ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи
з розділу дисципліни
«ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

Харків – 2019

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 30 серпня 2018 р., протокол № 1.

Призначено для студентів факультету «Інформаційно-керуючі системи та технології» спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» денної і заочної форм навчання, а також для магістрів будівельного факультету спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія».

Укладачі:

професори Ю. В. Куліш, В. І. Храбустовський,
старші викладачі О. О. Гончарова, О. В. Рибачук

Рецензент

проф. В. Д. Золотарьов
(ФТІНТ НАНУ ім. Б. І. Вєркіна)

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи
з розділу дисципліни
«ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

Відповідальний за випуск Гончарова О. О.

Редактор Буранова Н. В.

Підписано до друку 18.09.18 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,75. Тираж 35. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ВСТУП

Методичні вказівки містять завдання з різними екстремальними задачами, зокрема з пошуком екстремумів функціоналів. Виконання цих завдань дасть змогу студентам опанувати методи, що, як правило, не вивчаються в загальних курсах вищої математики. Теоретична основа для розв'язання цих завдань міститься в конспекті лекцій [1, 2]. Методичні вказівки також містять приклади розв'язання завдань і можуть бути використані студентами денної і заочної форм навчання: студентами-бакалаврами для поглибленого вивчення теорії диференціальних рівнянь та студентами-магістрами для вивчення методів оптимізації і теорії оптимального керування.

1 Умовні екстремуми функцій кількох змінних

Методи знаходження екстремумів функції кількох змінних при існуванні обмежень (а також за умови зв'язку між змінними) викладено, наприклад, у Лекції 1 [1].

Завдання 1

Знайти умовні екстремуми функції $u(x,y)$ при обмеженні (за умови зв'язку) $\varphi(x,y)=0$:

1) методом Лагранжа;
2) методом виключень.

Визначити тип екстремуму за допомогою повного диференціала функції другого порядку.

Приклади розв'язання завдання
Варіант 11

а) для $u(x,y)=ax^2+by^2$ при $\varphi(x,y)=Ax+By+C=0$ за умови $a=7,\ b=3,\ A=1,\ B=5,\ C=11.$

☐ Маємо функцію $u(x,y)=7x^2+3y^2$ при
$\varphi(x,y)=x+5y+11=0.$

1 Складаємо функцію Лагранжа

$$L = u(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = 7x^2 + 3y^2 + \lambda(x + 5y + 11).$$

Знаходимо її частинні похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 14x + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 6y + 5\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 5y + 11.$$

Для знаходження стаціонарних точок прирівнюємо частинні похідні до нуля, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 14x + \lambda = 0, \\ 6y + 5\lambda = 0, \\ x + 5y + 11 = 0. \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{cases} \lambda = -14x, \\ 6y - 70x = 0, \\ x + 5y + 11 = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} \lambda = -14x, \\ y = \dfrac{35}{3}x, \\ x + \dfrac{175}{3}x + 11 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -14x, \\ y = -\dfrac{385}{178}, \\ x = -\dfrac{33}{178}. \end{cases}$$

Тобто стаціонарна точка $M_{\text{ст}}\left(-\dfrac{33}{178}, -\dfrac{385}{178}\right)$. Оскільки існує стаціонарна точка, то функція $u(x,y)$ може мати екстремум. Визначимо тип екстремуму за допомогою диференціала функції другого порядку:

$$d^2u(M)=\frac{\partial^2u(M)}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2u(M)}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2u(M)}{\partial y^2}dy^2.$$

Знаходимо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2u(M)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(14x)=14,$$
$$\frac{\partial^2u(M)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(14x)=0,$$
$$\frac{\partial^2u(M)}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(6y)=6.$$

Ці похідні мають сталі значення при довільних x та y, у тому числі і в точці $M_{\text{ст}}$. Тому приріст функції в стаціонарній точці при урахуванні диференціалів порядку не вище другого має вигляд

$$\Delta u\ (M_{\text{ст}})=d\,u(M_{\text{ст}})+d^2\,u(M_{\text{ст}})=d^2\,u(M_{\text{ст}})=14dx^2+6dy^2=356dy^2.$$

Ми використали наслідок з умови зв'язку для диференціалів $dx=-5dy,\ dx^2=25dy^2$. Внаслідок додатних знаків коефіцієнтів при dy^2 (а також при dx^2) приріст функції в стаціонарній точці додатний при довільних dx та dy. Тому функція $u(x,y)$ у стаціонарній точці має мінімум.

2 Для дослідження методом виключень, використовуючи зв'язок $x=-11-5y$, одержуємо функцію однієї змінної $u(x(y),y)=f(y)=7(5y+11)^2+3y^2=178y^2+770y+847$. Її похідна $\frac{df(y)}{dy}=356y+770$. Умова стаціонарності $\frac{df}{dy}=0$ дає змогу знайти $y_0=-\frac{770}{356}=-\frac{385}{178}$. Використовуючи умову зв'язку, отримаємо $x_0=-11+5\cdot\frac{385}{178}=-\frac{33}{178}$. Маємо стаціонарну точку

$M_{\text{ст}}\left(-\dfrac{33}{178},-\dfrac{385}{178}\right)$. Оскільки $f''(y)=356>0$ $\left(d^2 f(y)=356dy^2\right)$, то функція $f(y)=u\left(x(y),y\right)$ у стаціонарній точці має мінімум.

Порівнюємо результати дослідження функції на умовні екстремуми, одержані двома методами, і бачимо, що ці результати повністю збігаються.■

Варіант 11

b) $u(x,y)=x^2y+3y^2+x+2y$ при $\varphi(x,y)=x+3y+7=0$.

