**УДК 534.6-8**

# РОЗПОВСЮДЖЕННЯ МЕХАНІЧНИХ ХВИЛЬ У ДВОВИМІРНОМУ ШАРУВАТОМУ СЕРЕДОВИЩІ

**Асист. О. В. Казанко, старш. викл. О. Є. Пєнкіна**

# PROPAGATION OF MECHANIC WAVE IN TWO-DIMENSION STRATIFIED MEDIUM

**Assistant A. Kazanko, senior lecturer O. Penkina**

DOI: https://doi.org/10.18664/1994-7852.205.2023.288814



***Анотація.*** *Принцип емерджентності підштовхує шукати нові властивості майбутніх матеріалів унаслідок структуризації складових елементів, причому переважно йдеться про неочевидну структуризацію. Наприклад, розуміння та імітація ізотропії лежить на шляху до стійкості до внутрішніх коливань. Сама по собі структурність є характерною рисою світу, що оточує людину (молекули білків, кристалічні решітки тощо). Проте різноманіття природних структур настільки численне, що безпосереднє вивчення їх щодо виявлення нових властивостей, мабуть, виявляється доволі складним завданням. Тому певною мірою принцип емерджентності ніби протиставляє необхідності копіювати або імітувати природні структури можливості здійснювати, винаходити. Подібно до того, як в оптичному калейдоскопі утворюється безліч різних візерунків завдяки двом або трьом оптичним елементам, принцип емерджентності дає підстави очкувати, що внаслідок структуризації лише декількох складових майбутнього середовища можуть бути отримані нові властивості.*

*Розвиток технології, зокрема 3D-друк, відкриває можливості по-новому подивитися на методологію структуризації середовища. Якщо на додачу цей процес є відносно економічним, то емпіричним шляхом, здійснюючи структуризацію, можна отримувати експериментальні лабораторні зразки. Сьогодні говорять про можливість досягнути таких ефектів, як лінзування механічних хвиль саме завдяки емерджентним властивостям. Відповідні пристрої обіцяють знайти своє застосування, наприклад, в ультразвуковій діагностиці в медицині (доц. Ж. Мемолі Сасекського університету, Великобританія).*

*У роботі розглядається задача про розповсюдження механічних хвиль у складеному періодичному двошаровому середовищі – плоска модель. Для такого середовища записується хвильове рівняння, яке розв'язується методом розділення змінних. Таким рівнянням виявляється лінійне диференціальне рівняння з періодичними кусково-сталими коефіцієнтами. Із загальної теорії диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами (теорії Флоке) добре відомий метод матриць перенесення (метод розрахунку проходження хвиль через багатошарові середовища), що дає змогу отримати складову умову розв'язності хвильового рівняння. У роботі розвивається підхід отримання умов розв'язності (побудову дисперсійного рівняння) разом із класичним методом матриць перенесення. Запропонований підхід у певному сенсі еквівалентний методу матриць перенесення, проте має деякі чудові відмінності, зокрема дає строге математичне підґрунтя для переходу до середовищ з кінцевою кількістю шарів.*

***Ключові слова:*** *пружне середовище, шарувате середовище, метод матриць перенесення, скалярне хвильове рівняння, розповсюдження хвиль, ефект лінзування.*

***Abstract.*** *The principle of emergence encourages us to look for new properties in future materials as a result of structuring of constituent elements, and mostly we are talking about non-obvious structuring. For example, understanding and simulating isotropy is on the way to robustness against internal vibrations. Structurality itself is a characteristic feature of the world around a person (protein molecules, crystal lattices, etc.). However, the variety of natural structures is so numerous that directly studying them to identify new properties appears to be quite a difficult task. Therefore, to a certain extent, the principle of emergence supposedly contrasts the need to copy or imitate natural structures with the ability to carry out inventions. Just as a wide variety of patterns are formed in an optical kaleidoscope thanks to 2 or 3 optical elements, the principle of emergence gives reason to expect that as a result of structuring only a few components of the future environment, new properties can be obtained.*

*The development of technology, in particular, 3D printing, opens up opportunities to look at the methodology of structuring the environment in a new way. If, in addition, this process is relatively economic, then empirically, by carrying out structuring, it is possible to obtain experimental laboratory samples. Today they are talking about the possibility of achieving such effects as lensing of mechanical waves precisely thanks to emergent properties. The corresponding devices promise to find application, for example, in ultrasound diagnostics in medicine (Assoc. Prof. J. Memoli, University of Sussex, UK).*

*The paper considers the problem of the propagation of mechanical waves in a folding periodic two-layer medium - a flat model. For such a medium, a wave equation is written and solved by the method of separation of variables. Such an equation turns out to be a linear differential equation with periodic piecewise-stable coefficients. From the basic theory of differential equations with periodic coefficients (Floquet theory), the method of transfer matrices (a method for calculating the passage of waves through multilayer media) is well known, which makes it possible to obtain a composite condition for the solvability of the wave equation. The work develops an approach to obtaining solvability conditions (constructing a dispersion equation) along with the classical method of transfer matrices. The proposed approach is in a certain sense equivalent to the transfer matrix method, however, it has some remarkable differences, in particular, it provides a rigorous mathematical basis for the transition to media with a finite number of layers.*

