ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ
для самостійної роботи

Частина 1

Харків – 2019

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 1 жовтня 2018 р., протокол № 2.

Методичні вказівки і завдання для самостійної роботи призначено для студентів освітнього рівня «бакалавр» усіх форм навчання

Укладачі:

доценти Н. Г. Панченко,
М. Є. Резуненко,
старш. викл. О. В. Рибачук

Рецензент

проф. Р. В. Вовк
(ХНУ імені В. Н. Каразіна)

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи

Частина 1

Відповідальний за випуск Панченко Н. Г.

Редактор Еткало О. О.

Підписано до друку 01.11.18 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 4,25. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ЗМІСТ

Завдання 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. Розв’язати систему лінійних рівнянь:
а) за правилом Крамера;
б) за допомогою оберненої матриці;
в) методом Гаусса.

Варіант 1 $\begin{cases} 2x_1+2x_2-4x_3=2; \\ 4x_1-x_2+x_3=7; \\ 3x_1-x_3=6. \end{cases}$	**Варіант 11** $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=-8; \\ -2x_1+3x_2-5x_3=4; \\ -3x_1-2x_2+4x_3=4. \end{cases}$	**Варіант 21** $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=0; \\ x_1-2x_2-5x_3=5; \\ -4x_1+3x_2+5x_3=-5. \end{cases}$
Варіант 2 $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=0; \\ 4x_1-x_2+5x_3=30; \\ 3x_1+2x_2-x_3=15. \end{cases}$	**Варіант 12** $\begin{cases} 3x_1+x_2-7x_3=11; \\ -4x_1+5x_3=22; \\ 3x_1+x_2+4x_3=-11. \end{cases}$	**Варіант 22** $\begin{cases} 5x_1-x_2+7x_3=38; \\ 4x_1+3x_2-2x_3=0; \\ -2x_1+x_2-3x_3=-19. \end{cases}$
Варіант 3 $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=15; \\ -x_1-x_2+5x_3=0; \\ 3x_1+2x_2-x_3=15. \end{cases}$	**Варіант 13** $\begin{cases} 5x_1+2x_2-7x_3=0; \\ -4x_1+3x_2+2x_3=11; \\ 2x_1-6x_2+3x_3=-11. \end{cases}$	**Варіант 23** $\begin{cases} -3x_1+x_2+4x_3=0; \\ 5x_1-2x_2-5x_3=5; \\ -4x_1+3x_2+5x_3=-5. \end{cases}$
Варіант 4 $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=6; \\ 2x_1-x_2+5x_3=-3; \\ 3x_1+2x_2-x_3=9. \end{cases}$	**Варіант 14** $\begin{cases} 3x_1+2x_2-8x_3=20; \\ -x_1+3x_2+2x_3=-30; \\ -4x_2+3x_3=5. \end{cases}$	**Варіант 24** $\begin{cases} x_1+3x_2+7x_3=-18; \\ -4x_2+5x_3=-24; \\ x_1+3x_2+4x_3=-6. \end{cases}$
Варіант 5 $\begin{cases} 3x_1+2x_2-4x_3=18; \\ x_1-x_2+5x_3=-36; \\ 4x_1+2x_2-x_3=9. \end{cases}$	**Варіант 15** $\begin{cases} x_1+4x_2-8x_3=13; \\ 4x_1+3x_2-2x_3=8; \\ 7x_1+2x_2+5x_3=5. \end{cases}$	**Варіант 25** $\begin{cases} 2x_1+5x_2-7x_3=-11; \\ 3x_1-4x_2+2x_3=-22; \\ -6x_1+2x_2+3x_3=44. \end{cases}$

Варіант 6 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 5; \\ 2x_1 - 5x_2 + 10x_3 = 10; \\ -7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$	**Варіант 16** $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 28; \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = -28; \\ 3x_1 + x_3 = -14. \end{cases}$	**Варіант 26** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 8; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 12; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$
Варіант 7 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 5; \\ 2x_1 - 5x_2 + 10x_3 = 10; \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$	**Варіант 17** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 8; \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9. \end{cases}$	**Варіант 27** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 = -2; \\ 3x_1 - 4x_3 = 4. \end{cases}$
Варіант8 $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 5; \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10; \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 15. \end{cases}$	**Варіант 18** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 12; \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -6; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9. \end{cases}$	**Варіант 28** $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 10; \\ 5x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -15; \\ -4x_1 + 3x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$
Варіант 9 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 18; \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 36; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 18. \end{cases}$	**Варіант 19** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 14; \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 21; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 35. \end{cases}$	**Варіант 29** $\begin{cases} 2x_2 - 8x_3 = 12; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8; \\ 3x_1 - 4x_3 = 6. \end{cases}$
Варіант 10 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$	**Варіант 20** $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 10; \\ 5x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -15; \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$	**Варіант 30** $\begin{cases} 4x_2 + 3x_2 - x_3 = -16; \\ -x_2 + 3x_3 = -8; \\ 3x_1 - 4x_3 = 20. \end{cases}$

Завдання 1.2. Розв’язати матричне рівняння:

Варіант	Рівняння
1	$\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right] \cdot X = \begin{pmatrix} 12 & -2 & -6 \\ -8 & 4 & 12 \end{pmatrix}$
2	$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & -5 \\ -6 & 6 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \\ 7 & -25 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 18 & -6 & -8 \\ -5 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 5 & 6 & -25 \end{pmatrix}$

4	$X\cdot\left[\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}12 & -8\\ -2 & 4\\ -6 & 12\end{pmatrix}$
5	$\left[\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right]\cdot X=\begin{pmatrix}2 & -8 & 4\\ 0 & 12 & 16\end{pmatrix}$
6	$X\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & 5\\ -3 & 7\\ 9 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5\\ -1 & 6\\ 9 & 5\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}5 & -3 & 10\\ 3 & 8 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3 & 9\\ 5 & 3 & 5\end{pmatrix}$
8	$X\cdot\left[\begin{pmatrix}16 & -2\\ 15 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 4\\ 11 & 5\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -8 & 12\\ 4 & 16\end{pmatrix}$
9	$\left[\begin{pmatrix}16 & -2\\ 15 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 4\\ 11 & 5\end{pmatrix}\right]\cdot X=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 14 & 0 & -4\end{pmatrix}$
10	$X\cdot\begin{pmatrix}7 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 9\\ -3 & 8\\ 10 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -5\\ -3 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$
11	$\left[\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right]\cdot X=\begin{pmatrix}12 & -2 & -6\\ -8 & 4 & 12\end{pmatrix}$
12	$X\cdot\left[\begin{pmatrix}6 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}10 & 8\\ 24 & 20\\ 16 & -40\end{pmatrix}$
13	$X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 25\\ -2 & -7\\ 11 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & -5\\ -12 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix}7 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}-1 & -3 & 10\\ 9 & 8 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3 & 3\\ -5 & 1 & -2\end{pmatrix}$
15	$\left[\begin{pmatrix}8 & -2\\ 5 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 7\end{pmatrix}\right]\cdot X=\begin{pmatrix}2 & -8 & 4\\ 0 & 12 & 16\end{pmatrix}$
16	$X\cdot\left[\begin{pmatrix}16 & -2\\ 15 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 4\\ 11 & 5\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}5 & 14\\ 1 & 0\\ 2 & -4\end{pmatrix}$

17	$X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 25 \\ -2 & -7 \\ 11 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -12 & 13 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 7 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}^T$
20	$\left[\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}\right] \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & -18 & 4 \\ 12 & 12 & 16 \end{pmatrix}$
21	$X \cdot \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & 7 \\ 8 & -8 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 14 & 8 & 7 \\ -5 & 20 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 17 \\ -20 & 15 & -3 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 21 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 25 \end{pmatrix}^T$
24	$X \left[\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -18 & 12 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$
25	$X \cdot \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & -4 \\ 10 & 11 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -20 \\ -2 & 15 \\ 19 & 2 \end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 23 \end{pmatrix}^T$
27	$\left[\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\right] \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 16 & 12 & 8 \end{pmatrix}$
28	$X \cdot \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & -4 \\ 10 & 11 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -25 \\ -2 & 15 \\ 19 & 2 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 14 & 10 & 7 \\ -4 & 11 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 19 \\ -20 & 15 & 2 \end{pmatrix}$
30	$\begin{pmatrix} 13 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \end{pmatrix}^T$

Завдання 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Завдання 2.1. Задані точки A, B, C і D. Потрібно:

1) знайти модуль та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$;

2) знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;

3) знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AC}$ на вісь вектора $\overrightarrow{AB}$;

4) обчислити площу паралелограма та площу трикутника, побудованих на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;

5) обчислити об'єм піраміди з вершинами в точках A, B, C і D;

6) знайти довжину висоти, проведеної з вершини D на основу ABC.

Варіант	A	B	C	D
1	(4;1;4)	(0;1;1)	(-5;3;0)	(3;0;-2)
2	(2;-1;-3)	(4;2;3)	(-4;3;0)	(1;3;-2)
3	(16;5;0)	(4;0;0)	(-3;-2;7)	(2;1;-2)
4	(1;1;6)	(-1;-3;2)	(-2;-1;2)	(4;0;0)
5	(-6;2;1)	(0;2;1)	(-2;-1;0)	(6;-2;-2)
6	(10, 16,0)	(2;1;0)	(-3;-2;2)	(4;1;-2)
7	(6;5;2)	(-6;0;2)	(-3;-1;2)	(1;2;-1)
8	(1;3;6)	(-3;1;2)	(-1;-2;1)	(2;1;0)
9	(3;1;1)	(-1;4;1)	(-3;-2;1)	(3;4;-1)
10	(3;1;3)	(-3;4;1)	(-3;-4;1)	(2;3;-5)
11	(5;6;2)	(3;4;1)	(-2;0;5)	(1;4;1)
12	(0;7;9)	(-2;3;5)	(-1;2;-1)	(3;2;-1)
13	(2;3;8)	(-1;5;2)	(-3;0;-1)	(6;-1;8)
14	(5;4;0)	(-3;0;1)	(-6;1;5)	(1;1;-6)
15	(-10;4;5)	(-6;1;5)	(-1;1;5)	(1;5;-2)
16	(-1;-11;-1)	(-1;1;4)	(-1;5;-2)	(3;0;-1)
17	(-1;4;6)	(3;2;2)	(-4;5;-3)	(2;1;-3)
18	(-2;2;-3)	(-4;5;3)	(-2;1;-3)	(2;5;-4)
19	(2;0;-5)	(-2;1;3)	(-2;0;-4)	(3;2;-2)
20	(2;-1;12)	(-2;5;0)	(-3;2;-2)	(4;5;-3)
21	(8;14;1)	(-3;4;3)	(8;15;-1)	(6;16;-5)
22	(-9;-3;3)	(-6;3;1)	(-6;2;0)	(-6;4;-1)
23	(-7;-2;5)	(-4;2;5)	(-2;4;-1)	(-7;-2;-2)
24	(-1;-6;-10)	(-3;4;1)	(-3;4;-2)	(6;3;0)
25	(10;3;-2)	(-2;3;3)	(-1;4;-3)	(2;4;-6)

26	(1;4;3)	(-1;4;3)	(-2;4;0)	(2;5;-3)
27	(13;4;-2)	(-2;4;6)	(-2;5;-3)	(2;3;-1)
28	(-2;1;3)	(-2;5;3)	(-2;3;0)	(1;4;-3)
29	(2;-3;1)	(-4;5;1)	(-2;1;-2)	(2;3;0)
30	(0;0;-2)	(-2;3;4)	(-6;0;3)	(4;5;-1)

Завдання 2.2. Задані модулі векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, а також кут φ між ними. Потрібно:

а) визначити, при якому значенні параметра α вектори $\vec{a} = 2\vec{p} + m\vec{q}$ і $\vec{b} = n\vec{p} - \alpha\vec{q}$ будуть перпендикулярними;

б) знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} + m\vec{q}$ та $\vec{c} = n\vec{p} - 3\vec{q}$.

