В. И. Храбустовский, О характеристической матрице типа Вейля–Титчмарша для дифференциально-операторных уравнений с линейно или неванлинновски входящим спектральным параметром, *Матем. физ., анал., геом.*, 2003, том 10, номер 2, 205–227

Математическая физика, анализ, геометрия
2003, т. 10, № 2, с. 205–227

О характеристической матрице типа Вейля–Титчмарша для дифференциально-операторных уравнений с линейно или неванлинновски входящим спектральным параметром

В.И. Храбустовский

Украинская государственная академия железнодорожного транспорта
пл. Фейербаха 7, Харьков, 61050, Украина
E-mail:khrabustovsky@kart.kharkov.com

Статья поступила в редакцию 7 февраля 2002 г.
Представлена Ф.С. Рофе-Бекетовым

В гильбертовом пространстве рассматривается на конечном или бесконечном интервале (a, b) гамильтоново дифференциально-операторное уравнение, которое содержит спектральный параметр λ неванлинновским образом. Для этого уравнения определяется характеристический оператор $M(\lambda)$ и доказывается его существование. Описаны $M(\lambda)$, которые отвечают распадающимся краевым условиям, и найдена связь между характеристическими операторами на (a, b), (a, c), (c, b), где $a < c < b$. Как приложение доказан для уравнения Штурма–Лиувилля с операторным потенциалом аналог теоремы Ф.С. Рофе-Бекетова о сведении обратной задачи на оси к обратным задачам на полуосях. В матричном случае, когда уравнение зависит от λ линейно и его коэффициенты периодичны с разными периодами на полуосях, найдена абсолютно непрерывная часть спектральной матрицы. Большинство результатов являются новыми даже для матричного случая и случая, когда λ входит в уравнение линейно.

В гільбертовому просторі розглядається на скінченному або нескінченному інтервалі (a, b) гамільтонове диференціально-операторне рівняння, яке містить спектральний параметр λ неваліннівським чином. Для цього рівняння визначається характеристичний оператор $M(\lambda)$ і доводиться його існування. Описано $M(\lambda)$, які відповідають крайовим умовам, що розпадаються, і знайдено зв'язок між характеристичними

Mathematics Subject Classification 2000: 34A55, 34G10, 47E05.

операторами на (a,b), (a,c), (c,b), де $a < c < b$. Як застосування доведено для рівняння Штурма–Ліувілля з операторним потенціалом аналог теореми Ф.С. Рофе-Бекетова про редукцію оберненої задачі на осі до обернених задач на півосях. У матричному випадку, коли λ входить в рівняння лінійно і коефіцієнти рівняння періодичні з різними періодами на півосях, знайдено абсолютно неперервну частину спектральної матриці. Більшість результатів є новими навіть для матричного випадку і для випадку, коли рівняння містить λ лінійним чином.

Многие диссипативные и симметрические дифференциальные и разностные операторные уравнения произвольного порядка сводятся (аналогично, например, [1, 2]) к уравнению в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$iGx' - H_\lambda(t)x = w_\lambda(t)f(t), \quad t \in \bar{\mathcal{I}}, \quad \mathcal{I} = (a,b) \subseteq \mathbf{R}^1, \tag{1}$$

где $G = G^*$, G^{-1}, $H_\lambda(t) \in B(\mathcal{H})$; оператор-функция $H_\lambda(t)$ неванлиннова $\forall t$ из множества $\mathcal{E}$ полной меры; $H_\lambda(t)$ локально интегрируема по Бохнеру $\forall \lambda \in \mathcal{A} = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \forall t \in \mathcal{E}\ H_\lambda(t)$ аналитична в не зависящей от t окрестности точки $\lambda\} \supseteq \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}^1$; $w_\lambda(t) = \operatorname{Im} H_\lambda(t)/\operatorname{Im}\lambda \geq 0$ (используя неванлинновость $H_\lambda(t)$, можно показать, что $\forall \mu \in \mathcal{A} \cap \mathbf{R}^1, \quad t \in \mathcal{E} \quad \exists\ u - \lim_{\lambda \to \mu \pm i0} w_\lambda(t) \overset{def}{=} w_\mu(t)$, который локально интегрируем по Бохнеру).

В работе для уравнения (1) вводится характеристический оператор $M(\lambda)$, с помощью которого строится аналог обобщенной резольвенты. Устанавливается существование $M(\lambda)$ (в том числе и в случаях, не рассматриваемых ранее даже при линейном вхождении λ).

Выявлено, что разделенность условия (3), определяющего $M(\lambda)$, эквивалентна тому, что $M(\lambda)$ выражается по формуле (7) через проектор, названный в работе характеристическим. (Ранее автор анонсировал [3] этот результат при более жестких условиях на гамильтониан $H_\lambda(t)$). Установлена связь (см. теорему 8) между характеристическими проекторами (а значит, и между соответствующими характеристическими операторами) на (a,b), (a,c), (c,b). Отсюда как следствие в случаях $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ доказано (см. теоремы 9, 10), что оператор-функция является характеристическим оператором при выполнении только двух из четырех тождеств, которым, как показано в работе, с необходимостью удовлетворяют блоки $M(\lambda)$. Для существенно самосопряженного матричного оператора Штурма–Лиувилля на оси соответствующие четыре тождества (типа (17), (18)) выведены Ф. Гестези и Л. Сахновичем в работе [4] из приведенного там же представления матрицы Вейля–Титчмарша этого оператора. В данной работе аналогичные представления для $M(\lambda)$ в упомянутых двух случаях выводятся из связи $M(\lambda)$ с проектором. Именно эта связь является, как показано в работе, истоком тождеств для блоков $M(\lambda)$, и именно она позволяет доказать, что оператор-функция является характеристическим оператором, если выполнены лишь два из них.

Далее в работе для операторного уравнения Штурма–Лиувилля на оси получен аналог теоремы Ф.С. Рофе-Бекетова [5] (см. также [6]) о сведении обратной задачи на оси по спектральной матрице к обратным задачам на полуосях по спектральным функциям. Этот результат является новым уже в конечномерном случае.

Наконец, для матричного симметрического случая, когда гамильтониан $H_\lambda(t)$ зависит от λ линейно, а от t — периодически с разными периодами на полуосях, найдена формула для абсолютно непрерывной части спектральной матрицы, которая в периодическом случае переходит в известную [7] (см. также [8]).

Отметим, что многие вопросы, связанные с характеристической матрицей Вейля–Титчмарша (и со спектральным анализом дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций) рассмотрены в монографиях [2, 9, 10], содержащих обширную библиографию.

В работе скалярные произведения и нормы в различных пространствах обозначаем $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ (с поясняющими индексами, если это необходимо).

1. Характеристический оператор

Пусть $X_\lambda(t)$ — операторное решение уравнения (1) с $f(t)=0$, удовлетворяющее условию $X_\lambda(c)=I$, где $c\in\bar{\mathcal{I}}$, I — единичный оператор в $\mathcal{H}$. Обозначим при $\lambda\in\mathcal{A}$

$$\Delta_\lambda(\alpha,\beta)=\int\limits_\alpha^\beta X_\lambda^*(t)w_\lambda(t)X_\lambda(t)dt,\ N=\{f\in\mathcal{H}\mid f\in Ker\Delta_\lambda(\alpha,\beta)\ \forall\alpha,\beta\in\bar{\mathcal{I}}\},$$

P — ортопроектор на $N^\perp$. Можно показать, что: 1) N не зависит от $\lambda\in\mathcal{A}$. 2) Если

$$\exists\lambda_0\in\mathcal{A},\ \ \alpha,\beta\in\bar{\mathcal{I}},\ \text{число}\ \delta>0\ :(\Delta_{\lambda_0}(\alpha,\beta)f,f)\ge\delta\|f\|^2\ \forall f\in P\mathcal{H}, \tag{2}$$

то (2) выполнено $\forall\lambda\in\mathcal{A}$ с $\delta=\delta(\lambda)>0$, когда $c\in[\alpha,\beta]$. В случае линейного вхождения λ в (1) это известно (см., например, [11]).

Для $x(t)\in\mathcal{H}$ или $x(t)\in B(\mathcal{H})$ обозначим $U[x]=(Gx(t),x(t))$ или $U[x]=x^*(t)Gx(t)$ соответственно.

Определение 1. *Аналитически зависящий от невещественных λ оператор $M(\lambda)=M^*(\bar\lambda)\in B(\mathcal{H})$ называется характеристическим оператором* *(х.о.) уравнения (1) на $\mathcal{I}$ (или просто х.о.), если при* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ *для любой финитной вектор-функции* $f(t) \in L^2_{w_\lambda}(\mathcal{I}) \cap H$

$$\operatorname{Im}\lambda \lim_{(s,t)\uparrow\mathcal{I}} (U[x_\lambda(t)] - U[x_\lambda(s)]) \leq 0, \tag{3}$$

где $x_\lambda(t)$ *— решение (1), равное*[*]

$$x_\lambda(t) \equiv R_\lambda f = \int\limits_{\mathcal{I}} X_\lambda(t)\{M(\lambda) - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(s-t)(iG)^{-1}\}X^*_{\bar\lambda}(s)w_\lambda(s)f(s)ds. \tag{4}$$

Следующее замечание устанавливает связь между х.о. и граничными задачами с краевыми условиями, зависящими от спектрального параметра.