☐ 1 Складаємо функцію Лагранжа:

$$L=u(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=x^2y+3y^2+x+2y+\lambda(x+3y+7).$$

Знаходимо її частинні похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2xy+1+\lambda,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=x^2+6y+2+3\lambda,\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x+3y+7.$$

Для знаходження стаціонарних точок прирівнюємо ці похідні до нуля:

$$\begin{cases}2xy+1+\lambda=0,\\ x^2+6y+2+3\lambda=0,\\ x+3y+7=0.\end{cases}$$

Виразимо змінні λ та y з другого та третього рівняння:

$$\begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{3}\left(6y+x^2+2\right),\\ y=-\dfrac{1}{3}(x+7).\end{cases}$$

Підставляючи отримані вирази в перше рівняння системи, отримаємо:

$$-\frac{2}{3}x(x+7)+1-\frac{1}{3}\left(-2(x+7)+x^2+2\right)=0,$$
$$-x^2-4x+5=0,$$
$$x^2+4x-5=0.$$

Маємо:

$$\begin{cases} x_1=-5 \\ y_1=-\frac{1}{3}(-5+7)=-\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=-\frac{1}{3}(1+7)=-\frac{8}{3} \end{cases}.$$

Таким чином, ми маємо дві стаціонарні точки функції $u(x,y)$: $M_1\left(-5;-\frac{2}{3}\right)$ $M_2\left(1;-\frac{8}{3}\right)$. Дослідимо, чи існують у цих точках екстремуми. Диференціал першого порядку в цих точках дорівнює нулю: $dL(M_1)=dL(M_2)=0$. Знайдемо диференціал другого порядку: $d^2L=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2$. За умови зв'язку $x+3y+7=0$ ми маємо $d(x+3y+7)=0$, звідси випливає $dx+3dy=0 \quad \Rightarrow dy=-\frac{1}{3}dx$. Знаходимо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2y,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=2x,\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=6.$$

Тоді

$$d^2L=2ydx^2+4xdxdy+6dy^2=\left|dy=-\frac{1}{3}dx\right|=2ydx^2+4x\left(-\frac{1}{3}\right)dxdx+$$
$$+6\left(-\frac{1}{3}\right)^2dx^2=\left(2y-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}\right)dx^2=\left|y=-\frac{1}{3}(x+7)\right|=$$
$$=\left(-\frac{2}{3}(x+7)-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}\right)dx^2=-(2x+4)dx^2$$

У точці $M_1\left(-5;-\frac{2}{3}\right): d^2L(M_1)=6dx^2>0$. Тому в точці M_1 функція $u(x_1,y_1)$ має мінімум. $u_{\min}=u\left(-5;-\frac{2}{3}\right)=-\frac{65}{3}$. В точці $M_2\left(1;-\frac{8}{3}\right): d^2L(M_2)=-6dx^2<0$. У цій точці функція $u(x,y)$ має максимум. $u_{\max}=u\left(1;-\frac{8}{3}\right)=\frac{43}{3}$.

2 Для дослідження методом виключень використовуємо умову зв'язку $y=-\frac{x+7}{3}$ і зводимо функцію $u(x,y)$ до функції однієї змінної:

$$u(x,y)=z(x)=-\frac{x^2(x+7)}{3}+\frac{(x+7)^2}{3}+x-\frac{2}{3}(x+7)=$$
$$=-\frac{x^3}{3}-2x^2+5x+\frac{35}{3}.$$

Знаходимо похідну $z'(x)=-x^2-4x+5=-(x-1)(x+5)$. Маємо дві стаціонарні точки $x_1=-5$, $x_2=1$, які розбивають числову вісь на три інтервали, в кожному з яких похідна зберігає знак, а отже, функція є монотонною. Підставивши довільні значення змінної з цих інтервалів, знаходимо знак похідної на кожному з них. Результат оформимо у вигляді таблиці 1.1:

Таблиця 1.1

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,1)$	1	$(1,\infty)$
z'	<0	0	>0	0	<0
z	спадає	мінімум	зростає	максимум	спадає

Знаходимо екстремальні значення функції $u(x,y)$: $u_{\min} = u(M_1) = z(-5) = \frac{125}{3} - 50 - 25 + \frac{35}{3} = -\frac{65}{3}$,

$$u_{\max} = u(M_2) = z(1) = -\frac{1}{3} - 2 + 5 + \frac{35}{3} = \frac{43}{3}.$$

Порівнюємо результати, одержані двома методами дослідження функції на умовні екстремуми, і бачимо, що ці результати повністю збігаються. ■

2 Проста варіаційна задача

Методи знаходження екстремалі функції, яка дає стаціонарне значення інтеграла від цієї функції та її похідної при фіксованих значеннях функції на кінцях відрізка інтегрування викладено, наприклад, у Лекції 2 [1].

Завдання 2

Знайти екстремаль функціонала $J[y] = \int_0^1 F(x, y, y')dx$ при заданих умовах $y(0) = y_0$, $y(1) = y_1$.

Приклад розв'язання завдання

Варіант 11. $F(x, y, y') = e^{-5x}\left(-4y^2 + (y')^2\right) + 2ye^{2x}$,

$y(0) = y_0 = \frac{1}{18}$, $y(1) = y_1 = 2\left(e - e^4\right) + \frac{e^7}{18}$.

□ Складаємо рівняння Ейлера $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ для даного функціонала. Оскільки $\frac{\partial F}{\partial y} = -8ye^{-5x} + 2e^{2x}$ та $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'e^{-5x}$, то рівняння Ейлера має вигляд $-8ye^{-5x} + 2e^{2x} - 2y''e^{-5x} + 10y'e^{-5x} = 0$. Це рівняння перепишемо у стандартному вигляді (для цього обидві частини множимо на $-e^{5x}/2$):

$$y'' - 5y' + 4y = e^{7x}.$$

Одержали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + \frac{1}{18} e^{7x}$.

Сталі C_1 та C_2 знаходимо з крайових умов:

$$y(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{18} = \frac{1}{18},$$
$$y(1) = C_1 e + C_2 e^4 + \frac{1}{18} e^7 = 2\left(e - e^4\right) + \frac{e^7}{18}.$$

Маємо систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e + C_2 e^4 = 2\left(e - e^4\right) \end{cases}$$

Розв'язуючи її, отримаємо $C_1 = 2,\ C_2 = -2$.