***Keywords:*** *elastic environment, layered medium, transfer matrix method, scalar wave equation, propagation of waves, lensing effect.*

**Вступ.** Певною мірою просування науково-технічного прогресу розумно пов'язувати з пошуками матеріалів, що мають нові електромагнітні, механічні та інші властивості. Мабуть, недарма цілі культурно-історичні періоди розвитку людства асоціюються саме з назвами матеріалів – кам'яна, мідна, бронзова доба. Та не дивлячись на досягнення в цьому напрямі, науково-технічний поступ і нові галузі науки спричиняють нові потреби у сфері пошуку раніше нереалізованих властивостей матеріалів. Власне, актуальними залишаються потреби якісного підвищення таких властивостей, як біологічна інертність (протезування в медицині), стійкість до корозії (будівництво), стійкість до трансформації (будівництво); високоміцнісні властивості (графен, вуглецеві трубки) водовідштовхувальні властивості, електропровідність і багато інших. Згадуючи фізичний принцип близькодії, справедливо стверджувати, що властивості матеріалів відображують закони розповсюдження хвиль: шумоізоляційні, звукофільтрувальні властивості, теплопровідні, теплоізоляційні, стійкість до руйнування внаслідок збурення коливань певної частоти (інженерні споруди, мости).

Один зі шляхів відкривати і виявляти нові властивості матеріалів полягає в спробах імітувати різні наявні у природі структури: це можуть бути структури кристалічних решіток, високоорганізованих молекул (білки) тощо. Чимало цікавих винаходів, з точки зору нових властивостей, було взято з живої природи: крила (надкрильники) комах, метеликів, листя рослин і багато чого іншого. Проте різноманіття природних структур настільки велике, що сама по собі розмаїтість створює проблеми в систематизації та класифікації природних структур і встановленні зв’язку між структурою та шуканою властивістю.

На рис. 1–2 подано дискретні неочевидно структуровані середовища, які мають ізотропію в декількох напрямках. Як відомо, усередині однорідного та ізотропного середовища вторинні хвилі взаємознищуються. Розуміння та імітація ізотропії лежить на шляху до стійкості стосовно внутрішніх коливань.

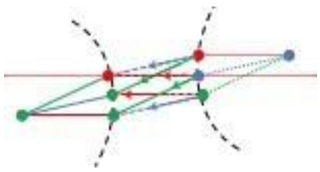

Рис. 1. Двовимірна модель дискретного середовища з трьома напрямками ізотропії

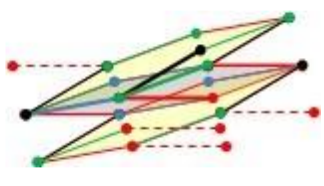

Рис. 2. Двовимірна модель дискретного середовища з чотирма напрямками ізотропії

Разом із імітацією природних структур існує ще один прийом пошуку нових (точніше потрібних або нових застосувань) властивостей матеріалів, який полягає у спробах здійснювати структуризацію потенційного матеріалу методом спроб і помилок (емпіричним шляхом) і, отже, робити ставку на принцип емердже́нтності (від англ. emergent «виникаючий» – поява в системі властивостей, не притаманних окремим складовим компонентам; незведеність властивостей системи до суми властивостей кожного окремого компонента).

Тобто сама по собі структуризація може (принцип емерджентності) призводити до появи нових властивостей. Існує чимало прикладів емерджентних властивостей відповідно структурованих матеріалів, одні з яких знаходять своє місце у виробництві, як-от антипригарні поверхні (у харчовому господарстві – Duramic, являє собою поєднання титану та кераміки), а інші чекають свого впровадження в масове виготовлення – звуковий прожектор доц. Ж. Мемолі Сасекського університету, Великобританія, 2019 р.). Ще одним прикладом матеріалу з емерджентними властивостями є вуглеволоконний композит, у якому поліпшення міцнісних характеристик досягається шляхом перемежування саме вуглецевого волокна з шарами-затверджувачами.

Отже, принцип емерджентності передрікає появу нових властивостей матеріалів внаслідок структуризації, тому вивчення механічних властивостей і рефлексивної поведінки у відповідь на механічне збурення може сприяти появі нових властивостей, практичних застосувань або стати відправним пунктом у подальших пошуках нових властивостей.

У статті розглянуто задачу про розповсюдження механічних хвиль у складеному періодичному шаруватому середовищі (рис. 3) – двовимірна модель (подібні моделі середовища використовуються в акустиці при лінзуванні звукових хвиль – звуковий прожектор, цеглові будови, шпали тощо). Для складеного періодичного шаруватого середовища записується хвильове рівняння, яке розв'язується методом розділення змінних. Таким рівнянням виявляється рівняння з кусково-сталими коефіцієнтами (модифіковане рівняння Гельмгольца). Щоб вписатися в умови розв'язності рівняння, використовують відомий з загальної теорії рівнянь з періодичними коефіцієнтами (теорії Флоке) метод матриць перенесення (transfer matrix method, ММП).

