МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО
ТРАНСПОРТУ

**Н.Г. Панченко, М.Є. Резуненко**

# ЕЛЕМЕНТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ В УПРАВЛІННІ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

***Підручник***

**Частина ІІ**

**Харків – 2015**

УДК 519.2
ББК 22.161+39.280.3(075)
П 168

*Рекомендовано вченою радою Українського державного університету залізничного транспорту як підручник*
*(витяг з протоколу № 4 від 26 травня 2015 р.)*

Рецензенти:
професори В.В Скалозуб (ДНУЗТ ім. акад. В. Лазаряна),
Р.В. Вовк (ХНУ ім. В.Н. Каразіна)

**П 168** **Панченко Н.Г., Резуненко М.Є.** Елементи дослідження операцій в управлінні процесами перевезень: Підручник. – Харків: УкрДУЗТ, 2015. – Ч. 2. – 314 с., рис. 85, табл. 82.
ISBN 978-617-654-028-1

Призначений для студентів транспортних спеціальностей вищих навчальних закладів, а також може бути корисним для фахівців і керівного персоналу при обґрунтуванні і вибору оптимальних управлінських рішень. Друга частина присвячена методам динамічного і стохастичного програмування, теорії ігор, марковським процесам і теорії масового обслуговування. Викладення матеріалу в основному пов’язано з конкретними задачами експлуатації залізничного транспорту, проте представлені математичні методи можуть бути використані в будь-якому виді практичної діяльності людини.

УДК 519.2
ББК 22.161+39.280.3(075)

ISBN 978-617-654-028-1

## ЗМІСТ

# Розділ 5
# ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

## 5.1. Постановка задачі динамічного програмування

У задачах лінійного та нелінійного програмування процес вважають статичним, тобто незалежним від часу. У зв'язку з цим розв'язання стосується лише одного кроку управління (планування). Подібні задачі називаються *статичними* або *однокроковими*.

У теорії динамічного програмування (ДП) економічний процес функціонує та розвивається в часі. Тому оптимальний розв'язок знаходиться як ряд оптимальних розв'язків, що стосуються кожного етапу окремо. При цьому задачі теорії ДП вважаються *багатоетапними* або *багатокроковими*.

Економічний процес називається *керованим*, якщо існує можливість впливу на його еволюцію.

*Управлінням (плануванням)* називається сукупність рішень, що приймаються на кожному етапі (кроці), для впливу на хід розвитку процесу.

*Динамічне програмування* – це математичний апарат, що дозволяє здійснювати оптимальне планування багатоетапних керованих процесів, або процесів, які розвиваються в часі.

Динамічне програмування виникло і сформувалось у працях Роберта Беллмана в 1950 році.

До задач ДП належать такі, що стосуються оптимального розподілу капіталовкладень, розподілу продукції, визначення найкоротшого шляху перевезення товарів споживачам, задачі щодо заміни обладнання, оптимального управління запасами тощо.

**Приклад 1.** Нехай на деякий період часу $T$, що складається з $m$ років, планується діяльність групи підприємств. На початку періоду на розвиток підприємств $П_1, П_2, ..., П_n$ виділяються кошти, що необхідно розподілити між підприємствами. У процесі функціонування підприємств виділені їм кошти частково витрачаються. Однак кожне підприємство за певний проміжок часу (господарський рік) отримає прибуток, що залежить від об'єму вкладених коштів. На початку кожного року кошти можуть перерозподілятися між підприємствами. Будемо вважати, що:

1) прибуток, отриманий від виділених підприємству $П_k, k=\overline{1,n}$ коштів, не залежить від коштів, що були вкладені в інші підприємства;

2) прибуток, отриманий від різних підприємств, виражається в однакових одиницях;

3) загальний прибуток дорівнює сумі прибутків, отриманих від розподілу всіх коштів по підприємствах $П_k, k=\overline{1,n}$.

Необхідно скласти план розподілу коштів, які потрібно виділити кожному підприємству на початок кожного року так, щоб сумарний прибуток від цієї групи підприємств $W$ за весь період часу $T$ був максимальним.

**Розв'язання**. Розв'язання цієї задачі є багатокроковим. Кроком (етапом) управління буде виступати господарський рік. Управління процесом полягає в розподілі (перерозподілі) коштів на початку кожного господарського року.

Позначимо через $x_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ об'єм коштів, що на початку $i$-го року виділяються $j$-му підприємству. Через $\vec{U}_i=(x_{i1};x_{i2};...;x_{in})$ позначимо управління (рішення), що приймається на початку $i$-го року щодо розподілу коштів підприємствам $П_1, П_2, ..., П_n$. Тоді оптимальне управління полягає в визначенні такої сукупності векторів:

$$\begin{cases} \vec{U}_1=(x_{11};x_{12};...;x_{1n}), \\ \vec{U}_2=(x_{21};x_{22};...;x_{2n}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{U}_m=(x_{m1};x_{m2};...;x_{mn}), \end{cases} \tag{5.1}$$

що забезпечують

$$W=W\left(\vec{U}_1;\vec{U}_2;...;\vec{U}_m\right)\to\max. \tag{5.2}$$

Дану задачу можна розв'язати безпосередньо, об'єднавши етапи. Тобто необхідно знайти такі значення змінних

$x_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, при яких функція $W = W(x_{11}; x_{12}; ...; x_{1n}; x_{21}; x_{22}; ...; x_{2n}; ...; x_{m1}; x_{m2}; ...; x_{mn})$ досягає максимального значення.

Задача у вигляді виразів (5.1)-(5.2) є *задачею безумовної оптимізації*. Тому для її розв'язання можна застосувати існуючі методи. Однак такий підхід до розв'язання даної задачі має певні недоліки, якими, зокрема, є:

- при великий кількості станів розв'язок задачі достатньо громіздкий;
- задача не має розв'язку, коли $x_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ є дискретними величинами.

Як наслідок, більшість задач не може бути розв'язана на основі застосування класичних однокрокових методів оптимізації. Тому до подібних задач застосовують методи динамічного програмування. Тобто розв'язання задач складається з декількох етапів (кроків), на кожному з яких визначається розв'язок окремої підзадачі, що обумовлена початковою задачею. Тому поняття «динамічне програмування» характеризує, у першу чергу, методи знаходження розв'язків окремих класів задач як лінійного, так і нелінійного програмування. Тим не менш доцільно записати загальну постановку задачі ДП та визначити єдиний підхід до її розв'язання.

З*агальна постановка задачі ДП*

Нехай деяка фізична керована система $S$ у початковий момент часу (на першому етапі) знаходиться в стані $S_0$. З часом (зміною етапів) її стан може змінюватись, у результаті чого система потрапляє в кінцевий стан $S_k$. З процесом зміни станів системи пов'язаний деякий числовий критерій $W$. Необхідно так організувати процес, щоб критерій $W$ досяг свого оптимального значення.

Тобто якщо $U$ являє собою множину можливих управлінь, то необхідно з неї вибрати таке управління $U^* \in U$, яке переводить систему $S$ зі стану $S_0$ в стан $S_k$ і забезпечує $\max W(U)\left(\min W(U)\right)$.

До складнощів, які виникають при застосуванні методів ДП, можна віднести такі:

- відсутність єдиних методик вибору методів розв'язання окремих задач;
- трудомісткість розв'язання багатовимірних задач.

## 5.2. Принцип поетапної побудови оптимального управління

ДП являє собою поетапне планування багатокрокового процесу, тобто оптимальне управління будують поступово, крок за кроком, причому на кожному кроці оптимізують лише цей крок. Разом з цим планування кожного кроку здійснюється з урахуванням наслідків, бо оптимальність лише на цьому етапі може призвести до неоптимального розв'язку початкової задачі.

Здійснюється це таким чином. Оскільки кожен процес має останній $k$-й крок, прийняття рішення на якому не залежить від майбутнього, то на цьому кроці вибирають управління, яке дозволяє отримати найбільший ефект. Спланувавши цей крок, до нього можна приєднати $(k-1)$-й крок, до якого, у свою чергу, $(k-2)$-й і т. д. У результаті приходять до початкового стану системи $S_0$. Процес ДП ніби «розгортається» від кінця до початку.

Для того, щоб спланувати $k$-й крок, потрібно знати стан системи на $(k-1)$-му кроці. Якщо стан системи на $(k-1)$-му кроці невідомий, то роблять різні припущення про можливі стани системи на цьому кроці. Для кожного припущення вибирають оптимальне управління на останньому $(k-1)$-му кроці. Таке оптимальне управління називають *умовно оптимальним.*

Нехай планується $k$-кроковий процес переведення системи $S$ зі стану $S_0$ в стан $S_k$ (рис. 5.1).

