МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра експлуатації та ремонту рухомого складу

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для практичних робіт з дисципліни

«ОСНОВИ НАДІЙНОСТІ ТА ТЕХНІЧНОЇ ДІАГНОСТИКИ ЗРС»

Харків – 2016

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри експлуатації та ремонту рухомого складу 16 листопада 2015 р., протокол №12.

Методичні вказівки призначено для студентів УкрДУЗТ напряму підготовки 6.07010501 "Локомотиви та локомотивне господарство" усіх форм навчання та відповідають робочій програмі з курсу «Основи надійності та технічної діагностики ЗРС».

Укладачі:

проф. О.С. Крашенінін,
асистенти О.О. Шапатіна,
О.В. Клименко,
асп. В.А. Гогаєв

Рецензент

проф. Д.С. Жалкін

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для практичних робіт з дисципліни

«ОСНОВИ НАДІЙНОСТІ ТА ТЕХНІЧНОЇ ДІАГНОСТИКИ ЗРС»

Відповідальний за випуск Клименко О.В.

Редактор Третьякова К.А.

Підписано до друку 15.12.15 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 0,75. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Тяговий рухомий склад залізниць України досяг критичного стану, що потребує вирішення комплексу наукових та практичних завдань щодо його утримання.

Такі складні системи, як локомотиви складаються з великої кількості вузлів і блоків, причому кількість станів цих систем настільки велика, що визначення їх показників точними методами практично не є можливим. Ще більш складною системою є інфраструктура локомотивного господарства і його окремі підрозділи. У таких випадках доводиться використовувати наближені методи, за умови обґрунтування спрощень і необхідного математичного апарату.

Спеціаліст, який проводить аналіз адекватності складної системи, повинен мати «тверді знання» у різних галузях науки.

Тому в методичних вказівках наведено відомості щодо загальних питань теорії нечітких множин, яка за останні роки набула широкого застосування для рішення великого спектра наукових і практичних завдань. Для кращого освоєння матеріалу приведені конкретні приклади і варіанти завдань для самостійного рішення.

1 ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

Стрімкі зміни, які супроводжують сучасні процеси в усіх сферах діяльності, призводять до того, що традиційні поняття і категорії набувають розмитих нечітких границь. Реальність формує невизначеність, відсутність точних рішень і ігнорування якісної оцінки ситуації.

За останній час стрімко розвивається і знаходить широке застосування в технічних, соціальних й економічних науках теорія нечітких множин.

Ідея, яка міститься в основі теорії нечітких множин, полягає у тому, що прийняття рішень формується на основі нечітких понять [1, 2].

Математичну основу нечітких і гібридних систем складають протилежні традиційним комп'ютерним обчисленням (hard computing), так звані м'які обчислення (soft computing), однією із складових яких є нечітка логіка.

Останнім часом нечітке управління є однією з найактивніших і найрезультативніших сфер досліджень застосування теорії нечітких множин. Саме це робить цю тему актуальною та цікавою для вивчення.

Метою даних методичних вказівок є вивчення можливості застосування нечіткої логіки як інструменту для прийняття рішень.

Розглянемо поняття нечітких множин.

Нехай A - деяка множина. Підмножина B множини A характеризується своєю характеристичною функцією

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, \ x \in B, \\ 0, \ x \notin B. \end{cases} \tag{1}$$

Зазвичай кажуть, що нечітка підмножина C множини A характеризується своєю функцією приналежності $\mu_C : A \to [0,1]$. Значення функції приналежності в точці x показує ступінь приналежності цієї точки нечіткій множині. Нечітка множина описує невизначеність, що відповідає точці x: вона одночасно входить і не входить до нечіткої множини C. За входження – $\mu_C(x)$ шансів, за друге – $(1-\mu_C(x))$ шансів.

Теорія нечітких множин є не менш загальною математичною дисципліною, ніж звичайна теорія множин, оскільки звичайні множини – окремий випадок нечітких. Відповідно можна очікувати, що теорія нечіткості як ціле узагальнює класичну математику. Проте також можна говорити, що теорія нечіткості у певному сенсі зводиться до теорії випадкових множин і тим самим є частиною класичної математики. Іншими словами, за ступенем спільності звичайна математика і нечітка математика еквівалентні. Однак для практичного застосування в теорії прийняття рішень опис та аналіз невизначеностей за допомогою теорії нечітких множин достатньо плідні.

Початок сучасної теорії нечіткості покладено роботою 1965 р. американським вченим азербайджанського походження Л.А. Заде.

Л.А. Заде розглядав теорію нечітких множин як апарат аналізу і моделювання гуманістичних систем, тобто систем, в яких бере участь людина. Його підхід спирається на передумову про те, що елементами мислення людини не є числа, а елементи деяких нечітких множин або класів об'єктів, для яких перехід від "приналежності" до «неналежності» не стрибкоподібний, а безперервний. В даний час методи теорії нечіткості використовуються майже у всіх прикладних областях, у тому числі при управлінні підприємством, якістю продукції і технологічними процесами.

Приведемо визначення теоретико-множинних операцій над нечіткими множинами. Нехай C і D – дві нечіткі підмножини A з функціями належності $\mu_C(x)$ та $\mu_D(x)$ відповідно.

Перетинанням $C \cap D$, добутком CD, об'єднанням $C \cup D$, запереченням $\bar{C}$, сумою $C + D$ називаються нечіткі підмножини A з функціями приналежності

$$\mu_{C\cap D}(x) = \min\left(\mu_C(x), \mu_D(x)\right),\ \ \mu_{CD}(x) = \mu_C(x)\mu_D(x),\ \ \mu_C(x) = 1 - \mu_C(x),$$

$$\mu_{C\cup D}(x) = \max\left(\mu_C(x), \mu_D(x)\right),\ \ \mu_{C+D}(x) = \mu_C(x) + \mu_D(x) - \mu_C(x)\mu_D(x),\ \ x \in A,$$

відповідно.