Варіант	$\lvert\vec{p}\rvert$	$\lvert\vec{q}\rvert$	φ	m	n
1	3	2	$\frac{\pi}{3}$	-1	2
2	1	2	$\frac{\pi}{6}$	2	-1
3	4	1	$\frac{2\pi}{3}$	3	-5
4	8	3	$\frac{\pi}{4}$	5	-1
5	6	9	$\frac{\pi}{3}$	-2	-3
6	3	6	$\frac{\pi}{2}$	-1	4
7	5	1	$\frac{5\pi}{6}$	-2	1
8	3	6	$\frac{\pi}{3}$	-3	4
9	4	7	$\frac{\pi}{6}$	5	-1
10	2	3	$\frac{2\pi}{3}$	-2	6
11	5	2	$\frac{\pi}{4}$	1	4

12	8	10	$\frac{\pi}{3}$	1	-3
13	12	3	$\frac{\pi}{2}$	-2	1
14	10	4	$\frac{5\pi}{6}$	4	3
15	3	2	$\frac{\pi}{3}$	6	-1
16	9	2	$\frac{\pi}{6}$	2	3
17	6	4	$\frac{2\pi}{3}$	-1	3
18	5	1	$\frac{\pi}{4}$	3	-5
19	3	1,5	$\frac{\pi}{3}$	2	-4
20	2	6	$\frac{\pi}{2}$	-2	9
21	1	3	$\frac{5\pi}{6}$	-4	5
22	1,5	6	$\frac{\pi}{3}$	2	12
23	6	2	$\frac{\pi}{6}$	5	3
24	2	4	$\frac{2\pi}{3}$	3	6
25	7	5	$\frac{\pi}{4}$	3	-3
26	8	4	$\frac{\pi}{3}$	10	-2
27	5	1	$\frac{\pi}{2}$	-3	9
28	4	5	$\frac{5\pi}{6}$	2	-7
29	2	3	$\frac{\pi}{3}$	1	-6
30	12	3	$\frac{\pi}{2}$	2	5

Завдання 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Завдання 3.1. Задані координати вершин трикутника: $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Потрібно:

1) записати рівняння сторін трикутника;
2) записати рівняння медіани AM;
3) записати рівняння висоти BD;
4) записати рівняння прямої L_1, яка проходить через точку C паралельно до сторони AB;
5) знайти кут між прямими AB і AC;
6) знайти довжину висоти BD;
7) знайти довжину медіани AM;
8) знайти точку N перетину висоти BD та медіани AM;
9) навести креслення.

Варіант	A	B	C
1	(3; 2)	(4; 0)	(0; 1)
2	(5; 1)	(-2; 3)	(0; 2)
3	(-4; 2)	(3; -2)	(0; 3)
4	(-3; -2)	(5; 1)	(0; 4)
5	(-4; 0)	(6; -3)	(0; 5)
6	(-2; 10)	(-4; 2)	(0; 6)
7	(1; 9)	(6; 3)	(0; 7)
8	(-3; -4)	(-6; -2)	(0; 8)
9	(-4; 3)	(4; -1)	(0; 9)
10	(2; 8)	(5; 4)	(1; 0)
11	(-1; -5)	(-3; 3)	(1; 1)
12	(0; 3)	(-5; 6)	(1; 2)
13	(-2; 5)	(3; 7)	(1; 3)
14	(2; -1)	(7; 0)	(1; 4)
15	(0; 7)	(5; 3)	(1; 5)
16	(6; 4)	(3; 2)	(1; 6)
17	(0; -5)	(-3; 1)	(1; 7)
18	(-4; 7)	(5; 0)	(1; 8)
19	(-2; 6)	(-5; -1)	(1; 9)
20	(5; -7)	(4; 2)	(2; 0)
21	(-4; -2)	(-2; 5)	(2; 1)
22	(3; -1)	(-6; 4)	(2; 2)
23	(6; 5)	(-4; 1)	(2; -3)

24	(0; -5)	(-8; 0)	(2; 4)
25	(-1; 4)	(-6; -3)	(2; 5)
26	(7; 3)	(-4; -2)	(2; 6)
27	(0; -4)	(-8; 1)	(2; 7)
28	(3; 5)	(-10; -4)	(2; 8)
29	(-1; -2)	(-6; 3)	(2; 9)
30	(8; 2)	(-5; 6)	(3; 0)

Завдання 3.2. Встановити тип кривої другого порядку та схематично зобразити її.

Варіант	Рівняння кривої другого порядку
1	$x^2+y^2+2x-10y+17=0$
2	$4x^2+16y^2+8x-160y+340=0$
3	$9x^2-25y^2+18x+250y-841=0$
4	$x^2+y^2-2x+12y+21=0$
5	$12x^2+24x-y+15=0$
6	$16x^2+9y^2-64x+54y+1=0$
7	$9x^2+16y^2+36x-96y+36=0$
8	$25x^2+9y^2+50x-36y-184=0$
9	$x^2+y^2+8x-10y+5=0$
10	$8y^2-48y-2x+70=0$
11	$x^2-6x+4y^2+56y+169=0$
12	$4x^2-y^2-56x-6y+151=0$
13	$-x^2+4y^2+14x+40y-49=0$
14	$4x^2+49y^2+24x-392y+624=0$
15	$16x^2-5y+160x+410=0$
16	$x^2+y^2+10x-16y+40=0$
17	$-x^2+4y^2+2x+16y-85=0$
18	$4x^2-81y^2-40x-324y-548=0$
19	$36x^2+216x-9y+99=0$
20	$9x^2+25y^2-18x+200y+184=0$

21	$x^2+y^2-8x+14y+49=0$
22	$9x^2+49y^2-36x-490y+1212=0$
23	$4x^2-16y^2-32x+64y-64=0$
24	$4x^2+16y^2-4x+48y-27=0$
25	$4y^2+4y-25x+26=0$
26	$x^2+y^2+5x-3y-0.5=0$
27	$49x^2-9y^2-49x+27y-449=0$
28	$9x^2+y^2+18x-6y-63=0$
29	$3y^2-6y-8x-29=0$
30	$x^2+y^2+10x+8y-80=0$

Завдання 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

Задані координати вершин піраміди $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$, $A_4(x_4;y_4;z_4)$. Знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;
3) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$;
4) кут між гранями $A_1A_2A_3$ і $A_1A_3A_4$;
5) рівняння прямої A_1A_2 в канонічному і параметричному вигляді;
6) відстань від точки A_4 до грані $A_1A_2A_3$;
7) рівняння висоти, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$;
8) точку перетину висоти, проведеної з вершини A_4 з гранню $A_1A_2A_3$.

Варіант	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(10, 16,0)	(2;1;0)	(-3;-2;2)	(4;1;-2)
2	(6;5;2)	(-6;0;2)	(-3;-1;2)	(1;2;-1)
3	(1;3;6)	(-3;1;2)	(-1;-2;1)	(2;1;0)
4	(3;1;1)	(-1;4;1)	(-3;-2;1)	(3;4;-1)
5	(3;1;3)	(-3;4;1)	(-3;-4;1)	(2;3;-5)
6	(4;1;4)	(0;1;1)	(-5;3;0)	(3;0;-2)

7	(2;-1;-3)	(4;2;3)	(-4;3;0)	(1;3;-2)
8	(16;5;0)	(4;0;0)	(-3;-2;7)	(2;1;-2)
9	(1;1;6)	(-1;-3;2)	(-2;-1;2)	(4;0;0)
10	(-6;2;1)	(0;2;1)	(-2;-1;0)	(6;-2;-2)
11	(-1;-11;-1)	(-1;1;4)	(-1;5;-2)	(3;0;-1)
12	(-1;4;6)	(3;2;2)	(-4;5;-3)	(2;1;-3)
13	(-2;2;-3)	(-4;5;3)	(-2;1;-3)	(2;5;-4)
14	(2;0;-5)	(-2;1;3)	(-2;0;-4)	(3;2;-2)
15	(2;-1;12)	(-2;5;0)	(-3;2;-2)	(4;5;-3)
16	(5;6;2)	(3;4;1)	(-2;0;5)	(1;4;1)
17	(0;7;9)	(-2;3;5)	(-1;2;-1)	(3;2;-1)
18	(2;3;8)	(-1;5;2)	(-3;0;-1)	(6;-1;8)
19	(5;4;0)	(-3;0;1)	(-6;1;5)	(1;1;-6)
20	(-10;4;5)	(-6;1;5)	(-1;1;5)	(1;5;-2)
21	(1;4;3)	(-1;4;3)	(-2;4;0)	(2;5;-3)
22	(13;4;-2)	(-2;4;6)	(-2;5;-3)	(2;3;-1)
23	(-2;1;3)	(-2;5;3)	(-2;3;0)	(1;4;-3)
24	(2;-3;1)	(-4;5;1)	(-2;1;-2)	(2;3;0)
25	(0;0;-2)	(-2;3;4)	(-6;0;3)	(4;5;-1)
26	(8;14;1)	(-3;4;3)	(8;15;-1)	(6;16;-5)
27	(-9;-3;3)	(-6;3;1)	(-6;2;0)	(-6;4;-1)
28	(-7;-2;5)	(-4;2;5)	(-2;4;-1)	(-7;-2;-2)
29	(-1;-6;-10)	(-3;4;1)	(-3;4;-2)	(6;3;0)
30	(10;3;-2)	(-2;3;3)	(-1;4;-3)	(2;4;-6)

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

Лінійна алгебра

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Числа a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ називаються *коефіцієнтами*, $b_1, b_2, ..., b_m$ – *вільними членами* системи.

Система рівнянь (1) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і *неоднорідною*, якщо хоча б один з них відмінний від нуля.

Система (1) називається квадратною, якщо $m=n$.

Розв'язком системи (1) називається сукупність чисел $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, яка перетворює кожне рівняння системи у тотожність.

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \tag{2}$$

називається *визначником (детермінантом) другого порядку.*

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{3}$$

називається *визначником (детермінантом) третього порядку.*

Символи a_{ij} називаються *елементами визначника*. Перший індекс i вказує на номер рядка, а другий індекс j – на номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент. Так, наприклад, елемент a_{32} стоїть у третьому рядку і другому стовпці.

Елементи a_{11}, a_{22} у визначнику (2) і a_{11}, a_{22}, a_{33} у визначнику (3) становлять *головну діагональ* визначника, а елементи a_{12}, a_{21} для (2) і a_{13}, a_{22}, a_{31} для (3)– *побічну діагональ.*

Визначник третього порядку можна обчислити за *правилом трикутників* (рисунок 1).

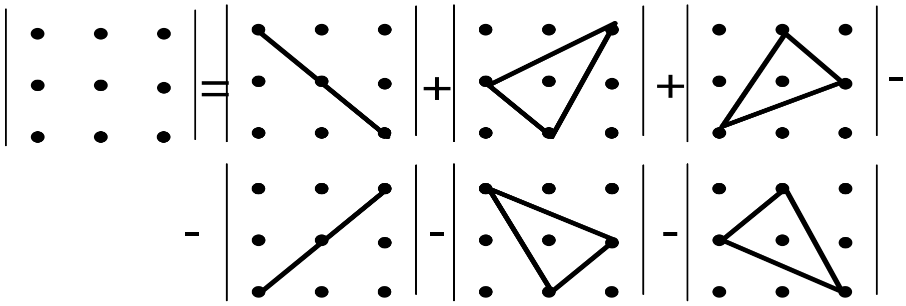


Рисунок 1 – Правило трикутників

Тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Також визначники можна знайти за допомогою теореми про розкладання визначника за елементами рядка або стовпця.

Теорема. *Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення:*

$$\Delta = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(розклад по елементах i – *рядка*, $i = \overline{1,\ n}$) або

$$\Delta = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(розклад по елементах j – стовпця, $j = \overline{1,\ n}$).

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Завдання 1.1. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 4x_2 + 3x_2 - x_3 = -6, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 10, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -4: \end{cases}$$

а) за правилом Крамера;
б) за допомогою оберненої матриці;
в) методом Гаусса.

Розв'язання:

а) правило Крамера застосовують на випадок, коли $\Delta \neq 0$. Тоді система має *єдиний розв'язок*, який обчислюється за формулами:

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, \ n}.$$

Якщо $\Delta = 0$, то формули Крамера не мають змісту. У цьому випадку система або несумісна (не має жодного розв'язку) або невизначена (має безліч розв'язків).

Формули для розв'язання систем двох і трьох лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера надані у додатку А.

Обчислюємо головний визначник системи за правилом трикутників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) \cdot (-2) + 5 \cdot 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot (-1) -$$

$$- 4 \cdot 3 \cdot 4 - 5 \cdot 3 \cdot (-2) = -6.$$

Обчислюємо визначники Δx_1, Δx_2, Δx_3 за допомогою розкладання за елементами стовпця.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} -6 & 3 & -1 \\ 10 & -1 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -6A_{11} + 10 \cdot A_{21} - 4 \cdot A_{31} = -6(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+10(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 4(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -6(2-12) - 10(-6+4) - 4(9-1) =$$

$$= 60 + 20 - 32 = 48,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 5 & 10 & 3 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -6A_{12} + 10 \cdot A_{22} - 4 \cdot A_{32} = -6(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+10(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 4(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6(-10-9) + 10(-8+3) + 4(12+5) =$$

$$= -114 - 50 + 68 = -96,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -6 \\ 5 & -1 & 10 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -6A_{13} + 10 \cdot A_{23} - 4 \cdot A_{33} =$$

$$= -6(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 10(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 4(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 \cdot (20+3) - 10 \cdot (16-9) - 4 \cdot (-4-15) = -138 - 70 + 76 = -132.$$

Отже, розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = -8,\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 16,\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 22.$$

Відповідь: $x_1 = -8$, $x_2 = 16$, $x_3 = 22$;

б) перепишемо систему (1) у вигляді *матричного рівняння*

$$A \cdot X = B,$$

де $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матриця, яка утворена із коефіцієнтів при невідомих;

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець із невідомих;

$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець із вільних членів системи.