Зробимо ряд припущень про можливі стани системи на $(k-1)$-му кроці. Позначимо ці стани через $S_{k-1,1}; S_{k-1,2}; ...; S_{k-1,r}$. На останньому кроці знайдемо для кожного з них умовне оптимальне управління $U^*_{k,1}(S_{k-1,1})$; $U^*_{k,2}(S_{k-1,2})$; ...; $U^*_{k,r}(S_{k-1,r})$. Таким чином, $k$-й крок сплановано. Дійсно, незалежно від того, який стан мала система на передостанньому кроці, вже відомо, яке управління слід застосувати на останньому кроці. Аналогічно поступаємо на $(k-1)$-му кроці. Обирати тільки умовні оптимальні управління потрібно, враховуючи вже відібрані умовні оптимальні управління на $k$-му кроці, і т. д. У результаті прийдемо до початкового стану $S_0$.

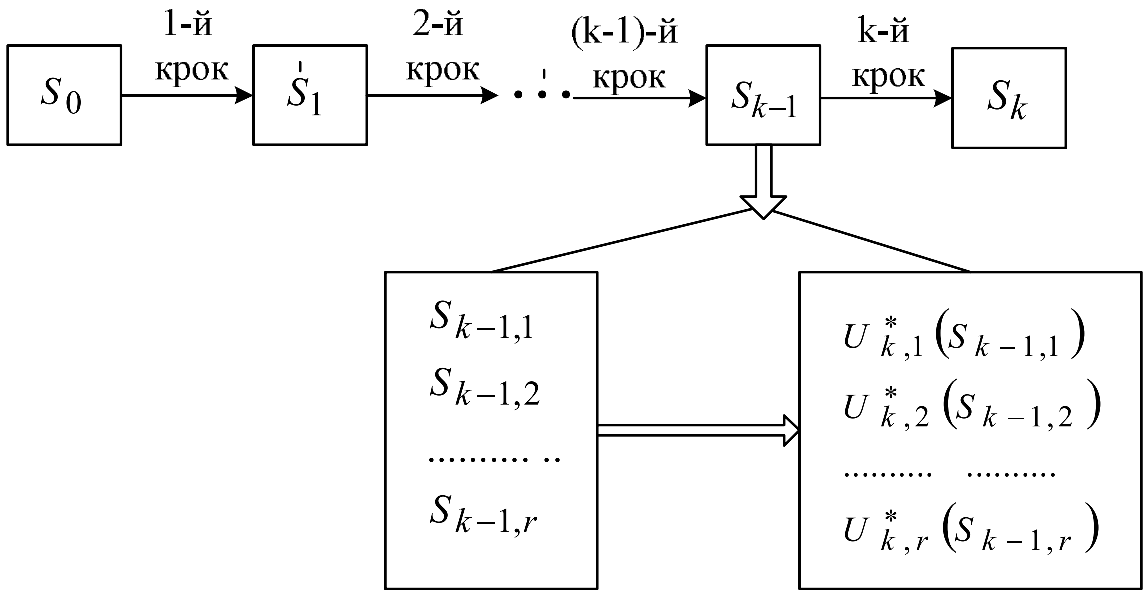



Рис. 5.1. Можливі стани системи на $(k-1)$-му кроці

До першого кроку (на відміну від всіх інших) припущень про можливий стан системи не робимо, оскільки стан $S_0$ відомий. Тому знаходимо оптимальне управління, враховуючи всі умовно оптимальні управління, знайдені до другого кроку включно. Далі, розгортаючи процес у протилежному напрямку, тобто від $S_0$ до $S_k$, отримаємо оптимальне управління для всього процесу.

Основним принципом, на якому базується оптимізація багатокрокового процесу, є *принцип оптимальності Р. Беллмана*, який також визначає особливості обчислювального методу ДП.

### 5.3. Принцип оптимальності Беллмана

Сформулюємо загальний принцип, який полягає в основі розв'язання всіх задач ДП (*принцип оптимальності Беллмана*).

*Яким би не був стан системи $S$ перед черговим кроком, потрібно обрати таке управління на цьому кроці, щоб виграш на* *даному кроці плюс оптимальний виграш на всіх наступних кроках був би оптимальним.*

Використання цього принципу надає можливість отримати таке управління на кожному кроці, яке буде найкращим для всього процесу загалом.

Оптимальний напрям процесу знаходиться відносно досягнутого на даний момент стану. Принцип оптимальності має конструктивний характер і безпосередньо визначає процедуру знаходження оптимального розв'язку.

Розглянемо структуру принципу оптимальності за допомогою символічних формул, у яких функції в якості аргументів мають стани та управління.

Нехай система $S$ переходить зі стану $S_0$ у стан $S_k$ за $k$ кроків. Припустимо, що система знаходиться в стані $S_i$. Оберемо будь-яке управління $U_i$ на цьому етапі. Якщо ми його приймаємо, то:

- по-перше, ми отримаємо на $i$-му кроці виграш $W_i$, що залежить від попереднього стану системи $S_{i-1}$, а також від прийнятого управління $U_i$:

$$W_i = W_i(S_{i-1}; U_i); \tag{5.3}$$

- по-друге, ми отримаємо деякий виграш на решті кроків. Для знаходження цієї «функції виграшу» ми повинні знати стан системи $S$ перед наступним $(i+1)$-м кроком. Під впливом прийнятого управління $U_i$ система $S$ переходить зі стану $S_i$ в стан $S_{i+1}$, який залежить від попереднього стану $S_i$ і прийнятого управління $U_i$, тобто

$$S_{i+1} = \varphi_i(S_i; U_i)\,. \tag{5.4}$$

Запишемо виграш, який був отриманий на всіх кроках, починаючи з $i$-го, якщо на $i$-му кроці буде прийнято будь-яке (у загальному випадку не оптимальне) управління $U_i$, а на всіх наступних від $(i+1)$-го до $k$-го кроках − оптимальне управління:

$$\widetilde{W}_i(S_{i-1};U_i) = W_i\ (S_{i-1};U_i) + W_{i+1}(S_{i+1}). \qquad (5.5)$$

Враховуючи вираз (5.4), отримаємо

$$\widetilde{W}_i(S_{i-1};U_i) = W_i\ (S_{i-1};U_i) + W_{i+1}(\varphi_i(S_i;U_i)). \qquad (5.6)$$

За принципом оптимальності ми повинні обрати таке управління $U_i$, за яким величина $\widetilde{W}_i(S_{i-1};U_i)$ (5.6) буде оптимальною, тобто

$$W_i(S_{i-1}) = \underset{U_i}{optimum}\ \{W_i(S_{i-1};U_i) + W_{i+1}(\varphi_i(S_i;U_i))\},$$
$$i = \overline{1, k-1}, \qquad (5.7)$$

де $U_i$ – умовне оптимальне управління на $i$-му кроці;

$W_i(S_{i-1})$- умовний оптимальний виграш на всіх кроках, починаючи з $i$-го і до останнього.

***Зауваження.*** У рівності (5.7) функції $W_i(S_{i-1};U_i)$ і $\varphi_i(S_i;U_i)$ відомі. Невідомими залишаються функції $W_i(S_{i-1})$ і $W_{i+1}(\varphi_i(S_i;U_i))$, з яких перша виражається за допомогою іншої.

«*Optimum*» у виразі (5.7) визначає максимум або мінімум залежно від умов задач. Формула (5.7) називається *основним функціональним рівнянням Беллмана*, що дозволяє знайти функцію $W_i(S_{i-1})$, якщо відома наступна за нею функція $W_{i+1}(S_i)$. Для знаходження функції $W_k(S_{k-1})$ (умовний виграш на останньому етапі) необхідно знайти optimum на $k$-ому кроці

$$W_k(S_{k-1}) = \underset{U_k}{optimum}\ \{W_k(S_{k-1};U_k)\}. \qquad (5.8)$$

Вирази (5.7) – (5.8) називають рекурентними співвідношеннями Беллмана.

## 5.4. Обчислювальна схема основного функціонального рівняння Беллмана

Оптимальний розв'язок задачі методом ДП знаходиться на основі функціонального рівняння (5.7). Для того щоб його знайти, необхідно:

1. Записати функціональне рівняння для останнього етапу процесу за формулою

$$W_k(S_{k-1}) = \underset{U_k}{optimum}\ \{W_k(S_{k-1};U_k)\}.$$

У результаті після першого кроку буде відомий розв'язок $U_k$ і відоме значення функції $W_k(S_{k-1})$.

2. Зменшити $k$ на одиницю і записати функціональне рівняння (5.7). При $i = k-1$ воно має вигляд

$$W_{k-1}(S_{k-2}) = \underset{U_{k-1}}{optimum}\ \{W_{k-1}(S_{k-2};U_{k-1}) + W_k(\varphi_{k-1}(S_{k-1};U_{k-1}))\},\quad k \ge 2. \tag{5.9}$$

3. Знайти умовно оптимальний розв'язок на основі виразу (5.9).

4. Якщо $i = 1$, то обчислення умовно оптимальних розв'язків завершено. При цьому знайдено оптимальний розв'язок задачі для першого стану процесу.

Якщо $i \ne 1$, то необхідно перейти до виконання п. 2.

