає. У точці $x=1$ функція досягає свого максимуму, а в точці $x=3$ - мінімуму:

$$\max y = y(1) = 2\cdot 1^3 - 12\cdot 1^2 + 18\cdot 1 + 5 = 13,$$
$$\min y = y(3) = 2\cdot 3^3 - 12\cdot 3^2 + 18\cdot 3 + 5 = 5;$$

б) графік функції $y=f(x)$ називається опуклим вгору (опуклим) на інтервалі $(a;b)$, якщо всі точки кривої лежать нижче її дотичної, що проведена до довільної точки $x_0\in(a;b)$.

Графік функції $y=f(x)$ називається опуклим вниз (увігнутим) на інтервалі $(a;b)$, якщо всі точки кривої лежать вище її дотичної, що проведена до довільної точки $x_0\in(a;b)$.

Точка кривої M, що відокремлює опуклу її частину від увігнутої, називається точкою перегину.

Точки, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками другого роду. Якщо точка $M(x_0;y_0)$ є точкою перегину графіка функції $y=f(x)$, то $f''(x_0)$ дорівнює нулю або не існує.

Якщо $f''(x)>0$ на $(a;b)$, то графік функції $y=f(x)$ є опуклим вниз (увігнутим) на інтервалі $(a;b)$ і позначається $\cup$.

Якщо $f''(x)<0$ на $(a;b)$, то графік функції $y=f(x)$ є опуклим вгору (опуклим) на інтервалі $(a;b)$ і позначається $\cap$.

Для знаходження точок перегину і інтервалів опуклості необхідно:

1 Знайти область визначення функції.

2 Знайти критичні точки другого роду функції.

3 Визначити точки перегину. (Якщо друга похідна змінює знак при переході через точку x_0, то x_0 – точка перегину графіка функції $f(x)$. Точками перегину можуть бути лише точки, які належать області визначення функції.) Обчислити значення функції в точках перегину.

Знайдемо точки перегину та інтервали опуклості функції $y=2x^3-12x^2+18x+5$.

1 Область визначення функції: $x\in(-\infty;\infty)$.

2 Знаходження критичних точок другого роду.

$y' = 6x^2 - 24x + 18 = 0$,

$y'' = \left(6x^2 - 24x + 18\right)' = 12x - 24 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Ця точка розділяє область визначення функції на два інтервали опуклості: $(-\infty;2),(2;\infty)$.

3 Визначимо знак другої похідної на кожному інтервалі:

x	$(-\infty;2)$	2	$(2;\infty)$
$y''(x)$	—	0	+
$y(x)$	$\cap$	Точка перегину	$\cup$

Значення функції в точці $x = 2$: $y(2) = 2 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 + 5 = 9$.

Відповідь: на інтервалі $(-\infty;2)$ графік функції опуклий, а на $(2;\infty)$ - увігнутий. Точка $(2{,}9)$ - точка перегину;

в) для знаходження найбільшого $y_{найб}$ і найменшого $y_{найм}$ значення неперервної на проміжку $[a,b]$ функції потрібно:

1 Знайти критичні точки першого роду функції, які належать $[a,b]$.

2 Обчислити значення функції в цих точках.

3 Обчислити значення функції на кінцях проміжку $[a,b]$.

4 Обрати серед отриманих значень найбільше і найменше.

Знайдемо найбільше і найменше значення функції $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 5$ на проміжку $[2;4]$.

Стаціонарні точки цієї функції $x_1 = 1, x_2 = 3$ (див. приклад 2.1, а). З них тільки одна $x_2 = 3$ належить проміжку $[2;4]$.

Обчислимо значення функції в цій точці і на кінцях проміжку:

$$y(3) = 2 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 + 5 = 5,$$

$$y(2) = 2 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 + 5 = 9,$$

$$y(4) = 2 \cdot 4^3 - 12 \cdot 4^2 + 18 \cdot 4 + 5 = 13.$$

Відповідь: $y_{найб} = y(4) = 13$, $y_{найм} = y(3) = 5$.

Завдання 2.2. Дослідити функцію $y=\dfrac{x^4}{x^3-8}$ і побудувати ескіз її графіка.

Розв'язання

Для побудови графіка функції потрібно:

1 Знайти область визначення функції.

2 Перевірити функцію на парність, непарність, періодичність.

3 Знайти точки перетину графіка функції з осями координат (якщо це можливо).

4 Знайти асимптоти кривої.

5 Знайти інтервали монотонності і точки екстремуму.

6 Знайти інтервали опуклості і точки перегину.

Функція $y=f(x)$ називається парною, якщо $f(-x)=f(x)$. Парна функція симетрична відносно осі ординат.

Функція $y=f(x)$ називається непарною, якщо $f(-x)=-f(x)$. Непарна функція симетрична відносно початку координат.

Функція $y=f(x)$ називається функцією загального вигляду, якщо вона не є парною і непарною одночасно.

Функція $y=f(x)$ називається періодичною, якщо існує таке число T, що для будь-якого значення x з області визначення функції виконується рівність $f(x+T)=f(x)$.

1 Область визначення функції.

Функція $y=\dfrac{x^4}{x^3-8}$ визначена на всій числовій осі, окрім точок, у яких знаменник дорівнює нулю, тобто $x\in(-\infty;2)\cup(2;\infty)$.

2 Парність, непарність, періодичність.

Оскільки $y(-x)=\dfrac{(-x)^4}{(-x)^3-8}=\dfrac{x^4}{-x^3-8}=-\dfrac{x^4}{x^3+8}$, то це функція загального вигляду.

Функція неперіодична.

3 Точки перетину графіка функції з осями координат.

З віссю $0x$: $y=0\Rightarrow\dfrac{x^4}{x^3-8}=0$, $x=0$.

З віссю $0y$: $x=0\Rightarrow\ y=0$.

Маємо одну точку перетину $0(0;0)$.

4 Асимптоти кривої.

Вертикальні асимптоти.