Прийняття рішень в умовах невизначеності і ризику є розділом, найбільш тісно пов'язаним з дослідженням операцій як за своїм характером, так і за постановками питань.

Основним завданням теорії статистичних рішень є вибір рішень в умовах невизначеності, коли кожна дія призводить до одного з безлічі приватних результатів, ймовірності яких невідомі або навіть не мають сенсу. В умовах невизначеності людина або автомат, що вибирає той або інший спосіб дій, не мають повної інформацієї про всі чинники, урахування яких має суттєвий вплив на цей вибір. У деяких завданнях для стану природи може бути задано розподіл ймовірностей. У цьому випадку прийнято говорити про вибір рішень в умовах ризику.

Теорія статистичних рішень (ігор проти природи) тісно пов'язана з теорією стратегічних ігор. В іграх проти природи одному з учасників протистоїть «пасивний» учасник, тобто деяка не повністю відома йому обставина – «стан природи (середовища)».

Одним з методів вибору рішень у ситуаціях при наявності ряду не повністю відомих об'єктивних обставин є методи лінійного програмування. В інших ситуаціях, коли доводиться мати справу з безперервно мінливою обстановкою, застосовують методи динамічного програмування [1, 2]. У багатьох випадках виникають ситуації, в яких кількісна теорія ігор, заснована на понятті ціни гри, виявляється не придатною з огляду на те, що дії гравців можуть зачіпати якісно різні обставини і судити про ефективність цих дій можливо лише за якісним порівнянням результатів. Однак і в таких випадках можливі математичні постановки завдань і методи для їх вирішення. При цьому велике значення має вибір спеціальних критеріїв, що дозволяють оцінювати ту чи іншу дію. Сутність завдань вибору дії (рішення) в умовах ризику полягає у наступному. Розглянемо безліч дій $i=1,2,...,m$ і можливих результатів, що визначаються станами природи $j=1,2,...,n$, позначимо через a_{ij} виграші (доходи, прибуток), пов'язані з дією i при результаті (стані природи) j. В даному випадку a_{ij} є функцією мети. Числа a_{ij} запишемо у вигляді матриці A розміром $m \times n$. Матрицю A назвемо матрицею доходу. Істинний стан природи j невідомий. Знайдемо таку дію i (тобто виберемо такий рядок матриці A), яка в певному сенсі є найкращою дією. Нехай відомі ймовірності $p_1,p_2,...,p_n$ станів $j=1,2,...,n$, де $p_1+p_2+...+p_n=1$. Тоді має місце завдання вибору рішень при ризику. За критерій прийняття рішення вибирається критерій максимуму математичного сподівання виграшу $\sum a_{ij} p_{ij}$, тобто приймається рішення про використання стратегії, що відповідає максимуму

$$\max_{i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_{ij} \,. \qquad (2)$$

При невідомих ймовірностях p_j можна прийняти, що всі стани природи різноімовірні (принцип недостатньої підстави Лапласа). Тоді $p_j = \frac{1}{n}$ і вибір рішення визначається критерієм Лапласа, при якому той, хто приймає рішення, вибирає таку дію $i=i_0$, при якій має місце

$$L = \frac{1}{n} \max_{1<1<m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,. \qquad (3)$$

Розглянемо тепер критерії при виборі рішень в умовах невизначеності, коли питання про розподіл ймовірностей станів природи не вирішено, з кінцевим числом дій $i=1,2,...,m$ і кінцевим числом станів природи $j=1,2,...,n$.

Згідно з максимінним критерієм Вальда той, хто приймає рішення, намагається вибрати стратегію, що дозволяє йому отримати нижню ціну гри для парної матричної гри з нульовою сумою, тобто вибирається дія, яка гарантуватиме при будь-яких умовах виграш, не менший, ніж

$$W = \max_{i} \min_{j} a_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n \,. \qquad (4)$$

Критерій Севиджа називається також критерієм мінімального ризику. Ризиком r_{ij} є така різниця:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}, \beta_j = \max_{1 \le i \le m} a_{ij} \,. \qquad (5)$$

Матриця $R=(r_{ij})$ - матриця ризиків. Згідно з критерієм Севиджа той, хто приймає рішення намагається вибрати дію, при якій величина ризику приймає найменше значення у найбільш несприятливій ситуації, тобто

$$S = \min_i \max_j r_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n. \qquad (6)$$

Згідно з критерієм Гурвіца той, хто приймає рішення, намагається вибрати таку дію, при якій має місце

$$H = \max_i \left(\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right), \ 0 \le \alpha \le 1, \qquad (7)$$

де число α називається коефіцієнтом довіри. Цей коефіцієнт вибирають із суб'єктивних міркувань. При $\alpha = 1$ критерій Гурвіца дає критерій Вальда.

Останнім часом набули розвитку ігри в нечітко певній обстановці – це ігри, в яких цілі і допустимі вибори (стратегії) учасників описуються у формі нечітких множин.

Нехай *X* і *Y* – універсальні безлічі стратегій, які в принципі можуть вибирати гравці 1 і 2 відповідно. Допустимі стратегії гравців описуються нечіткими множинами $\mu^1 : X \longrightarrow [0,1]$ та $\mu^2 : X \longrightarrow [0,1]$. Задано функції $f_1 f_2 : X \times Y \longrightarrow R_1$, причому значення $f_i(x, y)$, $i=1,2$, інтерпретується як оцінка гравцем *i* ситуації (x,y). Безліч *R'* (числова вісь) інтерпретується при цьому як універсальна безліч оцінок.