5. Обчислити оптимальний розв'язок задачі для кожного наступного кроку процесу, рухаючись від кінця розрахунків до початку. Тобто знаючи $W_k(S_{k-1})$ з п. 1, знайти функції $W_{k-1}(S_{k-2})$, $W_{k-2}(S_{k-3})$, …, $W_1(S_0)$ за формулою (5.9) та відповідні їм умовні оптимальні управління $U_{k-1}$, $U_{k-2}, \ldots, U_1$. Якщо в початковий момент часу стан системи $S_0$ задано, знайти оптимальний виграш $\max(W)(\min(W)) = W_1(S_0)$. Далі за ланцюгом $S_0 \to U_1(S_0) \to S_1^* \to U_2(S_1^*) \to S_2^* \to \ldots \to U(S_{k-1}^*) \to S_k^*$ знайти оптимальні управління.

## 5.5. Приклади задач динамічного програмування

### *Задача про заміну обладнання*

З часом устаткування старіє (фізично і морально зношується), що призводить до підвищення затрат на його обслуговування і ремонт. Разом з тим знижується його ліквідна вартість і продуктивність. Тому постає питання у визначенні оптимальних термінів заміни старого устаткування на нове (того самого типу або більш сучасне).

Критерієм оптимальності в даному випадку може бути або максимізація прибутку від експлуатації устаткування, або мінімізація затрат на його використання.

**Приклад 2.** Обладнання експлуатують протягом 5 років, після чого продають. На початку кожного року можна прийняти рішення: зберегти обладнання або замінити його новим. Вартість нового обладнання складає $p_0 = 2000$ грош. од. Після $t$ років експлуатації $(1 \le t \le 5)$ обладнання можна продати за $\varphi(t) = p_0 \cdot 2^{-t}$ грош. од. (ліквідна вартість). Витрати на експлуатацію протягом року залежать від віку $t$ обладнання і дорівнюють $r(t) = 600(t+1)$ грош. од. Визначити оптимальну стратегію експлуатації обладнання, щоб сумарні витрати з урахуванням початкової покупки і заключного продажу були мінімальні.

**Розв'язання**. Розподілимо процес управління на кроки: номер кроку $k$ – номер року, $k = \overline{1,5}$.

Параметр стану – вік $t$ обладнання, тому отримаємо стани $S_{i-1} = t, i = \overline{2,6}$; $S_0 = 0$ (на початку першого року експлуатації обладнання нове).

Управління на кожному кроці залежить від двох змінних $U^н$ (не замінити обладнання) і $U^з$ (замінити обладнання). Рівняння станів системи мають вигляд

$$S_i = \begin{cases} t+1, & якщо\ U_i = U^н, \\ 1, & якщо\ U_i = U^з, \end{cases} \qquad (5.10)$$
$$i = \overline{1,4}.$$

Дійсно, якщо до початку $i$-го року $S_{i-1}=t$, то при збереженні обладнання $\left(U_i=U^н\right)$ через рік його вік збільшиться на 1, тобто $S_i=t+1$. Якщо обладнання замінюється новим $\left(U_i=U^з\right)$, то це означає, що до початку $i$-го кроку його вік $t=0$, а після року експлуатації $t=1$, тобто $S_i=1$.

Показник ефективності $i$-го кроку – це витрати на експлуатацію обладнання наприкінці $i$-го року:

$$W_i(t)=\min\begin{cases}600(t+1), & якщо\,U_i=U^н,\\ 2600-2000\cdot 2^{-t}, & якщо\,U_i=U^з.\end{cases} \tag{5.11}$$

Дійсно, при збереженні обладнання $\left(U_i=U^н\right)$ витрати пов'язані тільки з експлуатацією обладнання віку $t$ $\left(600(t+1)\right)$; при заміні обладнання $\left(U_i=U^з\right)$ обладнання продають $\left(-2000\cdot 2^{-t}\right)$, купують нове (2000) і експлуатують протягом першого року $\left(600(t+1)\right)$. При цьому загальні витрати дорівнюють

$$-2000\cdot 2^{-t}+2000+600=2600-2000\cdot 2^{-t}.$$

Нехай $W_i^*(t)$ – умовні оптимальні витрати на експлуатацію обладнання протягом $(6-i)$ років, починаючи з $i$-го до 5-го включно, за умови, що до початку $i$-го року обладнання має вік $t$ років. Тоді оптимальні витрати за 5 років дорівнюють $W_{\min}=W_1^*(t)$.

Запишемо функціональне рівняння Беллмана для останнього стану процесу:

$$W_5^*(t)=\min\begin{cases}600(t+1)-2000\cdot 2^{-t}, & якщо\,U_5=U^н,\\ 2600-2000\cdot 2^{-t}-2000\cdot 2^{-1}, & якщо\,U_5=U^з.\end{cases} \tag{5.12}$$

Величина $2000\cdot 2^{-t}$ є ліквідною вартістю обладнання віку $t$ років (за умов, що обладнання після 5 років експлуатації продається). За формулою (5.9) отримаємо

$$W_i^*(t) = \min \begin{cases} 600(t+1) + W_{i+1}^*(t+1), & якщо\ U_i = U^н, \\ 2600 - 2000 \cdot 2^{-t} + W_{i+1}^*(1), & якщо\ U_i = U^з, \end{cases} \quad (5.13)$$

$i = 4,3,2,1$.

Наведемо геометричне розв'язання цієї задачі. На осі абсцис будемо відкладати номер кроку $i, i = \overline{1,5}$, на осі ординат – вік $t$ обладнання. Точка $(i-1; t)$ на площині відповідає початку $i$-го року експлуатації обладнання віку $t$ років $\left(i = \overline{1,5}\right)$. Пересування по графу залежно від обраного управління на $i$-ому кроці показано на рис. 5.2.

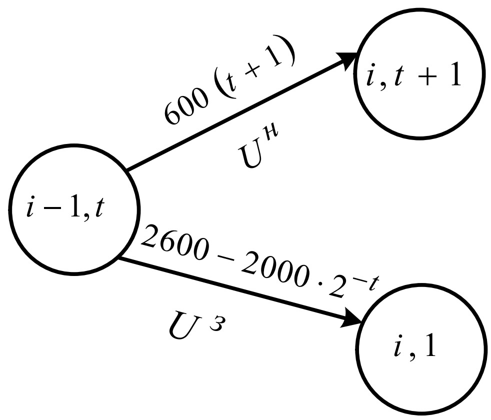



Рис. 5.2. Переміщення по графу станів

Стан системи будемо характеризувати двома координатами. На осі абсцис відкладаємо кроки управління, на осі ординат – час $t$, який устаткування експлуатується. Стан системи будемо позначати колом, а можливий перехід – стрілкою. Таким чином розмістимо всі можливі стани та переходи (рис. 5.3).

Методика розрахунків вартості переходів по графу наведена в табл. 5.1.