Якщо головний визначник системи (1) $\Delta \neq 0$, то вона має єдиний розв'язок, який можна записати у вигляді

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Матрицю A^{-1} називають оберненою матрицею до матриці A і знаходять за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елемента a_{ij}.

Для нашої системи рівнянь:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю A^{-1}. Така матриця існує оскільки головний визначник системи $\Delta = -6 \neq 0$ (див. «а»).

Алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-10 - 9) = 19;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 + 3 = 23;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 + 4) = 2;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 3 = -5;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(16 - 9) = -7;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(12 + 5) = -17;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 15 = -19.$$

Отже, $A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -10 & 2 & 8 \\ 19 & -5 & -17 \\ 23 & -7 & -19 \end{pmatrix}$.

Таким чином,

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -10 & 2 & 8 \\ 19 & -5 & -17 \\ 23 & -7 & -19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -10 \cdot (-6) + 2 \cdot 10 + 8 \cdot (-4) \\ 19 \cdot (-6) - 5 \cdot 10 - 17 \cdot (-4) \\ 23 \cdot (-6) - 7 \cdot 10 - 19 \cdot (-4) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 60 + 20 - 32 \\ -114 - 50 + 68 \\ -138 - 70 + 76 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 48 \\ -96 \\ -132 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix}$;

в) *метод Гаусса* (*метод послідовних виключень*) полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система (1) перетворюється в еквівалентну систему, яка має вигляд

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = b'_1; \\ \qquad\quad x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2; \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = b'_3 \ . \end{cases}$$

Невідомі знаходимо послідовно, починаючи з останнього рівняння.

Зауваження. Метод Гаусса можна застосовувати і для випадку, коли кількість рівнянь не дорівнює числу невідомих, а також коли $\Delta = 0$.

Для зручності розв’язання системи розглянемо матрицю

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & -6 \\ 5 & -1 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & -2 & -4 \end{array} \right) \ .$$

1 Помножимо кожний елемент другого рядка на (-1) та додамо до відповідних елементів першого рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4-5 & 3+1 & -1-3 & -6-10 \\ 5 & -1 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & -2 & -4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -4 & -16 \\ 5 & -1 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & -2 & -4 \end{array} \right).$$

2 Помножимо кожний елемент першого рядка на 5 і додамо до відповідного елемента другого рядка (суму запишемо у другий рядок). Потім помножимо кожний елемент першого рядка на 3 і додамо до відповідних елементів третього рядка (суму запишемо у третій рядок):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -4 & -16 \\ 5 & -1 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & -2 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{c|c} \otimes 5 & \otimes 3 \\ + \hookleftarrow & \\ & + \hookleftarrow \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -4 & -16 \\ 5-5 & -1+20 & 3-20 & 10-80 \\ 3-3 & 4+12 & -2-12 & -4-48 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -4 & -16 \\ 0 & 19 & -17 & -70 \\ 0 & 16 & -14 & -52 \end{array}\right).$$

3 Помножимо кожний елемент другого рядка на (-16), а третього на 19 і додамо до відповідних елементів третього рядка (суму запишемо у третій рядок):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -4 & -16 \\ 0 & 19 & -17 & -70 \\ 0 & 16 & -14 & -52 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \otimes(-16). \\ \otimes 19 + \lrcorner \end{array}$$

Тоді маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -4 & -16 \\ 0 & 19 & -17 & -70 \\ 0 & -16\cdot 19+16\cdot 19 & -16\cdot(-17)+(-14)\cdot 19 & (-16)\cdot(-70)-52\cdot(19) \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -4 & -16 \\ 0 & 19 & -17 & -70 \\ 0 & 0 & 6 & 132 \end{array}\right).$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -x_1+4x_2-\ 4x_3=-16; \\ \quad 19x_2-17x_3=-70; \\ \qquad\quad 6x_3=132. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} -x_1+4x_2-\ 4x_3=-16; \\ \quad 19x_2-17x_3=-70; \\ \qquad\quad 6x_3=132. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1+4x_2-\ 4x_3=-16; \\ \quad 19x_2-17x_3=-70; \\ \qquad x_3=\dfrac{132}{6}=22. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x_1+4x_2- \ 4x_3=-16; \\ x_2=\dfrac{-70+17\cdot 22}{19}=\dfrac{304}{19}=16; \\ x_3=22. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=4\cdot 16-4\cdot 22+16=-8; \\ x_2=16; \\ x_3=22. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1=-8,\ x_2=16,\ x_3=22.$

Завдання 1.2. Розв’язати матричні рівняння:

1) $X\left[\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 10 & 16 \\ -8 & 12 \\ 4 & 8 \end{pmatrix};$

2) $\left[\begin{pmatrix} 17 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}\right]\cdot X=\begin{pmatrix} 2 & -8 & -6 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\cdot X+\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 7 \end{pmatrix}^T.$

Розв'язання

Основні види матричних рівнянь та формули для їх розв’язання надані в таблиці 1 ($\det A\neq 0, \det B\neq 0$)

Таблиця 1 – Матричні рівняння

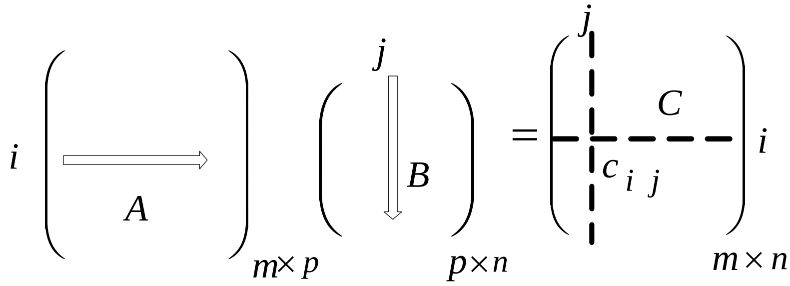
Матричне рівняння	Розв’язок матричного рівняння
1 $A\cdot X=C$	$X=A^{-1}\cdot C$
2 $X\cdot A=C$	$X=C\cdot A^{-1}$
3 $A\cdot X\cdot B=C$	$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$

Добуток $C=A\cdot B$ матриці A розмірності $m\times p$ на матрицю B розмірності $p\times n$ знаходимо за правилом

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i3}\cdot b_{3j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,j}.$$

Тобто, для того щоб знайти елемент $c_{i\,j}$, потрібно знайти суму добутків елементів рядка з номером i на відповідні елементи стовпця з номером j.

Схематично це виглядає так:



Вираз $m\times n$ означає, що матриця має m рядків і n стовпців.

1) $X\left[\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 10 & 16 \\ -8 & 12 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$

Знайдемо спочатку матрицю

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-3 & -3+5 \\ 5+1 & -3+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},$$

отримаємо

$$X\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 16 \\ -8 & 12 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Позначивши через $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 10 & 16 \\ -8 & 12 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, запишемо початкове рівняння у матричному вигляді:

$$X\cdot A=C.$$

За таблицею 1 маємо $X=C\cdot A^{-1}$.

Знаходимо матрицю A^{-1}. Вона існує, оскільки $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 12 = 4 \neq 0$.

Алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4,\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 6 = -6,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 4 = 4.$$

Таким чином,

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ -8 & 12 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10\cdot 1 + 16\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) & 10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 16\cdot 1 \\ -8\cdot 1 + 12\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) & -8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 12\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 8\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) & 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 8\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ -26 & 16 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2}.$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ -26 & 16 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$;

2) $\left[\begin{pmatrix} 17 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}\right] \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -6 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$

Виконавши спочатку дії в дужках

$$\begin{pmatrix} 17 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17-3 & -3+15 \\ 5+1 & -3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 6 & 5 \end{pmatrix},$$

отримаємо матричне рівняння вигляду

$$X \cdot A = C,$$

де $A = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -6 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Знаходимо матрицю A^{-1}.

$$\det A = \begin{vmatrix} 14 & 12 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 14 \cdot 5 - 6 \cdot 12 = 70 - 72 = -2 \neq 0 \;\Rightarrow A^{-1} \text{ існує.}$$

Обчислюємо алгебраїчні доповнення.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 5 = 5, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 6 = -6,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 12 = -12, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 14 = 14.$$

Тобто

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -6 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 6 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 6 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 & -6 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+6 & 20+30 & 15+24 \\ 6-7 & -24-35 & -18-28 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 50 & 39 \\ -1 & -59 & -46 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 1 & 50 & 39 \\ -1 & -59 & -46 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (10 \quad 7)^T$.

Ураховуючи, що $(10 \quad 7)^T = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$, маємо

$$\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Тоді початкове рівняння у матричному вигляді

$$A \cdot X = C,$$

де $A = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$,

розв'язок якого обчислюємо за формулою $X = A^{-1} \cdot C$ (таблиця 1).

Оскільки

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix},$$

то

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 10+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} -5 \\ 21 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.1. Задані точки $A(-5;4;-1)$, $B(3;-2;-1)$, $C(2;4;2)$ і $D(-2;3;-1)$. Необхідно:

1) знайти модуль та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$;

2) знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;

3) знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AC}$ на вісь вектора $\overrightarrow{AB}$;

4) обчислити площу паралелограма та площу трикутника, побудованих на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;

5) обчислити об'єм піраміди з вершинами в точках A, B, C і D;

6) знайти довжину висоти піраміди, проведеної з вершини D на основу ABC.

Розв’язання

Координати вектора $\overrightarrow{AB}$ з початком у точці $A(x_A;y_A;z_A)$ і кінцем у точці $B(x_B;y_B;z_B)$ знаходимо за формулою

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A).$$

Так, $\overrightarrow{AB}=\{3-(-5);-2-4;-1-(-1)\}=\{8;-6;0\}$,

$$\overrightarrow{AC}=\{2-(-5);4-4;2-(-1)\}=\{7;0;3\},$$

$$\overrightarrow{AD}=\{-2-(-5);3-4;-1-(-1)\}=\{3;-1;0\}.$$

1) *модуль* (довжину) вектора $\overrightarrow{AB}$ обчислюємо за формулою

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2},$$

тому $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{8^2+(-6)^2+0^2}=10$.

Напрямними косинусами вектора називаються косинуси кутів α,β,γ, які утворює цей вектор з осями координат $0x,0y,0z$ відповідно. Напрямні косинуси дорівнюють відношенню відповідних координат до модуля цього вектора. Для вектора $\overrightarrow{AB}$ напрямні косинуси дорівнюють:

$$\cos\alpha=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},\ \cos\beta=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5},\ \cos\gamma=\frac{0}{10}=0;$$

2) косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ знайдемо за формулою (додаток Б)

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$

Ураховуючи, що скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат, а $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{7^2+0^2+3^2}=\sqrt{58}$, отримаємо

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{8\cdot 7+(-6)\cdot 0+0\cdot 3}{10\sqrt{58}}=\frac{5{,}6}{\sqrt{58}}\approx 0{,}74;$$

3) для знаходження проекції вектора $\overrightarrow{AC}$ на вісь вектора $\overrightarrow{AB}$ скористаємося формулою (додаток Б)

$$Пр_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{56}{10}=5{,}6;$$

4) *векторний добуток* двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (позначається $\vec{a}\times\vec{b}$) – це вектор, модуль якого чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах, тобто $S_{\text{пар}}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

За формулою (додаток Б):

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix},$$

де $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$,
маємо

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & -6 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(-6\cdot 3 - 0\cdot 0) - \vec{j}\,(8\cdot 3 - 0\cdot 7) + \vec{k}\,(8\cdot 0 - (-6)\cdot 7) = -18\,\vec{i} - 24\,\vec{j} + 42\,\vec{k}\,.$$

Тобто $\vec{AB} \times \vec{AC} = \{-18; -24; 42\}$.