Кожен з гравців прагне досягти своєї нечітко описаної мети. Будемо вважати, що мета гравця *i* описується нечіткою множиною G_i в універсальній множині оцінок R^1 з функцією приналежності $\overline{\mu_0^1} : R^1 \longrightarrow [0,1]$. Зауважимо, що мета, поставлена перед гравцем, може виявитися погано або взагалі не сумісною з його можливостями.

Мету гравця *i* будемо описувати нечіткою підмножиною множини ситуацій вигляду

$$\mu_0^1(x, y) = \overline{\mu_0^1}(f_1(x, y)), (x, y) \in X \times Y. \qquad (8)$$

Задана нечітка множина така, що її образом у R^1 при відображенні f_i є задана в R^1 нечітка множина мети G_i.

Якби, наприклад, мета гравця *i* була чітко визначеною, тобто описувалася б функцією приналежності, що приймає лише значення 0 і 1, то гравець *i* прагнув би реалізації у грі будь-якої ситуації *(x,y)*, для якої $\mu_G^i(x,y)=1$.

Введемо нечіткі множини D_1 і D_2 в $X\times Y$ таким чином:

$$\mu_{D_1}(x,y)=\min\left\{\mu^1(x),\ \mu_G^1(x,y)\right\}, \tag{9}$$

$$\mu_{D_2}(x,y)=\min\left\{\mu^2(y),\ \mu_G^2(x,y)\right\}. \tag{10}$$

Інакше кажучи, нечіткі множини D_i, $i=1,2$ - суть перетину відповідних нечіткої множини допустимих стратегій і нечіткої множини мети.

Сенс множин D_1 і D_2 можна пояснити так. Якщо, наприклад, гравцеві 1 відомий конкретний вибір $\overline{y}\in Y$ гравця 2, то перед ним (гравцем 1) стоїть завдання досягнення нечіткої мети $\mu_G^1(x,\overline{y})$ при безлічі допустимих альтернатив $\mu^1(x)$. Відповідно до підходу Белмана-Заде рішення D_1 такого завдання визначається як перетин нечітких множин μ^1 та $\mu_G^1(x,\overline{y})$:

$$\mu_{D_1}(x,\overline{y})=\min\left\{\mu^1(x),\ \mu_G^1(x,\overline{y})\right\}. \tag{11}$$

Нечітку безліч $\mu_{D_1}(x,y)$ можна розглядати як сімейство (за параметром *y*) рішень завдань досягнення нечітких цілей $\mu_G^1(x,y)$.

При найбільш загальній постановці допустимим значенням потрібно вважати вибір гравцями довільних нечітких підмножин множин їх допустимих стратегій і вести аналіз гри в класах подібних нечітких стратегій. Розглянемо більш вузьку (і більш просту) постановку завдання, в якому виборами гравців можуть бути лише стратегії-елементи відповідних універсальних множин *X* і *Y*. При цьому будемо вважати, що при кожному фіксованому виборі одного гравця другий вибирає стратегію, яка максимізує відповідну йому функцію $\mu_{D_1}(x,y)$, тобто стратегію, яка має максимальний ступінь приналежності нечіткій множині D_i.

Можна вважати, що гравець *i (i=1,2)* прагне досягнення якомога більшого значення функції $\mu_{D_1}(x,y)$. Ігрова ситуація, що розглядається, формулюється при цьому таким (чітким) чином: X і Y – множини стратегій гравців 1 і 2, μ_{D_1} і μ_{D_2} – їх функції виграшів.

Нехай гравець 1 має можливість першим вибрати свою стратегію і повідомити її гравцеві 2. Тоді найбільший гарантований виграш гравця 1 дорівнює

$$M_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} \mu_{D_1}(x,y) = \max_{x \in X} \min \left\{ \mu^1(x), \min_{y \in Y(x)} \mu_G^1(x,y) \right\}. \qquad (12)$$

Якщо величина M_1 занадто мала, то це означає, що мета, досягнення якої прагне гравець 1, дуже завищена (з урахуванням його можливостей). У цьому зв'язку природним чином виникає таке завдання. Нехай сформульована нечітка мета гравця 1 у вигляді нечіткої множини μ_G^1 в R^1. Якою повинна бути нечітка множина його стратегій, що гарантувала б йому (при заданій інформованості про гравця 2) досягнення мети зі ступенем, не меншим деякого заданого числа a? Іншими словами, якою повинна бути функція $\mu_1(x)$, що описує нечітка множина стратегій гравця 1, щоб виконувалася нерівність

$$M_1 = \max_{x \in X} \min \left\{ \mu_1(x), \min_{y \in Y(x)} \mu_G^1(x,y) \right\} \geq a\ . \qquad (13)$$

Для вирішення цього завдання введемо множину

$$X_a = \max_{x \in X} \min \left\{ x \middle| \min_{y \in Y(x)} \mu_G^1(x,y) \geq a \right\} \subset X\ . \qquad (14)$$

Нехай $X_a \neq \varnothing$, тоді легко зробити висновок, що гарантувати досягнення мети зі ступенем не менше a можна тоді і тільки тоді, коли $\mu_1(x) \geq a$ при деякому $x \in X_a$.

Грою з протилежними інтересами в нечітко певній обстановці називають гру, в якій функції приналежності $\overline{\mu}_G^1(z)$ і функції $f_i(x,y)$, що описують цілі гравців, такі:

$$\overline{\mu}_G^1(z_1) > \overline{\mu}_G^1(z_2) \longleftrightarrow \overline{\mu}_G^2(z_1) < \overline{\mu}_G^2(z_2), \tag{15}$$

$$\overline{\mu}_G^1(z_1) = \overline{\mu}_G^1(z_2) \longleftrightarrow \overline{\mu}_G^2(z_1) = \overline{\mu}_G^2(z_2), \tag{16}$$

$$f_1(x,y) = f_2(x,y) \quad \forall (x,y) \in X \times Y. \tag{17}$$

Якщо скористатися підходом Велмана-Заде, то нечітку мету гравця *i* слід записати у вигляді

$$\mu_G^1(x,y) = \mu_G^1(f_1(x,y)), \tag{18}$$

тобто як нечітку підмножину множини всіх ситуацій гри $X \times Y$.