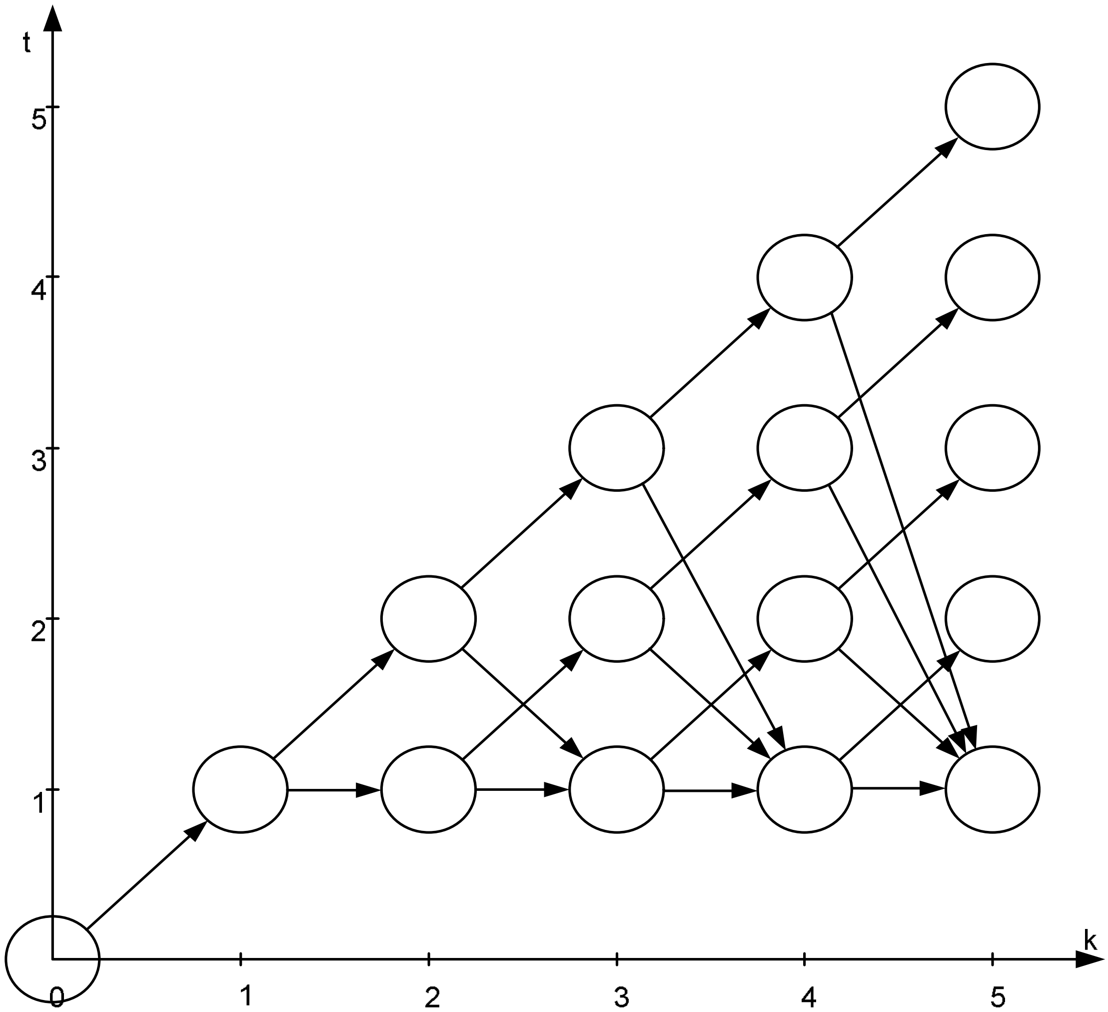



Рис. 5.3. Побудова графа станів. Етап 1

Таблиця 5.1

Вартість переходів

| Перехід | Вартість, грош. од. | Пояснення |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| $(0;0) \rightarrow (1;1)$ | 2600 | купується нове обладнання (2000) і експлуатується протягом року (600) |
| $(1;1) \rightarrow (2;1)$ | 1600 | обладнання віком $t=1$ продається $\left(-2000 \cdot 2^{-1}\right)$, купується нове за 2000 та експлуатується протягом року (600), тобто $-2000 \cdot 2^{-1} + 2000 + 600 = 1600$ |
| $(1;1) \rightarrow (2;2)$ | 1200 | обладнання віком $t=1$ експлуатується протягом року |

Продовження табл. 5.1

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| $(2;1) \rightarrow (3;1)$ | 1600 | обладнання віком $t = 1$ продається, купується нове та експлуатується протягом року: $-2000 \cdot 2^{-1} + 2000 + 600 = 1600$ |
| $(2;1) \rightarrow (3;2)$ | 1220 | обладнання віком $t = 1$ експлуатується протягом року |
| $(2;2) \rightarrow (3;1)$ | 2100 | обладнання віком $t = 2$ продається $\left(-2000 \cdot 2^{-2}\right)$, купується нове за 2000 та експлуатується протягом року (600), тобто $-2000 \cdot 2^{-2} + 2000 + 600 = 2100$ |
| $(2;2) \rightarrow (3;3)$ | 1800 | обладнання віком $t = 2$ експлуатується протягом року |

Аналогічно обчислюємо вартість всіх переходів і отримаємо рис. 5.4.

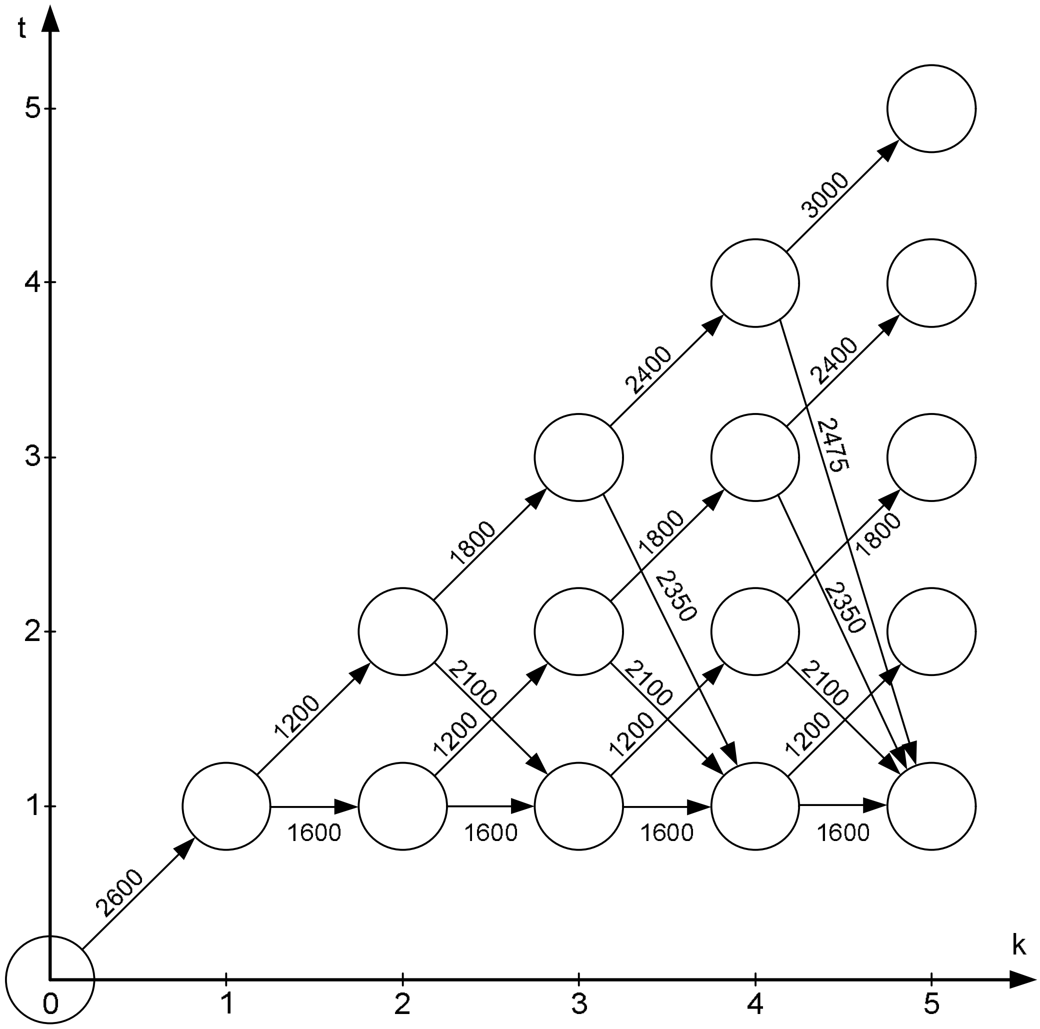



Рис. 5.4. Побудова графа станів. Етап 2

Стан початку експлуатації обладнання відповідає точці $S_0(0;0)$, кінець − точкам $S(5;t)$. Будь-яка траєкторія з $S_0$ у $S(5;t)$ складається з відрізків-кроків, кожний з яких відповідає року експлуатації. Треба вибрати таку траєкторію, при якій витрати на експлуатацію обладнання виявляться мінімальними. Проведемо на графі станів (рис. 5.4) умовну оптимізацію. Заповнення кіл починаємо з 5 кроку.

*Крок 5.* Початкові стани − точки $(4;t)$, кінцеві − точки $(5;t)$. У станах $(5;t)$ обладнання продається за ціною $2000 \cdot 2^{-t}$, але оскільки цільова функція пов'язана з витратами на експлуатацію, то в колах точок $(5;t)$ поставимо величину доходу зі знаком мінус (табл. 5.2).

Таблиця 5.2

Дохід в станах $(5;t)$

| Стан | Дохід, грош. од. |
|---|---|
| $(5;1)$ | $-2000 \cdot 2^{-1} = -1000$ |
| $(5;2)$ | $-2000 \cdot 2^{-2} = -500$ |
| $(5;3)$ | $-2000 \cdot 2^{-3} = -250$ |
| $(5;4)$ | $-2000 \cdot 2^{-4} = -125$ |
| $(5;5)$ | $-2000 \cdot 2^{-5} = -62{,}5$ |

Отримані обчислення відмічаємо на графі станів (рис. 5.5).

Аналізуємо, як можна потрапити з кожного початкового стану в кінцевий на 5-му кроці.

*Стан (4;1)*

З нього можна потрапити в стан (5;2), витративши на експлуатацію обладнання 1200 і отримавши від продажу 500, тобто сумарні витрати дорівнюють 1200-500=700, і в стан (5;1) з витратами 1600-1000=600. Оскільки $W_5^*(1) = \min\{1200 - 500; 1600 - 1000\} = 600$, виходить, що якщо до останнього кроку система перебувала в точці (4;1), то їй варто йти в точку (5;1) (позначимо цей напрямок подвійною стрілкою), а неминучі мінімальні витрати, що відповідають цьому переходу, дорівнюють 600. Помістимо цю величину в коло (4;1).