Модуль векторного добутку

$$\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \sqrt{(-18)^2 + (-24)^2 + 42^2} = \sqrt{2664}\,.$$

Таким чином, площа паралелограма $S_{\text{пар}} = \sqrt{2664} \approx 51{,}61$ кв. од., а площа трикутника $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{\text{пар}} \approx \frac{1}{2}\cdot 51{,}61 \approx 25{,}81$ кв. од.;

5) модуль *мішаного добутку* трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, а об'єм трикутної піраміди становить шосту частину від об'єму паралелепіпеда, тобто $V_{піp} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$. Мішаний добуток обчислюється за формулою (додаток Б)

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Отримаємо

$$\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD} = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (-6)\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 24 - 54 = -30.$$

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ і $\vec{AD}$, дорівнює 30 куб. од., а об'єм піраміди $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\cdot 30 = 5$ куб. од.;

6) використовуючи формулу для знаходження об'єму піраміди через площу основи (рисунок 2)

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot S_{\text{осн}}\cdot h,$$

запишемо вираз для обчислення довжини висоти

$$h = \frac{3\cdot V_{ABCD}}{S_{\text{осн}}} = \frac{3\cdot V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{15}{25{,}81} \approx 0{,}58 \text{ од.}$$

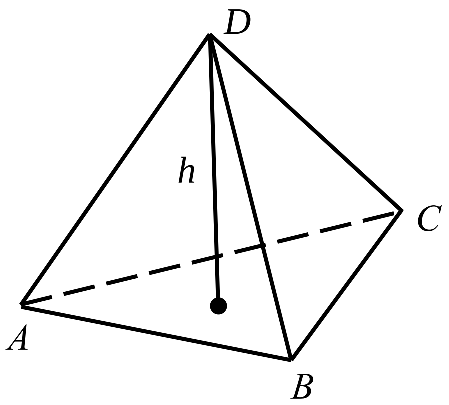


Рисунок 2 – Трикутна піраміда

Відповідь: 1) $|\vec{AB}| = 10$ $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\cos\gamma = 0$;

2) $\cos\left(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}\right) \approx 0{,}74$;

3) $Пр_{\vec{AB}}\vec{AC} = 5{,}6$;

4) $S_{\text{пар}} \approx 51{,}61$ кв. од., $S_{ABC} \approx 25{,}81$кв. од.;

5) $V_{ABCD} = 5$ куб. од.;

6) $h \approx 0{,}58$ од.

Завдання 2.2. Задані модулі векторів $|\vec{p}| = 12$ і $|\vec{q}| = 3$, а також кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ між ними. Потрібно:

а) визначити, при якому значенні параметра α вектори $\vec{a} = 2\vec{p} - 4\vec{q}$ і $\vec{b} = 5\vec{p} - \alpha\vec{q}$ будуть перпендикулярними;

б) знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} - 4\vec{q}$ та $\vec{c} = 5\vec{p} - 3\vec{q}$.

Розв’язання

Для розв’язання цього завдання необхідно скористатися властивостями скалярного (для «а») і векторного (для «б») добутків.

Властивості скалярного добутку:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;

2) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$;

3) $(\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$;

4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Властивості векторного добутку:

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$;

2) $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$;

3) $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = a \times (\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$;

4) $\bar{a} \times \vec{a} = \bar{0}$.

а) оскільки скалярний добуток двох перпендикулярних векторів дорівнює нулю, то з урахуванням властивостей скалярного добутку матимемо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(2\vec{p}-4\vec{q}\right)\cdot\left(5\vec{p}-\alpha\vec{q}\right)=10\vec{p}^{\,2}-2\alpha\,\vec{p}\cdot\vec{q}-20\,\vec{q}\cdot\vec{p}+4\alpha\vec{q}^{\,2}=$$

$$=10\left|\vec{p}\right|^2-(2\alpha+20)\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|\cos\varphi+4\alpha\left|\vec{q}\right|^2=$$

$$=10\cdot144-12\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot(2\alpha+20)+4\cdot\alpha\cdot9=1440-36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(2\alpha+20)+36\alpha=0,$$

$$\alpha=\frac{1440-360\sqrt{3}}{36\left(\sqrt{3}-1\right)}\approx30{,}98;$$

б) знайдемо векторний добуток $\vec{a}\times\vec{c}$. Ураховуючи його властивості, отримаємо

$$\vec{a}\times\vec{c}=\left(2\vec{p}-4\vec{q}\right)\times\left(5\vec{p}-3\vec{q}\right)=10\,\vec{p}\times\vec{p}-6\,\vec{p}\times\vec{q}-20\,\vec{q}\times\vec{p}+12\,\vec{q}\times\vec{q}=$$

$$=10\cdot0-6\,\vec{p}\times\vec{q}+20\,\vec{p}\times\vec{q}+12\cdot0=14\,\vec{p}\times\vec{q}.$$

Тоді $S=\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|=14\left|\vec{p}\times\vec{q}\right|=14\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|\sin\varphi=14\cdot12\cdot3\cdot\sin\frac{\pi}{6}=252$ кв. од.

Відповідь: а) $\alpha\approx30{,}98$, б) $S=252$ кв. од.

Завдання 3.1. Задані координати вершин трикутника $A(8,2)$; $B(-5,6)$; $C(3,0)$. Потрібно:

1) записати рівняння сторін трикутника;
2) записати рівняння медіани AM;
3) записати рівняння висоти BD;
4) записати рівняння прямої L_1, яка проходить через точку C паралельно до сторони AB;
5) знайти кут між прямими AB і AC;
6) знайти довжину висоти BD;
7) знайти довжину медіани AM;
8) знайти точку N перетину висоти BD та медіани AM;
9) навести креслення.

Розв’язання

Необхідний для розв’язання теоретичний матеріал наведено в додатках В і Г.

1) сторони трикутника знаходимо як рівняння прямих, що проходять через дві точки:

$M_1(x_1;y_1)$	$M_2(x_2;y_2)$
$A(8,2)$;	B(-5, 6)
$A(8,2)$;	C(3, 0)
B(-5, 6)	C(3, 0)

З додатка В отримаємо рівняння прямої AB: $\frac{x-8}{-5-8}=\frac{y-2}{6-2}$.

Тобто $\frac{x-8}{-13}=\frac{y-2}{4}$ (канонічне рівняння прямої AB).

Або $4(x-8)=-13(y-2) \Leftrightarrow 4x+13y-58=0$ - загальне рівняння прямої AB.

Аналогічно знаходимо рівняння прямих AC і BC:

$$AC:\ \frac{x-8}{3-8}=\frac{y-2}{0-2} \Leftrightarrow \frac{x-8}{-5}=\frac{y-2}{-2} \Leftrightarrow -2x+5y+6=0.$$

$$BC:\ \frac{x+5}{3+5}=\frac{y-6}{0-6} \Leftrightarrow \frac{x+5}{8}=\frac{y-6}{-6} \Leftrightarrow -6x-8y+18=0 \Leftrightarrow 3x+4y-9=0.$$

Відповідь: рівняння прямих AB: $4x+13y-58=0$,
AC: $-2x+5y+6=0$,
BC: $3x+4y-9=0$;

2) визначимо координати точки M (середини відрізка BC) та запишемо рівняння медіани AM як рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Координати точки $M_0(x_0;y_0)$ середини відрізка $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ знаходимо за формулою

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\ y_0=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Отже,

$$x_M = \frac{-5+3}{2} = -1,\ y_M = \frac{6+0}{2} = 3 \quad \Rightarrow M(-1;3).$$

Отримаємо рівняння медіани AM: $\frac{x-8}{-1-8} = \frac{y-2}{3-2} \Leftrightarrow x + 9y - 26 = 0$.

Відповідь: рівняння медіани AM: $x + 9y - 26 = 0$;

3) рівняння висоти BD - рівняння прямої, яка проходить через точку $B(-5;6)$ перпендикулярно до прямої AC. З умови перпендикулярності (додаток Г) маємо $k_{BD} = -\frac{1}{k_{AC}}$.

Кутовий коефіцієнт прямої AC дорівнює $k_{AC} = \frac{2}{5}$, тоді $k_{BD} = -\frac{5}{2}$. Отже, рівняння висоти BD має такий вигляд:

$$y - 6 = -\frac{5}{2}(x - (-5)) \Leftrightarrow 5x + 2y + 13 = 0.$$

Відповідь: рівняння висоти BD: $5x + 2y + 13 = 0$;

4) з умови паралельності (додаток Г) знайдемо рівняння прямої L_1, яка проходить через точку $C(3;0)$ паралельно до сторони AB: $4x + 13y - 58 = 0$:

$$4(x-3) + 13(y-0) = 0 \Leftrightarrow 4x + 13y - 12 = 0.$$

Відповідь: рівняння прямої L_1: $4x + 13y - 12 = 0$;

5) кут між прямими AB і AC знаходимо за формулою (додаток Г)

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

У нашому випадку

$$AB:\ 4x + 13y - 58 = 0,\ \vec{N}_{AB}(4;13),$$
$$AC:\ -2x + 5y + 6 = 0,\ \vec{N}_{AC}(-2;5).$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{4 \cdot (-2) + 13 \cdot 5}{\sqrt{4^2 + 13^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 5^2}} = \frac{57}{\sqrt{185} \cdot \sqrt{29}} \approx 0.778,$$

$\varphi = \arccos 0.778 \approx 39^\circ$.

Відповідь: кут між прямими AB і AC: $\varphi \approx 39^\circ$;

6) довжину висоти BD знайдемо як відстань від точки B до прямої AC, для чого використовуємо формулу відстані від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Звідси відстань від точки $B(-5;6)$ до прямої AC дорівнює

$$d = \frac{|-2 \cdot (-5) + 5 \cdot 6 + 6|}{\sqrt{(-2)^2 + 5^2}} = \frac{46}{\sqrt{29}} \approx 8{,}54.$$

Відповідь: довжина висоти $BD = 8{,}54$;

7) для знаходження довжини медіани AM скористаємося формулою відстані між двома точками:

$$M_1(x_1; y_1),\ M_2(x_2; y_2) \Rightarrow \quad |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Тоді відстань від точки $A(8,2)$ до точки $M(-1,3)$

$$AM = \sqrt{(-1-8)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{82} \approx 9{,}055.$$

Відповідь: довжина медіани $AM \approx 9{,}055$;

8) точку N перетину висоти $BD(5x+2y+13=0)$ та медіани AM $(x+9y-26=0)$ знайдемо розв’язавши систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x+2y+13=0, \\ x+9y-26=0; \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x+2y=-13, \\ x+9y=26. \end{cases}$$

За формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 45-2=43,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -13 & 2 \\ 26 & 9 \end{vmatrix} = -117-52=-169, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & -13 \\ 1 & 26 \end{vmatrix} = 130-(-13)=143,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{169}{43}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{143}{43}.$$

Відповідь: $N(-\frac{169}{43}; \frac{143}{43})$.

9) зробимо креслення (рисунок 3).

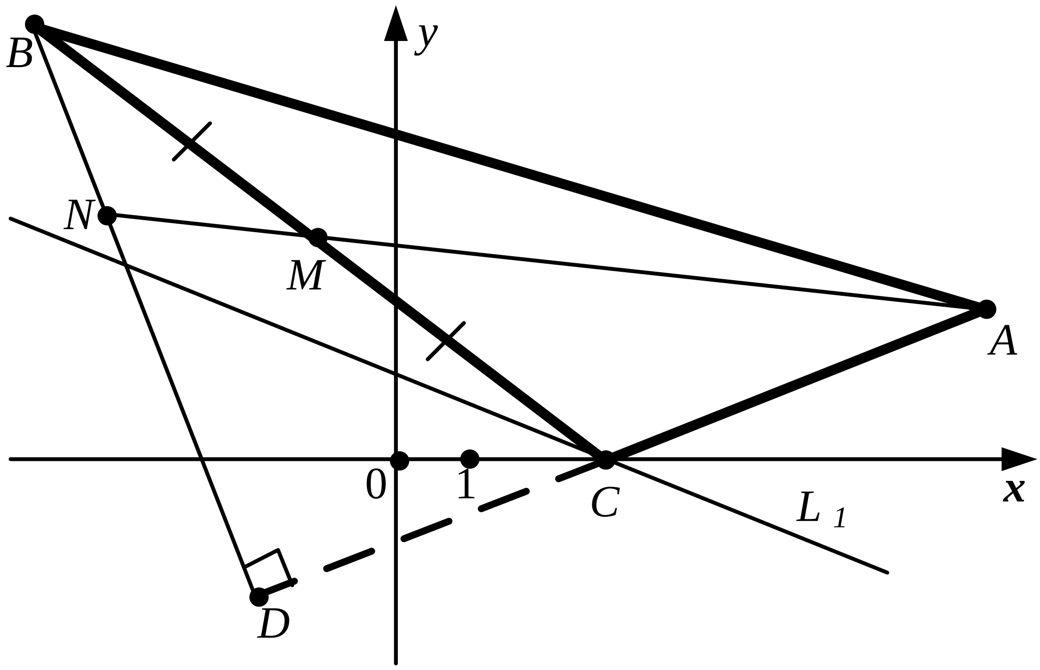


Рисунок 3 – Завдання 3

Завдання 3.2. Встановити тип кривої другого порядку та схематично зобразити її.

1) $4x^2 + 121y^2 + 24x - 242y - 327 = 0$;

2) $25x^2 - 64y^2 - 25x - 192y - 1737{,}75 = 0$;

3) $2y^2 - 4y - 9x + 29 = 0$.

Розв'язання

У додатку Д наведено канонічні рівняння кривих другого порядку та їхні параметри.

1) $4x^2 + 121y^2 + 24x - 242y - 327 = 0$.