Протилежність інтересів гравців можна сформулювати в такому більш загальному вигляді: інтереси гравців протилежні, якщо функції $\overline{\mu}_G^i(z)$ і f_i, $i=1,2$, такі, що для будь-яких (x_1,y_1), (x_2,y_2) з множини $X \times Y$ виконано одну з умов:

$$\mu_G^1(x_1,y_1) > \mu_G^1(x_2,y_2) \longleftrightarrow \mu_G^2(x_1,y_1) < \mu_G^2(x_2,y_2), \tag{19}$$

$$\mu_G^1(x_1,y_1) = \mu_G^1(x_2,y_2) \longleftrightarrow \mu_G^2(x_1,y_1) = \mu_G^2(x_2,y_2). \tag{20}$$

Сформулюємо розглянуту гру у формі гри з функціями виграшів вигляду (2.1), (2.2) і множинами стратегій *X* і *Y*.

$$\mu_{D_1}(x,y) = \min\{\mu_1(x), \mu_G^1(x,y)\}, \tag{21}$$

$$\mu_{D_2}(x,y) = \min\{\mu_2(x), \mu_G^2(x,y)\}. \tag{22}$$

Звичайні ігри з протилежними інтересами характерні тим, що в них у будь-якій ситуації рівноваги гравці отримують свої максимальні гарантовані виграші, відповідні їх інформованості лише про множини стратегій партнера. Маючи це на увазі, цікаво розглянути зв'язок між найбільшими гарантованими виграшами гравців і їх виграшами в ситуаціях рівноваги в іграх в нечітко певній обстановці.

При обчисленні найбільших гарантованих виграшів будемо вважати, що кожному з гравців відомий лише носій нечіткої множини стратегій партнера. Неважко бачити, що при цьому найбільші гарантовані виграші записуються у вигляді:

$$M_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \mu_{D_1}(x, y), \tag{23}$$

$$M_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} \mu_{D_2}(x, y). \tag{24}$$

Представимо величину M_1 в такій формі:

$$M_1 = \max\left\{ \max_{x \in X_0^{'}} \mu_1(x), \max_{x \in X_0} \min_{y \in C_{1x_0}} \mu_G^1(x, y) \right\}, \tag{25}$$

де

$$X_0 = \{x | x \in X, C_{1x} \neq \varnothing\},\ X_0^{'} = \frac{X}{X_0},\ C_{1x} = \{y | y \in Y, (x, y) \in C_1\},$$

і безліч C_1 введено вище.

Отже можна констатувати таке: ідея, яка лежить в основі теорії нечітких множин, полягає в тому, що людина у своєму повсякденному житті мислить і приймає рішення на основі нечітких понять. Створення теорії нечітких множин – це спроба формалізувати людський спосіб міркувань. Розвиток обчислювальної техніки дозволяє на даний час створювати на базі теорії нечітких множин системи нечіткої логіки, які копіюють спосіб міркувань людини.

2 МЕТОДИКА РІШЕНЬ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

З математичної точки зору не існує ідеального способу вирішення завдань у поняттях нечітких множин [1,2]. Розглянемо деякі можливі варіанти рішення цього завдання.

Однакова важливість критеріїв.

Нехай є множина з k альтернатив $A=\{a_1,a_2,...a_k\}$. Тоді для критерію C може бути розглянута нечітка множина

$$C=\left\{\mu_c(a_1)/a_1,\ \mu_c(a_2)/a_2,...,\ \mu_c(a_m)/a_m\right\}. \qquad (26)$$

де $\mu_c(a_1)$ – оцінка альтернативи a_1 за критерієм C, *яка* характеризує ступінь відповідності альтернативи поняттю, що визначається критерієм C ($\mu_c(a_i)=\overline{0,1}$).

Якщо є n критеріїв: $C_1,C_2,...,C_n$, то кращою вважається альтернатива, яка задовольняє і критерії C_1 і C_2 і ,..., і Cn. Тоді правило для вибору найкращої альтернативи може бути записано у вигляді перетину відповідних нечітких множин:

$$D=C_1\cap C_2\cap...\cap C_n. \qquad (27)$$

Операції перетину нечітких множин відповідає операція min-, яка виконується над їх функціями приналежності: кращою вибирається альтернатива a^*, що має найбільше значення функції приналежності.

Розглянемо приклад вибору депо для організації ПР-3П дизелів при рівній важливості вимог на ремонт.

Потрібно вибрати базове депо. Вимоги, що ставляться до депо, такі: k_1 – віддаленість від депо; k_2 – рівень кваліфікації ремонтного деповського персоналу; k_3 – рівень оснащеності депо; k_4 – рівень забезпечення запасними частинами; k_5 – гнучкість виконання замовлень.

Приймаємо 3 депо: *a₁, a₂, a₃*.