Замечание 1. *(При* $dim\mathcal{H} < \infty$ *ср. [2], [12], [14]). Пусть интервал* $\mathcal{I} = (a, b)$ *конечен и выполнено условие (2) с* $P = I$. *Тогда:*

1. Если при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$: *оператор-функции* $\mathcal{M}_\lambda$, $\mathcal{N}_\lambda \in B(\mathcal{H})$ *аналитически зависят от* λ, *линеалы* $\{\mathcal{M}_\lambda h \oplus \mathcal{N}_\lambda h \mid h \in \mathcal{H})\} \subset \mathcal{H}^2$ *являются максимальными* $\operatorname{Im}\lambda\, diag(G, -G)$*-неотрицательными подпространствами, причем* $\mathcal{M}_\lambda h = \mathcal{N}_\lambda h = 0 \Rightarrow h = 0$, *то граничная задача, получаемая присоединением к уравнению (1) краевого условия (в форме [2])*

$$\exists h = h(\lambda, f) \in \mathcal{H}: \quad x(a) = \mathcal{M}_\lambda h, \quad x(b) = \mathcal{N}_\lambda h, \tag{5}$$

имеет при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ *единственное решение* $\forall f(t) \in L^2_{w_\lambda}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{H}$, *равное* $x_\lambda(t)$ *(4), где* $M(\lambda) = M_\pm(\lambda)$ *при* $\pm\operatorname{Im}\lambda > 0$, $M_+(\lambda)$ *и* $M_-(\lambda)$ *— некоторые, вообще говоря, различные, х.о. уравнения (1) на* $\mathcal{I}$, *причем*

$$M_+(\lambda) = M_-(\lambda)$$
$$(= -\frac{1}{2}(X^{-1}(a)\mathcal{M}_\lambda + X^{-1}(b)\mathcal{N}_\lambda)(X^{-1}(a)\mathcal{M}_\lambda - X^{-1}(b)\mathcal{N}_\lambda)^{-1}(iG)^{-1},$$

где $(\dots)^{-1} \in B(\mathcal{H})) \Leftrightarrow \mathcal{M}^*_{\bar\lambda} G \mathcal{M}_\lambda = \mathcal{N}^*_{\bar\lambda} G \mathcal{N}_\lambda$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$.

2. Если $M(\lambda)$ *— х.о. уравнения (1) на* $\mathcal{I}$, *то* $x_\lambda(t)$ *(4) является решением некоторой граничной задачи из* n°1.

Теорема 1. 1. *Условие (3) из определения х.о. при* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ *эквивалентно следующему*

$$\| R_\lambda f \|^2_{L^2_{w_\lambda}(\mathcal{I})} \leq \operatorname{Im}(R_\lambda f, f)_{L^2_{w_\lambda}(\mathcal{I})} / \operatorname{Im}\lambda. \tag{6}$$

[*] Вектор-функция $w_\lambda(t)f(t)$ локально интегрируема по Бохнеру в силу работы [12], (см. также [11], [13]), где дано описание $L^2_{w_\lambda}(\mathcal{I})$.

2. *Запишем х.о. в виде*

$$M(\lambda) = \left(\mathcal{P}(\lambda) - \frac{1}{2}I\right)(iG)^{-1}. \qquad (7)$$

Тогда условие (3) из определения х.о. при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ *эквивалентно следующему:*

$$\forall[\alpha,\beta] \subseteq \bar{\mathcal{I}} : \operatorname{Im}\lambda(\Gamma_\lambda^+(\beta) - \Gamma_\lambda^-(\alpha)) \leq 0,$$

где

$$\Gamma_\lambda^+(t) = \mathrm{U}[X_\lambda(t)\mathcal{P}G^{-1}P], \quad \Gamma_\lambda^-(t) = \mathrm{U}[X_\lambda(t)(I-\mathcal{P})G^{-1}P]. \qquad (8)$$

3. *Выполнение условия (3) для некоторой оператор-функции* $M(\lambda) \in B(\mathcal{H})$ *и любых финитных вектор-функций* $f(t) \in L^2_{w_\lambda}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{H}$ *в одной из комплексных полуплоскостей влечет его выполнение в другой полуплоскости, если в (4) положить* $M(\bar{\lambda}) = M^*(\lambda)$.

4. *Если* $M(\lambda)$ *х.о., то* $PM(\lambda)P$ *— также х.о., причем* $\operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im} PM(\lambda)P \geq 0$ $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$.

5. *Аналитический х.о. определяется задачей (1), (3), вообще говоря, неоднозначно (в том числе и при* $P = I$*), однако, если* $M_j(\lambda)$ *— х.о.* $(j = 1, 2)$, $\exists\lambda_0$ $(\operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0)$*:* $\lim_{(\alpha,\beta)\uparrow\mathcal{I}} (\Delta_{\lambda_0}(\alpha,\beta)f, f) < \infty \Rightarrow f \in N$*, то* $P[M_1(\lambda_0) - M_2(\lambda_0)]P = 0$*, а если кроме того выполнено (2) с* $P = I$*, то* $M_1(\lambda) = M_2(\lambda)$ $\forall\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^1$.

Теорема 2. *Х.о. уравнения (1) на* $\mathcal{I}$ *существует, если один из концов* $\mathcal{I}$ *конечен, или если* $\exists\lambda_0 \in \mathcal{A} \bigcap \mathbf{R}^1 :\parallel X^*_{\lambda_0}(t) w_{\lambda_0}(t) X_{\lambda_0}(t) \parallel$ *суммируема на одном из концов* $\mathcal{I}$. *Также х.о. существует, если выполнено (2) (это условие, вообще говоря, нельзя отбросить при* $\mathcal{I} = \mathbf{R}^1$*).*

Ранее при $dim\mathcal{H} < \infty$ резольвента типа (4), (6) уравнения (1) на полуоси построена в [1]. Существование х.о. было доказано в [14], когда $dim\mathcal{H} < \infty$, $\mathcal{I} = (c, b)$, выполнено (2) с $P = I$ и в [11–13] при линейном вхождении λ в (1) и при условии (2).

Замечание 2. *Пусть* $H_\lambda(t) = \lambda H(t) + H^1_\lambda(t)$*, где* $H^1_\lambda(t)$ *удовлетворяет тем же условиям, что* $H_\lambda(t), H(t) \geq 0$. *Тогда, используя теоремы 4.5 из [15], 3.12 из [16, с. 195], можно показать, что если* $M(\lambda)$ *— х.о., то формула (4) с* $w_\lambda(t) = H(t)$ *определяет на плотном в* $L^2_H(\mathcal{I})$ *линеале финитных вектор-функций* $f(t) \in L^2_H(\mathcal{I}) \bigcap \mathcal{H}$ *резольвенту некоторого аналитически зависящего от невещественных* λ *отношения* $T(\lambda) = T^*(\bar{\lambda})$ *в* $L^2_H(\mathcal{I})$ *такого, что* $\operatorname{Im} T(\lambda) \leq 0 (max)$ *при* $\operatorname{Im}\lambda > 0$. *Если же* $H_\lambda(t) = H_0(t) + \lambda H(t)$, $H_0(t) = H_0^*(t)$*, и* $M(\lambda)$ *— х.о., то, используя теорему 6.8 из [15] и (6), можно показать, что определенный на упомянутом линеале оператор* $R_\lambda f$ *(4)*

является обобщенной резольвентой минимального отношения, порождаемого (1) в $L^2_H(\mathcal{I})$ и, как следует из [11–13] с учетом $n^0 1$ теоремы 1, всякая обобщенная резольвента этого отношения при условии (2) имеет вид (4), где $M(\lambda)$ — х.о.

2. Распадающееся условие (3). Характеристический проектор

Определение 2. *Пусть $M(\lambda)$ — х.о. уравнения (1) на $\mathcal{I}$. Говорим, что отвечающее ему условие (3) распадается при невещественном $\lambda = \lambda_0$, если $\forall x_{\lambda_0}(t)$ (4) выполнено:*

$$\lim_{t\to a} \operatorname{Im} \lambda_0 U[x_{\lambda_0}(t)] \geq 0, \quad \lim_{t\to b} \operatorname{Im} \lambda_0 U[x_{\lambda_0}(t)] \leq 0.$$

Замечание 3. *Распадение условия (3) при невещественном $\lambda = \lambda_0$ эквивалентно тому, что*

$$\forall t \in \bar{\mathcal{I}} \quad \pm \operatorname{Im} \lambda_0 \Gamma^{\pm}_{\lambda_0}(t) \leq 0,$$

где $\Gamma^{\pm}_{\lambda}(t)$ см. (8).

Теорема 3. *Пусть $P = I, M(\lambda)(7)$ — х.о., $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$. Тогда отвечающее $M(\lambda)$ условие (3) распадается при $\lambda = \lambda_0$, если и только если*

$$\mathcal{P}(\lambda_0) = \mathcal{P}^2(\lambda_0).$$

Теорема 3 при выполнении условия (2) с $P = I$ приведена в [3], а при $dim\mathcal{H} < \infty$ для периодического уравнения (1) на оси и полуоси в случае, когда $H_\lambda(t)$ зависит от λ линейно, она содержится в [7, 8].

Теорема 3 доказывается с использованием $n^o 2$ теоремы 1, замечания 3, того, что операторное семейство $\operatorname{Im} \lambda_0 X^*_{\lambda_0}(t) G x_{\lambda_O}(t)$ не убывает, и следующей теоремы, представляющей, вероятно, и самостоятельный интерес.

Теорема 4. *Пусть $Q \in B(\mathcal{H})$, $Q^*GQ - (I - Q^*)G(I - Q) \leq 0$. Тогда $Q^*GQ \leq 0$ и $(I - Q^*)G(I - Q) \geq 0$, если и только если $Q = Q^2$.*

В доказательстве теоремы 4 используется

Лемма 1. *Пусть $Q \in B(\mathcal{H})$, $Q^*GQ - (I - Q^*)G(I - Q) \leq 0$. Тогда подпространство $\{(Q - I)f \oplus Qf \ \mid f \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{H}^2$ является максимальным $diag(G, -G)$ — неотрицательным, а значит, если $Q^*GQ \leq 0$, $(I - Q^*)G(I - Q) \geq 0$, то линеалы $(I - Q)\mathcal{H}$ и $Q\mathcal{H}$ являются максимальными соответственно G — неотрицательным и G — неположительным подпространствами в $\mathcal{H}$.*

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 1. *Пусть* $A, B, (A+B)^{-1} \in B(\mathcal{H})$, $A^*GA \le 0$, $B^*GB \ge 0$. *Тогда* $Q = A(A+B)^{-1}$ *— проектор (а значит,* $\mathcal{H} = A\mathcal{H} \dot{+} B\mathcal{H}$*).*

Замечание 4. *Если* $M(\lambda), \mathcal{P}(\lambda) \in B(\mathcal{H})$ *связаны (7), то*

$$M(\lambda) = M^*(\bar{\lambda}) \Leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda) = G^{-1}(I - \mathcal{P}^*(\bar{\lambda}))G.$$

Теорема 5. *Пусть* $P = I$. *Тогда:*

1. Если условие (3) распадается при некотором невещественном λ*, то оно распадается при* $\bar{\lambda}$.