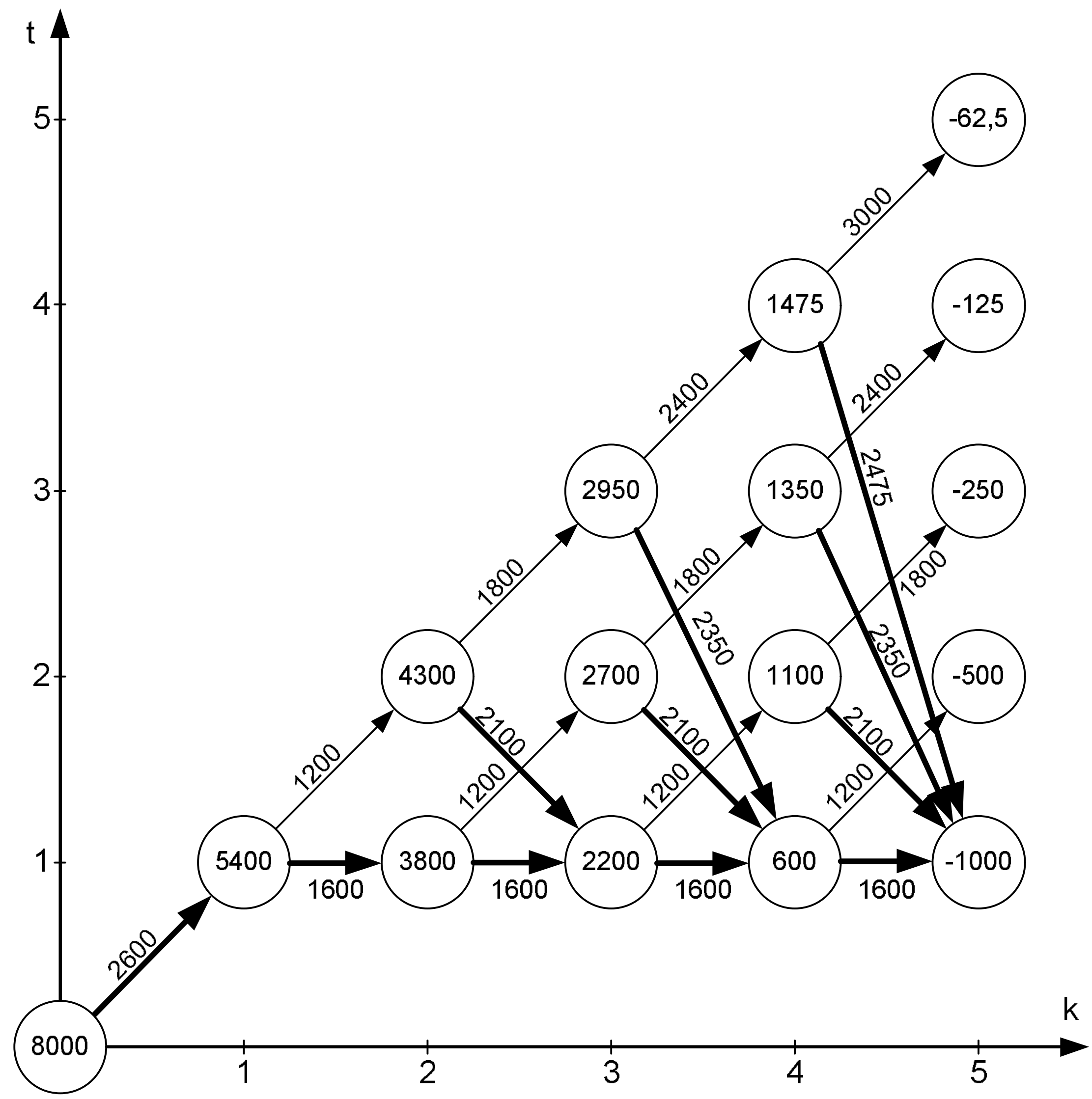



Рис. 5.5. Умовна оптимізація на графі

*Стан (4;2)*

З нього можна потрапити в стан (5;1) з витратами 2110-1000=1100 і в стан (5;3) з витратами 1800-250=1550, тобто

$$W_5^*(2) = \min\{2110 - 1000; 1800 - 250\} = 1100.$$

Аналогічно відносно кожної точки передостаннього кроку знайдемо:

$$W_5^*(3) = \min\{2350 - 1000; 2400 - 125\} = 1350;$$

$$W_5^*(4) = \min\{2475 - 1000; 3000 - 62{,}5\} = 1475.$$

Відповідні оптимальні управління позначимо на рис. 5.5 подвійною стрілкою.

*Крок 4*. Аналізуємо кожний стан, у якому може бути система наприкінці 3-го кроку з урахуванням оптимального продовження до кінця процесу, тобто розв'язуємо для усіх $0 \le t \le 4$ при $i = 4$ рівняння (5.13).

*Стан (3;1)*

З нього можна потрапити в стан (4;2) з витратами 1200+1100=2300 і в стан (4;1) з витратами 1600+600=2200. Вибираємо друге управління, позначаємо його подвійною стрілкою, а значення $W_4^*(1) = \min\{1200 + 1100; 1600 + 600\} = 2200$ поставимо в коло точки (3;1). Таким чином підходимо до кожного стану $(3;t)$:

$$W_4^*(2) = \min\{2100 + 600; 1800 + 1350\} = 2700;$$
$$W_4^*(3) = \min\{2350 + 600; 2400 + 1475\} = 2950.$$

*Крок 3*. Знаходимо умовні оптимальні витрати для кожного стану $(2;t)$:

$$W_3^*(1) = \min\{1200 + 2700; 1600 + 2200\} = 3800;$$
$$W_3^*(2) = \min\{1800 + 2950; 2100 + 2200\} = 4300.$$

*Крок 2*.

$$W_2^*(1) = \min\{1200 + 4300; 1600 + 3800\} = 5400.$$

*Крок 1*.

$$W_{\min} = W_1^*(0) = 2600 + 5400 = 8000.$$

Іноді, зручніше отримані дані надавати у вигляді табл. 5.3.

Будуємо оптимальну траєкторію, переміщуючись з точки $S_0(0;0)$ за подвійними стрілками в $S$ (рис. 5.5). Отримаємо послідовність точок $(0;0) \to (1;1) \to (2;1) \to (3;1) \to (4;1) \to (5;1)$. Цей набір відповідає оптимальному управлінню $U^* = \left(U^н; U^з; U^з; U^з; U^з\right)$.

Таблиця 5.3

Задача про заміну обладнання

| Номер кроку $i$ | Вік обладнання $t\ (1 \le t \le 5)$ | Функція умовних оптимальних витрат $W_i^*(t)$, грош. од. |
|---|---|---|
| 5 | 1<br>2<br>3<br>4 | 600<br>1100<br>1350<br>1475 |
| 4 | 1<br>2<br>3 | 2200<br>2700<br>2950 |
| 3 | 1<br>2 | 3800<br>4300 |
| 2 | 1 | 5400 |
| 1 | | **8000** |

Перевіримо правильність наших розрахунків (табл. 5.4).

Таблиця 5.4

Перевірка обчислень

| Рік | Купівля нового обладнання, грош. од. | Затрати на експлуатацію, грош. од. | Продаж обладнання, грош. од. | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2000 | 600 | -1000 | 1600 |
| 2 | 2000 | 600 | -1000 | 1600 |
| 3 | 2000 | 600 | -1000 | 1600 |
| 4 | 2000 | 600 | -1000 | 1600 |
| 5 | 2000 | 600 | -1000 | 1600 |
| $\sum$ | 10000 | 3000 | -5000 | **8000** |

**Відповідь**: оптимальний режим експлуатації полягає в тому, щоб замінити обладнання новим на початку 2- го, 3-го, 4-го та 5-го років (тобто щорічно його замінювати), при цьому витрати складуть 8000 грош. од.

### *Задача про розподіл ресурсів між галузями на n років*

**Приклад 3.** Планується вкласти $S_0 = 10000$ грош. од. в діяльність двох галузей виробництва на 4 роки. Кошти $x$ грош. од., вкладені в І галузь на початку року, дають наприкінці року прибуток $f_1(x) = 0{,}6x$ грош. од. і повертаються в розмірі $g_1(x) = 0{,}7x$ $(g_1(x) < x)$ грош. од.; аналогічно, кошти $y$ грош. од., вкладені в ІІ галузь на початку року, дають наприкінці року прибуток $f_2(y) = 0{,}5y$ (грош. од.) і повертаються в розмірі $g_2(y) = 0{,}8y$ $(g_2(y) < y)$ грош. од. Наприкінці року всі повернені кошти заново перерозподіляються між двома галузями, нові кошти не надходять, прибуток у виробництво не вкладається. Потрібно розподілити наявні кошти $S_0$ між двома галузями виробництва на 4 роки так, щоб сумарний прибуток від двох галузей за 4 роки виявився максимальним.

**Розв'язання**. Система управління – дві галузі виробництва, а управління полягає у виділенні коштів кожній галузі на наступний рік. Розіб'ємо весь період на 4 етапи, прийняв кожний рік за 1 етап. Нумерація станів $i, i = \overline{1,4}$ починається з першого року.

Параметр стану $S_i, i = \overline{1,4}$ – кількість коштів, що підлягають розподілу на початку $i$-го року і дорівнюють залишку після $(i-1)$-го року.