Виділимо повний квадрат за обома змінними:

$$4\left(x + \frac{24}{2 \cdot 4}\right)^2 + 121\left(y - \frac{242}{2 \cdot 121}\right)^2 - 327 - \frac{24^2}{4 \cdot 4} - \frac{242^2}{4 \cdot 121} = 0,$$

$$4(x+3)^2 + 121(y-1)^2 - 327 - 36 - 121 = 0,$$

$$4(x+3)^2 + 121(y-1)^2 = 484.$$

Поділивши обидві частини рівняння на 484, отримаємо

$$\frac{(x+3)^2}{121}+\frac{(y-1)^2}{4}=1.$$

Зробимо паралельний перенос системи координат $x'=x+3,\ y'=y-1$. Тоді у новій системі координат $x'O'y'$ рівняння кривої матиме вигляд

$$\frac{(x')^2}{121}+\frac{(y')^2}{4}=1.$$

Це еліпс з центром у точці (-3; 1) з параметрами $a=\sqrt{121}=11,\ b=\sqrt{4}=2$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{121-4}=\sqrt{117}\approx 10.82$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{117}}{11}\approx 0.983.$

$F_1'(-10.82;0)$, $F_2'(10.82;\,0)$ – координати фокусів у системі координат $x'O'y'$.

$F_1(-13.82;1)$, $F_2(7.82;1)$ – координати фокусів у системі координат xOy (рисунок 4);

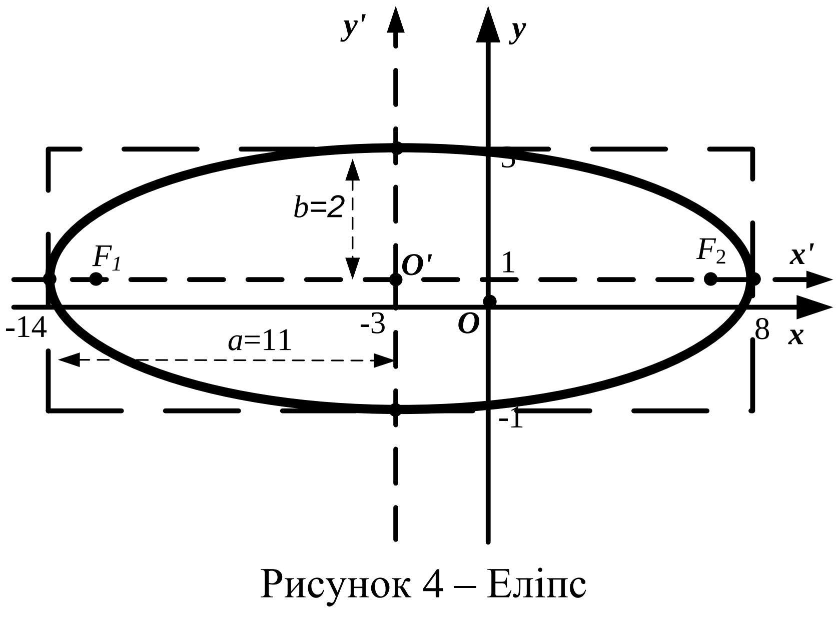


Рисунок 4 – Еліпс

2) $25x^2-64y^2-25x-192y-1737{,}75=0$.

Виділяємо повний квадрат:

$$25\left(x-\frac{25}{25\cdot 2}\right)^2-64\left(y+\frac{192}{64\cdot 2}\right)^2-1737{,}75-25\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+64\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=0,$$

$$25\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-64\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-1600=0,$$

$$25\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-64\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=1600 \quad |:1600,$$

$$\frac{25\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{1600}-\frac{64\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}{1600}=1,$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{64}-\frac{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}{25}=1.$$

Це гіпербола з центром у точці $\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ (рисунок 5).

Зробимо паралельний перенос системи координат: $x'=x-\frac{1}{2},\ y'=y+\frac{3}{2}$. Тоді у новій системі координат $x'O'y'$ рівняння кривої матиме вигляд

$$\frac{(x')^2}{64}-\frac{(y')^2}{25}=1.$$

Параметри гіперболи: $a=\sqrt{64}=8$, $b=\sqrt{25}=5$, $c=\sqrt{64+25}=\sqrt{89}\approx 9.43,\ \varepsilon=\frac{\sqrt{89}}{8}\approx 1.18$.

$F_1'(-9.43;0)$, $F_2'(9.43;\,0)$ – координати фокусів у системі координат $x'O'y'$.

$F_1(-8.93;\,-1.5)$, $F_2(9.93;-1.5)$ – координати фокусів у системі координат xOy.

$y'=\pm\frac{5}{8}x'$ – рівняння асимптот у системі координат $x'O'y'$ або в системі координат xOy: $y+\frac{3}{2}=\pm\frac{5}{8}\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

Таким чином, рівняння асимптот: $y=\frac{5}{8}x-\frac{29}{16}$ і $y=-\frac{5}{8}x-\frac{19}{16}$;

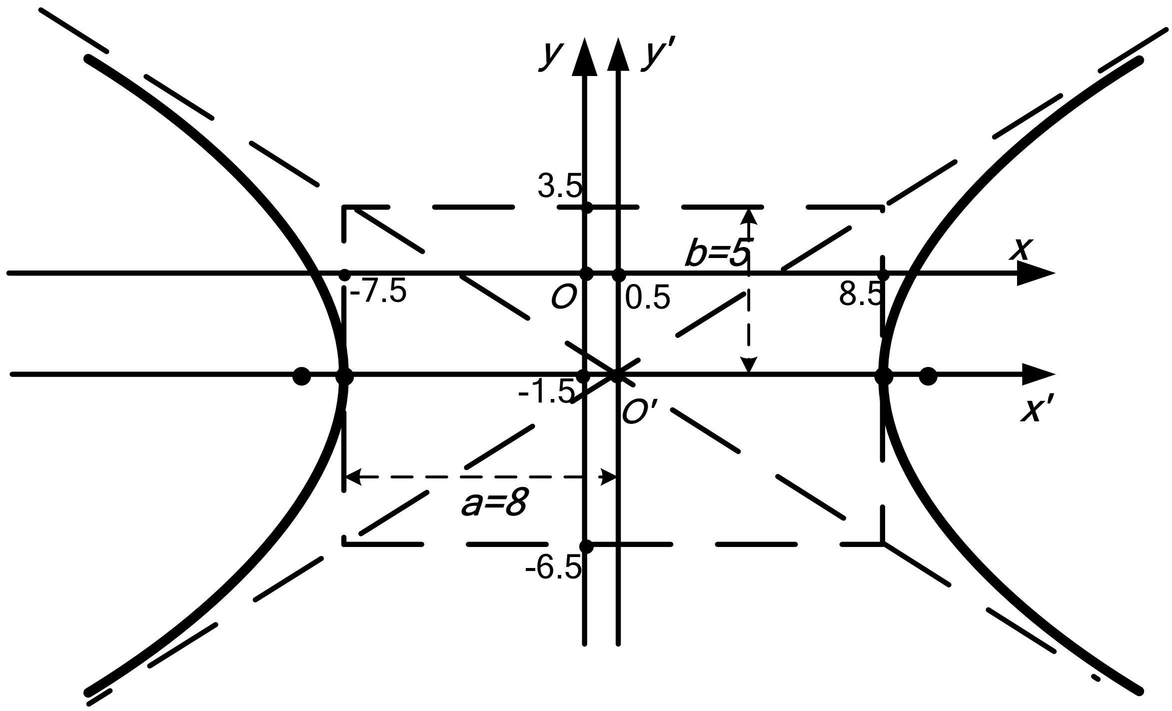


Рисунок 5 – Гіпербола

3) $2y^2-4y-9x+29=0$.

Виділяємо повний квадрат відносно змінної y:

$$2\left(y-\frac{4}{2\cdot 2}\right)^2-9x+29-2(1)^2=0,$$
$$2(y-1)^2-9x+29-2=0,$$
$$2(y-1)^2=9(x-3),$$
$$(y-1)^2=\frac{9}{2}(x-3).$$

Це парабола з вершиною в точці (3; 1) (рисунок 6). Зробивши паралельний перенос системи координат: $x'=x-3,\ y'=y-1$, отримаємо рівняння

$$(y')^2=\frac{9}{2}(x').$$

Параметр параболи $p=\frac{9}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$. Отже, $x'=-\frac{9}{8}$ – рівняння директриси в системі координат $x'O'y'$ і $x=\frac{15}{8}$ – рівняння директриси в системі координат xOy.

$F'(1.125;0)$ – фокус у системі координат $x'O'y'$, $F(4.125;1)$ – фокус у системі координат xOy.

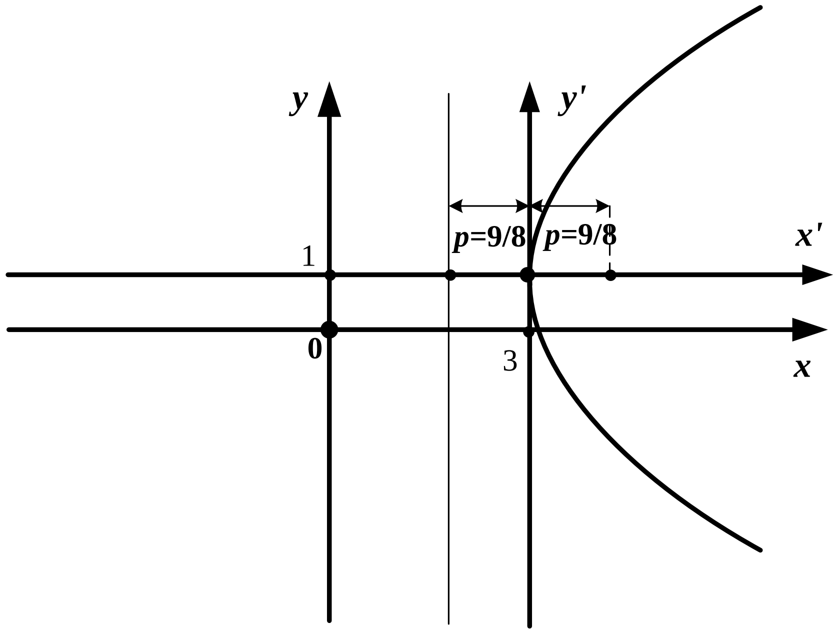


Рисунок 6 – Парабола

Завдання 4. Задані координати вершин піраміди $A_1(8;2;1)$, $A_2(-5;6;2)$, $A_3(3;0;4)$, $A_4(-1;5;-4)$. Знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;

2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

3) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$;

4) кут між гранями $A_1A_2A_3$ і $A_1A_3A_4$;

5) рівняння прямої A_1A_2 в канонічному і параметричному вигляді;

6) відстань від точки A_4 до грані $A_1A_2A_3$;

7) рівняння висоти, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

8) точку перетину висоти, проведеної з вершини A_4, з гранню $A_1A_2A_3$.

Розв'язання

Формули, потрібні для розв'язання цього завдання, наведені в додатках Е, Ж.

1) довжина ребра A_1A_2 обчислюємо за формулою

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,,$$

тому $|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(-13)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{186} \approx 13{,}64$.

Відповідь: довжина ребра $A_1A_2 \approx 13{,}64$;

2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4 знайдемо за формулою

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}}\right) = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{|\overrightarrow{A_1A_2}|\,|\overrightarrow{A_1A_4}|}\,,$$

де $\overrightarrow{A_1A_2}(-13;4;1)$, $\overrightarrow{A_1A_4}(-9;3;-5)$.

Отримаємо

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}}\right) = \frac{-13\cdot(-9) + 4\cdot 3 + 1\cdot(-5)}{\sqrt{186}\cdot\sqrt{(-9)^2 + 3^2 + (-5)^2}} = \frac{124}{\sqrt{186}\sqrt{115}} \approx 0{,}85.$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}}\right) = \arccos 0{,}85 \approx 32^0.$$

Відповідь: кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4 становить 32^0;

3) для обчислення кута між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ спочатку необхідно скласти рівняння грані $A_1A_2A_3$ (додаток Е)

$$\begin{vmatrix} x-8 & y-2 & z-1 \\ -5-8 & 6-2 & 2-1 \\ 3-8 & 0-2 & 4-1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-8)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} -13 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} + (z-1)\cdot\begin{vmatrix} -13 & 4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отримаємо рівняння грані $A_1A_2A_3$ в загальному вигляді

$$7x + 17y + 23z - 113 = 0.$$

Її нормальний вектор $\vec{N}_1 = \vec{N}_{A_1A_2A_3} = (7;17;23)$.

Кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ (додаток Ж):

$$\sin\varphi = \frac{\left|\vec{A_1A_4}\cdot\vec{N}_1\right|}{\left|\vec{A_1A_4}\right|\cdot\left|\vec{N}_1\right|} = \frac{\left|-9\cdot 7 + 3\cdot 17 + (-5)\cdot 23\right|}{\sqrt{7^2+17^2+23^2}\cdot\sqrt{(-9)^2+3^2+(-5)^2}} \approx 0{,}40.$$

Отже, $\varphi = \arcsin 0{,}40 \approx 24^0$.