2. Если $\mathcal{I}$ *конечен и существуют невещественное* λ*, при котором выполнено: 1) в условии (3) равенство; 2) условие (3) распадается, тогда условие (3) распадается при любом невещественном* λ.

3. Если в (1) $H_\lambda(t) = H_0(t) + \lambda H(t)$*,*$H_0(t) = H_0^*(t)$*, и выполнено (2) с* $P = I$*, то* $n^0 2$ *справедливо без условия конечности* $\mathcal{I}$.

В $n^o 2$ *требование 1), вообще говоря, нельзя отбросить.*

Следующее замечание устанавливает связь между х.о., для которых условие (3) распадается, и граничными задачами с распадающимися краевыми условиями, зависящими от спектрального параметра.

Замечание 1^{bis}**.** *Пусть интервал* $\mathcal{I} = (a, b)$ *конечен и выполнено условие (2) с* $P = I$. *Тогда:*

1. Если оператор-функции $\mathcal{M}_\lambda$, $\mathcal{N}_\lambda$ *из* $n^0 1$ *замечания 1 таковы, что* $\mathcal{M}^*_{\bar{\lambda}} G \mathcal{M}_\lambda = \mathcal{N}^*_{\bar{\lambda}} G \mathcal{N}_\lambda$, $\operatorname{Im} \lambda \mathcal{M}^*_\lambda G \mathcal{M}_\lambda \ge 0$, $\operatorname{Im} \lambda \mathcal{N}^*_\lambda G \mathcal{N}_\lambda \le 0$*, (т.е. краевое условие (5) распадается) при* $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$*, то решение граничной задачи (1), (5)* $\forall f(t) \in L^2_{w_\lambda}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{H}$ *равно* $x_\lambda(t)$ *(4), где* $M(\lambda)$ *некоторый х.о. уравнения (1) на* $\mathcal{I}$*, для которого условие (3) распадается. При этом распадении краевого условия (5)* $\Leftrightarrow \mathcal{M}^*_{\bar{\lambda}} G \mathcal{M}_\lambda = 0 \vee \mathcal{N}^*_{\bar{\lambda}} G \mathcal{N}_\lambda = 0$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

2. Если $M(\lambda)$ *— х.о. уравнения (1) на* $\mathcal{I}$*, причем* $\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}^2(\lambda)$*, то* $x_\lambda(t)$*(4) является решением некоторой граничной задачи из* $n^0 1$.

Определение 3. *Если* $M(\lambda)$ *вида (7) является х.о. уравнения (1) на* $\mathcal{I}$*, причем* $\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}^2(\lambda)$*, то* $\mathcal{P}(\lambda)$ *называется характеристическим проектором (х.п.) уравнения (1) на* $\mathcal{I}$ *(или просто х.п.).*

Теорема 6. *Х.п. уравнения (1) на* $\mathcal{I}$ *существует, если один из концов* $\mathcal{I}$ *конечен или если* $\exists \lambda_0 \in \mathcal{A} \bigcap \mathbf{R}^1 : \| X^*_{\lambda_0}(t) w_{\lambda_0}(t) X_{\lambda_0}(t) \|$ *суммируема на одном из концов* $\mathcal{I}$*. Также х.п. существует, если выполнено (2) с* $P = I$.

Теорема 7. 1^0. *Пусть* $P = I$ *для* $\mathcal{I} = (a, b), \mathcal{P}(\lambda)$ — *х.п. уравнения (1) на* $\mathcal{I} = (a, b)$ *и* $\mathcal{H}_+ = \mathcal{P}H, \mathcal{H}_- = (I - \mathcal{P})\mathcal{H}$. *Тогда при* $Im\lambda \neq 0$ *подпространства* $\mathcal{H}_\pm$ *являются максимальными* $\mp\mathrm{Im}\,\lambda \cdot G$*-неотрицательными, а если кроме того* $P = I$ *для* $\mathcal{I} = \mathcal{I}_- = (a, c)$ *(для* $\mathcal{I} = \mathcal{I}_+ = (c, b)$*), то* $\mathcal{H}_-(\mathcal{H}_+)$ *является* $\mathrm{Im}\,\lambda \cdot G$*-положительным (-отрицательным) и притом равномерно, когда условие (2) с* $P = I$ *выполнено для* $\mathcal{I} = \mathcal{I}_-(\mathcal{I} = \mathcal{I}_+)$.

2^0. *Пусть* $a < c < b$; $P = I$, *если* $\mathcal{I}$ *заменить* $\mathcal{I}_\pm$ *(условие (2) с* $P = I$ *выполнено, если в (2)* $\mathcal{I}$ *заменить* $\mathcal{I}_\pm$*).*

Тогда $\mathrm{Im}\,\lambda \mathrm{Im}\, M(\lambda) > 0$ $(\mathrm{Im}\,\lambda \mathrm{Im}\, M(\lambda) >> 0)$ *при* $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$ *для любого х.о.* $M(\lambda)$ *уравнения (1) на* (a, b).

Доказательство вытекает из леммы 1 и того, что для произвольного оператора $M(\lambda) \in B(\mathcal{H})$ вида (7) выполнено

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Im}\, M(\lambda) &= G^{-1}((I - \mathcal{P}^*(\lambda))G(I - \mathcal{P}(\lambda)) - \mathcal{P}^*(\lambda)G\mathcal{P}(\lambda))G^{-1} \\ &= (I - \mathcal{P}(\lambda))G^{-1}(I - \mathcal{P}^*(\lambda)) - \mathcal{P}(\lambda)G^{-1}\mathcal{P}^*(\lambda) \end{aligned} \tag{9}$$

и $\forall[\alpha, \beta] \subseteq \bar{\mathcal{I}},\ \alpha \le c \le \beta :$

$$\begin{gathered} U[X_\lambda(\beta)\mathcal{P}] - U[X_\lambda(\alpha)(I - \mathcal{P})] + 2G\mathrm{Im}\, M(\lambda)G \\ = 2\mathrm{Im}\,\lambda[(I - \mathcal{P}^*(\lambda))\Delta_\lambda(\alpha, c)(I - \mathcal{P}) + \mathcal{P}^*(\lambda)\Delta_\lambda(c, \beta)\mathcal{P}(\lambda)]. \end{gathered}$$

3. Связь характеристических операторов на $\mathcal{I} = (a, b)$ с характеристическими операторами на $\mathcal{I}_- = (a, c)$ и $\mathcal{I}_+ = (c, b)$

В этом n^0 $a < c < b$ и, если не оговорено иное, выполнено условие (2) с $P = I$, если в (2) $\mathcal{I}$ заменить $\mathcal{I}_\pm$. Это позволяет в силу теоремы 7 применять следствие 1 для явного выражения х.п. на $\mathcal{I}$ через х.п. на $\mathcal{I}_\pm$ и наоборот.

Следующая теорема дает описание связи между х.п. на $\mathcal{I}$ и на $\mathcal{I}_\pm$.

Теорема 8. 1^0. *Пусть* $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, $\mathcal{P}(\lambda)$ — *х.п. уравнения (1) на* $\mathcal{I}$, $P_\pm = P_\pm(\lambda)$ — *любые аналитически зависящие от* λ *проекторы такие, что* $\pm\mathrm{Im}\,\lambda P_\pm^* G P_\pm \ge 0$, $\pm\mathrm{Im}\,\lambda(I - P_\pm^*)G(I - P_\pm) \le 0$ *(а значит, [17, с. 74] в силу леммы 1 и теоремы 7* $\mathcal{H} = P_+\mathcal{H}\dot{+}\mathcal{P}H = P_-\mathcal{H}\dot{+}(I - \mathcal{P})\mathcal{H}$*).*

Обозначим $\mathcal{P}_+(\lambda)$ *и* $\mathcal{P}_-(\lambda)$ *проекторы, проектирующие соответственно на* $\mathcal{P}H$ *и* $P_-\mathcal{H}$ *вдоль* $P_+\mathcal{H}$ *и* $(I - \mathcal{P})\mathcal{H}$.

Тогда $\mathcal{P}_\pm$ — *х.п. уравнения (1) на* $\mathcal{I}_\pm$, *причем*

$$\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}(\mathcal{P} + P_+)^{-1}, \mathcal{P}_- = P_-(P_- + I - \mathcal{P})^{-1}, \tag{10}$$

где $(\mathcal{P} + P_+)^{-1}, (P_- + I - \mathcal{P})^{-1} \in B(\mathcal{H})$.

2^0. *Пусть* $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, $\mathcal{P}_{\pm}(\lambda)$ — *любая пара х.п. уравнения (1) на* $\mathcal{I}_{\pm}$ *с* $H_\lambda(t) = H_\lambda^{\pm}(t)$, *(а значит, [17, с. 74] в силу леммы 1 и теоремы 7* $\mathcal{H} = \mathcal{P}_+\mathcal{H}\dot{+}(I-\mathcal{P}_-)\mathcal{H})$ *и пусть* $\mathcal{P}(\lambda)$ *проектирует на* $\mathcal{P}_+\mathcal{H}$ *вдоль* $(I-\mathcal{P}_-)\mathcal{H}$. *Тогда* $\mathcal{P}$ — *х.п. уравнения (1) на* $\mathcal{I} = (a,b)$ *с* $\mathcal{H}_\lambda(t) = \mathcal{H}_\lambda^{\pm}(t)$, $t \in \mathcal{I}_{\pm}$, *причем*

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_+ S_-(\mathcal{P}_+ S_- + (I-\mathcal{P}_-)S_+))^{-1}, \tag{11}$$

где S_+ *и* S_- — *риссовские проекторы оператора* $(sgn\mathrm{Im}\,\lambda)G$, *отвечающие его положительной и отрицательной частям спектра соответственно;* $(\mathcal{P}_+S_- + (I-\mathcal{P}_-)S_+))^{-1} \in B(\mathcal{H})$.

Если х.п. $\mathcal{P}_{\pm}$ *порождаются х.п.* $\mathcal{P}$ *по формулам (10) из* $n^0 1$ *теоремы, то* $n^0 2$ *дает этот* $\mathcal{P}$.

Следующее дополнение к теореме 8 позволяет строить:

1^0. Х.п. на $\mathcal{I}$, исходя из: а) двух х.п. на $\mathcal{I}$; б) х.п. на $\mathcal{I}$ и х.п. на $\mathcal{I}_+$ или $\mathcal{I}_-$.