Тобто екстремаль даного функціонала має вигляд:

$$\hat{y}(x) = 2\left(e^x - e^{4x}\right) + \frac{e^{7x}}{18}. \blacksquare$$

3 Ізопериметрична задача

Методи знаходження функцій, які дають стаціонарне значення функціонала (тобто коли виконуються необхідні умови існування екстремуму) при існуванні інтегральних зв'язків функцій викладено, наприклад, у Лекції 4 [1].

Завдання 3

Знайти екстремаль функціонала $J[y]=\int_0^1 F(y,y')dx$ при $y(0)=y(1)=0$ та інтегральному зв'язку $\int_0^1 ye^{kx}dx=g$.

Приклад розв'язання завдання

Варіант 11 $F(y,y')=121y^2+(y')^2$, $k=-1$,

$$g=\frac{1}{240}\left[\frac{e^{-1}-e^{-11}}{e^{11}-e^{-11}}\left(\frac{e^{10}}{10}+\frac{e^{-12}}{12}-\frac{11}{60}\right)+\frac{e^{-2}}{2}-\frac{e^{-12}}{12}-\frac{5}{12}\right].$$

☐ Складаємо функцію Лагранжа: $L=F+\lambda ye^{kx}=121y^2+(y')^2+\lambda ye^{-x}$. Знаходимо її частинні похідні: $\frac{\partial L}{\partial y}=2\cdot 121y+\lambda e^{-x}$, $\frac{\partial L}{\partial y'}=2y'$. Підставимо ці похідні в рівняння Ейлера $\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}=0,$ маємо $242y+\lambda e^{-x}-2y''=0$.

Отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду:

$$y''-121y=\frac{\lambda}{2}e^{-x}.$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$y(x)=C_1e^{11x}+C_2e^{-11x}-\frac{\lambda}{240}e^{-x}.$$

Сталі C_1 та C_2 знайдемо з умов $y(0)=y(1)=0$:

$$y(0)=C_1+C_2-\frac{\lambda}{240}=0,$$

$$y(1)=C_1e^{11}+C_2e^{-11}-\frac{\lambda e^{-1}}{240}=0.$$

Розв'язуючи систему, отримаємо

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\lambda}{240} \cdot \dfrac{e^{-1} - e^{-11}}{e^{11} - e^{-11}} \\ \\ C_2 = -\dfrac{\lambda}{240} \cdot \dfrac{e^{-1} - e^{11}}{e^{11} - e^{-11}} \end{cases}$$

Тобто розв'язок ЛНДР, який задовольняє умови $y(0) = y(1) = 0$, має вигляд:

$$y(x) = \frac{\lambda}{240}\left[\frac{e^{-1} - e^{-11}}{e^{11} - e^{-11}} e^{11x} - \frac{e^{-1} - e^{11}}{e^{11} - e^{-11}} e^{-11x} - e^{-x}\right].$$

Перетворимо цей вираз.

$$y(x) = \frac{\lambda}{240}\left[\frac{e^{-1} - e^{-11}}{e^{11} - e^{-11}} e^{11x} - \frac{\left(e^{-1} - e^{-11}\right) + \left(e^{-11} - e^{11}\right)}{e^{11} - e^{-11}} e^{-11x} - e^{-x}\right],$$

Отримаємо:

$$y(x) = \frac{\lambda}{240}\left[\frac{e^{-1} - e^{-11}}{e^{11} - e^{-11}}\left(e^{11x} - e^{-11x}\right) + e^{-11x} - e^{-x}\right].$$

Множник Лагранжа знаходимо з інтегрального зв'язку:

$$g = \int_0^1 y e^{kx} dx = \int_0^1 y e^{-x} dx = \frac{\lambda}{240}\int_0^1 \left[\frac{e^{-1} - e^{-11}}{e^{11} - e^{-11}}\left(e^{10x} - e^{-12x}\right) + e^{-12x} - e^{-2x}\right] dx =$$

$$= \frac{\lambda}{240}\left[\frac{e^{-1} - e^{-11}}{e^{11} - e^{-11}}\left(\frac{e^{10x}}{10} + \frac{e^{-12x}}{12}\right) - \frac{e^{-12x}}{12} + \frac{e^{-2x}}{2}\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$=\frac{\lambda}{240}\left[\frac{e^{-1}-e^{-11}}{e^{11}-e^{-11}}\left(\frac{e^{10}}{10}+\frac{e^{-12}}{12}-\frac{11}{60}\right)-\frac{e^{-12}}{12}+\frac{e^{-2}}{2}-\frac{5}{12}\right].$$

Оскільки за умовою

$$g=\frac{1}{24}\left[\frac{e^{-1}-e^{-11}}{e^{11}-e^{-11}}\left(\frac{e^{10}}{10}+\frac{e^{-12}}{12}-\frac{11}{60}\right)+\frac{e^{-2}}{2}-\frac{e^{-12}}{12}-\frac{5}{12}\right],$$

то відповідно $\lambda=10$.

Тобто шукана екстремаль має вигляд:

$$\hat{y}(x)=\frac{1}{24}\left[\frac{e^{-1}-e^{-11}}{e^{11}-e^{-11}}\left(e^{11x}-e^{-11x}\right)+e^{-11x}-e^{-x}\right].\blacksquare$$

Завдання 4

Знайти екстремалі функціонала $\int\limits_0^l \left[y'(x)\right]^2 dx$ при заданих крайових умовах та інтегральному зв'язку $\int\limits_0^l y^2(x)dx=1$, де l – номер варіанта.

Приклад розв'язання завдання

Варіант 11 ☐ За умовою $l=11$, функціонал $J[y]=\int\limits_0^{11}\left[y'(x)\right]^2 dx=\int\limits_0^{11}F(y')dx$, крайові умови $y(0)=0,\ y(l)=0$, інтегральний зв'язок $\int\limits_0^{11} y^2(x)dx=1$.