У результаті експертної оцінки отримали такі дані, що характеризують ступінь приналежності депо заданим вимогам:

$$k_1 = \left\{ {0{,}9}/{a_1}, {0{,}7}/{a_2}, {0{,}8}/{a_3} \right\};$$

$$k_2 = \left\{ {0{,}8}/{a_1}, {0{,}9}/{a_2}, {0{,}6}/{a_3} \right\};$$

$$k_3 = \left\{ {0{,}7}/{a_1}, {0{,}8}/{a_2}, {0{,}9}/{a_3} \right\};$$

$$k_4 = \left\{ {0{,}8}/{a_1}, {0{,}6}/{a_2}, {0{,}7}/{a_3} \right\};$$

$$k_5 = \left\{ {0{,}8}/{a_1}, {0{,}9}/{a_2}, {0{,}8}/{a_3} \right\};$$

Існує декілька правил вибору. Згідно з одним з них спочатку знаходять відповідні мінімальні значення, з яких потім вибирають максимальне, і воно вказує на результат.

$$D = \max\left\{ \min\left({0{,}9;\, 0{,}8;\, 0{,}7;\, 0{,}8; 0{,}8}/{a_1} \right); \min\left({0{,}7;\, 0{,}9;\, 0{,}8;\, 0{,}6; 0{,}9}/{a_2} \right); \min\left({0{,}8;\, 0{,}6;\, 0{,}9;\, 0{,}7; 0{,}8}/{a_3} \right) \right\} = \max\left\{ {0{,}7}/{a_1}; {0{,}6}/{a_2}; {0{,}6}/{a_3} \right\}.$$

Таким чином, найкращим з точки зору забезпечення роботи ремонтного господарства та надійності обладнання локомотивів є перше депо

$$a_1 = \{0{,}9;\, 0{,}8;\, 0{,}7;\, 0{,}8\}$$

По суті це завдання оптимізації, в якому використовується 5 критеріїв. Вихідні дані для нього наведені в таблиці 2 розділу «Завдання для самостійної роботи».

Наступне завдання полягає в оцінці оптимальності співвідношень «надійність – ціна» обладнання локомотивів.

При модернізації треба замінити обладнання локомотива. Промисловість випускає 10 найменувань такого обладнання. За вимогами депо вони оцінені експертами за показниками: $P(x)$ – надійність і $C(x)$ – ціна. До кожному виду обладнання експертами вказані ступені приналежності щодо понять «надійність» і «ціна».

Результати наведені у таблиці 1.

Таблиця 1 – Результати аналізу експертів

	Номер обладнання									
Ступені приналежності	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}
$P(x)$	0,6	0,4	1	0,3	1	0	0,2	0,4	0,6	0,7
$C(x)$	0,6	0,2	0,1	0,7	0,4	0,4	1	0,4	0,8	0,2

Вирішимо це завдання двома способами.

І спосіб (аналогічний попередньому).

Маємо: P – «якість»; C – «ціна»; $k_1, \dots k_{10}$ – види обладнання.

Нечіткі множини можна записати в такому вигляді:

$$P=\left\{{}^{0,6}\!/_{k_1};{}^{0,4}\!/_{k_2};{}^{1}\!/_{k_3};{}^{0,3}\!/_{k_4};{}^{1}\!/_{k_5};{}^{0}\!/_{k_6};{}^{0,2}\!/_{k_7};{}^{0,4}\!/_{k_8};{}^{0,6}\!/_{k_9};{}^{0,7}\!/_{k_{10}}\right\};$$

$$C=\left\{{}^{0,6}\!/_{k_1};{}^{0,2}\!/_{k_2};{}^{0,1}\!/_{k_3};{}^{0,7}\!/_{k_4};{}^{0,4}\!/_{k_5};{}^{0,4}\!/_{k_6};{}^{1}\!/_{k_7};{}^{0,4}\!/_{k_8};{}^{0,8}\!/_{k_9};{}^{0,2}\!/_{k_{10}}\right\}.$$

Аналогічно попередньому прикладу знаходимо:

$$D=\max(\min\left({}^{0,6;0,6}\!/_{k_1}\right);\min\left({}^{0,4;0,2}\!/_{k_2}\right);\min\left({}^{1;0,1}\!/_{k_3}\right);\min\left({}^{0,3;0,7}\!/_{k_4}\right);\min\left({}^{1;0,4}\!/_{k_5}\right);\min\left({}^{0;0,4}\!/_{k_6}\right);$$
$$\min\left({}^{0,2;1}\!/_{k_7}\right);\min\left({}^{0,4;0,4}\!/_{k_8}\right);\min\left({}^{0,6;0,8}\!/_{k_9}\right);\min\left({}^{0,7;0,2}\!/_{k_{10}}\right))=\max({}^{0,6}\!/_{k_1};{}^{0,2}\!/_{k_2};{}^{0,1}\!/_{k_3};{}^{0,3}\!/_{k_4};{}^{0,4}\!/_{k_5};$$
$${}^{0}\!/_{k_6};{}^{0,2}\!/_{k_7};{}^{0,4}\!/_{k_8};{}^{0,6}\!/_{k_9};{}^{0,2}\!/_{k_{10}})=\left\{{}^{0,6}\!/_{k_1};{}^{0,6}\!/_{k_9}\right\}$$

Тобто в результаті маємо два рішення. Оптимальними для модернізації локомотива є обладнання під номерами 1 та 9.

II спосіб.

Розглянемо рішення цього завдання методом пошуку Парето.

У прикладній статистиці використовують метод Парето для вирішення подібних завдань. Критерії при використанні даного методу повинні бути також рівнозначними.

Розглянемо його суть на прикладі використання двох критеріїв.

Нехай $Y=\{y_1,y_2,...,y_m\}$ – множина оцінок альтернативних варіантів рішення; $P(Y)$ – множина Парето.

Множина Парето / $P(Y')$ являє собою «північно-східну» межу множин Y без тих його частин, які паралельні одній з координатних осей або лежать у «глибоких» провалах.

Недоліком методу є те, що одне остаточне рішення виходить тільки в окремому випадку, тобто кількість Парето, як правило, більше одного.

Переваги методу:

- критерії рівнозначні;
- метод математично об'єктивний.

На рисунку 1 показано результати нанесення на координатну вісь реалізації $P_i(Y)$, $C_i(Y)$ за даними попереднього прикладу і наведена «північно-східна» межа.