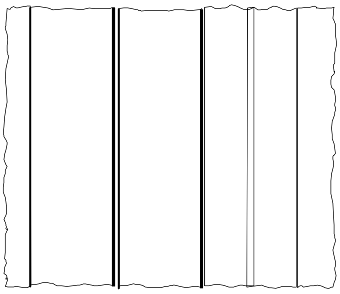

Рис. 3. Модель двовимірного необмеженого шаруватого середовища

На думку авторів, на увагу заслуговує підхід, який також дає змогу отримати умову на періоді (дисперсійне рівняння), дає строге математичне підґрунтя для деяких модифікацій вихідного середовища, зокрема переходити до середовищ з кінцевою кількістю шарів (у середовищах з кінцевою кількістю шарів довжина кожного шару може бути неоднаковою). У роботі дано доведення еквівалентності підходу та методу ММП. Хоча має місце еквівалентність, проте слід зазначити, що таке положення речей досить неочевидне. Такий метод більш адаптований до хвильового рівняння з кусково-сталими коефіцієнтами та не може застосовуватися до звичайних диференціальних рівнянь (з неперервними коефіцієнтами). Говорячи про еквівалентність методів, важливо підкреслити, що простір допустимих розв'язків звичайного рівняння вужче, ніж простір допустимих розв'язків рівняння з кусково-сталими коефіцієнтами. Логіка, яка «спрацьовує» на меншій множині, може не спрацювати на ширшій множині, тому еквівалентність методів дійсно неочевидна. Метод ММП використовується для звичайних диференціальних рівнянь з безперервними періодичними коефіцієнтами (рівнянь Хіла) і розповсюджується також на рівняння з кусково-сталими коефіцієнтами.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У роботі [1] розглядається періодичне кінцеве середовище, відшукуються розв'язки методом ММП; одновимірні хвилі диференціального рівняння однієї незалежної змінної (рівняння з періодичними коефіцієнтами) і будуються лінійно незалежні розв'язки – хвилі Флоке-Блоха. Розглянуто питання повноти системи цих розв'язків. Відомо, що скалярне хвильове рівняння є наслідком рівнянь Максвела – векторних рівнянь, що описують коливальні процеси розповсюдження в загальному вигляді. У роботі [2] з рівнянь Максвела виводиться хвильове рівняння для середовища з кусково-сталим матеріальним показником. У роботі [3] використовується метод ММП для чисельного експериментування розповсюдження хвиль у шаруватому середовищі для вивчення ефекту лінзування акустичних хвиль (звуковий прожектор).

Запишемо скалярне хвильове рівняння для плоского періодичного необмеженого шаруватого середовища [2]:

$$\Delta_\mu u + k^2 \boldsymbol{n}^2 u = 0\ , \qquad (1)$$

де $\Delta_\mu \ = \mu \nabla \frac{1}{\mu} \nabla$ – модифікований оператор Лапласа,

де $\mu\ = \mu(z)$ – матеріальна характеристика середовища – виникає при переході від векторного до скалярного хвильового рівняння, пов'язана з розташуванням системи координат і площиною коливання точок середовища – є кусково-сталою функцією вздовж незалежної змінної $z$ та сталою від $y$,

$$\mu(z) = \begin{cases} \mu_1, & z \in \left(\frac{d}{2} - l + ml,\ -\frac{d}{2} + ml\right] \\ \mu_2, & z \in \left(-\frac{d}{2} + ml,\ \frac{d}{2} + ml\right] \end{cases},$$

де $m$ ціле. За методом розділення змінних загальний розв'язок подається у вигляді ряду Фур'є (в ортогональних системах координат). Тож, маємо $u = \sum_n^\infty Y_{\beta_n} Z_{\beta_n}$, де $Z_{\beta_n}$ – повна ортогональна система функцій, причому елемент $Z_{\beta_n} = Z_{\beta_n}(z)$ задовольняє рівняння $\mu(\frac{1}{\mu}\dot{Z}) + (k^2\mathbf{n}^2 + \beta^2)Z = 0$, $Y_{\beta_n} = Y_{\beta_n}(y)$ – розв'язок (коефіцієнти Фур'є) звичайного лінійного диференціального рівняння другого порядку $\ddot{Y}_{\beta_n} + \beta_n^2 Y = 0$, має вигляд $Y_{\beta_n}(y) = C_{\beta_n} e^{\beta_n y} + D_{\beta_n} e^{-\beta_n y}$, $C_{\beta_n}$, $D_{\beta_n}$ – довільні константи, $n = 0, \pm 1, \dots$;

$u = u(z, y)$ – шукана скалярна функція, $z, y \in (-\infty, +\infty)$;

$k$ – скалярний хвильовий показник (частотна характеристика);

$\mathbf{n} = \mathbf{n}(z)$ – матеріальний показник середовища є кусково-сталою функцією вздовж незалежної змінної $z$ та сталою від $y$,

$$\mathbf{n}(z) = \begin{cases} n_1, & z \in \left(\frac{d}{2} - l + ml,\ -\frac{d}{2} + ml\right] \\ n_2, & z \in \left(-\frac{d}{2} + ml,\ \frac{d}{2} + ml\right] \end{cases}.$$

Задача про побудову системи $Z_{\beta_n}$, $n = 0, \pm 1, \dots$ називається проблемою Штурма-Ліувілля та може розв'язуватися як спектральна проблема для лінійного диференціального оператора другого порядку:

$$\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z, \qquad (2)$$

де $\mathrm{L}Z \equiv \mu(\frac{1}{\mu}\dot{Z}) + k^2\mathbf{n}^2 Z$ – лінійний диференціальний оператор другого порядку;

$\beta$ – спектральний параметр.