Складаємо функцію Лагранжа

$$L=\left[y'(x)\right]^2+\lambda y^2(x).$$

Оскільки $\frac{\partial L}{\partial y}=2\lambda y(x)$, $\frac{\partial L}{\partial y'}=2y'(x)$, то рівняння Ейлера має вигляд:

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}=2(\lambda y-y'')=0.$$

Залежно від знака λ розв'язки рівняння $y''=\lambda y$ будуть містити різні функції. Для визначення знака λ помножимо це рівняння на $y(x)$ та проінтегруємо його за x у межах від 0 до l. Використовуючи інтегральний зв'язок, отримаємо:

$$\int_0^l y''ydx=\lambda\int_0^l y^2dx=\lambda.$$

Для обчислення інтеграла застосуємо інтегрування частинами:

$$\lambda=\int_0^l y''ydx=y'y\Big|_0^l-\int_0^l y'^2dx=-\int_0^l y'^2dx$$

(при підстановці меж інтегрування використали крайові умови, отримали $y'(l)y(l)-y'(0)y(0)=0$). Оскільки $\left[y'(x)\right]^2\geq 0$, то λ набуде від'ємних значень при $y(x)\neq 0$.

Тобто загальний розв'язок рівняння Ейлера, якщо $\lambda=-a^2$, має вигляд:

$$y(x)=A\sin ax+B\cos ax.$$

Використовуючи задані крайові умови, маємо:

$$y(0)=A\cdot 0+B\cdot 1=0,\Rightarrow \quad B=0,$$

звідси $y(x)=A\sin ax$.

Тоді $y(l)=A\sin al=0$, тобто $al=\pi n$, $\quad a=\frac{\pi n}{l}=\frac{\pi n}{11}$, $n\in Z$.

Таким чином, при $\lambda = -\dfrac{\pi^2 n^2}{\ell^2}$ екстремалі мають вигляд:

$$y_n(x) = A\sin\frac{\pi n x}{l} = A\sin\frac{\pi n x}{11}.$$

Константу A знаходимо з інтегрального зв'язку

$$A^2\int_0^l \sin^2\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{A^2}{2}\int_0^l\left(1-\cos\frac{2\pi n x}{l}\right)dx = \frac{A^2}{2}x\Big|_0^l - \underbrace{\frac{A^2 l}{4\pi n}\sin\frac{2\pi n x}{l}\Big|_0^l}_{0} = \frac{A^2 l}{2} = 1,$$

тобто $A = \pm\sqrt{\dfrac{2}{l}}$. Таким чином, маємо екстремалі, які задовольняють інтегральний зв'язок:

$$y_n = \pm\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n x}{l} = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}\sin\frac{\pi n x}{11},\ \ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Варіант 12 □ За умовою $l = 12,\ y(0) = 0,\ y'(l) = 0$. Складаємо функцію Лагранжа:

$$L = \left[y'(x)\right]^2 + \lambda y^2(x).$$

Оскільки $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda y(x),\ \dfrac{\partial L}{\partial y'} = 2y'(x),$ то рівняння Ейлера має вигляд:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 2(\lambda y - y'') = 0.$$

Залежно від знака λ розв'язки рівняння $y'' - \lambda y = 0$ будуть містити різні функції.

Розглянемо випадок, коли λ – додатні. Тоді загальний розв'язок рівняння Ейлера записується у вигляді:

$$\tilde{y}(x)=C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x}=\alpha sh\sqrt{\lambda}\,x+\beta ch\sqrt{\lambda}\,x.$$

З умови $\tilde{y}(0)=0$ маємо $\beta=0$ і $\tilde{y}(x)=\alpha sh\sqrt{\lambda}\,x$. Тоді $\tilde{y}'(x)=\alpha\sqrt{\lambda}ch\sqrt{\lambda}\,x$. Оскільки $ch\sqrt{\lambda}\,x\geq 1$, то при додатних λ $\tilde{y}(x)$ не може задовольняти умови $\tilde{y}(0)=0,\ \tilde{y}'(l)=0$.

Тепер розглянемо випадок, коли $\lambda=-a^2<0$. Тоді загальний розв'язок рівняння $y''+a^2y=0$ має вигляд

$$y(x)=A\sin ax+B\cos ax.$$

З умови $y(0)=0$ маємо $y(0)=0+B=0,\Rightarrow\quad B=0$. Тому $y(x)=A\sin ax$.

Знаходимо похідну $y'(x)=aA\cos ax$. Використовуючи умову $y'(l)=0$ отримаємо

$$aA\cos al=0\quad\Rightarrow\quad al=\frac{\pi}{2}(2n+1).$$

Тобто $a_n=\dfrac{\pi}{l}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ і

$$y_n(x)=A\sin\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)x=A\sin\frac{\pi}{12}\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

Константу A знаходимо з інтегрального зв'язку:

$$\int_0^{12}y_n{}^2(x)dx=A^2\int_0^{12}\sin^2\frac{\pi x}{12}\left(n+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{A^2}{2}\int_0^{12}\left(1-\cos\frac{\pi x}{6}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)dx=\frac{A^2l}{2}=1,$$

тобто $A=\pm\sqrt{\dfrac{2}{l}}$. Таким чином, маємо екстремалі, які задовольняють інтегральний зв'язок:

$$y_n = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}\sin\frac{\pi x}{12}\left(n+\frac{1}{2}\right),\;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

4 Варіаційна задача при диференціальних зв'язках

Методи знаходження екстремалей, які дають стаціонарне значення функціонала при диференціальних та скінченних зв'язках, викладено, наприклад, у Лекції 4 [1].

Завдання 5

Методом Лагранжа знайти екстремалі функціонала $J[y] = \int_0^1 F\left(y_1, y_1', y_2'\right)dx$ при крайових умовах $y_1(0) = y_1(1) = 0$ та диференціальному зв'язку $\varphi\left(x, y_1, y_2'\right) = 0$.