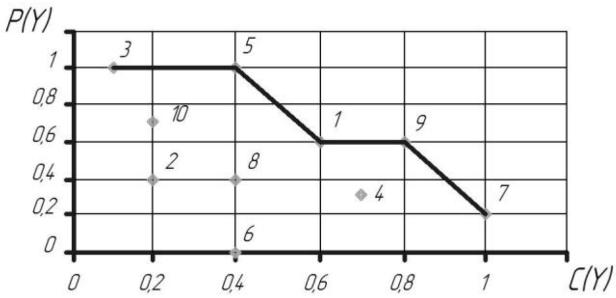

Рисунок 1 – Розмітка оцінок в координатах $P(Y) – C(Y)$

Тобто оптимальним є придбання обладнання з номерами 5, 9, 7.

Цей метод дає візуальне рішення, що може бути незручно. Тому в додатку А подана програмна реалізація цього методу, результатами якої природно будуть ті ж номери. Вихідні дані до завдання наведені в таблиці 3.

Порівнюючи рішення, отримані за методами maxmin-композиції і Парето, робимо висновок, що встановлювати слід обладнання під номером 9.

Розглянемо завдання коли маємо різну важливість критеріїв.

Коефіцієнти відносної важливості визначаються на основі процедури парного порівняння критеріїв. Спочатку формується матриця *M*, елементи якої знаходяться з таблиці 4 і задовольняють такі умови: $m_{ij}=1: m_{ij}=1/m_{ij}$.

Потім знаходимо *w* – власний вектор матриці *M*, що відповідає максимальному власному значенню z_{max}.

Шукані значення коефіцієнтів ‘’ отримуємо множенням елементів *w* на *n* для виконання умови $‘’_i=nw_i$.

Розглянемо завдання вибору місця для будівництва спеціалізованої майстерні з ремонту обладнання локомотивів, виходячи з таких критеріїв: k_1 – близькість до споживача; k_2 – близькість до постачальника; k_3 – наявність робочої сили.

Передбачено чотири місця будівництва: a_1, a_2, a_3, a_4.

Нечіткі множини, що характеризують альтернативні варіанти з точки зору різних критеріїв:

$$C_1=\left\{0{,}5/a_1;0{,}7/a_2;0{,}3/a_3;0{,}6/a_4\right\};$$

$$C_2=\left\{0{,}5/a_1;0{,}4/a_2;0{,}8/a_3;0{,}4/a_4\right\};$$

$$C_3=\left\{0{,}2/a_1;0{,}1/a_2;0{,}6/a_3;0{,}9/a_4\right\}.$$

Критерії мають різну важливість, результати їх попарного порівняння подані матрицею *M*:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 5 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{9} \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи засоби Mathcad, знайдемо власне значення цієї матриці (функція eigenvals (M)) та власний вектор, відповідний максимальному власному значенню (функція eigenvec (M,z)).

$$eigenvals(M)=\begin{pmatrix}3{,}029\\-0{,}015+0{,}296i\\-0{,}015-0{,}296i\end{pmatrix};$$

$$eigenvals(M;3{,}029)=\begin{pmatrix}0{,}366\\0{,}087\\0{,}926\end{pmatrix};$$

$0{,}5^{1{,}098}=0{,}467$; $0{,}7^{1{,}098}=0{,}676$; $0{,}3^{1{,}098}=0{,}267$; $0{,}6^{1{,}098}=0{,}571$;

$0{,}5^{0{,}261}=0{,}836$; $0{,}4^{0{,}261}=0{,}787$; $0{,}8^{0{,}261}=0{,}943$; $0{,}4^{0{,}261}=0{,}787$;

$0{,}2^{2{,}778}=0{,}011$; $0{,}1^{2{,}778}=1{,}667\cdot10^{-3}$; $0{,}6^{2{,}778}=0{,}242$; $0{,}9^{2{,}778}=0{,}746$.

Власний вектор матриці *M*: w_1=0,366; w_2=0,087; w_3=0,926. Тоді коефіцієнти відносної важливості критеріїв: $m_1=3\cdot0{,}366=1{,}098=3\cdot0{,}087=0{,}261$, $m_3=3\cdot0{,}926=2{,}778$. Модифікуємо множини *C*:

$$C_1^{1{,}098}=\left\{0{,}5^{1{,}098}/a_1;0{,}7^{1{,}098}/a_2;0{,}3^{1{,}098}/a_3;0{,}6^{1{,}098}/a_4\right\}=\left\{0{,}467/a_1;0{,}676/a_2;0{,}267/a_3;0{,}571/a_4\right\};$$

$$C_2^{0{,}261}=\left\{0{,}835/a_1;0{,}787/a_2;0{,}943/a_3;0{,}787/a_4\right\};$$

$$C_3^{2{,}778}=\left\{0{,}011/a_1;0{,}0017/a_2;0{,}242/a_3;0{,}746/a_4\right\}.$$

Отримаємо множину, що містить мінімальні значення a_1, a_2, a_3, a_4.

$$D=\left\{0{,}011/a_1;0{,}0017/a_2;0{,}242/a_3;0{,}571/a_4\right\}.$$

Максимальне значення приналежності має альтернативу a_4 – її і слід вибрати як можливе місце розташування майстерні з ремонту обладнання локомотивів.

Вихідні дані для самостійної роботи наведені в таблиці 4.

3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РІШЕННЯ

Варіант завдання вибирається за номером у журналі викладача (таблиця 2).

Наприклад, варіант 10, до якого включено a={1,4,7,9,10}, тобто a_1, a_4, a_7, a_9, a_{10}. В цьому випадку зокрема для величин k_1={0,9a_1, 0,5a_4, 0,8a_7, 0,6a_9, 0,7a_{10}}.