Функція має точку розриву $x=2$. Оскільки

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^4}{x^3-8}=-\infty,\quad \lim_{x\to 2+0}\frac{x^4}{x^3-8}=+\infty,$$

то пряма $x=2$ є вертикальною асимптотою графіка функції.

Похилі асимптоти.

Якщо існує похила асимптота $y=kx+b$ при $x\to+\infty$, то

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Аналогічно визначаються k та b при $x\to-\infty$:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Для функції $y=\dfrac{x^4}{x^3-8}$ маємо при $x\to\pm\infty$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{x\left(x^3-8\right)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-8}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x^4+8x}{x^3-8}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x}{x^3-8}=0.$$

Таким чином, $y=1\cdot x+0=x$ - рівняння похилої асимптоти при $x\to\pm\infty$.

5 Інтервали монотонності і точки екстремуму.

Знайдемо точки, у яких перша похідна функції або не існує, або дорівнює нулю (критичні точки функції):

$$y'(x)=\left(\frac{x^4}{x^3-8}\right)'=\frac{4x^3\cdot\left(x^3-8\right)-x^4\cdot 3x^2}{\left(x^3-8\right)^2}=\frac{x^3\left(x^3-32\right)}{\left(x^3-8\right)^2}.$$

$$y'(x)=0:\quad x^3\left(x^3-32\right)=0\Rightarrow x_1=0, x_2=\sqrt[3]{32}.$$

$$y'(x)\text{ не існує: }\left(x^3-8\right)^2=0\Rightarrow x_3=2.$$

З'ясуємо знак першої похідної на кожному з отриманих інтервалів. Якщо перша похідна має додатне (від'ємне) значення на інтервалі, то на цьому інтервалі функція зростає (спадає).

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$\left(2;\sqrt[3]{32}\right)$	$\sqrt[3]{32}$	$\left(\sqrt[3]{32};+\infty\right)$
$y'(x)$	+	0	—	не існує	—	0	+
$y(x)$	↗	0 (max)	↘	не існує	↘	≈4,23 (min)	↗

На інтервалах $(-\infty;0)$ і $\left(\sqrt[3]{32};+\infty\right)$ функція зростає, а на $(0;2)$ і $\left(2;\sqrt[3]{32}\right)$ – спадає. У точці $x=0$ функція досягає свого максимуму, а в точці $x=\sqrt[3]{32}$ - мінімуму:

$$\max y=y(0)=0,\ \min y=y\left(\sqrt[3]{32}\right)=\frac{\left(\sqrt[3]{32}\right)^4}{\left(\sqrt[3]{32}\right)^3-8}=\frac{32\sqrt[3]{32}}{24}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{32}\approx 4{,}23.$$

6 Інтервали опуклості і точки перегину.

Знайдемо точки, у яких друга похідна функції або не існує, або дорівнює нулю:

$$y''(x)=\left(\frac{x^3\left(x^3-32\right)}{\left(x^3-8\right)^2}\right)'=\left(\frac{x^6-32x^3}{\left(x^3-8\right)^2}\right)'=$$

$$=\frac{\left(6x^5-96x^2\right)\cdot\left(x^3-8\right)^2-2\left(x^3-8\right)\cdot 3x^2\left(x^6-32x^3\right)}{\left(x^3-8\right)^4}=$$

$$=\frac{6x^2\left(x^3-8\right)\left(8x^3+128\right)}{\left(x^3-8\right)^4}=\frac{48x^2\left(x^3+16\right)}{\left(x^3-8\right)^3}.$$

$$y''(x)=0:\ \ 48x^2\left(x^3+16\right)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=-\sqrt[3]{16}.$$

$$y''(x) \text{ не існує: } \left(x^3-8\right)^3=0 \Rightarrow x_3=2.$$

Знак другої похідної на кожному з отриманих інтервалів визначає інтервали опуклості функції. Якщо друга похідна має додатне (від'ємне) значення на інтервалі, то на цьому інтервалі функція опукла вниз (вгору).

x	$(-\infty;0)$	$-\sqrt[3]{16}$	$\left(-\sqrt[3]{16};0\right)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
$y''(x)$	+	0	—		—	не існує	+
$y(x)$	$\cup$	≈-1,68 (точка перегину)	$\cap$	0	$\cap$	не існує	$\cup$

На проміжках $(-\infty;0)$ і $(2;+\infty)$ функція опукла вниз (увігнута), а на $\left(-\sqrt[3]{16};0\right)$ і $(0;2)$ – опукла вгору (опукла). Точка $x=-\sqrt[3]{16}$ є точкою перегину графіка функції

$$y\left(-\sqrt[3]{16}\right)=\frac{\left(-\sqrt[3]{16}\right)^4}{\left(-\sqrt[3]{16}\right)^3-8}=\frac{16\sqrt[3]{16}}{-24}=-\frac{2}{3}\sqrt[3]{16}\approx-1{,}68.$$

За отриманими даними будуємо ескіз графіка функції (рисунок 2).