Питанням розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля присвячується доволі чимала теорія. Досить вичерпано ця проблема розбирається в математичній фізиці [4, 5], спектральній теорії диференціальних операторів [6], загальній теорії диференціальних рівнянь у часткових похідних. Один з методів, що дає змогу отримати складову умову розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з періодичними коефіцієнтами (рівнянь Хіла), ґрунтується на можливості встановити лінійний зв'язок між розв'язком $u(z)$ і $u(z-l)$ – метод матрицьперенесення (transfer matrix method, ММП). Зупинимося коротко на цьому методі (метод дає змогу отримати умови напероіді, тобто досягти виконання умови самоспряженості диференціального оператора у спектральній проблемі) і, отже, вписатися в умови розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля [1]. Справа в тому, що оператор, який розв'язку $u(z)$ ставить у відповідність розв'язок $u(z-l)$, є лінійним оператором, що діє у двовимірному просторі розв'язків спектрального диференціального рівняння $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z$ [7], тож задається квадратною матрицею розміром $2 \times 2$ (лінійність такого оператора перевіряється безпосередньо за визначенням). Якщо поставити задачу на власні числа для цього оператора, то відповідні власним числам функції матимуть вигляд $\Lambda u(z-l) = u(z)$, $\Lambda = \Lambda_\beta$ – власне число (число $\Lambda_\beta$ називають множником Флоке), допомагають зрозуміти, якими мають бути умови на періоді.

Нехай $\mathrm{T}: u(z) \to u(z-l)$, $u$ – розв'язок спектрального рівняння $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z$ і $\mathrm{T}u = \Lambda u$ – задача на власні числа для оператора $\mathrm{T}$. Оскільки оператор $\mathrm{T}$ задається матрицею розміром $2 \times 2$, то власні числа є розв'язками квадратного рівняння $\det(\mathrm{T} - \Lambda \mathrm{I}) = 0$. Елементи матриці $\mathrm{T}$ відносно фундаментальної системи розв'язків $u_1$, $u_2$ спектрального рівняння $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z$ неважко знаходяться, якщо система $u_1$, $u_2$ є нормальною системою відносно заданої точки $z = z_0$.

Тож у координатній формі матриця перенесення має вигляд [1, 8, 9]

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} u_1|_{z_0-l} & u_2|_{z_0-l} \\ \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0-l} & \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0-l} \end{pmatrix}.$$

Відповідно квадратне рівняння $\det(\mathrm{T} - \Lambda \mathrm{I}) = 0$ у координатній формі набуває вигляду

$$\Lambda^2 - \Lambda\left(\frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0-l} + u_1|_{z_0-l}\right) + 1 = 0. \quad (3)$$

Останнє рівняння пов'язує спектральний параметр $\beta$ з власними числами $\Lambda$ (дисперсійне рівняння). З практичної точки зору метод матриць перенесення цікавий тим, що для побудови матриці перенесення $\mathrm{T}$ досить мати розв'язки $u_1$, $u_2$ на проміжку $[z_0 - l,\ z_0]$, тобто необов'язково мати розв'язки на всій числовій осі $(-\infty, +\infty)$ [10].

**Визначення мети та завдання дослідження.** На думку авторів, на увагу заслуговує підхід, який разом з методом ММП також дає змогу отримати умову на періоді (дисперсійне рівняння) – складову умовою розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля. Цей підхід більш адаптований до рівнянь з періодичними кусково-сталими коефіцієнтами. Тому дисперсійне рівняння (3) може описувати дещо інші розв'язки – множина може бути ширшою. Отже, ця робота спрямована на докладне вивчення питання про еквівалентність нижченаведеного підходу та методу ММП. Крім того, при побудові матриці перенесення використовується точка нормалізації $z_0$ яка також присутня в дисперсійному рівнянні (3). Якщо ця точка припадає на границю розподілу середовищ, то самі фундаментальні розв'язки $u_1$, $u_2$ виявляються залежними від вибору точки $z_0$, оскільки тут знижуються диференціальні якості функцій $u_1$, $u_2$, а це також означає залежність від вибору системи координат. Отже, справедливо виникає питання про залежність спектрального рівняння від вибору точки нормалізації $z_0$.