Позначимо через $x_i, y_i, i = \overline{1,4}$ кількість коштів, виділених І і ІІ галузям на $i$-му етапі відповідно. Рівняння станів, які визначають дохід, отриманий на $i$-му етапі, мають вигляд

$$S_i = 0{,}7x_i + 0{,}8y_i\ , i = \overline{1,4}.$$

Оскільки кількість коштів, що залишилися після попереднього етапу дорівнюють

$$S_{i-1} = x_i + y_i, i = \overline{1,4},$$

то $y_i = S_{i-1} - x_i$, $0 \le x_i \le S_{i-1}$ (всі кошти $S_{i-1}$ розподіляються між двома галузями на $i$-му етапі).

У нашому випадку отримаємо

$$S_i = 0{,}7x_i + 0{,}8(S_{i-1} - x_i) = 0{,}8S_{i-1} - 0{,}1x_i,\ i = \overline{1{,}4}. \qquad (5.14)$$

Показник ефективності $i$-го року – це прибуток, отриманий наприкінці $i$-го року від обох галузей (цільова функція):

$$W_i = 0{,}6x_i + 0{,}5y_i = 0{,}6x_i + 0{,}5(S_{i-1} - x_i) = 0{,}1x_i + 0{,}5S_{i-1},\ i = \overline{1{,}4}. \qquad (5.15)$$

Сумарний показник ефективності – це прибуток за 4 роки (цільова функція задачі):

$$W = \sum_{i=1}^{4}(0{,}1x_i + 0{,}5S_{i-1}),\ i = \overline{1{,}4}. \qquad (5.16)$$

Нехай $W_i^*(S_{i-1})$ – умовний оптимальний прибуток за $(5-i)$ років, починаючи з $i$-го до 4-го року включно, за умови, що наявні на початок $i$-го року кошти $S_{i-1}$ надалі розподілялися оптимально. Тоді оптимальний прибуток за 4 роки становитиме $W_{\max} = W_1^*(S_0)$.

Запишемо функціональне рівняння Беллмана:

$$W_i^*(S_{i-1}) = \max_{0 \le x_i \le S_{i-1}} \left\{0{,}1x_i + 0{,}5S_{i-1} + W_{i+1}^*(S_i)\right\},\ i = 4{,}3{,}2{,}1. \qquad (5.17)$$

Здійснюємо умовну оптимізацію. Розв’яжемо задачу покроково.

*Крок 4.* Оскільки нас не цікавить залишок коштів після періоду планування, то $W_5^*(S_4) = 0$. Тоді за формулою (5.17) маємо

$$W_4^*(S_3) = \max_{0 \le x_4 \le S_3} \{0{,}1x_4 + 0{,}5S_3\}.$$

Функція $W_4 = 0{,}1x_4 + 0{,}5S_3$ – лінійна, зростаюча (кутовий коефіцієнт 0,1 більше нуля) на відрізку $[0; S_3]$. Тому її максимум досягається при $x_4 = S_3$ (рис. 5.6).

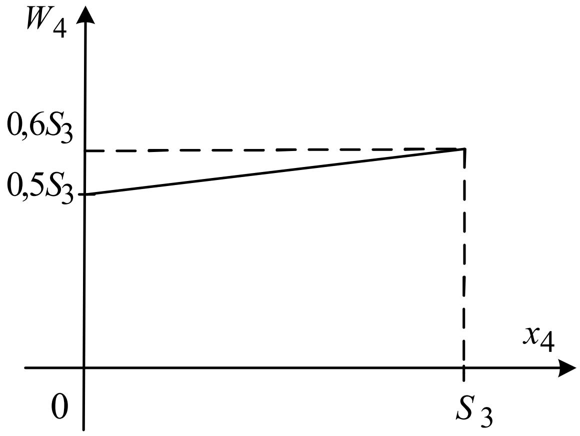



Рис. 5.6. Графік функції $W_4$

Отже, $W_4^*(S_3) = 0{,}1S_3 + 0{,}5S_3 = 0{,}6S_3$ при $x_4^* = S_3$, тобто на початку четвертого етапу всі наявні кошти потрібно вкласти в першу галузь.

*Крок 3.*

За формулою (5.17) при $i = 3$:

$$W_3^*(S_2) = \max_{0 \le x_3 \le S_2} \left\{0{,}1x_3 + 0{,}5S_2 + W_4^*(S_3)\right\} =$$
$$= \max_{0 \le x_3 \le S_2} \{0{,}1x_3 + 0{,}5S_2 + 0{,}6S_3\}.$$

За формулою (5.14) знаходимо $S_3 = 0{,}8S_2 - 0{,}1x_3$ та підставляємо його в праву частину попереднього виразу, тоді

$$W_3^*(S_2) = \max_{0 \le x_3 \le S_2} \{0{,}1x_3 + 0{,}5S_2 + 0{,}6(0{,}8S_2 - 0{,}1x_3)\} =$$
$$= \max_{0 \le x_3 \le S_2} \{0{,}04x_3 + 0{,}98S_2\}.$$

Як і в попередньому випадку, максимум досягається при $x_3^* = S_2$, тобто

$$W_3^*(S_2) = 0{,}04S_2 + 0{,}98S_2 = 1{,}02S_2.$$

Бачимо, що на третьому етапі кошти потрібно виділити теж першій галузі.

*Крок 2.* За формулою (5.17) при $i=2$:

$$W_2^*(S_1) = \max_{0 \le x_2 \le S_1} \left\{0{,}1x_2 + 0{,}5S_1 + W_3^*(S_2)\right\} =$$
$$= \max_{0 \le x_2 \le S_1} \{0{,}1x_2 + 0{,}5S_1 + 1{,}02S_2\},$$

де

$$S_2 = 0{,}8S_1 - 0{,}1x_2 \;\Rightarrow$$
$$W_2^*(S_1) = \max_{0 \le x_2 \le S_1} \{0{,}1x_2 + 0{,}5S_1 + 1{,}02(0{,}8S_1 - 0{,}1x_2)\} =$$
$$= \max_{0 \le x_2 \le S_1} \{-0{,}002x_2 + 1{,}316S_1\}.$$

Лінійна відносно $x_2$ функція $W_2 = -0{,}002x_2 + 1{,}316S_1$ спадає на відрізку $[0; S_1]$, тому вона має максимум при $x_2 = 0$ (рис. 5.7).

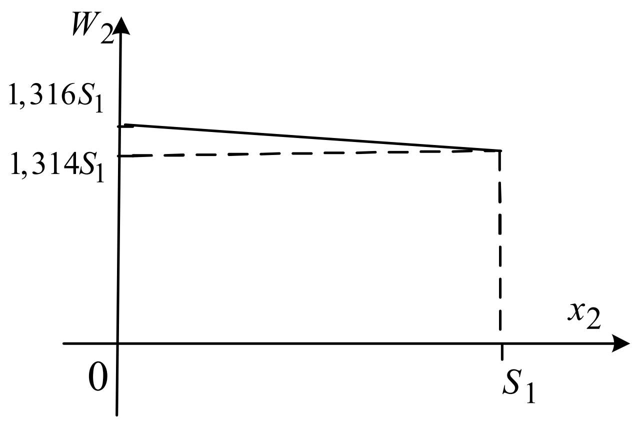



Рис. 5.7. Графік функції $W_2$

Отже, $W_2^*(S_1) = 1{,}316S_1$ при $x_2^* = S_1$, тобто на цьому етапі кошти виділяються другій галузі.

*Крок 1.* За формулою (5.17) при $i=1$ маємо

$$W_1^*(S_0) = \max_{0 \le x_1 \le S_0} \left\{ 0{,}1x_1 + 0{,}5S_0 + W_2^*(S_1) \right\} =$$
$$= \max_{0 \le x_1 \le S_0} \{0{,}1x_1 + 0{,}5S_0 + 1{,}316S_1\}.$$

За формулою (5.14) отримаємо

$$S_1 = 0{,}8S_0 - 0{,}1x_1 \;\Rightarrow$$
$$W_1^*(S_0) = \max_{0 \le x_1 \le S_0} \{0{,}1x_1 + 0{,}5S_0 + 1{,}316(0{,}8S_0 - 0{,}1x_1)\} =$$
$$= \max_{0 \le x_1 \le S_0} \{-0{,}0316x_1 + 1{,}5528S_0\}.$$

Як і в попередньому випадку, функція має максимум на початку відрізка, тобто $W_1^*(S_0) = 1{,}5528S_0$ при $x_1^* = 0$, що говорить про те, що на початку планування кошти віддають другій галузі.

На цьому умовна оптимізація закінчується. У нашому випадку

$$S_0 = 10000 \Rightarrow W_{\max} = W_1^*(10000) = 1{,}5528 \cdot 10000 = 15528 \text{ грош. од.}$$

На основі наведених обчислень отримаємо:

$x_1^* = 0$; $y_1^* = S_0 - x_1^* = 10000$ (всі кошти на початку першого року виділяються II галузі).

Повернені кошти після першого року:

$S_1^* = 0{,}8S_0 - 0{,}1x_1^* = 0{,}8 \cdot 10000 - 0{,}1 \cdot 0 = 8000$.