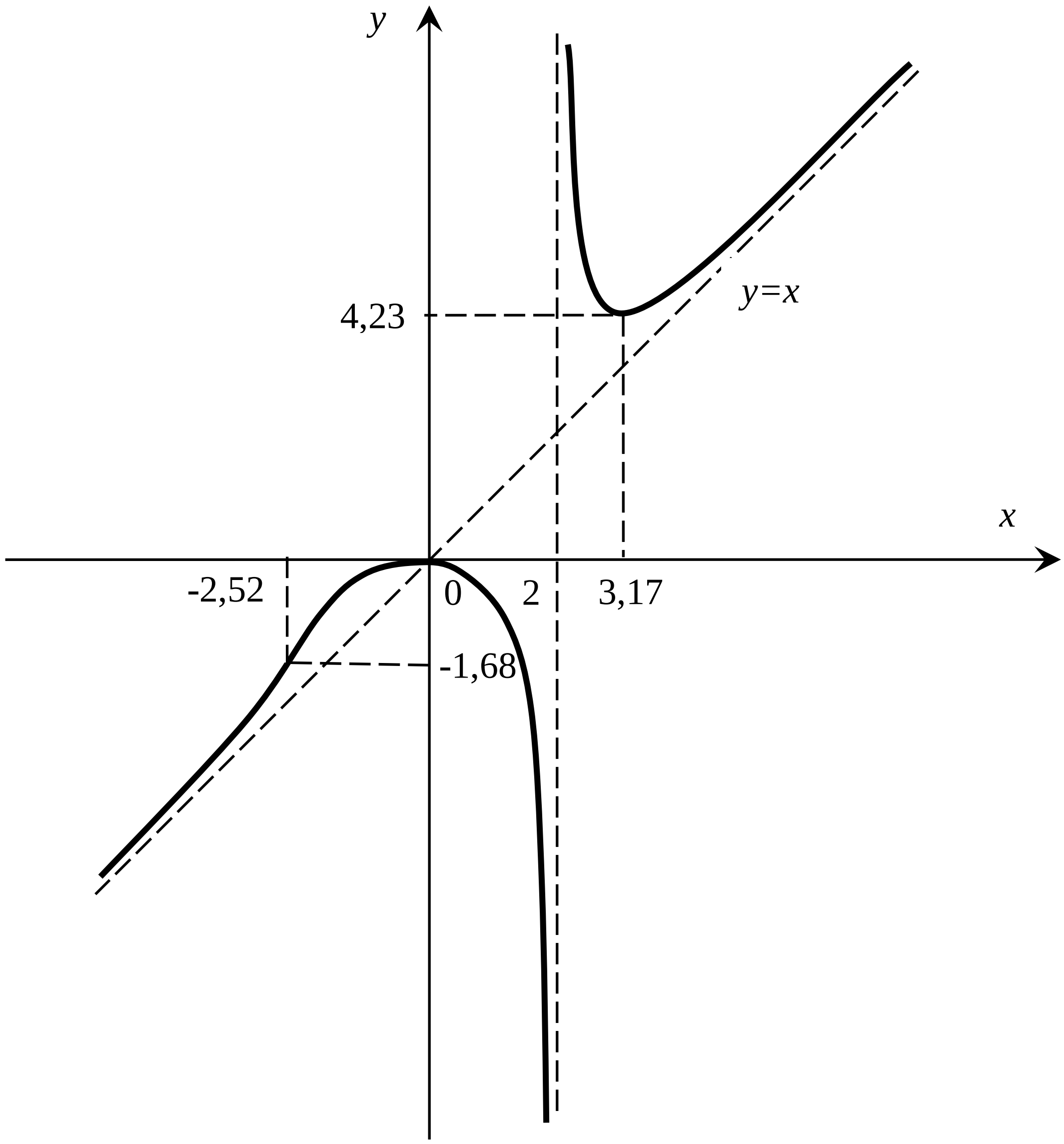

Рисунок 2 – Ескіз графіка функції $y=\dfrac{x^4}{x^3-8}$

Завдання 3.1. Задано функцію $z=6(x-1)^2-3y^2+5x^2y^4+5$, точку $M_0(-1;3)$ і вектор $\vec{a}(5;-12)$. Знайти:

1) частинні похідні першого та другого порядку;
2) повний диференціал першого та другого порядку;
3) $grad\, z$ в точці $M_0(-1;3)$;
4) похідну за напрямком вектора $\vec{a}$ в точці $M_0(-1;3)$;
5) вектор нормалі до поверхні $z=f(x;y)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$;

Розв'язання

1) частинні похідні першого та другого порядку.

При знаходженні частинних похідних застосовують правила і формули для обчислення похідної функції однієї змінної. Використовуючи визначення частинних похідних, при знаходженні частинної похідної за змінною x змінна y вважається сталою і, навпаки, при знаходженні частинної похідної за змінною y сталою вважається змінна x.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \left(6(x-1)^2 - 3y^2 + 5x^2y^4 + 5\right)'_x =$$
$$= \left(6(x-1)^2\right)'_x - \left(3y^2\right)'_x + \left(5x^2y^4\right)'_x + (5)'_x =$$
$$= 12(x-1) - 0 + 10xy^4 + 0 = 12(x-1) + 10xy^4,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left(6(x-1)^2 - 3y^2 + 5x^2y^4 + 5\right)'_y =$$
$$= \left(6(x-1)^2\right)'_y - \left(3y^2\right)'_y + \left(5x^2y^4\right)'_y + (5)'_y =$$
$$= 0 - 6y + 20x^2y^3 + 0 = -6y + 20x^2y^3.$$

Частинні похідні другого порядку визначаються так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yy};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xy}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yx}.$$

Зауваження. Останні дві похідні, знайдені за різними змінними, називають мішаними частинними похідними другого порядку. Якщо вони неперервні в деякій точці $M(x;y)$, то в цій точці $z''_{xy} = z''_{yx}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(12(x-1) + 10xy^4\right)'_x = 12 + 10y^4;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(-6y + 20x^2y^3\right)'_y = -6 + 60x^2y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(12(x-1) + 10xy^4\right)'_y = 40xy^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(-6y + 20x^2y^3\right)'_x = 40xy^3;$$

2) повний диференціал першого dz та другого d^2z порядків функції двох змінних визначаються виразами

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy;$$

$$d(dz) = d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)'_y dy.$$

Якщо $z''_{xy} = z''_{yx}$, то

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}d^2x + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}d^2y.$$

У нашому випадку

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(12(x-1) + 10xy^4\right)dx + \left(-6y + 20x^2y^3\right)dy;$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}d^2x + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}d^2y =$$
$$= \left(12 + 10y^4\right)d^2x + 80xy^3dxdy + \left(-6 + 60x^2y^2\right)d^2y;$$

3) градієнтом функції $grad\,z$ в точці $M(x;y)$ називають вектор, координатами якого є частинні похідні за відповідними змінними, тобто:

$$gradz = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Таким чином, градієнт функції $z = 6(x-1)^2 - 3y^2 + 5x^2y^4 + 5$ в точці $M_0(-1;3)$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0(-1;3)} = \left(12(x-1) + 10xy^4\right)\Big|_{M_0(-1;3)} = -834,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0(-1;3)} = \left(-6y + 20x^2y^3\right)\Big|_{M_0(-1;3)} = 522,$$

$$grad\, z(M_0) = (-834;522);$$

4) похідна функції $z = f(x;y)$ за напрямом вектора $\vec{a}(a_x;a_y)$ обчислюється за формулою

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

де $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$ - напрямні косинуси вектора $\vec{a}$.

Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = -834$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 522$, то

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_{M_0} = -834 \cdot \frac{5}{13} + 522 \cdot \frac{(-12)}{13} = -\frac{10434}{13};$$

5) вектор, перпендикулярний до дотичної площини, проведеної до поверхні, називається вектором нормалі. Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x;y)$, то вектор нормалі в точці $M_0(x_0;y_0)$ має вигляд

$$\vec{N}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}; \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}; -1\right).$$

Для поверхні $z = 6(x-1)^2 - 3y^2 + 5x^2y^4 + 5$ в точці $M_0(-1;3)$ маємо $\vec{N}(-834;522;-1)$.

Відповідь:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 12(x-1) + 10xy^4$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -6y + 20x^2y^3$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12 + 10y^4$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6 + 60x^2y^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 40xy^3$;

2) $dz = \left(12(x-1) + 10xy^4\right)dx + \left(-6y + 20x^2y^3\right)dy$,

$d^2z = \left(12 + 10y^4\right)d^2x + 80xy^3dxdy + \left(-6 + 60x^2y^2\right)d^2y$;

3) $grad\, z(M_0) = (-834;522)$;

4) $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_{M_0} = -\dfrac{10434}{13}$;

5) $\vec{N}(-834;522;-1)$.

Завдання 3.2. Для заданої функції $z = \dfrac{1}{\pi} arctg\left(\dfrac{x}{y+3}\right)$ знайти:

1) градієнт і похідну за напрямом вектора $\vec{a}\left(-6;\dfrac{5}{2}\right)$ у точці $M_0(4;-7)$;

2) рівняння нормалі до поверхні $z = f(x;y)$ у точці $M_0(4;-7)$;

3) рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x;y)$ у точці $M_0(4;-7)$.

Розв'язання

1) обчислимо значення частинних похідних першого порядку в точці $M_0(4;-7)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \left(\frac{1}{\pi} arctg\left(\frac{x}{y+3}\right)\right)'_x = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y+3}\right)^2} \cdot \frac{1}{y+3} = \frac{1}{\pi} \frac{(y+3)}{x^2 + (y+3)^2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=\left.\left(\frac{1}{\pi}\frac{(y+3)}{x^2+(y+3)^2}\right)\right|_{M_0}=-\frac{1}{8\pi},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=\left(\frac{1}{\pi}arctg\left(\frac{x}{y+3}\right)\right)'_y=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y+3}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{(y+3)^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x}{x^2+(y+3)^2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=\left.\left(-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x}{x^2+(y+3)^2}\right)\right|_{M_0}=-\frac{1}{8\pi}.$$

Тоді отримаємо (див. приклад 3.1)

$$grad\, z(M_0)=\left(-\frac{1}{8\pi};-\frac{1}{8\pi}\right),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_{M_0}=-\frac{1}{8\pi}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)-\frac{1}{8\pi}\cdot\frac{5}{13}=\frac{7}{104\pi};$$

2) нормаллю до поверхні в точці M_0 називається пряма, яка проходить через цю точку перпендикулярно до дотичної площини (має напрям вектора нормалі $\vec{N}$).

Канонічне рівняння нормалі в точці M_0 має вигляд

$$\frac{x-x_0}{z'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{-1},$$

де $z_0=f(x_0;y_0)$.

Враховуючи, що $z_0=f(4;-7)=-0{,}25$, отримаємо рівняння нормалі

$$\frac{x-4}{-\frac{1}{8\pi}}=\frac{y+7}{-\frac{1}{8\pi}}=\frac{z+0{,}25}{-1} \text{ або } 8\pi(x-4)=8\pi(y+7)=z+0{,}25;$$

3) дотичною площиною до поверхні $z = f(x;y)$ у точці M_0 називається площина, яка містить дотичні до всіх кривих, проведених на поверхні через цю точку. Рівняння дотичною площини до поверхні $z = f(x;y)$ у точці M_0 має вигляд

$$z - z_0 = z'_x(M_0)(x - x_0) + z'_y(M_0)(y - y_0).$$

Таким чином, рівняння дотичної площини до поверхні $z = \frac{1}{\pi} arc\mathrm{tg}\left(\frac{x}{y+3}\right)$ в точці $M_0(4;-7)$:

$$z + 0{,}25 = -\frac{1}{8\pi}(x - 4) - \frac{1}{8\pi}(y + 7),$$
$$x + y + 8\pi z + 2\pi + 3 = 0.$$

Відповідь:

1) $grad\, z(M_0) = \left(-\frac{1}{8\pi}; -\frac{1}{8\pi}\right)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_{M_0} = \frac{7}{104\pi}$;

2) $8\pi(x - 4) = 8\pi(y + 7) = z + 0{,}25$;

3) $x + y + 8\pi z + 2\pi + 3 = 0$.

Завдання 3.3. Знайти екстремум заданої функції:

а) $z = 4x^2 + 5y^2 - 7xy - 22x + 27y + 8$;

б) $z = -\frac{2}{3}x^3 - y^2 + xy + 30x - 8$.

Розв'язання

а) необхідна умова існування екстремуму в точці P полягає в тому, що частинні похідні в цій точці або дорівнюють нулю, або не існують. Такі точки називають критичними точками функції.

Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8x - 7y - 22,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -7x + 10y + 27$$

і розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 8x-7y-22=0, \\ -7x+10y+27=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-7y=22, \\ -7x+10y=-27, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{7y}{8}+\dfrac{22}{8}, \\ -7\left(\dfrac{7y}{8}+\dfrac{22}{8}\right)+10y+27=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7y}{8}+\dfrac{22}{8}, \\ \dfrac{31y}{8}=-\dfrac{31}{4}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$$

Маємо стаціонарну точку $P(1;-2)$.

Для дослідження знайденої точки на екстремум перевіримо достатню умову екстремуму. Для цього складають визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta>0$, то в точці P є екстремум, причому, якщо:

а) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0$, то точка P – точка мінімуму функції;

б) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}<0$, то точка P – точка максимуму функції.

Якщо $\Delta<0$, то в точці P екстремуму немає.

Якщо $\Delta=0$, то потрібні додаткові дослідження для перевірки чи є точка P екстремумом функції.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(8x-7y-22)'_x=8, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(-7x+10y+27)'_y=10,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=(8x-7y-22)'_y=-7, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(-7x+10y+27)'_x=-7.$$

Оскільки

$$\Delta=\begin{vmatrix}8 & -7\\ -7 & 10\end{vmatrix}=8\cdot 10-(-7)\cdot(-7)=31,$$

знайдемо значення функції в цій точці:

$$Z=4\cdot 1^2+5\cdot(-2)^2-7\cdot 1\cdot(-2)-22\cdot 1+27\cdot(-2)+8=-30.$$

Відповідь: $\min z=z(1;-2)=-30$;

б) $z=-\dfrac{2}{3}x^3-y^2+xy+30x-8$.

Необхідна умова екстремуму

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{2}{3}x^3-y^2+xy+30x-8\right)'_x=-2x^2+y+30,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(-\frac{2}{3}x^3-y^2+xy+30x-8\right)'_y=x-2y.$$

Розв’язавши систему

$$\begin{cases}-2x^2+y+30=0,\\ x-2y=0,\end{cases}$$

отримаємо дві точки $P_1(4;2)$ і $P_2\left(-\dfrac{15}{4};-\dfrac{15}{8}\right)$.

Частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(-2x^2+y+30\right)'_x=-4x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x-2y)'_y=-2,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(-2x^2+y+30\right)'_y=1, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(x-2y)'_x=1.$$

Звідси

$$\Delta=\begin{vmatrix}-4x & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=8x-1.$$

Підставимо координати знайдених точок в Δ:

$$\Delta(P_1) = (8x-1)\big|_{P_1} = 31 > 0,$$
$$\Delta(P_2) = (8x-1)\big|_{P_2} = -31 < 0.$$

Бачимо, що в точці $P_2\left(-\frac{15}{4};-\frac{15}{8}\right)$ екстремуму нема, а в точці $P_1(4;2)$ функція досягає свого максимуму.

Відповідь: $max\, z = z(4;2) = \frac{220}{3}$.

Завдання 3.4. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy(x+y-15)$ у замкненій області D, яка обмежена лініями $x=-1,\ y=-2,\ x+y=18$.

Розв’язання

Для знаходження найбільшого $z_{найб}$ і найменшого $z_{найм}$ значення функції $z = z(x;y)$ у замкненій області D необхідно виконати такі дії:

1 Знайти критичні точки першого роду функції (точки, у яких частинні похідні першого порядку або дорівнюють нулю, або не існують).

2 Обчислити значення функції в критичних точках, які належать області D.

3 Знайти найбільше і найменше значення функції на границі області D.

4 Обрати серед отриманих значень найбільше і найменше.

Використовуючи необхідну умову екстремуму, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2 - 15y = 0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy - 15x = 0.$$

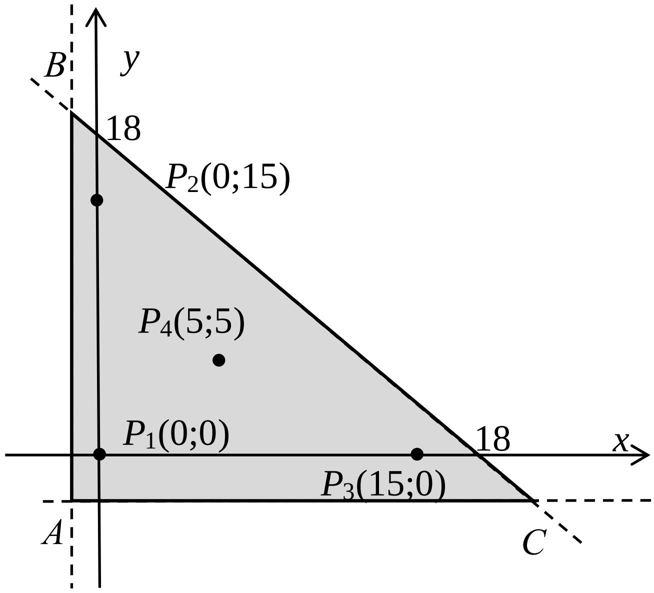

Рисунок 3 – Область D

Розв’язуючи отриману систему рівнянь

$$\begin{cases} y(2x+y-15)=0, \\ x(x+2y-15)=0 \end{cases}$$

отримаємо чотири точки $P_1(0;0)$, $P_2(0;15)$, $P_3(15;0)$, $P_4(5;5)$.

Як бачимо, заданій області належать всі чотири точки: $P_1(0;0)$, $\mathrm{P}_2(0;15)$, $P_3(15;0)$ і $P_4(5;5)$ (рисунок 3).

Обчислимо значення функції в цих точках: $z(P_1)=0$, $z(P_2)=0$, $z(\mathrm{P}_3)=0$, $z(P_4)=-125$.