2^0. Х.п. на $\mathcal{I}_{\pm}$, исходя из х.п. $\mathcal{P}_{\pm}$ на $\mathcal{I}_{\pm}$, изменяя ядра $\mathcal{P}_+$ и $I-\mathcal{P}_-$, но не меняя их областей значений.

Замечание 5.

1^0. *а) Пусть* $\tilde{\mathcal{P}}$ — *х.п. уравнения (1) на* $\mathcal{I}$. *Тогда, если в* $\mathbf{1}^0$ *теоремы 8 положить* $P_+ = I - \tilde{\mathcal{P}}$, $P_- = \tilde{\mathcal{P}}$ *то* $\mathcal{P}_{\pm}(10)$ *будут не только х.п. уравнения (1) на* $\mathcal{I}_{\pm}$, *но и на* $\mathcal{I}$. *б) Пусть* $\tilde{\mathcal{P}}_{\pm}$ — *х.п. уравнения (1) на* $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\pm}$ *с* $H_\lambda(t) = H_\lambda^{\pm}(t)$. *Тогда, если в* $\mathbf{1}^0$ *теоремы 8 положить* $P_+ = I - \tilde{\mathcal{P}}_-$, $P_- = \tilde{\mathcal{P}}_+$, *то* $\mathcal{P}_{\pm}(10)$ *будут не только х.п. уравнения (1) на* $\mathcal{I}_{\pm}$, *но и на* $\mathcal{I}$ *с* $H_\lambda(t) = \begin{cases} H_\lambda(t), & t \in \mathcal{I}_+ \\ H_\lambda^-(t), & t \in \mathcal{I}_- \end{cases}$ *для случая* $\mathcal{P}_+$ *и с* $H_\lambda(t) = \begin{cases} H_\lambda^+(t), & t \in \mathcal{I}_+ \\ H_\lambda(t), & t \in \mathcal{I}_- \end{cases}$ *для случая* $\mathcal{P}_-$.

2^0. *Если в формуле (11) заменить* $I-\mathcal{P}_-(\mathcal{P}_+)$ *на* $P_+(P_-)$ *из* $\mathbf{1}^0$ *теоремы 8, то по-прежнему в (11)* $(\dots)^{-1} \in B(\mathcal{H})$, *но* $\mathcal{P}$ *(11), вообще говоря, уже не будет х.п. уравнения (1) на* $\mathcal{I}$, *а будет х.п. на* $\mathcal{I}_+(\mathcal{I}_-)$, *проектирующим на* $\mathcal{P}_+\mathcal{H}(P_-\mathcal{H})$ *вдоль* $P_+\mathcal{H}((I-\mathcal{P}_-)\mathcal{H})$.

Проиллюстрируем теорему 8 на примере

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & iI_1 \\ -iI_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где I_1 — единичный оператор в $\mathcal{H}_1$.

Ниже в этом n^0, пока не оговорено иное, выполнено (12).

Пусть $\mathcal{P}_{\pm}$ — х.п. уравнения (1) на $\mathcal{I}_{\pm}$ (в частности, $\mathcal{P}_{\pm}$ могут быть х.п. уравнения (1) на $\mathcal{I}$), $\mathcal{H}_+ = \mathcal{P}_+\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_- = (I-\mathcal{P}_-)\mathcal{H}$. Поскольку в силу теоремы 7 подпространства $\mathcal{H}_{\pm}$ равномерно $\mp\mathrm{Im}\,\lambda G$ - положительны, то из [18, с. 295] легко вывести, что $\mathcal{H}_{\pm} = \{f \oplus n_{\pm}f | f \in \mathcal{H}_1\} = \{m_{\pm}f \oplus f | f \in \mathcal{H}_1\}$, где $B(\mathcal{H}) \ni n_{\pm} = m_{\pm}^{-1}$ называют угловыми операторами подпространств $\mathcal{H}_{\pm}$,

$\pm\mathrm{Im}\,\lambda\mathrm{Im}\,n_\pm >> 0$. Из $n^0 2$ замечания 5 следует, что $n_\pm$ являются угловыми операторами, отвечающими некоторым х.п. $\mathcal{P}_\pm$ на $\mathcal{I}_\pm$, если и только если проекторы

$$\tilde{\mathcal{P}_+} = \begin{pmatrix} 0 & m_+ \\ 0 & I_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{P}_-} = \begin{pmatrix} I_1 & -m_- \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

являются х.п. на $\mathcal{I}_\pm$. Они (а значит, и $m_\pm$) могут быть получены из х.п. $\mathcal{P}_\pm$ с помощью n^{0}2 замечания 5 (или с помощью n^{0}1 теоремы 8, если х.п. $\mathcal{P}_+$ или $\mathcal{P}_-$ являются одновременно х.п. уравнения (1) на $\mathcal{I}$), если положить $P_+ = P_- = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Применив к х.п. (13) замечание 4, видим, что $m_\pm(\lambda) = m^*_\pm(\bar{\lambda})$.

Ниже показано, что в случае уравнения (1), отвечающего операторному уравнению Штурма–Лиувилля на полуосях $\mathcal{I}_+ = (c,\infty)$, $\mathcal{I}_- = (-\infty, c)$, операторы $m_\pm$ являются операторными функциями Вейля с условием типа косинуса (а значит, угловые операторы $n_\pm$ — функциями Вейля с условием типа синуса) в т.с. Поэтому ниже $n_\pm$ и $m_\pm$ называем функциями Вейля (ф.В.) уравнения (1) на $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\pm$, отвечающими соответственно условиям типа синуса и типа косинуса в точке с.

Итак, каждой паре х.п. $\mathcal{P}_\pm$ уравнения (1) на $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\pm$ (или каждому х.п. $\mathcal{P}$ уравнения (1) на $\mathcal{I}$) отвечает пара ф.В. $n_\pm$ или $m_\pm$. Обратно, каждой паре ф.В. $m_\pm$ или $n_\pm$ отвечает пара х.п. $\tilde{\mathcal{P}}_\pm$ (13) на $\mathcal{I}_\pm$, а им в силу $n^0 2$ теоремы 8 отвечает х.п. $\mathcal{P}$ уравнения (1) на $\mathcal{I}$, который через ф.В. выражается следующим образом:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} I_1 \\ n_+ \end{pmatrix} (n_- - n_+)^{-1}(n_- - I_1) = \begin{pmatrix} m_+ \\ I_1 \end{pmatrix} (m_+ - m_-)^{-1}(I_1 - m_-). \tag{14}$$

Для доказательства (14) достаточно в силу теоремы 8 проверить, что $\mathcal{P}\begin{pmatrix} I_1 \\ n_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ n_+ \end{pmatrix}$, $\quad \mathcal{P}\begin{pmatrix} I_1 \\ n_- \end{pmatrix} = 0$, а это очевидно.

Из вышесказанного с учетом связи (7) между х.о. и х.п. вытекает

Лемма 2. *Чтобы оператор $M(\lambda)$ был отвечающим распадающемуся условию (3) х.о. уравнения (1) на $\mathcal{I} = (a,b)$ с $H_\lambda(t) = H^\pm_\lambda(t)$, $t \in \mathcal{I}_\pm$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} m_+(m_+ - m_-)^{-1}m_- & m_+(m_+ - m_-)^{-1} - \frac{1}{2}I_1 \\ (m_+ - m_-)^{-1}m_- + \frac{1}{2}I_1 & (m_+ - m_-)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $m_\pm$ — отвечающие условию типа косинуса в точке с ф.В. уравнения (1) на $\mathcal{I}_\pm$ с $H_\lambda(t) = H^\pm_\lambda(t)$.

* Если к $\tilde{\mathcal{P}_\pm}$ применить n^{0}2 замечания 5 с $P_+ = I - \mathcal{P}_+$, $P_- = \mathcal{P}_-$, то получим $\mathcal{P}_\pm$.

Для уравнения Штурма–Лиувилля на оси лемма 2 в скалярном случае известна (см., например, [5]), а при $dim\mathcal{H} < \infty$ в случае существенной самосопряженности приведена в [4].

Теорема 9. *Чтобы операторная матрица-функция*

$$M(\lambda) = M^*(\bar{\lambda}) = \| M_{ij} \|_{i,j=1}^2, \quad M_{ij} \in B(\mathcal{H}_1), \quad \lambda \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}^1, \tag{16}$$

была отвечающим распадающемуся условию (3) х.о. уравнения (1) на $\mathcal{I} = (a, b)$, *с* $H_\lambda(t) = H_\lambda^\pm(t)$, $t \in \mathcal{I}_\pm$, *необходимо и достаточно, чтобы при* $\operatorname{Im}\lambda > 0$ $M_{jj}^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$, $j = 1, 2^\star$ *и выполнялись следующие два условия:*

1^0. *Выполняется хотя бы одно из тождеств*

$$M_{11}M_{22} - M_{12}^2 = -\frac{1}{4}I_1, \quad M_{22}M_{11} - M_{21}^2 = -\frac{1}{4}I_1, \tag{17}$$

а также хотя бы одно из тождеств

$$M_{12}M_{11} = M_{11}M_{21}, \quad M_{21}M_{22} = M_{22}M_{12}. \tag{18}$$

(Выполнение 1^0 *для произвольной (не обязательно* $= M^*(\bar{\lambda})$*) операторной матрицы-функции* $M(\lambda)$ *(16) при условии* $M_{jj}^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$, $j = 1, 2$ *(для выполнения последнего достаточно, чтобы* $\operatorname{Im} M_{jj} >> 0$*) влечет:*

1) Выполнение остальных двух тождеств.

2) $(M_{ij} \pm \frac{1}{2}I_1)^{-1} \in B(\mathcal{H}_1), i \neq j$.