Відповідь: кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ становить 24^0;

4) для обчислення кута між гранями $A_1A_2A_3$ і $A_1A_3A_4$ необхідно скласти рівняння грані $A_1A_3A_4$ (рівняння грані $A_1A_2A_3$ було отримано в пункті 3).

Для грані $A_1A_3A_4$:

$$\begin{vmatrix} x-8 & y-2 & z-1 \\ 3-8 & 0-2 & 4-1 \\ -1-8 & 5-2 & -4-1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-8)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -9 & -5 \end{vmatrix} + (z-1)\cdot\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Отримаємо рівняння грані $A_1A_3A_4$ в загальному вигляді

$$x-52y+3z+93=0, \Rightarrow \vec{N}_2=(1;-52;3).$$

За додатком Е обчислюємо

$$\cos\varphi=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\cdot\left|\vec{N}_2\right|}=\frac{7\cdot 1+17\cdot(-52)+23\cdot 3}{\sqrt{7^2+17^2+23^2}\cdot\sqrt{1^2+(-52)^2+3^2}}\approx -0{,}53.$$

Отже, $\varphi=\arccos(-0{,}53)\approx 122^0$.

Відповідь: кут між гранями $A_1A_2A_3$ і $A_1A_3A_4$ становить 122^0;

5) складаємо рівняння прямої A_1A_2 (додаток Ж) в канонічному

$$\frac{x-8}{-13}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-1}{1}$$

та параметричному вигляді

$$\begin{cases} x=-13t+8, \\ y=4t+2, \\ z=t+1,\ t\in(-\infty;+\infty). \end{cases}$$

Відповідь: канонічне та параметричне рівняння прямої A_1A_2 має вигляд $\frac{x-8}{-13}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-1}{1}$ та $\begin{cases} x=-13t+8, \\ y=4t+2, \\ z=t+1,\ t\in(-\infty;+\infty). \end{cases}$ відповідно;

6) відстань від точки $A_4(-1;5;-4)$ до грані $A_1A_2A_3$ $(7x+17y+23z-113=0)$ обчислюємо за відповідною формулою (додаток Е)

$$h=\frac{|7\cdot(-1)+17\cdot 5+23\cdot(-4)-113|}{\sqrt{7^2+17^2+23^2}}\approx 4{,}31.$$

Відповідь: відстань від точки A_4 до грані $A_1A_2A_3$ дорівнює 4,31;

7) оскільки висота A_4M перпендикулярна грані $A_1A_2A_3$ (рисунок 7), то її напрямний вектор $\vec{s} = \vec{N}_1$. Враховуючи, що ця пряма проходить через точку $\mathrm{A}_4(-1;5;-4)$, за додатком Ж маємо

$$\frac{x+1}{7} = \frac{y-5}{17} = \frac{z+4}{23}.$$

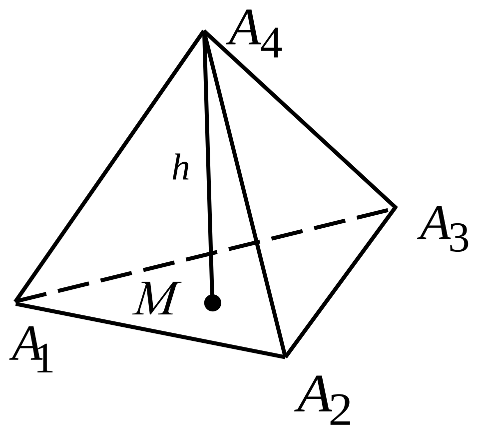


Рисунок 7 – Завдання 4

Відповідь: канонічне рівняння висоти, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$, має вигляд $\frac{x+1}{7} = \frac{y-5}{17} = \frac{z+4}{23}$;

8) знайдемо точку M перетину висоти A_4M з гранню $A_1A_2A_3$, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{7} = \frac{y-5}{17} = \frac{z+4}{23}, \\ 7x + 17y + 23z - 113 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x+1}{7} = \frac{y-5}{17} = \frac{z+4}{23} = t, \\ 7x + 17y + 23z - 113 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7t - 1, \\ y = 17t + 5, \\ z = 23t - 4, \\ 7(12t - 1) + 17(17t + 5) + 23(23t - 4) - 113 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{127}{86}, \\ x = \frac{22}{867}, \\ y = \frac{6494}{867}, \\ z = -\frac{547}{867}. \end{cases}$$

Відповідь: точка перетину висоти, проведеної з вершини A_4 з гранню $A_1A_2A_3$, має координати $M\left(\frac{22}{867};\frac{6494}{867};-\frac{547}{867}\right)$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1 Матриці. Визначення, типи матриць.

2 Визначники. Визначення і властивості.

3 Що називається алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} квадратної матриці?

4 Чим відрізняється мінор елемента a_{ij} від алгебраїчного доповнення?

5 Способи обчислення визначників.

6 Дії над матрицями.

7 Які матриці можна множити?

8 Які матриці називаються невиродженими?

9 Для яких матриць існує обернена матриця?

10 Визначення оберненої матриці.

11 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Однорідні і неоднорідні СЛАР.

12 Яка система лінійних рівнянь називається сумісною?

13 Коли система лінійних рівнянь називається несумісною?

14 Що називається розв’язком системи лінійних рівнянь?

15 Які системи можна розв’язувати за формулами Крамера?

16 Формули Крамера.

17 Матричні рівняння.

18 У чому полягає метод Гаусса?

19 Вектори. Визначення, лінійні дії над векторами.

20 Координати вектора. Лінійні дії над векторами в координатній формі.

21 Що називається проекцією вектора на вісь?

22 Скалярний добуток векторів. Визначення, властивості.

23 Векторний добуток векторів. Визначення, властивості.

24 Умова перпендикулярності (колінеарності) двох векторів.

25 У чому полягає геометричний зміст векторного добутку?

26 Мішаний добуток векторів. Визначення, властивості.

27 Які вектори називаються компланарними? Умова компланарності векторів.

28 Загальне рівняння прямої на площині.

29 Рівняння прямої у канонічній формі.

30 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

31 Рівняння прямої у відрізках.

32 Умова паралельності прямих.

33 Кут між прямими.

34 Умова перпендикулярності прямих.

35 Відстань від точки до прямої.

36 Способи задавання прямої у просторі.

37 Загальне рівняння площини.

38 Кут між прямою та площиною.

39 Умова паралельності прямої та площини.

40 Умова перпендикулярності прямої та площини.

41 Умова паралельності двох прямих у просторі.

42 Умова перпендикулярності (паралельності) двох площин.

43 Відстань від точки до площини.

44 Криві другого порядку.

45 Ексцентриситет еліпса.

46 Ексцентриситет параболи.

47 Чому дорівнює ексцентриситет кола?

48 Ексцентриситет гіперболи.

49 Параметри гіперболи.

50 Параметри еліпса.

51 Параметри параболи.

52 Яка крива другого порядку має асимптоти? Рівняння асимптот.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1 Дано матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} \sin x & -3 \\ 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Вказати, які з матриць можна:

1) додавати;

2) множити.

А	Б	В	Г	Д
A і C	A і B	A і B, B і C	A і A	Інша відповідь

2 Добутком яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$?

А	Б	В	Г	Д
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	Немає правильної відповіді

3 Вказати правдиві твердження. Визначник дорівнює нулю, якщо:

А	Б	В	Г
Відповідні елементи двох його рядків пропорційні	Усі елементи одного рядка однакові	Усі елементи одного з рядка або стовпця нульові	Усі елементи його головної діагоналі нульові

4 Яка матриця є виродженою (особливою)?

А	Б	В	Г	Д
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	Немає правильної відповіді

5 Детермінант якої з даних матриць дорівнює 1?

А	Б	В	Г
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

6 Яка з матриць є виродженою (особливою)?

А	Б	В	Г	Д
$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$	Немає правильної відповіді

7 При якому значенні λ матриця $A=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ є виродженою?

А	Б	В	Г	Д
3	0	-0,4	0,5	Інша відповідь

8 Вказати матрицю, обернена до якої має вид $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г	Д
$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	Немає правильної відповіді

9 Яке матричне рівняння має розв'язок $(x,y)=(2,-1)$?

а) $(x,y)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=(8,-1)$;

б) $(x,y)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=(11,1)$;

в) $(x,y)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=(1,7)$;

г) $(x,y)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=(13,-4)$;

д) немає правильної відповіді.

10 Знайти мінор елемента a_{32} матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

А	Б	В	Г	Д
-12	12	-22	2	Немає правильної відповіді

11 Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають:

а) вектор $\vec{c}$, довжина якого дорівнює $\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$	б) число $\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$
в) число $\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$	г) інша відповідь

12 Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають:

а) вектор $\vec{c}$, такий що: • $\left\|\vec{c}\right\| = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$; • $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$; • $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку	б) число $\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$
в) число $\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$	г) інша відповідь

13 Дано вектори $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$. Вказати формулу для обчислення:

1) скалярного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

А	Б	В	Г
$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$	$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$	Інша відповідь

14 Вказати формулу для обчислення мішаного добутку векторів $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$.

А	Б	В	Г
$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$	$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$	Інша відповідь

15 Дано вектори $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$. Вказати:

а) умову колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) умову перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

А	Б	В	Г
$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$	$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$	$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0$	Інша відповідь

16 Скалярний добуток векторів $\vec{a}(1;3;-2)$ і $\vec{b}(0;2;-6)$ дорівнює:

А	Б	В	Г	Д
-3	12	10	18	Інша відповідь

17 При якому значенні m вектори $\vec{a}(m;3;-3)$ і $\vec{b}(4;1;2)$ перпендикулярні?

А	Б	В	Г	Д
0,25	0,75	0,5	4	Інша відповідь

18 Знайти довжину вектора $\vec{a}(-5;3;4)$.

А	Б	В	Г	Д
$5\sqrt{2}$	5	50	$2\sqrt{3}$	Інша відповідь

19 Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}(2;0;-3)$ і $\vec{b}(0{,}5;1;2)$.

А	Б	В	Г	Д
$3\sqrt{2}$	0	-0,5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	Інша відповідь

20 Геометричний зміст мішаного добутку полягає в:

А	Б	В	Г
обчисленні площі трапеції	обчисленні площі паралелограма (трикутника)	обчисленні об'єму паралелепіпеда (піраміди)	обчисленні об'єму кулі

21 Геометричний зміст векторного добутку полягає в:

А	Б	В	Г
обчисленні площі трапеції	обчисленні площі паралелограма (трикутника)	обчисленні об'єму паралелепіпеда (піраміди)	обчисленні довжини вектора

22 Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(6;2;1)$ і $\vec{b}(3;1;3)$.

А	Б	В	Г	Д
20	$\sqrt{100}$	$\sqrt{250}$	23	Інша відповідь

23 Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a}(3;-1;5)$ і $\vec{b}(-6;2;10)$.

А	Б	В	Г	Д
10	0	$\sqrt{25}$	3	Інша відповідь

24 При якому значенні k площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(2;k;4)$ і $\vec{b}(1;3;2)$, дорівнює нулю?

А	Б	В	Г	Д
6	0	$\sqrt{10}$	-1	Інша відповідь

25 Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{b}$.

А	Б	В	Г	Д
18	$\sqrt{18}$	0	9	Інша відповідь

26 Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}(1;0;4)$ і $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

А	Б	В	Г	Д
4,5	$\sqrt{18}$	10	9	Інша відповідь

27 При якому значенні k вектори $\vec{a}(0;k;1)$, $\vec{b}(5;3;2)$ і $\vec{c}(0;12;4)$ компланарні?

А	Б	В	Г	Д
-3	1	0	3	Інша відповідь

28 Обчислити об’єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}(0;2;1)$, $\vec{b}(7;3;2)$ і $\vec{c}(0;2;7)$.

А	Б	В	Г	Д
-3	14	10	84	Інша відповідь

29 Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

А	Б	В	Г	Д
35	-14	51	-51	Інша відповідь

30 Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо $\vec{a} \times \vec{b} = (12;0;5)$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

А	Б	В	Г	Д
35	-26	16	-46	Інша відповідь

31 Яка з прямих перпендикулярна до осі Ox?

А	Б	В	Г	Д
$5x + y + 8 = 0$	$5x + 8 = 0$	$5x - 8 = 0$	$5x - 5y + 8 = 0$	Немає правильної відповіді

32 Яка з прямих утворює тупий кут з віссю Ox?

А	Б	В	Г	Д
$y = 2x + 1$	$y = \frac{1}{3}x - 5$	$y = -\frac{1}{2}x + 4$	$y = \frac{2}{5}x + 4$	Немає правильної відповіді

33 Яка з прямих перетинає вісь Ox у точці $M_0(4, 0)$?