Дослідимо поведінку функції на границі області:

а) $AB: x=-1, y\in[-2{,}19]$. Підставляючи $x=-1$ в $z=xy(x+y-15)$, отримаємо $z_{AB}=-y(-1+y-15)=16y-y^2$. Таким чином, потрібно знайти найбільше та найменше значення функції однієї змінної на відрізку (див приклад 2.1, в).

$$(z_{AB})'_y=16-2y=0 \Rightarrow y=8\in[-2{,}19].$$

Обчислимо значення функції в отриманій точці $(-1;8)$ і на кінцях відрізка в точках $A(-1;-2)$ та $B(-1;19)$:

$$z(-1;8)=64,\ z(-1;-2)=-36,\ z(-1;19)=-57;$$

б) $AC: y=-2, x\in[-1{,}20] \Rightarrow z_{AC}=34x-2x^2, x\in[-1{,}20]$.

$(z_{AC})'_x=34-4x=0, x=8{,}5\in[-1{,}20]$.

Значення функції в точці $(8{,}5;-2)$ і в точках $A(-1;-2)$ і $C(20;-2)$ дорівнюють

$$z(8{,}5;-2)=144{,}5,\ z(-1;-2)=-36,\ z(20;-2)=-120.$$

в) $BC: x=-y+18, y\in[-2{,}19]$.

$z_{BC}=(-y+18)y(-y+18+y-15)=-3y^2+54y, y\in[-2{,}19]$.

$(z_{BC})'_y=-6y+54=0, y=9\in[-2{,}19]$.

Оскільки $x=-y+18=-9+18=9$, то маємо точку $(9;9)$. Значення функції в знайденій точці і на границях відрізка BC

$$z(9;9)=243,\ z(20;-2)=-120,\ z(-1;19)=-57.$$

Порівнюючи отримані результати, отримаємо відповідь.

Відповідь: $z_{найб}=z(9;9)=243$, $z_{найм}=z(5;5)=-125$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1 Визначення похідної функції $f(x)$ у точці x_0.

2 Яка функція називається диференційованою на відрізку $[a;\ b]$?

3 У чому полягає геометричний зміст похідної?

4 Правила диференціювання.

5 Похідна складеної функції.

6 Похідна оберненої функції.

7 Похідна функції, заданої параметрично.

8 Похідна від степенево-показникової функції.

9 Що називають диференціалом функції в точці?

10 У чому полягає геометричний зміст диференціала функції в точці?

11 Похідна другого та вищих порядків.

12 Правило Лопіталя.

13 Проміжки монотонності функції. Достатня умова монотонності.

14 Екстремуми. Необхідна умова екстремуму.

15 Критичні точки.

16 Достатня умова екстремуму.

17 Схема дослідження функції на екстремум.

18 Опуклість функції на проміжку. Достатні умови опуклості.

19 Точки перегину. Необхідна і достатня ознаки перегину.

20 Асимптоти.

21 Найбільше й найменше значення функції на відрізку.

22 Геометричне зображення функції двох змінних.

23 Що називають частинним приростом функції двох змінних за однією змінною?

24 Частинні похідні від функції двох змінних першого порядку.

25 Диференціал першого порядку від функції двох змінних.

26 Похідні вищих порядків від функції двох змінних.

27 Похідна від функції двох змінних у заданому напрямку.

28 Градієнт.

29 Зв'язок похідної за напрямком і градієнта функції.

30 Геометричний зміст градієнта.

31 Дотична площина та нормаль до поверхні.

32 Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x;y)$ у точці $P_0(x_0;y_0)$.

33 Що називається нормаллю до поверхні $z = f(x;y)$ у точці $P_0(x_0;y_0)$?

34 Рівняння нормалі до поверхні в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

35 Диференціал другого порядку функції $f(x, y)$.

36 Визначення точки локального максимуму (мінімуму) функції $f(x, y)$.

37 Необхідні умови існування локального екстремуму.

38 Які точки називаються стаціонарними?

39 Достатні умови існування локального екстремуму.

40 Найбільше і найменше значення функції двох змінних у замкненій обмеженій області.

Тестові завдання до самоконтролю

1 Знайдіть похідну функції $f(x) = 2\sin x + x^2$.

А	Б	В	Г	Д
$-\cos x$	$\cos x - 2x$	$2x - \cos x$	$2x + 2\cos x$	інша відповідь

2 Знайдіть похідну функції $y = \ln x \cdot e^x$.

А	Б	В	Г	Д
$e^x - 1$	$\ln x \cdot e^x + \frac{1}{x} e^x$	xe^x	$xe^x + e^x$	інша відповідь

3 Знайдіть похідну функції $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$	$\frac{1}{x-1}$	$\frac{2}{\sqrt{x}}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$	інша відповідь

4 Похідна функції $f(x) = 72^{-\cos x}$ дорівнює:

А	Б	В	Г	Д
$\cos x \cdot 72^{-\cos x}$	$-\cos x \cdot 72^{\cos x}$	$72^{-\cos x} \ln 72$	$72^{-\cos x} \sin x \ln 72$	інша відповідь

5 Похідна функції $f(x) = \ln \cos \frac{x}{3}$ дорівнює:

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{\sin \frac{x}{3}}$	$\frac{1}{3} ctg \frac{x}{3}$	$-\frac{1}{3} tg \frac{x}{3}$	$\frac{3}{\sin \frac{x}{3}}$	інша відповідь

6 Знайдіть похідну функції $f(x) = e^{3x - x^2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(3-2x)e^{3x-x^2}$	$(3x+1)e^{x+x^2}$	$e^x(2x+3)$	$(x+2)e^{3x-x^2}$	інша відповідь

7 Знайдіть похідну функції $f(x) = tg \frac{1}{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{2x^2 \cos x}$	$\frac{1}{3x^2 \cos^2 x}$	$-\frac{1}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}$	$\frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{1}{x}}$	інша відповідь

8 Знайдіть похідну функції $f(x) = \ln \sqrt[3]{x+3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3(x+4)}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+3)}}$	$\frac{1}{(x-3)}$	$\frac{1}{3(x+3)}$	інша відповідь

9 Знайдіть похідну функції $f(x) = 50^{1-7x}$.