3) Выполнение равенства (15), где операторные функции $m_+(\lambda)$ *и* $m_-(\lambda)$, *определяются формулами*

$$\begin{aligned} m_\pm = M_{11}(M_{21} \mp \frac{1}{2}I_1)^{-1} &= (M_{12} \mp \frac{1}{2}I_1)^{-1}M_{11} \\ = (M_{12} \pm \frac{1}{2}I_1)M_{22}^{-1} &= M_{22}^{-1}(M_{21} \pm \frac{1}{2}I_1), \end{aligned} \tag{19}$$

причем $\operatorname{Im} M \geq 0$ $(\operatorname{Im} M >> 0) \Leftrightarrow m_+$ *и* m_- *имеют соответственно неположительную (равномерно отрицательную) и неотрицательную (равномерно положительную) мнимые части.)*

2^0. *Эти* $m_\pm = m_\pm(\lambda)$ *(19), являются отвечающими условию типа косинуса в точке с функциями Вейля уравнения (1) на интервалах* $\mathcal{I}_\pm$ *с* $H_\lambda(t) = H_\lambda^\pm(t)$.

В доказательстве теоремы использованы следующие вспомогательные результаты, некоторые из них, вероятно, представляют и самостоятельный интерес.

* Как видно из доказательства, формулировка достаточной части теоремы допускает модификацию, в которой требуется $M_{11}^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$ или $M_{22}^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$ (ср. теорему 10).

Пусть

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}, \quad p_j \in B(\mathcal{H}_1). \tag{20}$$

Тогда очевидно, что равенство $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ эквивалентно выполнению четырех равенств

$$\begin{aligned} p_1^2 + p_2p_3 = p_1 \quad (I), \qquad p_1p_2 + p_2p_4 = p_2\,(II), \\ p_3p_1 + p_4p_3 = p_3\,(III), \quad p_3p_2 + p_4^2 = p_4 \quad (IV), \end{aligned} \tag{21}$$

и, если $\mathcal{P}(20)$ и $M(16)$ связаны формулой (7), то (I) эквивалентно первому из равенств (17), а (IV) — второму; (II) эквивалентно первому из равенств (18), а (III) — второму.

Лемма 3. *Пусть $p_2^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)(p_3^{-1} \in B(\mathcal{H}_1))$. Тогда $(I) \wedge (II) \Leftrightarrow (II) \wedge (IV) \quad ((I) \wedge (III) \Leftrightarrow (III) \wedge (IV))$.*

Лемма 4. *Пусть $p_2^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$ и выполнено (I) и (II) или соответственно $p_3^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$ и выполнено (III) и (IV). Тогда $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ и*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{H} = \{f \oplus n_+f | f \in \mathcal{H}_1\}, \quad n_+ = p_2^{-1}(I_1 - p_1) = p_4p_2^{-1}, \\ (I_1 - \mathcal{P})\mathcal{H} = \{f \oplus n_-f | f \in \mathcal{H}_1\}, \quad n_- = -p_2^{-1}p_1 = (p_4 - I_1)p_2^{-1} \end{aligned}$$

или соответственно

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{H} = \{m_+f \oplus f | f \in \mathcal{H}_1\}, \quad m_+ = p_3^{-1}(I_1 - p_4) = p_1p_3^{-1}, \\ (I_1 - \mathcal{P})\mathcal{H} = \{m_-f \oplus f | f \in \mathcal{H}_1\}, \quad m_- = -p_3^{-1}p_4 = (p_1 - I_1)p_3^{-1} \end{aligned}$$

и $\mathcal{P}$ через $n_\pm$ или соответственно через $m_\pm$ выражается по формулам (14).

Из лемм 3, 4 можно вывести

Следствие 2. *Пусть $p_2^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$ и $p_3^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$. Тогда $(I \vee IV) \wedge (II \vee III) \Rightarrow (I) - (IV)$ и $p_1^{-1}, (I_1 - p_1)^{-1}, p_4^{-1}, (I_1 - p_4)^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$.*

Из формулы (9) вытекает

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \in B(\mathcal{H})$, $m_\pm \in B(\mathcal{H}_1)$, $\mathcal{P}H = \{m_+h \oplus h | h \in \mathcal{H}_1\}, (I - \mathcal{P})\mathcal{H} = \{m_-g \oplus g | g \in \mathcal{H}_1\}$, оператор M связан (7) с $\mathcal{P}$. Тогда $\forall f \in \mathcal{H}$ $(G^*\mathrm{Im}\, MGf, f) = (\mathrm{Im}\, m_-g, g) - (\mathrm{Im}\, m_+h, h)$, где векторы $g, h \in \mathcal{H}_1$ однозначно определяются равенствами $m_-g \oplus g = (I - \mathcal{P})f$, $m_+h \oplus h = \mathcal{P}f$. Поэтому $\mathrm{Im}\, M \geq 0 (>> 0)$ тогда и только тогда, когда $\mp\mathrm{Im}\, m_\pm \geq 0 (>> 0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 9. Необходимость. Так как отвечающее х.о. $M(\lambda)$ (16) условие (3) распадается, то по теореме 3 оператор $\mathcal{P}(\lambda)$, связанный (7) с $M(\lambda)$, является х.п. Значит, выполнены все четыре равенства (17)–(18) и в силу леммы 2 справедливо (15). Поэтому $M_{jj}^{-1}, (M_{ij} \pm \frac{1}{2}I_1)^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$ $(i,j = 1,2)$ и справедливы равенства (19), а определяемые ими $m_\pm$ являются ф.В. на $\mathcal{I}_\pm$.

Достаточность. Пусть оператор $\mathcal{P}(\lambda)$ (20) связан (7) с $M(\lambda)$ (16). Тогда $p_2^{-1} = -M_{11}^{-1}$, $p_3^{-1} = M_{22}^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$, и т.к. и выполнено 1^0, то в силу леммы 4 и следствия 2, $\mathcal{P}(\lambda)$ является проектором и p_1^{-1}, $(I_1 - p_1)^{-1}$, $p_4^{-1}, (I_1 - p_4)^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$. Поэтому справедливы равенства (19), и т.к. определяемые ими $m_\pm$ являются при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ ф.В. на $\mathcal{I}_\pm$, то по лемме 4 и теореме 8 $\mathcal{P}(\lambda)$ является при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ х.п. на $\mathcal{I}$, и потому связанная (7) с ним $M(\lambda)$ является при $\operatorname{Im} > 0$ (а значит, и при $\operatorname{Im} \neq 0$ в силу $\mathrm{n}^0 3$ теоремы 1) х.о. на $\mathcal{I}$, отвечающим распадающемуся условию (3).

Утверждения теоремы, относящиеся к произвольной операторной матрице (16), вытекают из лемм 4, 5 и следствия 2. Теорема 9 полностью доказана.

Для характеристической матрицы Вейля–Титчмарша уравнения Штурма–Лиувилля на оси в скалярном случае тождество (17) и его важную роль в обратной задаче открыл Ф.С. Рофе-Бекетов [5]. Для этой же матрицы данного уравнения в конечномерном случае тождества типа (17), (18) выводятся в [4] из (15) в случае существенной сомоспряженности. В представленной работе вскрыта природа (7), (20), (21) этих тождеств, что и позволило восстановить х. о. при выполнении только пары из них.

Замечание 6. 1^0. *Если $M(\lambda)$(16) — отвечающий распадающемуся условию (3) х.о. уравнения (1) на $\mathcal{I}$ с*

$$H_\lambda(t) = \|H_{ij}(t)\|_{i,j=1}^2, \quad H_{ij} \in B(\mathcal{H}_1),$$

то

$$\tilde{M}(\lambda) = \|(-1)^{i+j} M_{ij}\|_{i,j=1}^2 \tag{22}$$

— отвечающий распадающемуся условию (3) х.о. уравнения (1), у которого $H_\lambda(t)$ заменен на $\tilde{H}_\lambda(t) = \|(-1)^{i+j} H_{ij}(2c-t)\|_{i,j=1}^2$, а $\mathcal{I}$ — на $\tilde{\mathcal{I}} = (2c-b, 2c-a)$.

2^0. *Если $H_\lambda(t) = \tilde{H}_\lambda(t)$, $\mathcal{I} = \tilde{\mathcal{I}}$, то у уравнения (1) есть отвечающий распадающемуся условию (3) блочно-диагональный х.о. (16) на $\mathcal{I}$, т.е. $cM_{ij} = 0$, $i \neq j$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1^0. Обозначим $F_\lambda(t) = X_\lambda^*(t) G X_\lambda(t)$. Легко проверить, что если $\tilde{X}_\lambda(t)$ — удовлетворяющее условию $\tilde{X}_\lambda(c) = I$ решение уравнения (1) с $f = 0$, в котором $H_\lambda(t)$ заменено на $\tilde{H}_\lambda(t)$ то $\tilde{F}_\lambda(t) = \tilde{X}_\lambda^*(t) G \tilde{X}_\lambda(t) = \begin{pmatrix} -I_1 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} F_\lambda(2c - t) \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & -I_1 \end{pmatrix}$.

Поэтому, если $m_\pm$ — ф.В. уравнения (1) на $\mathcal{I}_\pm$, $\tilde{m}_\pm = -m_\mp$, то в силу замечания 3

$$\operatorname{Im}\lambda(\tilde{m}_\pm^* \quad I_1)\tilde{F}_\lambda(t)\begin{pmatrix}\tilde{m}_\pm\\ I_1\end{pmatrix} = -\operatorname{Im}\lambda(m_\mp^* \quad I_1)F_\lambda(2c-t)\begin{pmatrix}m_\mp\\ I_1\end{pmatrix} \overset{\le}{\underset{\ge}{}} 0.$$

Значит, в силу этого замечания $\tilde{m}_\pm$ являются ф.В. уравнения (1), в котором $H_\lambda(t)$ заменено на $\tilde{H}_\lambda(t)$, $\mathcal{I}_+(\mathcal{I}_-)$ — на $\tilde{\mathcal{I}}_+ = (c, 2c-a)(\tilde{\mathcal{I}}_- = (2c-b, c))$.

Заменяя в (15) $m_\pm$ на $\tilde{m}_\pm$, видим, что $\tilde{M}$ (22) — х.о. полученного уравнения.

2^0. Доказательство 1^0 показывает, что в случае, когда $H_\lambda(t) = \tilde{H}_\lambda(t)$, $\mathcal{I} = \tilde{\mathcal{I}}$, уравнение (1) имеет пару ф.В. m_+, $m_- = -m_+$. Полагая в (15) $m_- = -m_+$, получаем искомый блочно-диагональный х.о.:

$$M = diag\left\{-\frac{1}{2}m_+, \frac{1}{2}m_+^{-1}\right\}.$$

Замечание 6 доказано.