**Основна частина дослідження.** Виділимо для визначеності деякий інтервал, що відповідає періоду вихідного механічного середовища – $\left(\frac{d}{2} - l,\ \frac{d}{2}\right)$. Нехай $u_1$ $u_2$ лінійно незалежні розв'язки спектрального рівняння (2) у цьому інтервалі $\left(\frac{d}{2} - l,\ \frac{d}{2}\right)$. По суті, з огляду на періодичність середовища, ці функції $u_1$ $u_2$ є розв'язками в кожному такому інтервалі $\left(\frac{d}{2} - l + ml,\ \frac{d}{2} + ml\right)$, $m$ ціле, і можуть розглядатися як періодичні функції зі стрибками в кінцях проміжку (наявність стрибку в кінцях проміжку не дає змогу вважати функції $u_1$, $u_2$ розв'язками на інтервалі $(-\infty, +\infty)$).

На думку авторів, на увагу заслуговує підхід, який також дає змогу отримати умову на періоді (дисперсійне рівняння). Автори вважають, що разом з методом матриць перенесення наступний підхід має декілька чудових рис. Фундаментальні розв'язки $u_1$, $u_2$ необов'язково мають утворювати нормальну систему. Незалежність вибору точки нормалізації $z_0$. Вихідне хвильове рівняння ніби розв'язується на кожному інтервалі окремо. Ця відмінність дає строге математичне підґрунтя для переходу від необмеженої структури до структури з кінцевою кількістю шарів. За підходом цієї роботи, дисперсійне рівняння виражається через функцію $Z_\beta$:

$$\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta\Big|_{\frac{d}{2}} - \frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta\Big|_{\frac{d}{2}-l} \equiv \frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} = 0.$$

Проте слід зазначити, що такий підхід неможливо застосувати до звичайних диференціальних рівнянь з неперервними коефіцієнтами. Нижче наводиться опис та доведення еквівалентності.

Утворимо з розв'язків $u_1$ $u_2$ лінійну комбінацію

$$Z_\beta = (u_2^+ - \Lambda u_2^-)u_1 - (u_1^+ - \Lambda u_1^-)u_2, \tag{4}$$

де $u_1^- = u_1(\frac{d}{2} - l)$, $u_1^+ = u_1(\frac{d}{2})$, $u_2^- = u_2(\frac{d}{2} - l)$, $u_2^+ = u_2(\frac{d}{2})$;

$\Lambda$ – деяке комплексне число.

Запишемо похідну $Z_\beta$ (будемо використовувати апарат дельта-функції Дірака)

$$\dot{Z}_\beta = (u_2^+ - \Lambda u_2^-)\dot{u}_1 + (u_2^+ - \Lambda u_2^-)[u_1]_{\frac{d}{2}}\delta(\tfrac{d}{2}) - (u_1^+ - \Lambda u_1^-)\dot{u}_2 + (u_1^+ - \Lambda u_1^-)[u_2]_{\frac{d}{2}}\delta(\tfrac{d}{2}),$$

або

$$\dot{Z}_\beta = (u_2^+ - \Lambda u_2^-)\dot{u}_1 + (u_1^+ - \Lambda u_1^-)\dot{u}_2 + \left((u_2^+ - \Lambda u_2^-)[u_1]_{\frac{d}{2}} - (u_1^+ - \Lambda u_1^-)[u_2]_{\frac{d}{2}}\right)\delta\left(\frac{d}{2}\right).$$

Тут символом $[u_{1,2}]_{\frac{d}{2}}$ позначено стрибок функції $u_{1,2}$ у точці $z = \frac{d}{2}$, тобто $[u_{1,2}]_{\frac{d}{2}} = u_{1,2}|_{\frac{d}{2}+0} - u_{1,2}|_{\frac{d}{2}-0}$ через періодичність, $[u_{1,2}]_{\frac{d}{2}} = u_{1,2}^+ - \Lambda u_{1,2}^-$. Член при дельта-функції в останньому перетворені порушує диференційованість функції $Z_\beta$. Проте неважко бачити, що з урахуванням вибраних скалярів у лінійній комбінації (4) цей член при дельта-функції обертається в нуль. Функції $u_{1,2}$ не є диференційованими на всій числовій осі $(-\infty, +\infty)$, однак лінійна комбінація з урахуванням виразу (4) дає диференційовану на $(-\infty, +\infty)$ функцію, причому для будь-якого значення спектрального параметра $\beta$. Далі, розмірковуючи, аналогічно запишемо другу похідну (як було щойно зазначено, перша похідна існує для будь-яких значень спектрального параметра $\beta$):

$$\left(\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta\right)^{\cdot} = (u_2^+ - \Lambda u_2^-)\frac{1}{\mu}\dot{u}_1 - (u_1^+ - \Lambda u_1^-)\frac{1}{\mu}\dot{u}_2 + \left((u_2^+ - \Lambda u_2^-)[\dot{u}_1]_{\frac{d}{2}} - (u_1^+ - \Lambda u_1^-)[\dot{u}_2]_{\frac{d}{2}}\right)\delta\left(\frac{d}{2}\right).$$