А	Б	В	Г	Д
$-7 \cdot 50^{1-7x} \ln 50$	$50^{1-7x} \ln 50$	$(1-7x) \cdot 50^{1-7x}$	$(1-7x) \cdot 50^{1-7x} \ln 50$	інша відповідь

10 Похідна функції $f(x)=ln\,ctg2x$ дорівнює:

$\frac{1}{ctg2x}$	$\frac{2}{sin2x}$	$-\frac{4}{sin4x}$	$\frac{1}{sin2x}$	інша відповідь

11 Задана функція $y(x)=cos\frac{x^2}{3}$. Знайдіть $y'(x)$.

А	Б	В	Г	Д
$x\cos x^2$	$-x\cos\frac{x^2}{3}$	$2x\cos\frac{x^2}{3}$	$-\frac{2}{3}x\sin\frac{x^2}{3}$	інша відповідь

12 Знайдіть похідну функції $f(x)=e^{-tg3x}$.

А	Б	В	Г	Д
$-cos3x\cdot e^{-tg3x}$	e^{-ctg3x}	$-e^{-tg3x}$	$-\frac{3e^{-tg3x}}{cos^2 3x}$	інша відповідь

13 Знайдіть похідну функції $f(x)=x^6-2\sqrt{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$6x^5-\frac{1}{x^2}$	$6x^5-\frac{1}{\sqrt{x}}$	$6x^4-\frac{2}{x}$	$5x^6+\frac{1}{2\sqrt{x}}$	інша відповідь

14 Похідна функції $f(x)=ln\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ дорівнює:

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1-x}{x+1}$	$-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{-2}{x^2-1}$	$\frac{1+x}{1-x}$	інша відповідь

15 Знайдіть похідну функції $f(x)=5^x 3^x$.

А	Б	В	Г	Д
$15^x\,ln5$	$15^x\,ln15$	$5^x\,ln15$	$15^{2x}\,ln15$	інша відповідь

16 Знайдіть значення похідної функції $f(x)=cos2x$ в точці $x=\frac{\pi}{6}$.

А	Б	В	Г	Д
4	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$-\sqrt{3}$	інша відповідь

17 Дана функція $f(x)=e(1+ln^2 x)$. Знайдіть $f'(e)$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	4	0	інша відповідь

18 Обчисліть значення похідної функції: $f(x)=\sin x\cdot(2x+3)$ в точці $x=\frac{\pi}{2}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}+2$	$\frac{\sqrt{\pi}}{24}+2$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}+2$	2	інша відповідь

19 Якщо $f(x)=\frac{\sqrt{2x-1}}{x}$, то $f'(1)$=?

А	Б	В	Г	Д
1	0	-1	3	інша відповідь

20 Задана функція $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$, знайдіть $f'(1)$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	інша відповідь

21 Задана функція $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+5}$, знайдіть $f'(1)$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7}{18}$	$1\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	4	інша відповідь

22 Задана функція $f(x)=\left(x^2-x\right)\cdot\arcsin x$, знайдіть $f'(0)$.

А	Б	В	Г	Д
0	$\frac{1}{2}$	2	1	інша відповідь

23 Точка рухається по координатній прямій за законом $S(t)=t^2-10t+7$. Знайдіть $v(3)$, де v(t) – швидкість.

А	Б	В	Г	Д
-19	14	-4	46	інша відповідь

24 Дана функція: $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+x^4$. Знайдіть $f'(1)$.

А	Б	В	Г	Д
2	3	6	5	інша відповідь

25 Задана функція $f(x)=2arctg\frac{x}{5}+\frac{5}{x}$, знайдіть $f'(5)$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$	$1\frac{1}{3}$	0	інша відповідь

26 Задана функція $f(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{3x^3}$, знайдіть $f'(-1)$.

А	Б	В	Г	Д
2	3	0	1	інша відповідь

27 Для функції $f(x)=e^{\cos 4x}$знайдіть $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
1	-3	2	-4	інша відповідь

28 Обчисліть похідну функції $f(x)=\frac{4x-7}{2x-3}$ у точці x=2.

А	Б	В	Г	Д
2	4	-2	-1	інша відповідь

29 Знайти частинні похідні першого порядку $z=x^3y^2+30xy+8y^3$:

А) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2+30y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y+20x+30y^2$;

Б) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2+20y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y+20x+30y^2$;

В) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2+30y+8y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y+30x+24y^2$;

Г) $\frac{\partial z}{\partial x}=6x^2y+20$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y+20x+30y^2$;

Д) інша відповідь.

30 Знайти частинні похідні першого порядку $z=tg(5x+3y)$:

А) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{5}{sin^2(5x+3y)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{sin^2(5x+3y)}$;

Б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2}{\cos^2 x}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{3}{\cos^2 y};$

В) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{5}{cos^2(5x+3y)}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{3}{cos^2(5x+3y)};$

Г) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{cos^2(5x+3y)}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{cos^2(5x+3y)};$

Д) інша відповідь.

31 Знайти частинні похідні першого порядку $z=(x^2+3)\cdot cos(5y+2)$:

А) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=sin(5y+2);$

Б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=x\,cos(5y+2), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=(x^2+3)sin\,2;$

В) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3cos(5y+2), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=2x\cdot sin(5y+2);$

Г) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\cdot cos(5y+2), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-(x^2+3)\cdot sin(5y+2)\cdot 5;$

Д) інша відповідь.

32 Знайти частинні похідні першого порядку $z=(2x^2+7)\cdot e^{7y+2}$:

А) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4xe^{7y+2}, \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=(2x^2+7)\cdot e^{7y+2}\cdot 7;$

Б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(2x+7)e^{7y+2}, \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=8\cdot e^{7y+2};$

В) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x, \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=8e^{7y+2};$

Г) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4xe^{7y+2}\cdot 8, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=(2x^2+7)\cdot 7;$

Д) інша відповідь.

33 Чому дорівнює $gradz(M_0)$, якщо $z=xy^3+x^2y^2$, $M_0(1,\ 1)$?