Таблиця 2 – Варіанти до першого завдання (вибір депо для організації ПР-3П дизелів)

Варіант	k_1– віддаленість від депо	k_2–рівень кваліфікації деповського персоналу	k_3–рівень оснащеності депо	k_4–рівень забезпечення запасними частинами	k_5–гнучкість виконання замовлення
a_1{1,5,9}	0,9	0,7	0,8	0,8	0,7
a_2{3,6,11}	0,6	0,9	0,6	0,7	0,9
a_3{2,3,17}	0,7	0,8	0,9	0,8	0,6
a_4{1,4,7,10,13}	0,5	0,6	0,7	0,9	0,8
a_5{5,10,11,14}	0,8	0,6	0,6	0,8	0,9
a_6{10,12,4,6}	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
a_7{9,11,12,7}	0,8	0,7	0,9	0,9	0,7
a_8{2,4,8,11,14}	0,9	0,8	0,7	0,6	0,9
a_9{3,18,13,9}	0,6	0,6	0,8	0,7	0,8
a_{10}{1,4,7,9,10}	0,7	0,8	0,9	0,8	0,7
a_{11}{2,8,11}	0,8	0,9	0,6	0,7	0,8
a_{12}{3,4,15,12}	0,9	0,6	0,9	0,9	0,6
a_{13}{8,9,13}	0,5	0,9	0,6	0,7	0,7
a_{14}{7,1,18,14}	0,8	0,7	0,7	0,9	0,6
a_{15}{7,1,18,14}	0,7	0,8	0,7	0,6	0,9
a_{16}{5,10,13,16}	0,9	0,6	0,9	0,8	0,9
a_{17}{12,15,17}	0,8	0,7	0,7	0,9	0,8
a_{18}{7,9,11,18}	0,7	0,9	0,6	0,8	0,7

Таблиця 3 – Варіанти до другого завдання (оцінка оптимального співвідношення «надійність-ціна» P(x) - C(x) обладнання локомотивів)

		Номер обладнання									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	P(x)	0,7	0,2	1,0	0,7	0,8	0,5	0,7	0,8	1,0	0,6
	C(x)	0,3	1,0	0,2	0,6	0,7	0,6	0,6	0,7	0,4	0,6
2	P(x)	0,6	1,0	0,4	0,3	0,4	0,2	0,4	0,6	0,7	0,6
	C(x)	0,4	0,2	0,2	0,7	1,0	1,0	0,1	0,8	0,2	0,6
3	P(x)	0,6	0,4	1,0	0,3	1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,7
	C(x)	0,5	0,2	0,1	0,7	0,3	0,4	1,0	0,3	0,8	0,3
4	P(x)	1,0	0,2	0,3	0,6	0,9	0,3	0,5	0,8	0,4	0,5
	C(x)	0,2	0,4	0,6	0,8	0,2	0,4	0,7	0,9	1,0	0,8
5	P(x)	0,4	0,2	0,7	0,7	0,5	1,0	0,2	0,4	1,0	0,1
	C(x)	0,9	1,0	0,3	0,6	0,6	0,4	1,0	0,5	0,2	0,7
6	P(x)	0,1	0,8	0,6	0,4	1,0	0,7	1,0	0,8	0,1	0,5
	C(x)	0,7	0,6	0,8	0,3	0,5	0,2	0,3	0,4	0,9	0,2
7	P(x)	0,2	0,2	1	0,3	0,4	0,5	0,8	0,4	1,0	0,8
	C(x)	0,9	0,9	0,5	0,6	0,5	0,7	0,3	0,9	0,3	0,4
8	P(x)	0,9	0,7	0,3	0,4	1,0	0,3	0,7	0,3	0,9	0,5
	C(x)	0,5	0,4	0,5	0,7	0,3	0,5	1,0	0,9	0,4	0,3
9	P(x)	0,3	0,5	0,4	0,4	0,3	1,0	0,2	0,3	1,0	0,2
	C(x)	0,8	0,9	0,2	0,8	0,9	0,3	0,4	0,9	0,5	0,3
10	P(x)	0,4	0,7	0,9	0,7	0,5	0,2	0,3	0,2	0,3	0,6
	C(x)	0,7	0,3	0,5	0,3	0,1	0,4	0,7	0,4	0,5	0,4
11	P(x)	1,0	0,7	0,4	0,8	0,6	0,6	0,4	1,0	0,3	0,2
	C(x)	0,4	0,9	1,0	0,5	1,0	0,7	0,6	0,7	0,7	0,5
12	P(x)	0,2	0,3	0,8	0,6	0,7	0,3	0,7	0,8	0,9	0,2
	C(x)	0,7	1,0	0,2	0,3	0,8	0,6	1,0	0,7	0,1	0,4
13	P(x)	0,7	0,3	0,8	0,7	0,4	0,6	0,5	0,9	0,8	0,7
	C(x)	0,4	0,5	0,8	0,3	0,8	0,6	1,0	0,7	0,1	0,4
14	P(x)	0,5	0,3	0,4	0,8	0,2	0,3	0,5	0,4	0,7	0,9
	C(x)	0,7	0,1	1,0	0,3	0,4	1,0	0,7	0,8	0,3	0,5
15	P(x)	0,3	0,4	0,5	1,0	0,3	0,7	0,4	0,1	0,7	0,3
	C(x)	0,9	1,0	0,3	0,4	0,7	0,2	0,3	0,7	0,5	0,7
16	P(x)	0,4	0,3	0,7	0,9	0,4	0,3	0,7	0,4	0,4	0,2
	C(x)	0,7	0,6	0,5	0,3	0,9	0,5	0,2	0,5	1,0	0,7
17	P(x)	1,0	0,2	0,3	0,4	0,7	1,0	0,3	0,4	0,3	0,6
	C(x)	0,3	0,5	1,0	0,8	0,3	0,7	0,4	1,0	0,6	0,6
18	P(x)	0,4	1,0	1,0	0,2	0,4	0,7	0,5	0,6	1,0	0,8
	C(x)	0,4	0,5	0,4	1,0	0,9	0,5	1,0	0,7	0,2	0,4