П р и м е р 1. Уравнение

$$-(P(t)y' - R(t)y)' - R^*y' + Q(t)y = h_\lambda(t)y,$$

где $P^{-1}, P = P^*$, $Q = Q^*$, R, неванлинновская оператор-функция $h_\lambda \in B(\mathcal{H}_1)$, заменой $x = y \oplus (Py' - Ry)$ сводится к уравнению (1), (12) с $f = 0$ и, если операторные функции $P(t)$, $Q(t)$, $h_\lambda(t)$ симметричны относительно точки c, а $R(t)$ антисимметрична, то у этого уравнения $H_\lambda(t) = \tilde{H}_\lambda(t)$.

Проиллюстрируем теорему 8 на примере

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad G = \begin{pmatrix}-I_1 & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix}, \tag{23}$$

где I_j — единичные операторы в $\mathcal{H}_j$.

Ниже в этом n^0 выполнено (23) и не требуется выполнение условия (2) с $P = I$ и заменой $\mathcal{I}$ на $\mathcal{I}_\pm$, а требуется лишь, чтобы $P = I$, если $\mathcal{I}$ заменить на $\mathcal{I}_\pm$.

Аналогично случаю (12) рассмотрим подпространства $\mathcal{H}_+ = \mathcal{P}_+\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_- = (I - \mathcal{P}_-)\mathcal{H}$. В случае (23) при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ $\mathcal{H}_+ = \{f \oplus K_+f | f \in \mathcal{H}_1\}$, $\mathcal{H}_- = \{K_-g \oplus g | g \in \mathcal{H}_2\}$, где угловые операторы $K_+ \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $K_- \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ являются сжатиями и притом строгими, когда выполнено условие (2) с $P = I$ для $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\pm$. Операторы $K_\pm$ называем ф.В. уравнения (1) на $\mathcal{I}_\pm$.

Дальнейшие утверждения доказываем по той же схеме, что и соответствующие факты в случае (12).

Операторы $K_\pm$ являются ф.В., отвечающими некоторым х.п. $\mathcal{P}_\pm$ на $\mathcal{I}_\pm$, если и только если проекторы

$$\tilde{\mathcal{P}}_+ = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ K_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{P}}_- = \begin{pmatrix} I_1 & -K_- \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

являются х.п. на $\mathcal{I}_\pm$. Они (а значит, и $K_\pm$) могут быть получены из х.п. $\mathcal{P}_\pm$ по формулам $\tilde{\mathcal{P}}_+ = \mathcal{P}_+(\mathcal{P}_+ + P_+)^{-1}$, $\tilde{\mathcal{P}}_- = P_-(P_- + I - \mathcal{P}_-)^{-1}$, где $(\mathcal{P}_+ + P_+)^{-1}$, $(P_- + I - \mathcal{P}_-)^{-1} \in B(\mathcal{H})$, $P_+ = diag\{0_1, I_2\}$, $P_- = diag\{I_1, 0_2\}$.

Теорема 10. *Для того чтобы операторная матрица-функция*

$$M(\lambda) = M^*(\bar{\lambda}) = \|M_{ij}\|_{i,j=1}^2, \quad \lambda \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}^1, \tag{24}$$

где $M_{jj} \in B(\mathcal{H}_j)$, $M_{12} \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, $M_{21} \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, была отвечающим распадающемуся условию (3) х.о. уравнения (1) на $\mathcal{I} = (a, b)$ с $H_\lambda(t) = H_\lambda^\pm, t \in \mathcal{I}_\pm$, необходимо и достаточно, чтобы при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ выполнялись следующие два условия:

1^0. *Выполняется один из двух наборов условий:*

$$M_{11}^2 - M_{12}M_{21} = -\frac{1}{4}I_1, M_{22} - \frac{i}{2}I_2 = M_{21}(M_{11} + \frac{i}{2}I_1)^{-1}M_{12},$$

$(M_{11} + \frac{i}{2}I_1)^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$ *(для выполнения последнего достаточно, чтобы $\operatorname{Im} M_{11} \geq 0$) или*

$$M_{22}^2 - M_{21}M_{12} = -\frac{1}{4}I_2, \quad M_{11} - \frac{i}{2}I_1 = M_{12}(M_{22} + \frac{i}{2}I_2)^{-1}M_{21},$$

$(M_{22} + \frac{i}{2}I_2)^{-1} \in B(\mathcal{H}_2)$ *(для выполнения последнего достаточно, чтобы $\operatorname{Im} M_{22} \geq 0$).*

(Выполнение для произвольной (не обязательно $= M^*(\bar{\lambda})$) операторной матрицы-функции $M(\lambda)$ (24) одного из этих наборов условий влечет:

1) выполнение тождеств

$$M_{11}M_{12} = M_{12}M_{22}; \quad M_{21}M_{11} = M_{22}M_{21};$$

2) выполнение другого набора условий и равенства

$$M(\lambda) = i\begin{pmatrix} (I_1 - K_-K_+)^{-1} - \frac{1}{2}I_1 & (I_1 - K_-K_+)^{-1}K_- \\ K_+(I_1 - K_-K_+)^{-1} & K_+(I_1 - K_-K_+)^{-1}K_- + \frac{1}{2}I_2 \end{pmatrix}$$

$$= i\begin{pmatrix} K_-(I_2 - K_+K_-)^{-1}K_+ + \frac{1}{2}I_1 & K_-(I_2 - K_+K_-)^{-1} \\ K_+(I_2 + K_-(I_2 - K_+K_-)^{-1}K_+) & K_+K_-(I_2 - K_+K_-)^{-1} + \frac{1}{2}I_2 \end{pmatrix},$$

где

$$K_- = (M_{11} + \frac{i}{2}I_1)^{-1}M_{12} = M_{12}(M_{22} + \frac{i}{2}I_2)^{-1},$$
$$K_+ = M_{21}(M_{11} + \frac{i}{2}I_1)^{-1} = (M_{22} + \frac{i}{2}I_2)^{-1}M_{21},$$
$$I_1 - K_-K_+ = i(M_{11} + \frac{i}{2}I_1)^{-1}, \quad I_2 - K_+K_- = i(M_{22} + \frac{i}{2}I_2)^{-1}.$$

3) $\operatorname{Im} M \geq (>> 0) \Leftrightarrow \|K_\pm\| \leq 1 (\|K_\pm\| < 1)$.*)*

2^0. $K_\pm = K_\pm(\lambda)$ *являются ф.В. уравнения (1) на интервалах* $\mathcal{I}_\pm$ *с* $H_\lambda(t) = H_\lambda^\pm(t)$.

4. Обратная задача для операторного уравнения Штурма–Лиувилля на оси

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1$ уравнение Штурма–Лиувилля

$$-y'' + Q(t)y = \lambda y, \quad t \in \bar{\mathcal{I}}, \quad \mathcal{I} = (a, b) \subseteq R^1 \tag{25}$$

с операторным потенциалом $Q(t) = Q^*(t) \in B(\mathcal{H}_1)$, непрерывным по норме при $t \in \bar{\mathcal{I}}_\pm$, где $\mathcal{I}_- = (a, c)$, $\mathcal{I}_+ = (c, b)$, $a < c < b$.

Заменой $x = y \oplus y'$ сведем (25) к уравнению (1) в $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1$. Х.о. этого уравнения называем х.о. уравнения (25). Обозначим $L^2(\mathcal{I})$ гильбертово пространство вектор-функций со значениями в $\mathcal{H}_1$ и с квадратично интегрируемой по $\mathcal{I}$ нормой. Пусть $M(\lambda)$ — х.о. уравнения (25), $f(t) = g(t) \oplus h(t) \in \mathcal{H}$, где финитная $g(t) \in L^2(\mathcal{I})$. Тогда для отвечающего (25) уравнения (1) резольвента $R_\lambda f$ (4) равна $y \oplus y'$, где $y = y[g]$ — является в силу [15], [16] обобщенной резольвентой минимального оператора, порождаемого (25) в $L^2(\mathcal{I})$ и любая его обобщенная резольвента может так быть получена в силу [19] и $\text{n}^0 1$ теоремы 1 (ср. замечание 2).

Неубывающая операторная матрица-функция

$$R(\mu) = \|\rho_{ij}(\mu)\|_{i,j=1}^2, \quad \rho_{ij}(\mu) \in B(\mathcal{H}_1) \tag{26}$$

называется спектральной матрицей уравнения (25), если для любых финитных вектор-функций $f(t) \in L^2(\mathcal{I})$ справедливо равенство Парсеваля

$$\int_{\mathcal{I}} \|f(t)\|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (dR(\mu)\eta(\mu), \eta(\mu)),$$

где $\eta(\mu) = \int_{\mathcal{I}} (c(t,\mu)\, s(t,\mu))^* f(t)\, dt$; $c(t,\lambda)$, $s(t,\lambda)$ — операторные решения (25), матрица Вронского которых в точке c равна единичному оператору.

Можно показать, используя [15, 19], что неубывающая $R(\mu)$ (26) является спектральной матрицей уравнения (25), тогда и только тогда, когда она является спектральной функцией х.о. уравнения (25).

Говорим, что спектральная матрица уравнения (25) отвечает распадающимся краевым условием, если для соответствующей х.о. условие (3) распадается (в силу леммы 2 это эквивалентно тому, что х.о. имеет вид (15)).

Обозначим L_0 при $b < \infty$ оператор, задаваемый в $L^2(c, b)$ выражением $l[y] = -y'' + Q(t)y$ на достаточно гладких вектор-функциях, удовлетворяющих граничным условиям $y'(c) = y(b) = y'(b) = 0$. Как показано в [20], всякая обобщенная резольвента L_0 является интегральным оператором с ядром

$$G(t, \tau, \lambda) = \begin{cases} -c(t, \lambda)\chi^*(\tau, \bar{\lambda}), & 0 \le t \le \tau \le b \\ -\chi(t, \lambda)c^*(\tau, \bar{\lambda}), & 0 \le \tau \le t \le b \end{cases},$$

где $\chi(t, \lambda) = c(t, \lambda)m(\lambda) + s(t, \lambda)$, оператор-функция $m(\lambda) \in B(\mathcal{H}_1)$ аналитична при невещественных λ.