$x_2^* = 0$; $y_2^* = S_1^* = 8000$ (всі кошти на початку другого року виділяються II галузі).

Повернені кошти після другого року:

$S_2^* = 0{,}8S_1^* - 0{,}1x_2^* = 0{,}8 \cdot 8000 - 0{,}1 \cdot 0 = 6400$.

$x_3^* = 6400$; $y_3^* = 0$ (всі кошти на початку 3-го року виділяються I галузі).

Повернені кошти після 3-го року:

$S_3^* = 0{,}8S_2^* - 0{,}1x_{32}^* = 0{,}8 \cdot 6400 - 0{,}1 \cdot 6400 = 4480$.

$x_4^* = 4480$; $y_4^* = 0$ (всі кошти на початку 4-го року виділяються I галузі).

Отже, оптимальне управління $X^*(0; 0; 6400; 4480)$, $Y^*(10000; 8000; 0; 0)$.

Для наочності представимо всі попередні викладки у вигляді табл. 5.5.

Таблиця 5.5

Задача про розподіл ресурсів прикладу 3

| Етап планування | I галузь | | II галузь | | Кошти $S_i, i=\overline{1,4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | прибуток $f_1(x)=0{,}6x$ | залишок $g_1(x)=0{,}7x$ | прибуток $f_2(y)=0{,}5y$ | залишок $g_2(y)=0{,}8y$ | |
| 1 | 0 | 0 | 5000 | 8000 | 10000 |
| 2 | 0 | 0 | 4000 | 6400 | 8000 |
| 3 | 3840 | 4480 | 0 | 0 | 6400 |
| 4 | 2688 | 3136 | 0 | 0 | 4480 |
| $\sum$ | **6528** | | **9000** | | **15528** |

**Відповідь**: оптимальний прибуток за 4 роки, отриманий від двох галузей виробництва при початкових коштах у кількості 10000 грош. од., дорівнює 15528 грош. од. за умови, що I галузь одержує щорічно $(0; 0; 6400; 4480)$, а галузь II – відповідно $(10000; 8000; 0; 0)$ грош. од.

### *Задача про найкоротший шлях*

Ця задача полягає в знаходженні пов’язаних між собою доріг транспортної мережі, які в сукупності мають мінімальну довжину від вихідного пункту до пункту призначення.

**Приклад 4.** На рис. 5.8 задана мережа, у якій вузол 1 – це початкова точка (вихідний пункт), а вузол 10 – кінцева точка (пункт призначення). Відстань на мережі між сусідніми вузлами $i$ та $j, i=\overline{1,9}, j=\overline{2,10}$ проставлено над відповідними стрілками мережі. Потрібно знайти найкоротший шлях з пункту 1 у пункт 10.

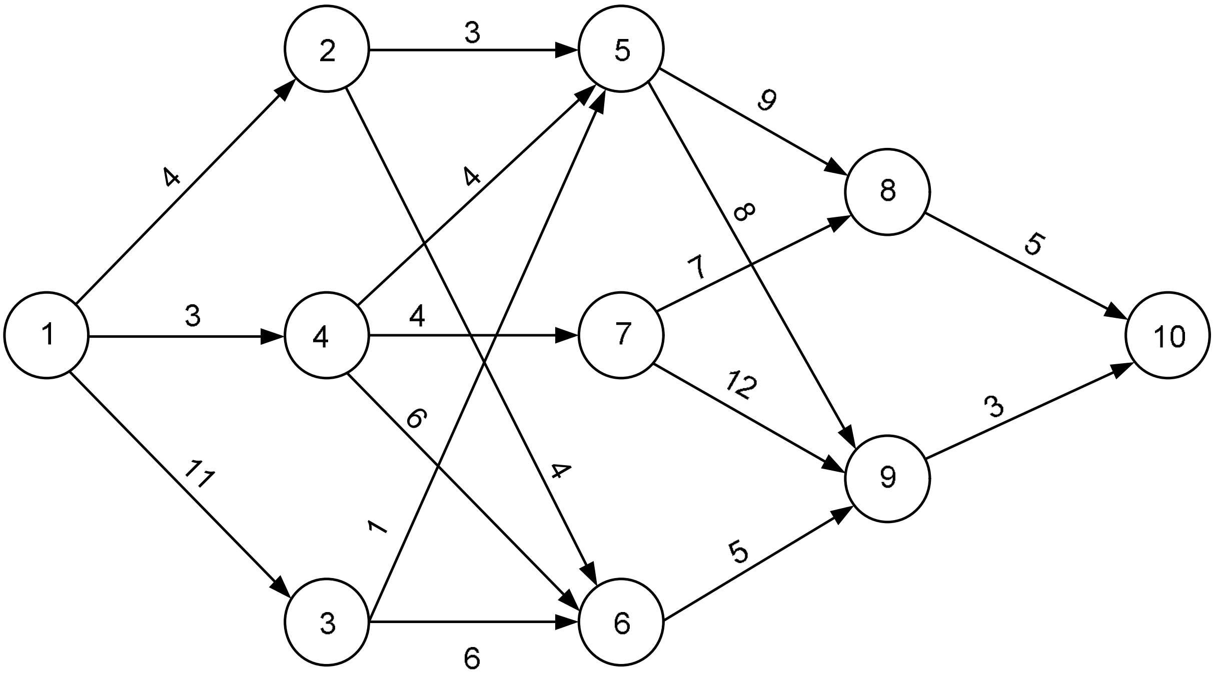



Рис. 5.8. Транспортна мережа

**Розв'язання**. Розіб'ємо всю множину вершин (вузлів) на підмножини. У першу підмножину включимо початкову вершину 1. У другу – вершини, у які входять стрілки, що виходять з вершин першої підмножини. Таким чином, продовжуючи розбиття далі, отримаємо п'ять підмножин: $\{1\}; \{2; 3; 4\}; \{5; 6; 7\}; \{8; 9\}; \{10\}$ (рис. 5.9).

Очевидно, що довільний маршрут з вузла 1 у вузол 10 містить рівно чотири дуги, кожна з яких з'єднує вершини, що належать відповідним підмножинам. Отже, процес розв'язання задачі (знаходження оптимального маршруту) розбивається на чотири етапи. Перенумеруємо етапи від кінцевої вершини до початкової (рис. 5.9).

Введемо позначення:

$n, n = \overline{1,4}$ − номер кроку;

$d_{ij}$ − відстань на мережі між сусідніми вузлами $i$ та $j$, $i = \overline{1,9}$, $j = \overline{2,10}$;

$l_n(s)$ – мінімальна відстань між вузлом $s$ і десятим вузлом, якщо до кінцевого вузла залишилось $n$ кроків (етапів).

Розв'язання починаємо з останнього пункту $s = 10$. Отже, кількість кроків (етапів), що залишились, дорівнює нулю $(n = 0)$ і $l_n(s) = l_0(10) = 0$.

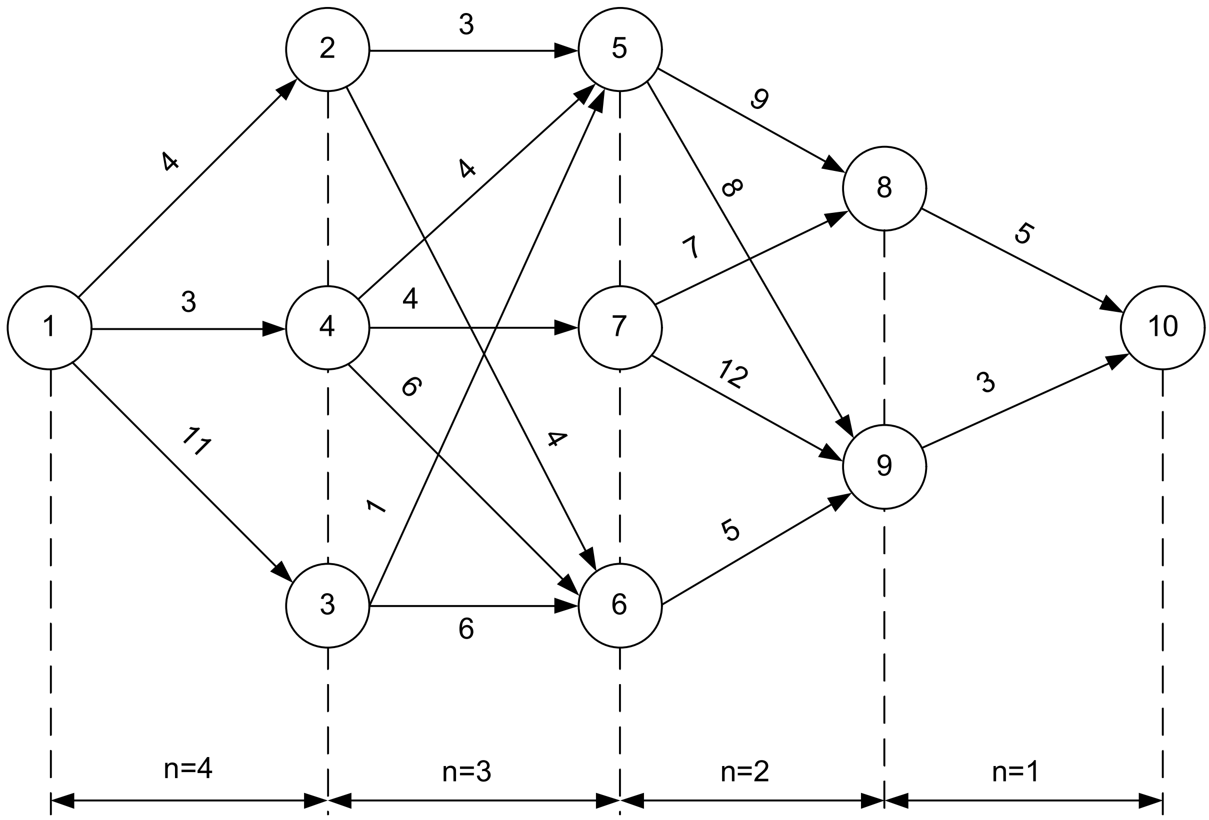



Рис. 5.9. Розбиття на етапи

Розглянемо останній крок ($n = 1$). Очевидно, що в пункт 10 можна потрапити або з пункту 8 (відстань дорівнює 5), або з пункту 9 (відстань дорівнює 3).