Зрозуміло, що для тих значень спектрального параметра $\beta$, для яких член при дельта-функції обертається в нуль функції $Z_\beta$, означає диференційованість і, як наслідок, функції $Z_\beta$ є розв'язками на $(-\infty, +\infty)$. Отже, приходимо до рівняння відносно спектрального параметра $\beta$

$$(u_2^+ - \Lambda u_2^-)[\dot{u}_1]_{\frac{d}{2}} - (u_1^+ - \Lambda u_1^-)[\dot{u}_2]_{\frac{d}{2}} = 0\,. \tag{5}$$

Маємо рівняння відносно спектрального параметра $\beta$. Припустимо тепер, що $u_1$, $u_2$ – нормальна система розв'язків відносно точки $z_0$, тобто

$$u_1(z_0) = 1,\ \dot{u}_1(z_0) = 0,\ u_2(z_0) = 0,\ \dot{u}_2(z_0) = 1,$$

$$(-\Lambda u_2^-)(-\Lambda \dot{u}_1^-) - (1 - \Lambda u_1^-)(1 - \Lambda \dot{u}_2^-) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\Lambda^2 u_2^- \dot{u}_1^- - (1-\Lambda u_1^-)(1-\Lambda\dot{u}_2^-) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Lambda^2 u_2^- \dot{u}_1^- - (1-\Lambda\dot{u}_2^- - \Lambda u_1^- + \Lambda^2 u_1^- \dot{u}_2^-) = 0.$$

Перегруповуємо доданки

$$\Lambda^2(\underbrace{u_2^-\dot{u}_1^- - u_1^-\dot{u}_2^-}_{=-1(\text{Вронскіан})}) - 1 + \Lambda(\dot{u}_2^- + u_1^-) = 0,$$

або

$$\Lambda^2 - \Lambda(\dot{u}_2^- + u_1^-) + 1 = 0.$$

Отже, отримуємо квадратне рівняння відносно параметра $\Lambda$, як і в методі ТМ.

Нехай тепер знову, як і в методі матриць перенесення, $u_1$, $u_2$ – лінійно незалежні (фундаментальні) розв'язки на $(-\infty,+\infty)$, визначник Вронського яких дорівнює одиниці. Утворимо з цих розв'язків таку лінійну комбінацію:

$$\mathrm{U}_1 = \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0} u_1 - \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0} u_2, \mathrm{U}_2 = -u_2|_{z_0} u_1 + u_1|_{z_0} u_2 .$$

Безпосередньо підстановкою переконуємося, що ці функції $\mathrm{U}_1$, $\mathrm{U}_2$ є нормальною системою розв'язків відносно точки $z_0 - \frac{d}{2}$, тобто $\mathrm{U}_1(z_0) = 1$, $\frac{1}{\mu}\dot{\mathrm{U}}_1\big|_{z_0} = 0$, $\mathrm{U}_2(z_0) = 0$, $\frac{1}{\mu}\dot{\mathrm{U}}_2\big|_{z_0} = 1$. Або у векторно-матричній формі при $z = z_0$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0} & -\frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0} \\ -u_2|_{z_0} & u_1|_{z_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1|_{z_0} \\ u_2|_{z_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0} & -\frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0} \\ -u_2|_{z_0} & u_1|_{z_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0} \\ \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

З останнього добре видно, що матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0} & -\frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0} \\ -u_2|_{z_0} & u_1|_{z_0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1|_{z_0} & \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0} \\ u_2|_{z_0} & \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0} \end{pmatrix}$$

є взаємно оберненими:

$$\begin{pmatrix} u_1|_{z_0} & \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0} \\ u_2|_{z_0} & \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0} & -\frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0} \\ -u_2|_{z_0} & u_1|_{z_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

отже,

$$u_1 = u_1|_{z_0}\mathrm{U}_1 + \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0}\mathrm{U}_2 = \alpha\mathrm{U}_1 + \beta\mathrm{U}_2, \quad (6)$$

$$u_2 = u_2|_{z_0}\mathrm{U}_1 + \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0}\mathrm{U}_2 = \gamma\mathrm{U}_1 + \delta\mathrm{U}_2. \quad (7)$$

Покажемо еквівалентність методу матриць перенесення та підходу, що розвивається в роботі. Нехай $\mathrm{T}$ – матриця перенесення, тобто матриця оператора, який розв’язку $u(z)$ ставить у відповідність розв’язок $u(z-l)$: $\mathrm{T}: u(z) \to u(z-l)$. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що функції $u_1$, $u_2$ у двовимірному просторі розв’язків рівняння (2) мають координати $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Для того щоб знайти елементи матриці, оператору $\mathrm{T}$ необхідно перейти до координатної форми. Будемо діяти оператором $\mathrm{T}$ на кожен фундаментальний розв’язок окремо (підкреслимо, що фундаментальні розв’язки $u_1$, $u_2$ вибираються довільно):

$$\mathrm{T}u_1 = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\end{pmatrix},\quad \mathrm{T}u_2 = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\end{pmatrix}$$

(елементи матриці оператора $\mathrm{T}$ залежать від вибору системи координат). Перепишемо останні перетворення в координатній формі

$$a_{11}u_1(z) + a_{21}u_2(z) = u_1(z-l), \quad a_{12}u_1(z) + a_{22}u_2(z) = u_2(z-l).$$