Приклад розв'язання завдання

Варіант 11 ☐

$F\left(y_1, y_1', y_2'\right) = -2y_1^2 + \left(y_1'\right)^2 - 2\left(y_2'\right)^2$**,** $\varphi\left(x, y_1, y_2'\right) = y_1 - y_2' + 11x = 0$,

$y_2(0) = -\dfrac{11}{4\sin 2}$, $y_2(1) = \dfrac{11}{4}(1 - ctg 2)$.

Складаємо функцію Лагранжа:

$$L = F\left(y_1, y_1', y_2'\right) + \lambda(x)\varphi\left(x, y_1, y_2'\right) = -2y_1^2 + \left(y_1'\right)^2 - 2\left(y_2'\right)^2 +$$
$$+\lambda(x)\left(y_1 - y_2' + 11x\right).$$

Для функції y_1 складаємо рівняння Ейлера $\dfrac{\partial L}{\partial y_1} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial L}{\partial y_1'} = 0$, для цього знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = -4y_1 + \lambda(x), \qquad \frac{\partial L}{\partial y_1'} = 2y_1'.$$

Тоді маємо $-4y_1 + \lambda(x) - 2y_1'' = 0$, звідси

$$y_1''+2y_1=\frac{\lambda(x)}{2}.$$

Аналогічно, для функції y_2 маємо: $\frac{\partial L}{\partial y_2}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y_2'}=-4y_2'-\lambda(x).$ Оскільки $\frac{\partial L}{\partial y_2}=0$, то з рівняння Ейлера одержимо інтеграл диференціального рівняння $2y_2'+\frac{\lambda(x)}{2}=C_1,$ де C_1 – стала. Виразимо звідси $\frac{\lambda(x)}{2}$ та підставимо у рівняння для функції y_1, отримаємо: $y_1''+2y_1=\frac{\lambda(x)}{2}=C_1-2y_2'.$ Використаємо заданий диференціальний зв'язок, одержимо $y_1''+2y_1=C_1-2(y_1+11x).$ Переписавши це рівняння у стандартному вигляді, отримаємо лінійне неоднорідне диференціальне (ЛНДР) зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального виду:

$$y_1''+4y_1=C_1-22x.$$

Загальний розв'язок цього ЛНДР має вигляд:

$$y_1(x)=\alpha\cos 2x+\beta\sin 2x+\frac{1}{4}(C_1-22x).$$

З крайової умови $y_1(0)=0$ отримаємо $\alpha=-\frac{1}{4}C_1.$ Тоді $y_1(x)=\frac{C_1}{4}(1-\cos 2x)+\beta\sin 2x-\frac{11}{2}x.$ Використовуючи умову $y_1(1)=0$, маємо $\beta=\frac{1}{\sin 2}\left[\frac{11}{2}+\frac{C_1}{4}(\cos 2-1)\right].$ Тобто

$$y_1(x)=\frac{C_1}{4}(1-\cos 2x)+\frac{\sin 2x}{\sin 2}\left[\frac{11}{2}+\frac{C_1}{4}(\cos 2-1)\right]-\frac{11}{2}x.$$

Диференціальний зв'язок дає змогу знайти похідну другої функції:

$$y_2'(x)=y_1(x)+11x=\frac{C_1}{4}(1-\cos 2x)+\frac{\sin 2x}{\sin 2}\left[\frac{11}{2}+\frac{C_1}{4}(\cos 2-1)\right]+\frac{11}{2}x.$$

Інтегруємо це рівняння і одержуємо:

$$y_2(x)=\frac{C_1}{4}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)-\frac{\cos 2x}{2\sin 2}\left[\frac{11}{2}+\frac{C_1}{4}(\cos 2-1)\right]+\frac{11}{4}x^2+C_2.$$

Сталі C_1 та C_2 знаходимо з умов $y_2(0)=-\frac{11}{4\sin 2}$, $y_2(1)=\frac{11}{4}(1-ctg 2)$:

$$y_2(0)=-\frac{1}{2\sin 2}\left[\frac{11}{2}+\frac{C_1}{4}(\cos 2-1)\right]+C_2=-\frac{11}{4\sin 2},$$

$$y_2(1)=\frac{C_1}{4}\left(1-\frac{\sin 2}{2}\right)-\frac{ctg 2}{4}\left[11+\frac{C_1}{2}(\cos 2-1)\right]+\frac{11}{4}+C_2=\frac{11}{4}(1-ctg 2).$$

Розв'язком є $C_1=C_2=0$. Підставляємо ці значення сталих у функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ і одержуємо екстремалі функціонала, які задовільняють задані крайові умови і диференціальний зв'язок:

$$\hat{y}_1(x)=\frac{11}{2}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 2}-x\right),\ \hat{y}_2(x)=\frac{11}{4}\left(x^2-\frac{\cos 2x}{\sin 2}\right).\ \blacksquare$$

5 Проста варіаційна задача з рухомими кінцями

Методи знаходження функції та значень меж інтегрування у функціоналі, які можуть давати екстремальне значення функціонала (коли межі інтегрування знаходяться на деяких лініях), викладено, наприклад, у Лекції 5 [2].

Завдання 6

Знайти екстремалі функціонала $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\,dx$ з рухомими кінцями, які знаходяться на лініях L_0 та L_1, якщо $y(x_0)=x_0{}^2+a$ та $y(x_1)=kx_1+b$ відповідно.