Эти $m(\lambda)$, отвечающие обобщенным резольвентам L_0, называются ф.В. уравнения (25) на $\mathcal{I}_+ = (c, b), b < \infty$. Оператор-функцию называют ф.В. уравнения (25) на $\mathcal{I}_+ = (c, \infty)$, если она является его ф.В. на $\mathcal{I}_+ = (c, b)$, $\forall b < \infty$. Ф.В. уравнения (25) на $\mathcal{I}_- = (a, c)$ определяем аналогично.

Используя [15, 16, 20], можно показать, что справедлива

Теорема 11. *Для того чтобы оператор-функции $m_\pm(\lambda)$ были отвечающими условию типа косинуса в точке c ф.В. уравнения (1) на $\mathcal{I}_\pm$, к которому сводится (25), необходимо и достаточно, чтобы они были ф.В. уравнения (25) на $\mathcal{I}_\pm$.*

Используя [20, 19], из теоремы 11 выводим

Следствие 3. (ср. [20]) *Для того чтобы оператор-функции $m_\pm(\lambda)$ были отвечающими условию типа косинуса в точке* с *ф.В. уравнения (1) на $\mathcal{I}_\pm$, к которому сводится (25), необходимо и достаточно, чтобы они допускали представление*

$$m_\pm(\lambda) = \mp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_\pm(\mu)}{\mu - \lambda}, \tag{27}$$

где $\rho_\pm(\mu)$ — спектральные функции уравнения (25) на $\mathcal{I}_\pm$, отвечающие краевому условию типа косинуса в точке c; интегралы слабо сходятся.

Следствие 4. *Если $\mathcal{I}_- = (-\infty, c)$, $\mathcal{I}_+ = (c, +\infty)$, то в равномерной операторной топологии*

$$m_\pm(\lambda) = \mp \frac{i}{\sqrt{\lambda}} I_1 + o(\frac{1}{\lambda}), \quad \lambda \to i\infty. \tag{28}$$

Доказательство проводится аналогично [21], с учетом (27) и известной [22] (см. также [23]) асимптотики $\rho_\pm(\mu)$.

Следствие 5. *Пусть $M(\lambda)$ — х.о. уравнения (25) на оси ($\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$) для которого условие (3) распадается (а значит, $M(\lambda)$ имеет вид (15)). Тогда в равномерной операторной топологии*

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{i}{2\sqrt{\lambda}} I_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) & o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \\ o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) & \frac{i\sqrt{\lambda}}{2} I_1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad \lambda \to i\infty. \tag{29}$$

Доказательство вытекает из (15), (28).

Следствие 6. *Операторные блоки х.о. $M(\lambda)$ (вида (15)) из следствия 5 связаны с блоками соответствующей спектральной матрицы $R(\mu)$ (26) формулами*

$$M_{11}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_{11}(\mu)}{\mu - \lambda}, \quad M_{ij}(\lambda) = a_{ij} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{\mu}{1 + \mu^2} \right\} d\rho_{ij}(\mu), \tag{30}$$

где интегралы слабо сходятся, $i + j > 2$, операторные константы $a_{ij} = a^*_{ji} \in B(\mathcal{H}_1)$ определяются из условий

$$\|M_{ij}(\lambda)\| \to 0 (i \neq j), \left\| M_{22}(\lambda) - \frac{i\sqrt{\lambda}}{2} I_1 \right\| \to 0, \quad \lambda \to i\infty. \tag{31}$$

Доказательство вытекает из интегрального представления операторных R-функций и из асимптотики (29), если к $(M(\lambda)f, f)$, $f \in \mathcal{H}$ и $(M_{11}(\lambda)h, h)$, $h \in \mathcal{H}_1$ применить результаты дополнения 1 И.С. Каца и М.Г. Крейна к книге [2].

Теорема 12. *Для того чтобы неубывающая операторная матрица-функция $R(\mu)$ (26) была отвечающей распадающимся краевым условиям спектральной матрицей уравнения (25) на оси $\mathcal{I} = (-\infty, +\infty)$ с операторным потенциалом $Q(t) \in C^{r_\pm}(\bar{\mathcal{I}}_\pm)$, необходимо и достаточно, чтобы для операторных функций $M_{11}(\lambda)$, $M_{ij}(\lambda)$, построенных по $R(\mu)$ по формулам (30), (31) следствия 6 (откуда $M_{22}^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$ при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$), были выполнены следующие два условия:*

1^0. *При $\operatorname{Im} \lambda > 0$ выполняется хотя бы одно из тождеств (17), а также хотя бы одно из тождеств (18). (Выполнение 1^0 для (30), (31) влечет при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$: 1) $M_{11}^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$. 2) Выполнение всех четырех тождеств (17), (18). 3) $(M_{ij} \pm \frac{1}{2} I_1)^{-1} \in B(\mathcal{H}_1), i \neq j$. 4) Определяемые (19) операторные функции $m_\pm(\lambda) = m^*_\pm(\bar{\lambda})$, причем $\mp m_\pm(\lambda)$ являются неванлинновскими.)*

2^0. *Отвечающие этим $m_\pm(\lambda)$ спектральные оператор-функции $\rho_\pm(\mu)$ являются спектральными функциями уравнения (25) на полуосях $\bar{\mathcal{I}}_\pm$ с условием типы косинуса в точке c и с потенциалами из $C^{r_\pm}(\bar{\mathcal{I}}_\pm)$.*

При этом потенциал $Q(t)$ восстанавливается [22] на полуосях $\bar{\mathcal{I}}_\pm$ по спектральным функциям $\rho_\pm(\mu)$.

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 9 и следствий 3, 6.

Достаточность. В силу (31) $M_{22}^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$ и, если выполнено, например, первое из равенств (17), то в силу (31) в равномерной операторной топологии

$$M_{11} = (M_{12}^2 - \frac{1}{4}I_1)M_{22}^{-1} = \frac{i}{2\sqrt{\lambda}}I_1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda \to i\infty,$$

откуда $M_{11}^{-1} \in B(\mathcal{H}_1)$, и значит, по теореме 9 выполнены (17)–(19) при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, ибо $M(\bar{\lambda}) = M^*(\lambda)$ для (16), (30).

Так как $M(\lambda)$ (16), (30) — неванлиннова, то по условию 2^0 и лемме 5 $m_\pm$ (19) имеют вид

$$\mp m_\pm(\lambda) = \alpha_\pm + \beta_\pm\lambda + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{\mu}{1+\mu^2}\right\} d\rho_\pm(\mu), \tag{32}$$

где $\alpha_\pm = \alpha_\pm^*$, $0 \leq \beta \in B(\mathcal{H}_1)$, интегралы слабо сходятся. С другой стороны, в силу (19), (31)

$$m_\pm = M_{22}^{-1}\left(M_{21} \pm \frac{1}{2}I_1\right) = \mp\frac{i}{\sqrt{\lambda}}I_1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \ \lambda \to i\infty$$

в равномерной операторной топологии. Учитывая это и применяя к $(m_\pm h, h)$, $h \in B(\mathcal{H}_1)$ результаты дополнения 1 И.С. Каца и М.Г. Крейна к книге [2], получим, что $m_\pm(32) = m_\pm(27)$, а значит, $m_\pm$ (19) являются по следствию 3 ф.В. уравнения (1), отвечающего уравнению (25). Поэтому в силу теоремы 9 $M(\lambda)$ (16), (30) является х.о. этого уравнения (1), а значит, $R(\mu)$ (26) — его (а следовательно, и уравнения (25)) спектральной матрицей. Теорема 12 доказана.

В скалярном случае теорема 12 доказана Ф.С. Рофе-Бекетовым [5] (см. также [6]) с уточнением представления (30) и условия (31).

Замечание 7. 1^0. *Если $R(\mu)$ (26) — спектральная матрица уравнения (25), отвечающая распадающимся краевым условиям, то $\tilde{R}(\mu) = \|(-1)^{i+j}\rho_{ij}(\mu)\|_{i,j=1}^2$ — отвечающая распадающимся краевым условиям спектральная матрица уравнения (25) на $\tilde{\mathcal{I}} = (2c-b, 2c-a)$ с отраженным потенциалом $\tilde{Q}(t) = Q(2c-t)$.*

2^0. *Для того чтобы в уравнении (25) на* $\mathcal{I} = \tilde{\mathcal{I}}$ *потенциал* $Q(t)$ *был симметричен относительно точки* c *(т.е.* $Q(t) = Q(2c - t)$*), необходимо, а в случае* $\mathcal{I} = (-\infty, +\infty)$ *и достаточно, чтобы у уравнения (25) на* $\mathcal{I}$ *существовала отвечающая распающимся краевым условиям блочно-диагональная спектральная матрица, т.е. с* $\rho_{ij} = 0$*,* $i \neq j$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1^0. Вытекает с учетом примера 1 из 1^0 замечания 6.

2^0. Необходимость вытекает из 2^0 замечания 6.

Достаточность. Если $\rho_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, то в силу (30) (31) $M_{ij} = 0$, $i \neq j$. Поэтому в силу (15) $m_+ = -m_-$, откуда $\rho_+(\mu) = \rho_-(\mu)$ в силу (27), а значит, [22] $Q(t) = Q(2c - t)$ и замечание 7 доказано.

Для скалярного уравнения (25) на оси $\mathcal{I} = (-\infty, +\infty)$ замечание 7 доказано в [5, 6].

5. Спектральная матрица х.о. в случае распадающегося условия (3)

Пусть $P = I$, $\mathcal{P}(\lambda)$ — х.п. уравнения (1) и для действительного μ $\exists s$ — $\lim_{\lambda \to \mu + io} \mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}(\mu) \Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \dot{+} \mathcal{H}_-$, где $\mathcal{H}_+ = \mathcal{P}(\mu)\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_- = (I - \mathcal{P}(\mu))\mathcal{H}$. Так как в силу теоремы 7 $\mathcal{H}_\pm$ являются $\mp G$-неотрицательными, то [17] $\mathcal{H}_\pm = H_\pm [\dot{+}] H_\pm^\circ$, где определяемые, вообще говоря, неоднозначно подпространства $H_\pm$ — $\mp G$-положительны, а однозначно определяемые подпространства $H_\pm^\circ$ — G — нейтральны.