Тобто маємо два рівняння, але чотири невідомих $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$, $a_{22}$, тож додаємо ще похідні:

$$a_{11}\frac{1}{\mu(z)}\dot{u}_1(z) + a_{21}\frac{1}{\mu(z)}\dot{u}_2(z) = \frac{1}{\mu(z)}\dot{u}_1(z-l),$$

$$a_{12}\frac{1}{\mu(z)}\dot{u}_1(z) + a_{22}\frac{1}{\mu(z)}\dot{u}_2(z) = \frac{1}{\mu(z)}\dot{u}_2(z-l).$$

Далі зрозуміло, що шукані елементи матриці $\mathrm{T}$ послідовно виписуються, розв’язуючи СЛАР у деякій точці $z = z_0$:

$$a_{11} = \frac{1}{\mathrm{W}}\begin{vmatrix} u_1|_{z_0-l} & u_2|_{z_0} \\ \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0-l} & \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0}\end{vmatrix},\quad a_{21} = \frac{1}{\mathrm{W}}\begin{vmatrix} u_1|_{z_0} & u_1|_{z_0-l} \\ \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0} & \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0-l}\end{vmatrix},$$

$$a_{12} = \frac{1}{\mathrm{W}}\begin{vmatrix} u_2|_{z_0-l} & u_2|_{z_0} \\ \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0-l} & \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0}\end{vmatrix},\quad a_{22} = \frac{1}{\mathrm{W}}\begin{vmatrix} u_1|_{z_0} & u_2|_{z_0-l} \\ \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0} & \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0-l}\end{vmatrix},$$

$$\mathrm{W} = \begin{vmatrix} u_1|_{z_0} & u_2|_{z_0} \\ \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0} & \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0-l}\end{vmatrix}.$$

Як видно, кожен елемент матриці перенесення являє собою певний визначник, перемножуючи відповідним чином останні визначники, отримуємо рівняння

$$\det(\mathrm{T} - \Lambda \mathrm{I}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_{11} - \Lambda)(a_{22} - \Lambda) - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - \Lambda(a_{22} + a_{11}) + \Lambda^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow |\mathrm{T}| - \Lambda(a_{22} + a_{11}) + \Lambda^2 = 0.$$

Отже, отримаємо зв'язок між спектральним параметром $\beta$ і власними числами $\Lambda$. Втім, маючи на меті показати еквівалентність методу матриць перенесення та підходу, що розвивається в роботі, будемо йти дещо іншим шляхом. З урахуванням виразів (6), (7)

$$a_{11}\alpha \mathrm{U}_1(z) + a_{11}\beta \mathrm{U}_2(z) + a_{21}\gamma \mathrm{U}_1(z) + a_{21}\delta \mathrm{U}_2(z) = u_1(z-l)$$

або

$$(a_{11}\alpha + a_{21}\gamma)\mathrm{U}_1(z) + (a_{11}\beta + a_{21}\delta)\mathrm{U}_2(z) = u_1(z-l).$$

Оскільки система фундаментальних розв'язків $\mathrm{U}_1$, $\mathrm{U}_2$ спектрального рівняння $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z$ є нормальною системою відносно точки $z_0$, то з останнього при $z = z_0$ матимемо

$$a_{11}\alpha + a_{21}\gamma = u_1(z_0 - l).$$

Тобто маємо дві невідомі $a_{11}$, $a_{21}$, але одне рівняння. Щоб отримати друге рівняння та дві невідомі $a_{11}$, $a_{21}$, додаємо похідну, отже, з урахуванням виразів (6), (7) записуємо

$$a_{11}\beta + a_{21}\delta = \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0-l}.$$

І наостанок,

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1|_{z_0-l} \\ \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0-l} \end{pmatrix}.$$

Аналогічно переходимо до координатної форми при дії оператора $\mathrm{T}$ на функцію $u_2$:

$$a_{12}u_1(z) + a_{22}u_2(z) = u_2(z-l)$$

$$\Leftrightarrow a_{12}\alpha \mathrm{U}_1(z) + a_{12}\beta \mathrm{U}_2(z) + a_{22}\gamma \mathrm{U}_1(z) + a_{22}\delta \mathrm{U}_2(z) = u_2(z-l)$$

$$\Leftrightarrow (a_{12}\alpha + a_{22}\gamma)\mathrm{U}_1(z) + (a_{12}\beta + a_{22}\delta)\mathrm{U}_2(z) = u_2(z-l),$$

при $z = z_0$

$$a_{12}\alpha + a_{22}\gamma = u_2(z_0 - l).$$

Звідки, додаючи похідну, знаходимо

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_2|_{z_0-l} \\ \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0-l} \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця перенесення $\mathrm{T}$ подається у вигляді такого добутку:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_1\mathrm{T}_2 = \begin{pmatrix} u_1|_{z_0} & u_2|_{z_0} \\ \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0} & \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1|_{z_0-l} & u_2|_{z_0-l} \\ \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0-l} & \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0-l} \end{pmatrix}.$$