А	Б	В	Г	Д
$2\vec{i}+\vec{j}$	$5\vec{i}+3\vec{j}$	$2\vec{i}+3\vec{j}$	$3\vec{i}+5\vec{j}$	інша відповідь

34 Знайти повний диференціал функції $z = 5x^2 y + 4xy^2$:

А) $dz = \left(10xy + 4y^2\right)dx + \left(5x^2 + 8xy\right)dy$;

Б) $dz = (5xy)dx + (5x + 4xy)dy$;

В) $dz = \left(10xy - 4y^2\right)dx + \left(5x^2 - 8xy\right)dy$;

Г) $dz = \left(5xy + y^2\right)dx + 8xydy$

Д) інша відповідь.

35 Знайти повний диференціал функції $z = \ln\left(x^3 + y^2\right)$:

А) $dz = \dfrac{x^2}{x^3 + y^2}dx + \dfrac{y}{x^3 + y^2}dy$; Б) $dz = \dfrac{3}{x}dx + \dfrac{2}{y}dy$;

В) $dz = \dfrac{3x^2}{x^3 + y^2}dx + \dfrac{2y}{x^3 + y^2}dy$; Г) $dz = \dfrac{x^2}{x^3 + y^2}dx + \dfrac{2}{x^3 + y^2}dy$;

Д) інша відповідь.

36 Чому дорівнює $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = e^{3x + y^3}$?

А	Б	В	Г	Д
$e^{3x+y^3}(3x+1)$	$9y^2 e^{3x+y^3}$	$e^{3x+y^3}\left(1 + y^2\right)$	xye^{3x+y^3}	інша відповідь

37 Чому дорівнює $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ для функції $z = e^{x y^2}$?

А	Б	В	Г	Д
$x^2 e^{x y^2}$	$y^2 e^{x y^2}$	$y^3 e^{x y^2}$	$y^4 e^{x y^2}$	інша відповідь

38 Чому дорівнює $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функції $z = e^{y x^2}$?

А	Б	В	Г	Д
$x^4 e^{y x^2}$	$e^{yx^2}\left(2x^2 + 1\right)$	$e^{y x^2} \cdot 2y$	$e^{y x^2}\left(2x^2 y + 1\right)$	інша відповідь

39 Чому дорівнює мішана похідна $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ функції $z = sin\left(3x^2 + 2y^2\right)$:

А) $cos\left(3x^2+2y^2\right)$;

Б) $sin\left(3x^2+2y^2\right)\cdot 6x$;

В) $24xy\,cos\left(3x^2+2y^2\right)$;

Г) $-24xy\,sin\left(3x^2+2y^2\right)$;

Д) інша відповідь.

40 Знайти точки екстремумів функції $z=3x^2-2xy+4y^2$. У випадку існування екстремумів у критичній точці визначити тип екстремуму:

А) функція має мінімум у точці $M_0(0,0)$;

Б) функція має максимум у точці $M_0(0,0)$;

В) функція має мінімум у точці $M_1(1,2)$

Г) функція має максимум у точці $M_1(1,2)$;

Д) потрібні додаткові дослідження.

41 Знайти стаціонарні точки функції $z=-x^2+2xy-4y^2+18y$.

А	Б	В	Г	Д
(3; 0)	(-3; 1)	(3; 3)	(0; -3)	інша відповідь

42 Знайти напрямок найбільшого зростання функції $z=2x^2+8xy+3y^2$ у точці $M_0(1,-1)$

А	Б	В	Г	Д
$2\vec{i}+\vec{j}$	$5\vec{i}+3\vec{j}$	$-4\vec{i}+2\vec{j}$	$3\vec{i}+2\vec{j}$	інша відповідь

43 Знайти похідну функції $z=4x^2+3xy-y^2$ за напрямком вектора $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$ в точці $M_1(1,-1)$.

А	Б	В	Г	Д
2	0	$-4\vec{i}+2\vec{j}$	-1	інша відповідь

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. Київ : А.С.К., 2001. 648 с.

2 Вища математика : збірник задач : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик та ін. Київ : А.С.К., 2005. 480 с.

3 Вища математика : підручник : у 2 ч. Ч. 1 : Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне інтегральне числення / П. П. Овчинніков, Ф. П.Яремчук, В. М. Михайленко; за заг. ред. П. П. Овчинікова. Київ : Техніка, 2003. 600 с.

4 Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах : навч. посібник для техн. вузів. Ч. 1 : Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Прикладні задачі Київ : Книги України ЛТД, 2009. 578 с.

5 Вища математика в прикладах і задачах : навч. посібник : у 2 т. Т. 1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба, Г. Б. Лінник [та ін.]; за ред. Л. В. Курпи. Харків : НТУ «ХПІ», 2009. 532 с.

6 Коляда Р. В., Мельник І. О., Мельник О. М. Вища математика : навч. посібник для вищих навч. закладів. 2-ге вид., випр. та допов. Львів : Магнолія 2006, 2015. 342 с.

7 Демидович Б. П., Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики. Москва : Астрель; АСТ, 2001. 656 с.

8 Диференціальне та інтегральне числення : навч. посібник / Є. З. Могульський, Г. П. Бородай, А. О. Дрогаченко та ін. Харків : УкрДАЗТ, 2011. 311 с.

9 Юрчак Н. С., Волохова Н. І., Панченко Н. Г. Завдання до контрольних робіт з дисципліни «Вища математика» для студ. факультета ОПУТ заочної форми навчання. Харків : УкрДАЗТ, 2009. Ч. 1. 50 с.

10 Єфременко Р. О., Резуненко М. Є., Рибалко А. П. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Ряди. Ч. І: Завдання та робочий зошит для виконання контрольних робіт з дисципліни «Вища математика» студентами

спеціальності «Організація перевезень та управління на транспорті (залізничний транспорт)» заочної форми навчання. Харків : УкрДАЗТ, 2009. 30 с.