Из формулы (9) вытекает

Теорема 13. *Пусть* $M(\lambda)$ *— х.о. уравнения (1), связанная с х.п.* $\mathcal{P}(\lambda)$ *формулой (7),* $Q_\pm$ *— проекторы на* $H_\pm$ *вдоль* $H_\pm^\circ \dot{+} H_\mp$*. Тогда*

$$w - \lim_{\lambda \to \mu + i0} Im M(\lambda) = \frac{1}{2} G^{-1} (Q_-^* G Q_- - Q_+^* G Q_+) G^{-1}, \tag{33}$$

где слагаемые не зависят от выбора подпространств $H_\pm$*.*

Ниже $H_\lambda(t)$ в (1) удовлетворяет условию начала $n^0 3$. Пусть $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{P}_\pm(\lambda)$ — х.п. из $n^0 1$ или $n^0 2$ теоремы 8; $M(\lambda)$, $M_\pm(\lambda)$ — связанные (7) с ними, х.о.

Из теоремы 13 вытекает

Следствие 7. *Пусть* $dim \mathcal{H} < \infty$*, для действительного* μ $\exists \mathcal{P}(\mu + i0)$*,* $\mathcal{P}_\pm(\mu + i0)$ *и* $\mathcal{P}_-^*(\mu + i0) G \mathcal{P}_-(\mu + i0) = (I - \mathcal{P}_+^*(\mu + i0)) G (I - \mathcal{P}_+(\mu + i0)) = 0$*. Тогда* $rg \operatorname{Im} M(\mu + i0) = rg \operatorname{Im} M_+(\mu + i0) + rg \operatorname{Im} M_-(\mu + i0)$*.*

Это — результат в направлении обобщения теоремы из [24] о связи кратностей спектров скалярного оператора Штурма–Лиувилля на оси и полуосях.

П р и м е р 2. Пусть $\mathcal{I} = \mathbf{R}^1$, в (1) $H_\lambda(t) = H_\lambda(t \pm T_\pm)$, $t \in \bar{\mathcal{I}}_\pm$. Тогда $\sigma(X_\lambda(c \pm T_\pm)) \cap \{\rho \in \mathbf{C} | |\rho| = 1\} = \emptyset$ при $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, х.о. $M(\lambda)$ единствен и отвечает распадающемуся условию (3), х.п. $\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}_+(\mathcal{P}_+ + I - \mathcal{P}_-)^{-1}$, где $\mathcal{P}_\pm$ — спектральные проекторы операторов монодромии $X_\lambda(c \pm T_\pm)$, отвечающие $\sigma(X_\lambda(c \pm T_\pm)) \cap \{\rho \in \mathbf{C} | |\rho| \lessgtr 1\}$, $(\mathcal{P}_+ + I - \mathcal{P}_-)^{-1} \in B(\mathcal{H})$ при $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$.

Если кроме того $dim\mathcal{H} < \infty$, $H_\lambda(t) = H_0(t) + \lambda H(t)$, $H_0 = H_0^*(t)$, то спектральная матрица-функция $\sigma(\mu)$ х.о. $M(\lambda)$ порождает равенство Парсеваля (см., например, [7, 8]) и $\sigma(\mu) = \sigma_{ac}(\mu) + \sigma_d(\mu)$. Здесь $\sigma_{ac} \in AC_{loc}$ и $\pi\sigma'_{ac}(\mu) = (33)$ с проекторами $Q_\pm = q_\pm(p_+ + I - p_-)^{-1}$, где $q_\pm(p_\pm)$ — рисовские проекторы матриц монодромии $X_\mu(c \pm T_\pm)$, отвечающие их унимодулярным мультипликаторам с $\mp G$ — положительными собственными векторами (их мультипликаторам, модуль которых будет $\lessgtr 1$ при сдвиге μ в $\mathbf{C}^+)^\star$; $\sigma_d(\mu)$ — функция скачков, точки роста которой не могут сгущаться на конечном расстоянии.

При $dim\mathcal{H} < \infty$, $T_+ = T_-$ х.о. и спектральная матрица найдена в [7] при $P = I$ на $\mathcal{I}$ и в [8] (см. также [25]) в самом общем случае.

В заключение отметим, что результаты работы легко переносятся на уравнение (1) с переменным старшим коэффициентом. Заметим также, что определение характеристического оператора, введенное в работе для дифференциального уравнения, можно аналогично случаю $dimH < \infty$ [26] распространить на неубывающие операторные семейства, не связанные, вообще говоря, с дифференциальным уравнением. При этом соответствующие обобщения допускают и результаты работы.

Автор благодарит Ф.С. Рофе-Бекетова за большое внимание к работе.

Список литературы

[1] *F.S. Rofe-Beketov*, Square-integrable solutions, self-ajoint extensions and spectrum of differential systems. — In: Proc. Uppsala Int. Conf. Diff. Equations, Uppsala (1977), p. 169–178.

[2] *Ф. Аткинсон*, Дискретные и непрерывные граничные задачи. Мир, Москва (1968).

[3] *В.И. Храбустовский*, Диссипативная операторная краевая задача. — *Тези міжнар. конф., присвяченої пам'яті акад. М.П. Кравчука*, Київ, Луцьк (1992).

[4] *F. Gestesy and Lev A. Sachnovich*, A class of matrix-valued Schrödihger operators with prescribed finite-band spectra. — Preprint. University of Missouri, Columbia, USA (2001).

* Не имеют конечных предельных точек множества, где не являются бесконечно дифференцируемыми $q_\pm$, $p_\pm$ (доказано в [7, 8]) и $(\mathcal{P}_+ + I - \mathcal{P}_-)^{-1}$ (доказывается аналогично).

[5] *Ф.С. Рофе-Бекетов*, Спектральная матрица и обратная задача Штурма–Лиувилля на оси $(-\infty, +\infty)$. — *Теория функций, функц. анализ и их прил.*, Харьков (1967), вып. 4, с. 189–197.

[6] *F.S. Rofe-Beketov*, The inverse Sturm-Lionville problem for the spectral matrix on the whole axis and associated problems. — *Pitman Research Notes. Math. Ser.* (1991), No. 235, p. 234–238.

[7] *В.И. Храбустовский*, Спектральная матрица периодической симметрической системы с вырождающимся весом на оси. — *Теория функций, функц. анализ и их прил.*, Харьков (1981), вып. 35, с. 111–119..

[8] *В.И. Храбустовский*, Спектральный анализ периодических систем с вырождающимся весом на оси и полуоси. — *Теория функций, функц. анализ и их прил.*, Харьков (1985), вып. 44, с. 122–133.

[9] *Ф.С. Рофе-Бекетов, А.М. Холькин*, Спектральный анализ дифференциальных операторов. Связь спектральных и осцилляционных свойств. — Изд-во ФТИНТ НАНУ, Приазовск. гос. тех. университета, Мариуполь (2001).

[10] *В.А. Юрко*, Обратные спектральные задачи и их приложения. — Изд-во Саратовск. пед. ин-та, Саратов (2001).

[11] *В.М. Брук*, О симметрических отношениях, порожденных дифференциальным выражением и неотрицательной операторной функцией. — *Функц. анализ*, Ульяновск (1980), вып. 15, с. 33–44.

[12] *В.М. Брук*, О линейных отношениях в пространстве вектор-функций. — *Мат. заметки* (1978), т. 24, вып. 4, с. 499–511.

[13] *В.М. Брук*, Обобщенные резольвенты симметрических отношений в пространстве вектор-функций. — *Функц. анализ*, Ульяновск (1986), вып. 25, с. 52–61.

[14] *С.А. Орлов*, Описание функций Грина канонических дифференциальных систем. Ч. I, II. — *Теория функций, функц. анализ и их прил.*, Харьков (1989), вып. 51, 52, с. 78–88, 33–39.

[15] *A. Dijksma and H.S. de Snoo*, Self-ajoint extensions of symetric subspaces. — *Pacific J. Math.* (1974), v. 54, No. 1, p. 71–100.

[16] *Т. Като*, Теория возмущений линейных операторов. Мир, Москва (1972).

[17] *Т.Я. Азизов, И.С. Иохвидов*, Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Наука, Москва (1986).

[18] *Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн*, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Наука, Москва (1970).

[19] *В.М. Брук*, Об обобщенных резольвентных и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка в пространстве вектор-функций. — *Мат. заметки* (1974), т. 15, № 6, с. 945–954.

[20] *М.Л. Горбачук*, О спектральных функциях дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами. — *Укр. мат. журн.* (1966), т. 18, № 2, с. 3–21.

[21] *Б.М. Левитан, И.С. Саргсян*, Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. Наука, Москва (1988).

[22] *Ф.С. Рофе-Бекетов*, Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях. — *Мат. сб.* (1960), т. 51 (93), № 3, с. 293–342.

[23] *В.А. Марченко*, Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Наукова думка, Киев (1977).

[24] *И.С. Кац*, Кратность спектра дифференциального оператора второго порядка и разложение по собственным функциям. — *Изв. АН СССР.* Сер. мат. (1963), т. 27, № 5, с. 1081–1112.

[25] *В.И. Храбустовский*, Разложения по собственным функциям периодических систем с весом. — *Докл. АН УССР.* Сер. А (1984), № 5, с. 26–29.

[26] *С.А. Орлов*, Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра и теоремы о инвариантности рангов радиусов предельных кругов. — *Изв. АН СССР.* Сер. мат. (1976), т. 40, № 3, с. 593–644.

On characteristic matrix of Weyl–Titchmarsh type for differential-operator equations, which contains spectral parameter in linear or Nevanlinna's manner

V.I. Khrabustovsky

In Hilbert space we consider on finite or infinite interval (a, b) Hamiltonian differential-operator equation, which contains the spectral parameter λ in Nevanlinna's manner. For this equation we define the characteristic operator $M(\lambda)$ and prove its existense. We descript $M(\lambda)$, which corresponds to separate bound conditinon, and found the connection between characteristic operators on (a, b), (a, c), (c, b), where $a < c < b$. As application we prove for Sturm-Liouville equation with operator-valued potential the analog of F.S. Rofe-Beketov theorem about reductions of inverse problem on the axis to inverse problems on half-axises. In matrix case, when equation contains λ in linear manner and its coefficients are periodic with different periods on half-axises, we find the absolutely continuous part of spectral matrix. The most of results are new even for matrix case and for the case, when equation contains λ in linear manner.