Приклад розв'язання завдання

Варіант 11/ $a=5,\ k=2,\ b=-11$

☐ Відповідно до лекції 5 (Ч. 2), якщо існує стаціонарне значення функціонала $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$ з рухомими кінцями, які знаходяться на лініях, заданих рівняннями $y=\varphi_0(x_0)$ та $y=\varphi_1(x_1)$, тоді для інтегранта $F(x,y,y')$ мають виконуватися:

1) рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0;$$

2) умови трансверсальності:

$$\left[F+\left(\varphi_0'-y'\right)\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\Bigg|_{x=x_0}=0,$$

$$\left[F+\left(\varphi_0'-y'\right)\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0.$$

Оскільки $F=\sqrt{1+y'^2}$, то $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ і $\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$. Тому рівняння Ейлера має вигляд:

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0.$$

Звідси маємо $y' = C\sqrt{1+y'^2}$, тоді $y'^2 = C^2\left(1+y'^2\right)$, $y' = \pm\sqrt{\dfrac{C^2}{1-C^2}} = C_1$, де C_1 та C – сталі. Після інтегрування отримаємо:

$$y(x) = C_1 x + C_2 .$$

Розглянемо умову трансверсальності при $x = x_0$. Тоді $\varphi_0{}' = \left(x_0{}^2 + a\right)' = 2x_0$, і маємо

$$F + \left(\phi_0' - y'\right)\frac{\partial F}{\partial y'} = \sqrt{1+\left[y'\left(x_0\right)\right]^2} + \left(2x_0 - C_1\right)\frac{y'\left(x_0\right)}{\sqrt{1+\left[y'\left(x_0\right)\right]^2}} = 0.$$

Звідси $1 + C_1^2 + \left(2x_0 - C_1\right)C_1 = 0$, тоді $2x_0 C_1 = -1$.

У точці x_1 маємо $\varphi_1\left(x_1\right) = kx_1 + b,\ \varphi_1'\left(x_1\right) = k$. Тоді умова трансверсальності дає

$$\sqrt{1+\left[y'\left(x_0\right)\right]^2} + \left(k - y'\left(x_1\right)\right)\frac{y'\left(x_1\right)}{\sqrt{1+\left[y'\left(x_0\right)\right]^2}} = 0,$$

Звідси маємо: $1 + C_1^2 + \left(k - C_1\right)C_1 = 0$, тоді $kC_1 = -1$.

Одержали систему рівнянь на C_1 та x_0:

$$\begin{cases} 2x_0 C_1 = -1 \\ kC_1 = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{k},\ \ x_0 = 1.$$

Тепер легко знайти координати точки M_0 перетину графіка функції $y(x) = C_1 x + C_2$ та кривої L_0. Оскільки $\varphi_0\left(x_0\right) = x_0{}^2 + a$, то $y_0 = 6$. Таким чином, маємо $M_0(1;6)$, причому $x_0 = 1$ дорівнює нижній межі інтегрування у функціоналі.

З умови проходження графіка функції $y(x) = -\frac{x}{k} + C_2$ через точку M_0 знаходимо (для $k = 2$) сталу C_2 : $y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{13}{2}$. Для знаходження стаціонарного значення функціонала необхідно знати верхню межу інтегрування x_1. Ця межа є координатою точки перетину $M_1(x_1, y_1)$ графіка функції $y(x) = \frac{1}{2}(-x + 13)$ (тобто $x + 2y - 13 = 0$) та лінії L_1 $\left(\varphi_1(x_1) = 2x_1 - 11\right)$. Для знаходження координат точки $M_1(x_1, y_1)$ маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2y_1 = 13 \\ 2x_1 - y_1 = 11 \end{cases}.$$

Звідки маємо $M_1(7;3)$, і верхня межа інтегрування у функціоналі дорівнює $x_1 = 7$. Таким чином, припустима екстремаль є функція $y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{13}{2}$. Ця функція разом із межами інтегрування $x_0 = 1,\ x_1 = 7$ дає стаціонарне значення функціонала.

Тепер знаходимо стаціонарне значення функціонала:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}\,dx = \int_1^7 \sqrt{1 + \frac{1}{4}}\,dx = \sqrt{\frac{5}{4}}(7 - 1) = 3\sqrt{5}.$$

Індивідуальні завдання

Завдання 1

Знайти умовні екстремуми функції $u(x, y)$ при обмеженні $\varphi(x, y) = 0$:

1) методом Лагранжа;

2) методом виключень.

Визначити тип екстремуму за допомогою повного диференціала функції другого порядку:

а) для $u(x,y)=ax^2+by^2$ при $\varphi(x,y)=Ax+By+C=0$ (таблиця 1);

Таблиця 1

№	a	b	A	B	C
1	2	3	1	4	1
2	3	2	3	-1	2
3	2	4	1	5	3
4	4	2	5	1	4
5	2	5	3	1	5
6	5	2	1	-4	6
7	2	6	5	-1	7
8	6	2	1	3	8
9	3	4	2	-1	9
10	4	3	-1	5	10
11	7	3	1	5	11

б) – таблиця 1, а

Таблиця 1,а

№	$u(x,y)$	$\varphi(x,y)=0$
1	$x^3+3xy-6x$	$x-y-1=0$
2	$x^2(y+1)-24x$	$x-y+2=0$
3	$x^3+6xy-15x^2-15x$	$2x-y+1=0$
4	$x^3+15xy-18x$	$x+2y-4=0$
5	$x^3+xy-10x$	$6x+y+5=0$
6	$x^3+6xy-6x$	$x+y+5=0$
7	$xy-10y$	$x^2-2x-y+1=0$
8	$xy^2-7xy+16x$	$x-y-1=0$
9	$x^2y+\frac{23}{2}xy+\frac{37}{3}x$	$x-3y+2=0$
10	$\frac{xy}{3}+\frac{3}{2}y-11x$	$x^2-y+3=0$
11	x^2y+3y^2+x+2y	$x+3y+7=0$

Завдання 2

Знайти екстремаль функціонала $\int_0^1 F\left(x, y, y'\right)dx$ при заданих умовах $y\left(0\right) = y_0$, $y\left(1\right) = y_1$ (таблиця 2).

