УДК 528.48

ПОСТРОЕНИЕ СЕТИ ТРИАНГУЛЯЦИИ И СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕТОДЫ УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

CONSTRUCTION OF THE NETWORK OF THE TRIANGULATION AND EXISTING METHODS OF EQUALIZING OF GEODNZICHESKY NETWORKS

Ужвиева Е.Н., к.т.н., доц., (Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков)

Uzhvieva E.N., Ph. D. of Engineering, Associate Professor (Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv)

В работе рассмотрены существующие методы уравнивания геодезических сетей. Комбинирование точных способов уравнивания (в пределах каждой типовой фигуры) с приближенными (между фигурами) увеличивает скорость сходимости по сравнению с другими итерационными методами.

In article existing methods of equalising of geodetic networks are considered. The combination of exact ways of equalising (within each typical figure) with confidants (between figures) increases speed of convergence in comparison with other iterative methods.

Ключевые слова: сеть триангуляции, геодезические измерения, методы уравнивания сетей, поправки функций

Keywords: triangulation network, geodetic measurements, methods of equalising of networks, amendments of functions

Существующие методы уравнивания геодезических сетей должны обеспечивать необходимую точность и строгость результатов, удовлетворяющих требованиям геодезических измерений.

Одним из таких методов является описываемый ниже комбинированный метод уравнивания геодезических сетей. Он основан на сочетании строгого и итерационного методов уравнивания. При этом строго уравниваются отдельные группы условных уравнений, входящих в типовые фигуры, образующие геодезическую сеть (треугольники, геодезические четырехугольники, центральные системы, цепочки треугольников – в триангуляции; отдельные ходы и замкнутые полигоны – в полигонометрии и нивелировании), а итерациями их совместное уравнивание.

Суть метода заключается в следующем. Пусть геодезическая сеть состоит из *N* типовых фигур, каждая из которых включает *r* условных уравнений с *n* неизвестными.

Тогда для каждой *i*-той фигуры (*r* = 1,2,3,...,*N*) можно составить следующую группу условных уравнений:

$$A_i V_i + W_i = 0 \tag{1}$$

где

$$A = \left(a_{i,j}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_2 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$, \tag{2}$$

$$V = \left(v_{i,j}\right)_{rxn} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \ldots \\ V_n \end{pmatrix}, \quad W = \left(w_{i,j}\right) = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \ldots \\ W_n \end{pmatrix}$$

решение которой проводится строго по МНК отдельно от других под условием

$$V_i^T Q_{x_i}^{-1} V_i = \min.$$

В результате уравнивания первой фигуры будут найдены первичные поправки первого приближения, входящие в данную группу неизвестных x_n :

$$V_i = -Q_{x_i} A_i^T Q_{k_i} W_i, \tag{3}$$

где Q_{x_i} – матрица обратных весов измеренных величин i-той фигуры;

$Q_{k_i} = N_i^{-1}$ – ковариационная матрица коррелат этой группы;

$N_i = A_i Q_{x_i} A^T$ – матрица нормальных уравнений.

После исправления измеренных величин первичными поправками первой фигуры приступают к уравниванию второй фигуры, предварительно исправив в ней измеренные величины, входившие в первую фигуру, и подсчитав новые свободные члены. Затем аналогичным образом переходят к третьей фигуре и т.д., последовательно уравнивая все типовые фигуры.

После этого приступают ко второму приближению, начиная с первой фигуры, получая вторичные поправки и проводя весь цикл уравнивания в таком же порядке, как и в первом приближении. Затем начинают третье приближение и т.д. до тех пор, пока свободные члены всех условий не станут равными нулю или поправки с заданной точностью не станут повторять друг друга. Каждое новое приближение сводится только к вычислению новых свободных членов и по ним – соответствующих поправок, так как значения коэффициентов A_i и ковариационных матриц остаются без изменений. Окончательные поправки измеренных величин будут

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots \tag{4}$$

При этом под V_n понимаются как поправки измеренных величин (аргументов) x, так и их функций вида $y = ax + l$.

Поправки функций обычно находятся на завершающем этапе уравнивания каждой фигуры и в последнем приближении. Это более удобно экономически в тех случаях, когда из уравнивания требуется определить какие-либо функции измеренных величин (азимуты, длины сторон, координаты), а не сами аргументы.