Власні числа $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ матриці $\mathrm{T}$ (множники Флоке) є розв’язками квадратного рівняння ($\det \mathrm{T}_1 \neq 0$):

$$\det(\mathrm{T} - \Lambda\mathrm{I}) = \det(\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2 - \Lambda\mathrm{I}) = \det(\mathrm{T}_2 - \Lambda\mathrm{T}_1^{-1})\det \mathrm{T}_1 = 0 \Leftrightarrow \det(\mathrm{T}_2 - \Lambda\mathrm{T}_1^{-1}) = 0$$

або

$$\left|\begin{pmatrix} u_1|_{z_0-l} & u_2|_{z_0-l} \\ \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0-l} & \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0}\dot{u}_2^{-} \end{pmatrix} - \Lambda\begin{pmatrix} u_1|_{z_0} & u_2|_{z_0} \\ \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0} & \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0} \end{pmatrix}\right| = 0.$$

Розкриваючи визначник, маємо

$$\left(u_1|_{z_0} - \Lambda u_1|_{z_0-l}\right)\left(\frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0} - \Lambda\frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0-l}\right)$$

$$-\left(u_2|_{z_0} - \Lambda u_2|_{z_0-l}\right)\left(\frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0} - \Lambda\frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0-l}\right) = 0.$$

Отримане рівняння, очевидно, еквівалентне рівнянню (5), що й слід було довести.

**Висновки.** Стає зрозумілим, що розв’язок спектральної проблеми, яка виникає у зв’язку з розв’язанням хвильового рівняння (1) методом розділення змінних, може відшукуватися не лише методом матриць перенесення. Була показана еквівалентність методу ММП та підходу, що розвивається в роботі. При побудові дисперсійного рівняння з’ясувалась незалежність від точки нормалізації – $z_0$ вираз (3). Ця відмінність дає строге математичне підґрунтя для переходу від необмеженої структури до структури з кінцевою кількістю шарів. Зазначимо, що в цьому підході суттєвим є вибір проміжку, бо тут ставка зроблена на можливість знизити диференціальні якості серед допустимих розв’язків при виході на границю.

## *Список використаних джерел*

1. Morozov G. V., Sprung D. W. L. Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystals. EPL (Europhysics Letters). 2011. Nov. 22; 96(5): 54005. URL: https://doi.org/10.1209/0295-5075/96/54005.

2. Казанко О. В., Пєнкіна О. Є. Диференціювання поперечних розв’язків хвильового рівняння по повздовжньому хвильовому числу в дифракційній задачі для необмеженого періодичного шаруватого середовища з метаматеріалом. *Збірник наукових праць ΛΌΓΟΣ*. 2020. С. 126-130.

3. Mimoli G. A transfer matrix method for calculating the transmission and reflection coefficient of labyrinthine metamaterials. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 151, 1022 (2022). doi: 10.1121/10.0009428.

4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Изд. 4-е. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 512 с.

5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: учеб. пособ. Испр. и доп. 6-е изд. Москва: Издательство МГУ, 1999. 742 с.

6. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовых пространствах: книга для специалистов, аспирантов математических специальностей. Изд. 2-е. Москва: Наука, 1966. 544 с.

7. Виленкин Н. Я., Доброхотова М. А., Сафонов А. Н. Дифференциальные уравнения: учеб. пособ. для студ. физ.-мат. факультетов. Москва: Просвещение, 1984. 176 с.

8. Eastham M. S. P. The spectral theory of periodic differential equations. Edinburg: Scottish Academic Press, 1973. 130 pp.

9. Winkler S., Magnus W. Hill's Equation. New York, London, Sydney: Interscience Publisher a division John Wiley & Sons, 1996. 135 pp.

10. Казанко А. В., Шматько А. А., Одаренко Е. Н., Мизерник В. Н. Дисперсионные характеристики слоистых структур в задаче дифракции волн на решетке с метаматериала. *Сб. науч. трудов ХНУРЭ. Сер. Радиотехника*. 2015. С. 77-83.

Казанко Олександр Віталійович, асистент кафедри обчислювальної техніки та систем управління, Український державний університет залізничного транспорту. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9202-8008.
Тел.: +38 (057) 730-10-40. E-mail: kazanko@kart.edu.ua.
Пєнкіна Ольга Євгеніївна, старший викладач кафедри обчислювальної техніки та систем управління, Український державний університет залізничного транспорту. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9804-6685.
Тел.: +38 (057) 730-10-40. E-mail: penkina@kart.edu.ua.

Kazanko Alexander, Assistant, Department of Computer Engineering and Control Systems, Ukrainian State University of Railway Transport. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9202-8008. Tel.: +38 (057) 730-10-40.
E-mail: kazanko@kart.edu.ua.
Penkina Olga, Senior Lecturer, Department of Computer Engineering and Control Systems, Ukrainian State University of Railway Transport. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9804-6685. Tel.: +38 (057) 730-10-40.
E-mail: penkina@kart.edu.ua.

Статтю прийнято 27.09.2023 р.