А	Б	В	Г	Д
$3x + y - 8 = 0$	$3x + y - 12 = 0$	$3x + 4y - 8 = 0$	$4x - y - 7 = 0$	Немає правильної відповіді

34 Яка з прямих проходить через точки $M_1(1, 3)$, $M_2(6, 5)$?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2}$	$\frac{x-1}{5} = \frac{y+3}{2}$	$\frac{x+1}{4} = \frac{y+3}{2}$	$\frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{2}$	Немає правильної відповіді

35 Яка з прямих відтинає на осях координат відрізки $a = 2$, $b = 5$?

А	Б	В	Г	Д
$5x + 3y - 10 = 0$	$5x + 2y - 9 = 0$	$5x + 2y - 10 = 0$	$5x - 10y - 10 = 0$	Немає правильної відповіді

36 Які з двох прямих паралельні між собою?

А	Б	В	Г	Д
$3x - y + 5 = 0$ і $2x + y + 4 = 0$	$3x - y + 5 = 0$ і $3x + y + 5 = 0$	$3x - y + 5 = 0$ і $-6x + 2y - 2 = 0$	$3x - y + 7 = 0$ і $6x + y - 7 = 0$	Немає правильної відповіді

37 Яка з прямих перпендикулярна вектору $\vec{N}(3, 4)$?

А	Б	В	Г	Д
$4x + 3y - 7 = 0$	$3x - 4y + 7 = 0$	$3x + 4y - 8 = 0$	$4x - 3y + 8 = 0$	Немає правильно ї відповіді

38 Які з двох прямих перпендикулярні?

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} y = 2x + 1; \\ y = \frac{1}{2}x + 3. \end{cases}$	$\begin{cases} y = 2x + 1; \\ y = \frac{1}{3}x - 3. \end{cases}$	$\begin{cases} y = 2x - 1; \\ y = -\frac{1}{2}x + 1. \end{cases}$	$\begin{cases} y = 2x + 5; \\ y = 3x - 1. \end{cases}$	Немає правильної відповіді

39 Яка з прямих паралельна вектору $\vec{s}(3, -1)$?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{1}$	$\frac{x-3}{6} = \frac{y-2}{-2}$	$\frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{-3}$	$\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{3}$	Немає правильної відповіді

40 Які з двох прямих паралельні між собою?

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} y = 3x + 5; \\ y = -2x - 4. \end{cases}$	$\begin{cases} y = 3x + 5; \\ y = -3x - 5. \end{cases}$	$\begin{cases} y = 3x + 5; \\ y = 3x + 1. \end{cases}$	$\begin{cases} y = 3x + 7; \\ y = -6x + 7. \end{cases}$	Немає правильної відповіді

41 Множина точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок (фокусів) , є сталою і більшою за відстань між фокусами визначає:

А	Б	В	Г
Еліпс	Гіперболу	Параболу	Кулю

42 Множина точок площини, модуль різниці відстаней від яких до двох фіксованих точок (фокусів), є сталою і меншою за відстань між фокусами визначає:

А	Б	В	Г
Еліпс	Гіперболу	Параболу	Кулю

43 Множина точок площини, які рівновіддалені від фіксованої точки (фокус) і фіксованої прямої (директриса), яка не проходить через фокус визначає:

А	Б	В	Г
Еліпс	Гіперболу	Параболу	Кулю

44 Множина точок, які рівновіддалені від однієї точки, визначає:

А	Б	В	Г
Коло	Гіперболу	Параболу	Параболоїд

45 Вказати тип кривої, заданої рівнянням:

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1;$

2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1;$

3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1;$

4) $x^2=4y;$

5) $y^2=0{,}5x.$

А	Б	В	Г	Д
Еліпс	Гіпербола	Парабола	Коло	Немає правильної відповіді

46 Для кривої $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20}=1$ знайти відстань між фокусами.

А	Б	В	Г	Д
2	4	8	6	Інша відповідь

47 Вказати центр та уявну вісь кривої $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{16}=1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1;2)$, вісь Oy.	$(1;-2)$, вісь Oy.	$(0;0)$, вісь Ox.	$(1;2)$, вісь Ox.	Немає правильної відповіді

48 Вказати значення параметра p для кривої $y^2=8x$.

А	Б	В	Г	Д
-4	2	8	4	Немає правильної відповіді

49 Вказати тип кривої, яка визначається рівнянням:

1) $x^2+y^2-4=0$;
2) $4x^2-5y^2=20$;
3) $2x=y^2$;
4) $x^2+4y^2=16$.

А	Б	В	Г	Д
Еліпс	Гіпербола	Парабола	Коло	Немає правильної відповіді

50 Чому дорівнює ексцентриситет кривої $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$?

А	Б	В	Г	Д
1/3	2/3	4/9	$\sqrt{13}/3$	Інша відповідь

51 Вказати координати фокусів кривої $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{70}=1$.

А	Б	В	Г	Д
$F_{1,2}(\pm 6;\ 0)$	$F_{1,2}(0;\ \pm 6)$	$F_{1,2}(\pm 6;\ \pm 6)$	$F_{1,2}(2;\ \pm 6)$	Немає правильної відповіді

52 Чому дорівнює ексцентриситет кривої $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$?

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{21}/5$	21/5	5/2	25/4	Інша відповідь

53 Знайти напрямний вектор прямої $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{0}$.

А	Б	В	Г	Д
$(0;2;3)$	(3; 0; 2)	(-1; 1; 2)	(2; 3; 0)	Інша відповідь

54 При якому λ пряма $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+5}{4}$ паралельна площині $x-\lambda y+10z-4=0$?

А	Б	В	Г	Д
14	16	7	9	Інша відповідь

55 При якому значенні k площини $2x-4y+kz-3=0$ і $3x-6y+24z-4=0$ паралельні?

А	Б	В	Г	Д
8	16	-16	3	Інша відповідь

56 Вказати нормальний вектор площини $x+3y-2z+4=0$.

А	Б	В	Г	Д
$(1;3;-2)$	(3; 0; 2)	(-1; 1; 2)	(2; 3; 0)	Немає правильної відповіді

57 Пряма $\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{-1}$ проходить через точку:

А	Б	В	Г	Д
$(1;3;-2)$	(3; -2; 0)	(-1; 1; 2)	(2; 3; 0)	Немає правильної відповіді

58 Яка з прямих проходить через точку $A(4;4;2)$?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z+1}{-3}$	$\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{1}$	$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{2}$	$\frac{x-1}{5}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{7}$	Немає правильної відповіді

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Дубовик, В. П. Вища математика [Текст] / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А. С. К., 2001. – 648 с.

2 Вища математика: Збірник задач [Текст] : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик [та ін.]. – Київ : А.С.К., 2005. – 480 с.

3 Овчинніков, П. П. Вища математика [Текст] : підручник: у 2 ч. / П. П. Овчинніков, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко; за заг. ред. П. П. Овчиннікова. – Київ : Техніка, 2003. – Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне інтегральне числення. – 600 с.

4 Вища математика в прикладах і задачах [Текст] : навч. посібник: у 2 т. / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба, Г. Б. Лінник [та ін.];

за ред. Л. В .Курпи. – Харків : НТУ «ХПІ», 2009. – Т.1 : Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. – 532 с.

5 Герасимчук, В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах [Текст] : навч. посібник для техн. вузів / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – Київ : Книги України ЛТД, 2009. – Ч. 1: Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до мат. аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Прикладні задачі. – 578 с.

6 Коляда, Р. В. Вища математика [Текст] : навч. посібник для вищ. навч. закл. / Р. В. Коляда, І. О. Мельник, О. М. Мельник. – 2 вид., випр. та доп. – Львів : Магнолія, 2015. – 342 с.

7 Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики [Текст] / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. – М. : Астрель; АСТ, 2001. — 656 с.

8 Сборник задач по математике для втузов [Текст] : в 4 ч. / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1993. – Ч. 1: Линейная алгебра и основы математического анализа. – 480 с.

9 Юрчак, Н. С. Завдання до контрольних робіт з дисципліни «Вища математика» для студентів факультету ОПУТ заочної форми навчання [Текст] /Н. С. Юрчак, Н. І. Волохова, Н. Г. Панченко. – Харків : УкрДАЗТ, 2009. – Ч. І. – 50 с.

10 Могульський, Є. З. Вступ до лінійної алгебри та аналітичної геометрії [Текст] : навч. посібник / Є. З. Могульський, В. І. Храбустовський, Г. П. Бородай. – Харків : УкрДАЗТ, 2006. – 110 с.

11 Лінійна алгебра та аналітична геометрія [Текст] : метод. вказівки і завдання для студентів 1 курсу загальнотехнічних спеціальностей заочної форми навчання / Р. М. Давидов, Н. С. Юрчак, Н. І. Волохова, Л. І. Макаренко. – Харків : ХарДАЗТ, 2000. – 47 с.

ДОДАТОК А
Лінійна алгебра

Система	Формули Крамера
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$	$x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \; x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$ де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ – головний визначник системи, $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \; \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$	$x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \; x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \; x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$ де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ – головний визначник системи, $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$ $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$ $\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$

ДОДАТОК Б
Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів

Добуток	Формула	Геометричний зміст
Скалярний	$\bar{a}\cdot\bar{b}=(\bar{a},\bar{b})=\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\cdot\cos\varphi$ $\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$.	1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a}\perp\bar{b}$; 2) $Пр_{\,\bar{a}}\bar{b}=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert}$; 3) $\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert}$.
Векторний	$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_y\end{vmatrix}$	1) $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}\Leftrightarrow -\ \bar{a}$, $\bar{b}$ колінеарні вектори; 2) $S_{пар}=\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert$, $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert$; 3) $\sin\varphi=\dfrac{\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert}{\lvert\bar{a}\rvert\lvert\bar{b}\rvert}$.
Мішаний	$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.	1) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0\Leftrightarrow \bar{a},\bar{b},\bar{c}$ - компланарні вектори; 2) $V_{\text{пар}}=\lvert\bar{a}\bar{b}\bar{c}\rvert$, $V_{\text{пір}}=\frac{1}{6}\lvert\bar{a}\bar{b}\bar{c}\rvert$.

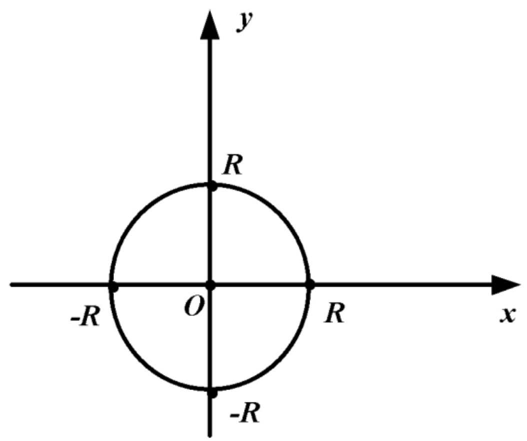
ДОДАТОК В
Види рівнянь прямої на площині

Назва	Рівняння	Параметри
1 Загальне рівняння прямої	$Ax + By + C = 0$	$\overrightarrow{N}(A, B)$ – нормальний вектор прямої
2 Рівняння прямої, яка проходить через дві точки	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	$M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ – точки, через які проходить пряма
3 Канонічне рівняння	$\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m}$	$\vec{s}(l, m)$ – напрямний вектор прямої
4 Параметричне рівняння	$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0 \end{cases}$	$\vec{s}(l, m)$ – напрямний вектор прямої, (x_0, y_0) – координати точки, через яку проходить пряма, $t \in (-\infty, +\infty)$ – параметр
5 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$y = kx + b$	$k = tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт (α – кут між прямою і додатним напрямом осі $0x$), b – ордината точки перетину прямої з віссю $0y$
6 Рівняння прямої, яка проходить через точку (x_0, y_0) з заданим кутовим коефіцієнтом	$y - y_0 = k(x - x_0)$	$k = tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт (α – кут між прямою і додатним напрямом осі $0x$)
7 Рівняння прямої у відрізках	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$	$(a, 0)$, $(0, b)$ – точки перетину прямої з осями $0x$ і $0y$ відповідно