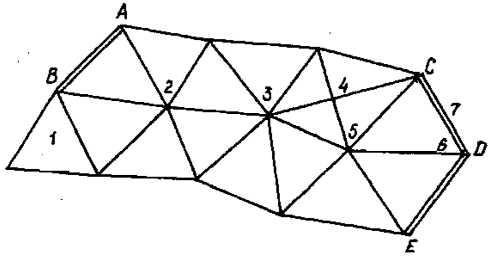

Рис. 1. Сеть триангуляции

Например, для сети триангуляции, показанной на рисунке 1, порядок уравнивания может быть принят такой: последовательно уравниваются фигуры 1 – треугольник, 2 – центральная система, 3 – центральная система, 4 – геодезический четырехугольник, 5 – центральная система, 6 – цепочка треугольников от базовой стороны CD к базовой стороне DE, образующая вставку в базовый угол и сторону, цепочка треугольников между базовыми сторонами AB и $CD-7$.

Аналогично выполняются второе, третье и т.д. приближения.

Варианты уравнивания такой сети могут быть и другими. Например, сначала последовательно по фигурам уравниваются приближениями угловые условия, а затем в таком же порядке синусные. Возможны и другие варианты уравнивания подобных сетей.

Уравнивание типовых фигур удобнее всего производить методом последовательного уравнивания функций с использованием формул обобщенного весового среднего и стандартных программ вычисления геометрических весов (ковариационных матриц) [1]:

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} P_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} P_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} Q_j x_j}{\sum_{j=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} Q_j}, \tag{5}$$

или определения поправок к измеренным величинам в виде

$$\bar{x}_i = x_i + v_{x_i}$$

$$v_{x_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} Q_j \left(-W_r\right)}{\sum_{j=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} Q_j}, \tag{6}$$

где x_i, x_j – измеренные и уравненные величины или их функции;

P_j и Q_j – соответствующие элементы матриц геометрических и обратных геометрических весов;

W_r – невязки условных уравнений;

v_{x_i} – поправки измеренных величин или их функций;

$j = 1, 2, 3\ldots, n$, $r = 1, 2, 3\ldots, (n-1)$, $i = 1, 2, 3\ldots, N$, – порядковый номер функции.

Поправки могут вычисляться и по формуле

$$v_{x_i} = \sum_{r=1}^{j} q_i a_{ir} \frac{\sum_{s=1}^{j} Q_{rs} \left(-W_r\right)}{\sum_{r,s=1}^{j} Q_{rs} \sum_{i,j=1}^{n} q_i a_{ir} a_{js}}, \tag{7}$$

где $r, s = 1, 2, 3, \ldots, j$ – число случайных последовательностей;

q_i – обратные веса неизвестных;

a_{ir} – коэффициенты условных уравнений.

В каждой типовой фигуре уравниваются сначала более простые условия (например, угловые – в триангуляции), а затем с учетом уже уравненных аргументов – искомые функции. Их геометрические (обратные геометрические) веса обычно известны заранее или подсчитываются в таком же порядке, в каком производится уравнивание, т.е. при переходе от функции к функции они вычисляются по соответственно преобразованным коэффициентам условных уравнений. Невязки же определяются с учетом уже уравненных аргументов и функций.

Сходимость описанного итерационного процесса будет лучше других аналогичных методов, так как каждая типовая фигура включает большое число неизвестных, а смежные фигуры лишь частично перекрывают друг друга. Это является важным условием быстрой сходимости итераций. Комбинирование точных способов уравнивания (в пределах каждой типовой фигуры) с приближенными (между фигурами) увеличивает скорость сходимости по сравнению с другими итерационными методами.

Кроме того, описанный порядок уравнивания тождественен приведению системы линейных уравнений к одному нормальному уравнению с одним неизвестным вектором, поэтому в нем всегда соблюдается достаточное условие сходимости итерационного процесса, а именно:

$$\left|a_{ij}\right| > \sum_{i,\,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right| \quad \left(i,\, j = 1, 2, 3, \ldots, n\right), \tag{8}$$

все неквадратичные коэффициенты a_{ij} равны нулю.

Удобство этого метода состоит в том, что он не требует составления условных и нормальных уравнений или уравнений ошибок, так как для типовых фигур разработано много простых методов строгого уравнивания без составления указанных уравнений. Как было отмечено выше, ковариационные матрицы у каждой такой фигуры имеют неизменную структуру, легко преобразующуюся в формулы рекуррентного вида, удобные для составления стандартных программ.

Литература:

1. Гайдаев П .А. Уравнивание триангуляции. /П. А. Гайдаев/ – М.: Геодезиздат, 1960. – 259 с.