Закінчення таблиці 3

19	P(x)	1,0	0,3	0,7	0,3	0,5	0,3	0,7	1,0	0,4	1,0
	C(x)	0,5	0,5	1,0	0,6	1,0	0,9	0,7	0,7	0,8	0,4
20	P(x)	0,3	0,2	0,8	1,0	0,4	0,3	1,0	0,8	0,5	0,4
	C(x)	1,0	0,4	0,3	0,7	0,9	0,7	0,2	0,7	0,3	0,8

Таблиця 4

Вар.		a_1	a_2	a_3	a_4	*Mz*
1	k_1	0,5	0,9	0,7	0,6	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/5 \\ 1/3 & 1 & 1/7 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
	k_2	0,6	0,7	0,6	0,7	
	k_3	0,7	0,8	0,3	0,8	
2	k_1	0,7	0,4	0,9	0,6	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1/4 \\ 1/5 & 1 & 1/6 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$
	k_2	0,5	0,6	0,7	0,9	
	k_3	0,8	0,1	0,6	0,8	
3	k_1	0,7	0,7	0,9	0,9	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1/4 \\ 1/5 & 1 & 1/6 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$
	k_2	0,8	0,7	0,7	0,6	
	k_3	0,2	0,8	0,8	0,6	
4	k_1	0,6	0,6	0,3	0,7	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1/3 \\ 1/7 & 1 & 1/8 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$
	k_2	0,5	0,8	0,8	0,8	
	k_3	0,7	0,9	0,9	0,6	
5	k_1	0,3	0,6	0,7	0,7	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/6 \\ 1/2 & 1 & 1/9 \\ 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$
	k_2	0,7	0,8	0,8	0,4	
	k_3	0,8	0,9	0,7	0,6	
6	k_1	0,2	0,8	0,9	0,9	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/5 \\ 1/3 & 1 & 1/5 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
	k_2	0,8	0,6	0,6	0,8	
	k_3	0,9	0,9	0,9	0,7	
7	k_1	0,4	0,9	0,7	0,6	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1/9 \\ 1/4 & 1 & 1/2 \\ 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
	k_2	0,9	0,6	0,6	0,7	
	k_3	0,5	0,9	0,9	0,9	
8	k_1	0,5	0,7	0,6	0,5	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/6 \\ 1/3 & 1 & 1/8 \\ 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$
	k_2	0,8	0,9	0,7	0,7	
	k_3	0,7	0,8	0,3	0,4	
9	k_1	0,6	0,7	0,7	0,2	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/4 \\ 1/3 & 1 & 1/9 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$
	k_2	0,7	0,8	0,7	0,9	
	k_3	0,9	0,6	0,8	0,5	
10	k_1	0,7	0,6	0,9	0,1	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1/3 \\ 1/4 & 1 & 1/7 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
	k_2	0,6	0,7	0,7	0,9	
	k_3	0,4	0,9	0,6	0,8	

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. - М.: Радио и связь, 1982. – 320 с.

2 Родионов М.А., Зудина Т.А. Введение в “FUZZYLOGIC” (элективный курс для старшеклассников): Учеб. пособие. – Пенза: ПГПУ им. В.Г. Белинского, 2006. – 180 с.

ДОДАТОК А

Позначення змінних:
P(10) – масив, що містить приналежність нечіткої множини поняття «надійність»;
N(10) – масив, що містить ступені приналежності нечіткої множини поняття «ціна»;
J(10) – масив, що містить початкові номери елементів масивів (дані номери обладнання);
IN(10) – допоміжний масив, що містить шукані індекси (номери);
k – допоміжна змінна (розмірність масиву *IN*);
MaxP – змінна, що зберігає значення «східної» межі.

Ідея методу полягає у пошуку оптимального рішення відбору номерів обладнання (індекси масивів), які задовольняють правило Парето. Для цього:

а) впорядкуємо один з масивів за убуванням (для визначеності масив *N*), при цьому зберігаємо первісну відповідність ступенів належності ціни і надійності, а також запам'ятовуємо початкові номери елементів у масиві *J*;

б) знаходимо і запам'ятовуємо в масиві *IN* номери тих елементів, які строго задовольняють поняття «північно-східна» межа правила Парето;

в) виводимо шукані номери на екран.

```
DIM P(11), N(11), j(11), IN(11), IN2(11)

DATA .6, .3, .1, .0, .2, .4, .6, .7

DATA .6, 1, .7, .4, .4, 1, .4, .8, .2

FOR i = 1 TO 10: READ N(i): NEXT

FOR i =1 TO 10: READ P(i): NEXT

FOR i = 1 TO 10: j(i) = i: NEXT

1 :FORi=1 TO 9

IF N(i) < N(i + 1) THEN
```

SWAP N(i), N(i+1): SWAP P(i), P(i +1), SWAP j(i), j(i+1): GOTO 1

END IF

NEXT

k = 0: MaxP =P(1)

FORi =1 TO 10

*виключаємо елементи, що знаходяться на одній горизонталі або всередині області

*при цьому запам'ятовуємо нову «східну» межу

IF N(i) = N(i + 1) AND MaxP<=P(i + 1) THEN MaxP = P(i + 1)

*заносимо до масиву *IN* номери тих елементів, які задовольняють «північно-східну» умову

IF N(i) <> N(i+1) AND P(i) >= MaxP AND P(i) <>P(i+1) THEN

k = k+1: IN(k) = i: MP = P(i)

END IF

NEXT

PRINT «Оптимальні номери елементів обладнання»

FOR i=1 TO k

* виводимо початкові номери елементів

PRINT J(IN(i))

NEXT