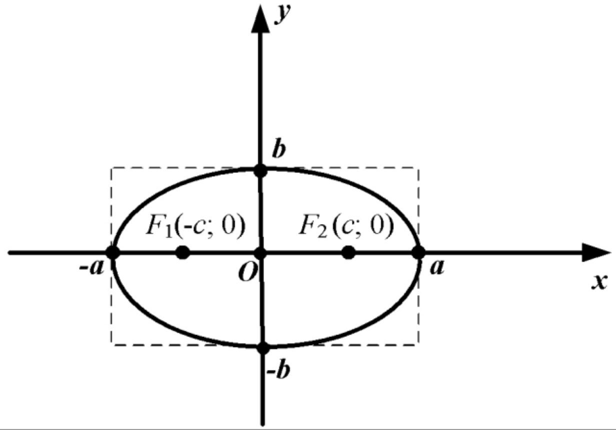
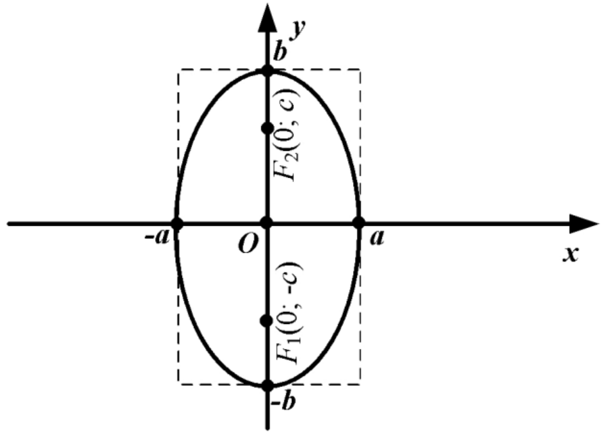
ДОДАТОК Г
Умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині

	Рівняння	$L_1 \| L_2$	$L_1 \perp L_2$	Кут між прямими φ
1	$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}$, $L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}$.	$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$	$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 = 0$	$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{\lvert\vec{s}_1\rvert \, \lvert\vec{s}_2\rvert}$
2	$L_1: A_1x + B_1y + C = 0$, $L_2: A_2x + B_2y + C = 0$.	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$	$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$	$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\lvert\vec{N}_1\rvert \cdot \lvert\vec{N}_2\rvert}$
3	$L_1: y = k_1x + b_1$, $L_2: y = k_2x + b_2$.	$k_1 = k_2$	$k_1 \cdot k_2 = -1$	$tg\alpha = \left\lvert \frac{k_2 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right\rvert$

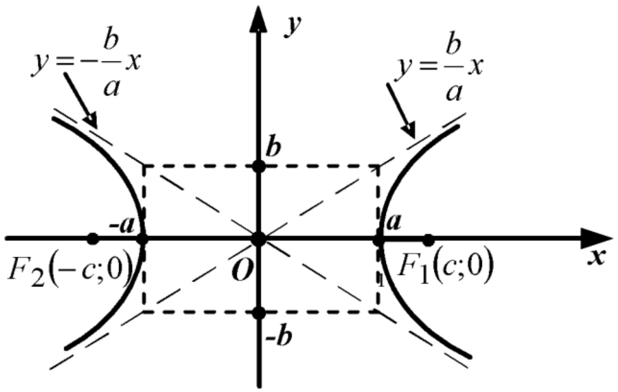
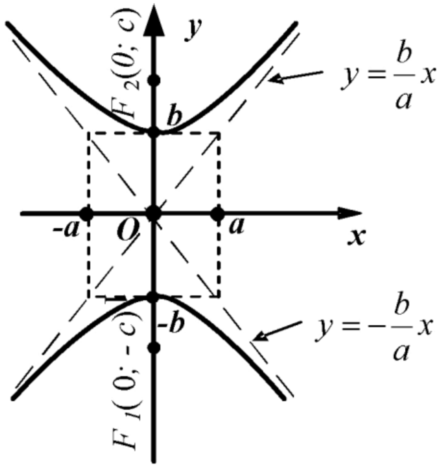
ДОДАТОК Д
Криві другого порядку

Назва	Ексцентри-ситет	Канонічне рівняння	Геометричне зображення	Параметри
1	2	3	4	5
Коло	$\varepsilon = 0$	$x^2 + y^2 = R^2$		$O(0,0)$ – центр кола, R – його радіус

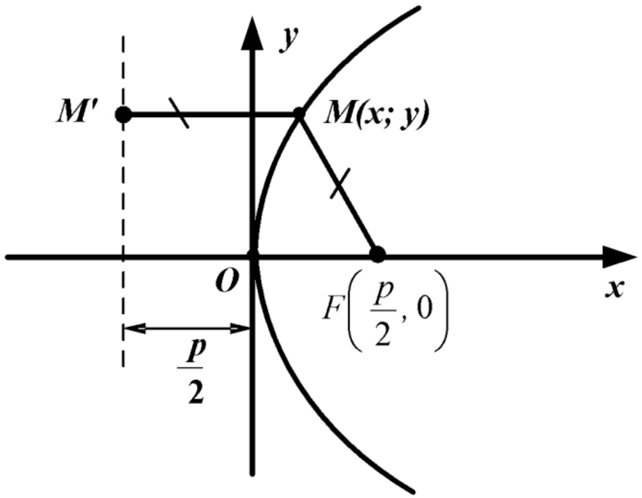
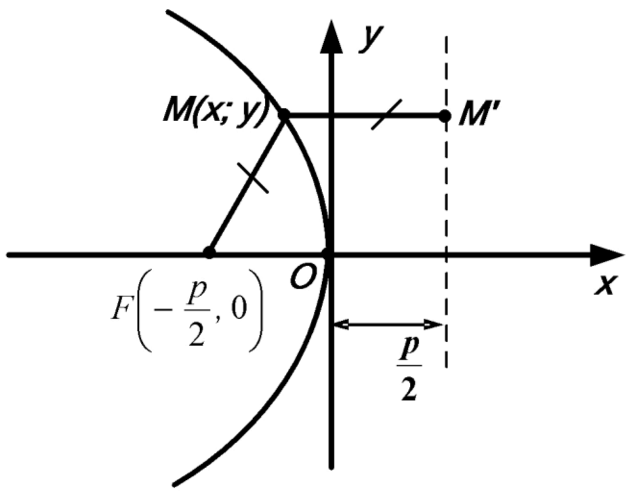
Продовження додатка Д

1	2	3	4	5
Еліпс	$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, $0 \le \varepsilon < 1$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$		a – більша піввісь еліпса, b – менша піввісь еліпса, F_1, F_2 – фокуси еліпса, розташовані на більшій півосі. $F_1F_2 = 2c$ – фокальна відстань, $c^2 = a^2 - b^2$, якщо $a > b$
	$\varepsilon = \dfrac{c}{b}$, $0 \le \varepsilon < 1$			b – більша піввісь еліпса, a – менша піввісь еліпса, F_1, F_2 – фокуси еліпса, розташовані на більшій півосі, $F_1F_2 = 2c$ – фокальна відстань, $c^2 = b^2 - a^2$, якщо $b > a$

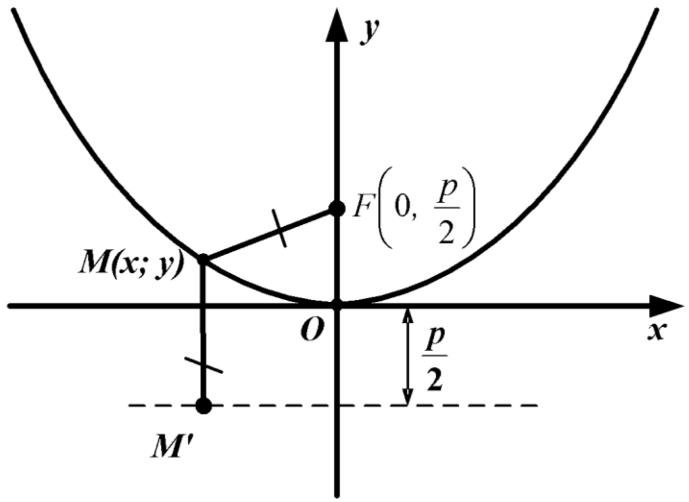
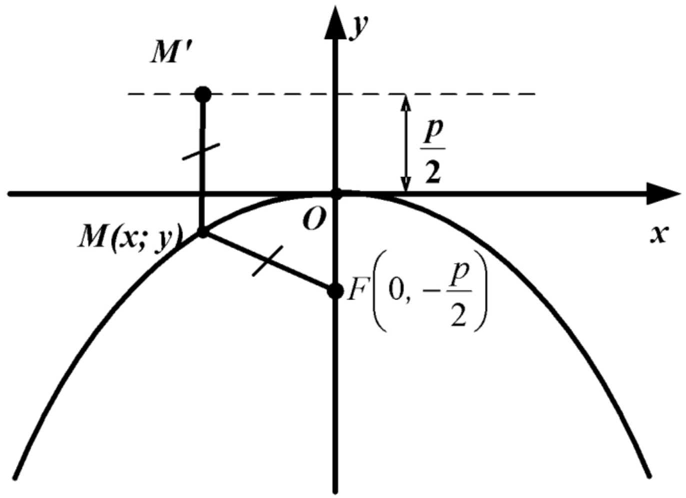
Продовження додатка Д

1	2	3	4	5
Гіпербола	$\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon > 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		Ox – дійсна вісь, Oy – уявна вісь, F_1, F_2 – фокуси гіперболи, $F_1F_2 = 2c$ – фокальна відстань, $c^2 = a^2 + b^2$, $y = \pm\frac{b}{a}x$ – рівняння асимптот
	$\varepsilon = \frac{c}{b}$, $\varepsilon > 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$		Oy – дійсна вісь, Ox – уявна вісь, F_1, F_2 – фокуси гіперболи, $F_1F_2 = 2c$ – фокальна відстань, $c^2 = a^2 + b^2$, $y = \pm\frac{b}{a}x$ – рівняння асимптот

Продовження додатка Д

1	2	3	4	5
Парабола	$\varepsilon = 1$	$y^2 = 2px$, $p > 0$		p – параметр параболи (відстань від директриси до фокуса), $p > 0$, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус, $x = -\frac{p}{2}$ – рівняння директриси
		$y^2 = -2px$, $p > 0$		$F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус. $x = \frac{p}{2}$ – рівняння директриси

Продовження додатка А

1	2	3	4	5
Парабола	$\varepsilon = 1$	$x^2 = 2py$, $p > 0$		$F\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$ – фокус. $y = -\frac{p}{2}$ – рівняння директриси
		$x^2 = -2py$, $p > 0$		$F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ - фокус. $y = \frac{p}{2}$ – рівняння директриси

ДОДАТОК Е
Види рівнянь площини P у просторі. Умови паралельності і перпендикулярності. Кут між площинами

Назва	Рівняння	Параметри
Рівняння площини, що проходить через точку перпендикулярно вектору $\vec{N}$	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	$M_0(x_0,y_0,z_0)\in P$, $\vec{N}(A,B,C)$, $\vec{N}\perp P$
Загальне рівняння	$Ax+By+Cz+D=0$	$\vec{N}(A,B,C)$, $\vec{N}\perp P$
Рівняння площини у відрізках	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	Точки $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)\in P$
Рівняння площини, що проходить через три точки	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	$M_1(x_1,y_1,z_1)\in P$, $M_2(x_2,y_2,z_2)\in P$, $M_3(x_3,y_3,z_3)\in P$
Нормальне рівняння площини	$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$	$\vec{N}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, $\vec{N}\perp P$, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ – напрямні косинуси

Рівняння площини	Відстань h від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини P
$P:\ Ax+By+Cz+D=0$	$h=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$	$h=\lvert x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\rvert$

Кут між площинами P_1 і P_2	
$P_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$	$\cos\varphi=\frac{\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}}{\lvert\vec{N_1}\rvert\cdot\lvert\vec{N_2}\rvert}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

Умови паралельності та перпендикулярності площин P_1 і P_2		
Рівняння площини	$P_1 \parallel P_2$	$P_1 \perp P_2$
$P_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

ДОДАТОК Ж
Види рівнянь прямої у просторі. Умови паралельності і перпендикулярності. Кут між прямими, прямою і площиною

Назва	Рівняння	Параметри
Загальне рівняння прямої	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$	Визначає рівняння прямої як лінію перетину двох непаралельних площин
Рівняння прямої, яка проходить через дві точки	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$	$M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ – точки, через які проходить пряма
Канонічне рівняння	$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$	$\vec{s}(l,m,n)$ – напрямний вектор прямої
Параметричне рівняння	$\begin{cases} x=lt+x_0, \\ y=mt+y_0, \\ z=nt+z_0. \end{cases}$	$\vec{s}(l,m,n)$ – напрямний вектор прямої, (x_0,y_0) – координати точки, через яку проходить пряма, $t\in(-\infty,+\infty)$ – параметр

Кут між прямими L_1 і L_2	
$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$, $L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$	$\cos\varphi=\frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{\lvert\vec{s_1}\rvert\lvert\vec{s_2}\rvert}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$

Кут між прямою L та площиною P	
$L: \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$, $P: Ax+By+Cz+D=0$	$\sin\varphi=\frac{\lvert Al+Bm+Cn\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$

Паралельність та перпендикулярність прямих L_1 і L_2		
	$L_1 \parallel L_2$	$L_1 \perp L_2$
$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$, $L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$	$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$	$l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2=0$

Паралельність та перпендикулярність прямої L та площини P		
	$L \parallel P$	$L \perp P$
$L:\ \dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$, $P:\ Ax+By+Cz+D=0$	$Al+Bm+Cn=0$	$\dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}$