Таблиця 2

№	$F\left(x, y, y'\right)$	y_0	y_1
1	$e^{x}\left(2y^2 + \left(y'\right)^2\right) + 2ye^{4x}$	$\frac{1}{10}$	$e - e^{-2} + \frac{e^3}{10}$
2	$e^{2x}\left(3y^2 + \left(y'\right)^2\right) + 2ye^{6x}$	$\frac{1}{21}$	$2\left(e - e^{-3}\right) + \frac{e^4}{21}$
3	$e^{3x}\left(-2y^2 + \left(y'\right)^2\right) + 2ye^{7x}$	$\frac{1}{30}$	$3\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right) + \frac{e^4}{30}$
4	$e^{4x}\left(-4y^2 + \left(y'\right)^2\right) + 2ye^{5x}$	$\frac{1}{9}$	$4e^{-2} + \frac{e}{9}$
5	$e^{5x}\left(-6y^2 + \left(y'\right)^2\right) + 2ye^{6x}$	$\frac{1}{12}$	$5\left(e^{-2} - e^{-3}\right) + \frac{e}{12}$
6	$e^{-6x}\left(-8y^2 + \left(y'\right)^2\right) + 2ye^{-5x}$	$\frac{1}{3}$	$6\left(e^2 - e^4\right) + \frac{e}{3}$
7	$e^{-7x}\left(-10y^2 + \left(y'\right)^2\right) + 2ye^{-6x}$	$\frac{1}{4}$	$7\left(e^2 - e^5\right) + \frac{e}{4}$
8	$e^{-8x}\left(-12y^2 + \left(y'\right)^2\right) + 2ye^{-7x}$	$\frac{1}{5}$	$8\left(e^2 - e^6\right) + \frac{e}{5}$
9	$e^{-9x}\left(-20y^2 + \left(y'\right)^2\right) + 2ye^{-8x}$	$\frac{1}{12}$	$9\left(e^5 - e^4\right) + \frac{e}{12}$
10	$e^{-10x}\left(11y^2 + \left(y'\right)^2\right) + 2ye^{-9x}$	$-\frac{1}{20}$	$10\left(e^{11} - e^{-1}\right) - \frac{e}{20}$
11	$e^{-5x}\left(-4y^2 + \left(y'\right)^2\right) + 2ye^{2x}$	$\frac{1}{18}$	$2\left(e - e^4\right) + \frac{e^7}{18}$

Завдання 3

Знайти екстремаль функціонала $J[y]=\int_0^1 F(y,y')dx$ при $y(0)=y(1)=0$ і інтегральному зв'язку $\int_0^1 ye^{kx}dx=g$ (таблиця 3).

Таблиця 3

№	$F(y,y')$	k	g
1	$y^2+(y')^2$	4	$\frac{1}{30}\left[\frac{e^4-e^{-1}}{e-e^{-1}}\left(\frac{e^5}{5}-\frac{e^3}{3}+\frac{2}{15}\right)-\left(\frac{e^8}{8}-\frac{e^3}{3}+\frac{5}{24}\right)\right]$
2	$4y^2+(y')^2$	3	$\frac{1}{5}\left[\frac{e^3-e^{-2}}{e^2-e^{-2}}\left(\frac{e^5+4}{5}-e\right)+\frac{e^6}{6}-e-\frac{5}{6}\right]$
3	$9y^2+(y')^2$	2	$\frac{3}{10}\left[\frac{e^2-e^{-3}}{e^3-e^{-3}}\left(\frac{e^5}{5}-e^{-1}+\frac{4}{5}\right)-\frac{e^4}{4}-e^{-1}+\frac{5}{4}\right]$
4	$16y^2+(y')^2$	-1	$\frac{2}{15}\left[\frac{e^{-1}-e^{-4}}{e^4-e^{-4}}\left(\frac{e^3}{3}+\frac{e^{-5}}{5}-\frac{8}{15}\right)+\frac{e^{-2}}{2}-\frac{e^{-5}}{5}-\frac{3}{10}\right]$
5	$25y^2+(y')^2$	-2	$\frac{5}{42}\left[\frac{e^{-2}-e^{-5}}{e^5-e^{-5}}\left(\frac{e^3}{3}+\frac{e^{-7}}{7}-\frac{10}{21}\right)+\frac{e^{-4}}{4}-\frac{e^{-7}}{7}-\frac{3}{28}\right]$
6	$4y^2+(y')^2$	6	$\frac{3}{32}\left[-\frac{e^6-e^{-2}}{e^2-e^{-2}}\left(\frac{e^8}{8}-\frac{e^4}{4}+\frac{1}{8}\right)+\frac{e^{12}}{12}-\frac{e^4}{4}+\frac{1}{6}\right]$
7	$9y^2+(y')^2$	7	$\frac{7}{80}\left[-\frac{e^7-e^{-3}}{e^3-e^{-3}}\left(\frac{e^{10}}{10}-\frac{e^4}{4}+\frac{3}{20}\right)+\frac{e^{14}}{14}-\frac{e^4}{4}+\frac{5}{28}\right]$
8	$4y^2+(y')^2$	8	$\frac{1}{15}\left[-\frac{e^8-e^{-2}}{e^2-e^{-2}}\left(\frac{e^{10}}{10}-\frac{e^6}{6}+\frac{1}{15}\right)+\frac{e^{16}}{16}-\frac{e^6}{6}+\frac{5}{48}\right]$
9	$y^2+(y')^2$	9	$\frac{9}{160}\left[-\frac{e^9-e^{-1}}{e-e^{-1}}\left(\frac{e^{10}}{10}-\frac{e^8}{8}+\frac{1}{40}\right)+\frac{e^{18}}{18}-\frac{e^8}{8}+\frac{5}{72}\right]$
10	$y^2+(y')^2$	10	$\frac{5}{99}\left[-\frac{e^{10}-e^{-1}}{e-e^{-1}}\left(\frac{e^{11}}{11}-\frac{e^9}{9}+\frac{2}{99}\right)+\frac{e^{20}}{20}-\frac{e^9}{9}+\frac{11}{180}\right]$
11.	$121y^2+(y')^2$	-1	$\frac{1}{24}\left[\frac{e^{-1}-e^{-11}}{e^{11}-e^{-11}}\left(\frac{e^{10}}{10}+\frac{e^{-12}}{12}-\frac{11}{60}\right)+\frac{e^{-2}}{2}-\frac{e^{-12}}{12}-\frac{5}{12}\right]$

Завдання 4

Знайти екстремалі функціонала $\int_0^l \left[y'(x)\right]^2 dx$ при заданих крайових умовах та інтегральному зв'язку $\int_0^l y^2(x)dx = 1$, де l – номер варіанта (таблиця 4).

Таблиця 4

№	Крайові умови при $x = 0$	Крайові умови при $x = l$
1	$y(0) = 0$	$y(l) = 0$
2	$y'(0) = 0$	$y(l) = 0$
3	$y(0) = 0$	$y'(l) = 0$
4	$y'(0) = 0$	$y'(l) = 0$
5	$y(0) = 0$	$y(l) = 0$
6	$y'(0) = 0$	$y(l) = 0$
7	$y(0) = 0$	$y'(l) = 0$
8	$y'(0) = 0$	$y'(l) = 0$
9	$y(0) = 0$	$y(l) = 0$
10	$y'(0) = 0$	$y'(l) = 0$
11	$y(0) = 0$	$y(l) = 0$
12	$y(0) = 0$	$y'(l) = 0$

Завдання 5

За методом Лагранжа знайти екстремалі функціонала $J[y] = \int_0^1 F\left(y_1, y_1', y_2'\right)dx$ при крайових умовах $y_1(0) = y_1(1) = 0$ та диференціальному зв'язку $\varphi\left(x, y_1, y_2'\right) = 0$ (таблиця 5).

Таблиця 5

№	$F\left(y_1, y_1', y_2'\right)$	$y_2(0)$	$y_2(1)$	$\varphi\left(x, y_1, y_2'\right)$
1	$-5y_1^2+\left(y_1'\right)^2+\left(y_2'\right)^2$	$\frac{1}{8\sin 2}$	$\frac{5}{8}+\frac{1}{8}ctg2$	$y_1-y_2'+x=0$
2	$-4y_1^2+\left(y_1'\right)^2-5\left(y_2'\right)^2$	$-\frac{10}{27\sin 3}$	$\frac{4}{9}-\frac{10}{27}ctg3$	$y_1-y_2'+2x=0$
3	$-3y_1^2+\left(y_1'\right)^2-\left(y_2'\right)^2$	$-\frac{3}{8\sin 2}$	$\frac{9}{8}-\frac{3}{8}ctg2$	$y_1-y_2'+3x=0$
4	$-10y_1^2+\left(y_1'\right)^2+\left(y_2'\right)^2$	$\frac{4}{27\sin 3}$	$\frac{20}{9}+\frac{4}{27}ctg3$	$y_1-y_2'+4x=0$
5	$-3y_1^2+\left(y_1'\right)^2-\left(y_2'\right)^2$	$-\frac{5}{8\sin 2}$	$\frac{15}{8}-\frac{5}{8}ctg2$	$y_1-y_2'+5x=0$
6	$-8y_1^2+\left(y_1'\right)^2-\left(y_2'\right)^2$	$-\frac{2}{9\sin 3}$	$\frac{2}{3}\left(4-\frac{1}{3}ctg3\right)$	$y_1-y_2'+6x=0$
7	$-6y_1^2+\left(y_1'\right)^2+2\left(y_2'\right)^2$	$\frac{7}{4\sin 2}$	$\frac{7}{4}(3+ctg2)$	$y_1-y_2'+7x=0$
8	$-3y_1^2+\left(y_1'\right)^2-6\left(y_2'\right)^2$	$-\frac{16}{9\sin 3}$	$\frac{4}{3}-\frac{16}{9}ctg3$	$y_1-y_2'+8x=0$
9	$-3y_1^2+\left(y_1'\right)^2-\left(y_2'\right)^2$	$-\frac{9}{8\sin 2}$	$\frac{9}{8}(3-ctg2)$	$y_1-y_2'+9x=0$
10	$-10y_1^2+\left(y_1'\right)^2+\left(y_2'\right)^2$	$\frac{10}{27\sin 3}$	$\frac{50}{9}+\frac{10}{27}ctg3$	$y_1-y_2'+10x=0$
11	$-2y_1^2+\left(y_1'\right)^2-2\left(y_2'\right)^2$	$-\frac{11}{4\sin 2}$	$\frac{11}{4}(1-ctg2)$	$y_1-y_2'+11x=0$

Завдання 6

Знайти екстремалі функціонала $J[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}dx$ з рухомими кінцями, які знаходяться на лініях L_0 та L_1, якщо $y\left(x_0\right)=x_0^{\ 2}+a$ та $y\left(x_1\right)=kx_1+b$ відповідно (таблиця 6).

Таблиця 6

№	*a*	*k*	*b*
1	1	1	-1
2	2	1	-2
3	3	2	-3
4	4	2	-4
5	1	2	-5
6	1	-1	-6
7	2	-2	-7
8	3	-1	-8
9	4	-2	-9
10	5	-1	-10
11	5	2	-11

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Куліш, Ю. В. Основи теорії оптимального керування [Текст] : конспект лекцій / Ю. В. Куліш, О. В. Рибачук. – Харків : УкрДАЗТ, 2014. – Ч 1. – 66 с.

2 Куліш, Ю. В. Основи теорії оптимального керування [Текст] : конспект лекцій / Ю. В. Куліш, О. В. Рибачук. – Харків : УкрДУЗТ, 2015. – Ч. 2. – 44 с.

3 Сборник задач по математике для втузов в 4 ч. Ч. III. Специальные курсы [Текст] / под общ. ред. А. В. Ефимова, А. Б. Демидовича, В. А. Болгова. – М. : Наука, 1984. – 608 с.

3 Галеев, Э. М. Краткий курс теории экстремальных задач [Текст] / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М. : МГУ, 1989. – 204 с.

4 Алексеев, В. М. Оптимальное управление [Текст] / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1979. – 430 с.

5 Мышкис, А. Д. Математика для технических вузов. Спец. курсы [Текст] / А. Д. Мышкис. – СПб : Лань, 2002. – 640 с.