У результаті за даним рис. 5.9 одержуємо граф: над вершинами 8 та 9 ставимо відповідно відмітки 5 і 3, а дуги $d_{8,10}$ і $d_{9,10}$ позначимо подвійною стрілкою (рис. 5.10).

Здійснюємо розрахунок для $n = 2$. З вузла 5 у вузол 10 можна потрапити або через вузол 8, або через вузол 9. Тому маршрут з вузла 5 знаходимо з виразу

$$l_2(5) = \min\{d_{58} + l_1(8)\,;\, d_{59} + l_1(9)\} = \min\{9+5; 8+3\} = \min\{14; 11\} = 11.$$

Аналогічно знаходимо:

$$l_2(7) = \min\{d_{78} + l_1(8)\,;\, d_{79} + l_1(9)\} = \min\{7+5; 12+3\} = 12,$$
$$l_2(6) = \min\{d_{69} + l_1(9)\} = \min\{5+3\} = 8.$$

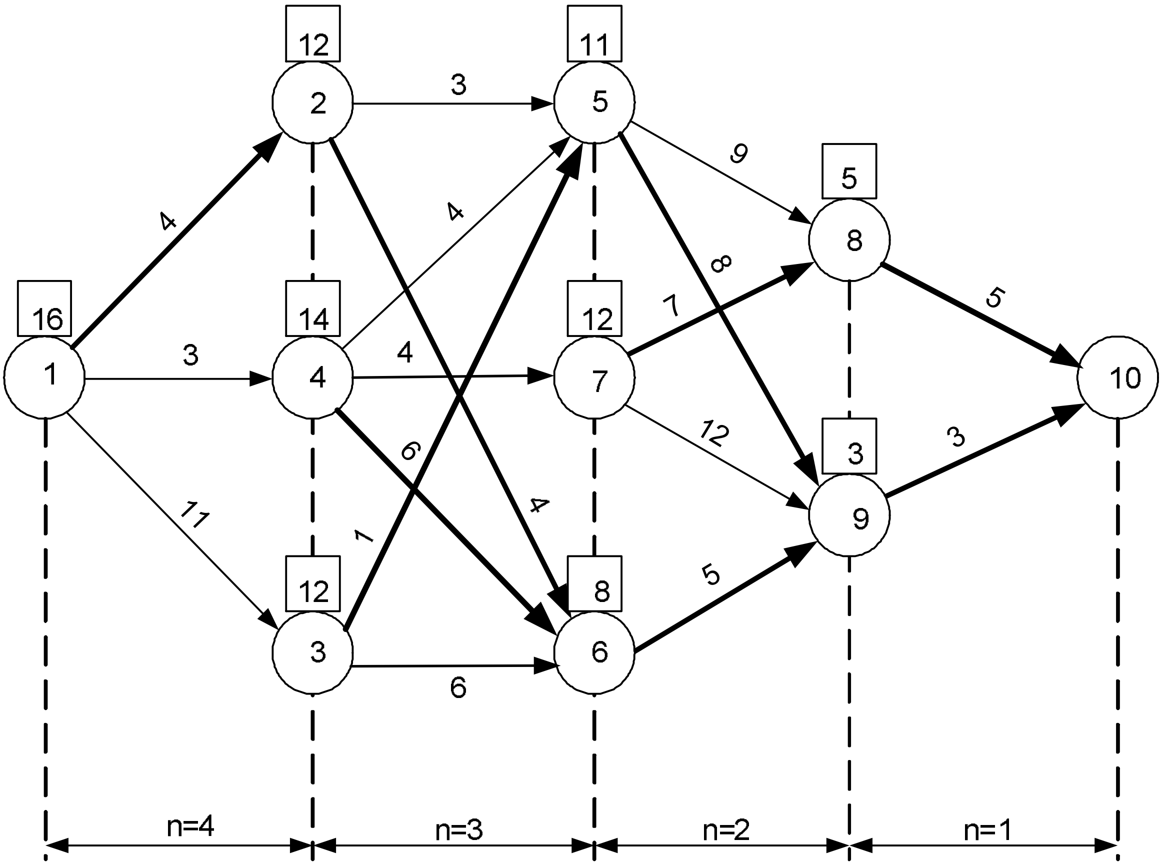



Рис. 5.10. Умовна оптимізація на транспортній мережі

Отримані розрахунки аналогічно першому етапу відмічаємо на даній мережі подвійними стрілками (рис. 5.10).

Розглянемо третій етап ($n = 3$):

$$l_3(2) = \min\{d_{25} + l_2(5)\,;\, d_{26} + l_2(6)\} = \min\{3 + 11; 4 + 8\} = 12,$$

$$l_3(4) = \min\{d_{45} + l_2(5)\,;\, d_{47} + l_2(7)\,;\, d_{46} + l_2(6)\} =$$
$$= \min\{4 + 11; 4 + 12; 6 + 8\} = 14,$$

$$l_3(3) = \min\{d_{35} + l_2(5)\,;\, d_{36} + l_2(6)\} = \min\{1 + 11; 6 + 8\} = 12.$$

Так само розглянемо останній етап ($n = 4$):

$$l_4(1) = \min\{d_{12} + l_3(2)\,;\, d_{14} + l_3(4)\,;\, d_{13} + l_3(3)\} =$$
$$= \min\{4 + 12; 3 + 14; 11 + 12\} = \min\{16; 17; 23\} = 16.$$

За отриманим рис. 5.10 будуємо оптимальний маршрут з вузла 1 за подвійними стрілками у вузол 10.

**Відповідь**: найкоротший шлях з вузла 1 у вузол 10, довжина якого складає $l_4(1) = 16$, має вигляд $1 \to 2 \to 6 \to 9 \to 10$.

***Задача про оптимальне завантаження транспортного засобу***

Нехай потрібно оптимально завантажити транспортний засіб (рюкзак, вантажна машина, вагон, судно, літак), вантажопідйомністю $P$ предметами $N$ різних типів. Кожний вантаж, розміщений на транспорті, приносить певний прибуток $c_i, i=\overline{1,N}$. Потрібно визначити такий план завантаження, який приносить найбільший прибуток, якщо відома вага $p_i, i=\overline{1,N}$ одного предмета $i$-го типу вантажу.

Позначимо через $x_i$ − кількість предметів $i$-го типу, $i=\overline{1,N}$.

Тоді математична модель даної задачі має вигляд

$$W(x_1;x_2;...;x_N)=\sum_{i=1}^{N} c_i x_i \to \max, \tag{5.18}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} x_i p_i \le P, \\ x_i \ge 0,\ x_i = 0,1,2,..., \end{cases} \tag{5.19}$$

де функція $W(x_1;x_2;...;x_N)$ (5.18) є цільовою функцією (загальний прибуток), а система вигляду (5.19) є системою обмежень (сумарна вага вантажу не повинна перевищувати $P$).

Розв’яжемо дану цілочисельну задачу методами динамічного програмування.

Складаємо чергу на завантаження, розташувавши предмети в *порядку зростання їхньої ваги*. Припустимо, що $p_1 < p_2 < ... < p_n$.

На *першому етапі* будемо завантажувати транспортний засіб тільки предметами першого типу з найменшою вагою. Тоді максимальна вартість вантажу складатиме

$$W_1(P)=\max_{x_1}\{c_1 x_1\}$$

при обмеженнях $p_1 x_1 \le P,\ x_1 = 0,1,2,3,...$

Кількість предметів першого типу $x_1$ повинна бути цілим числом, тобто

$$x_1 \le \left[ \frac{P}{p_1} \right],$$

де $\left[ \frac{P}{p_1} \right]$ − ціла частина числа $\frac{P}{p_1}$.

Таким чином отримаємо максимальний прибуток від вантажу на першому етапі:

$$W_1(P) = c_1 \left[ \frac{P}{p_1} \right]. \tag{5.20}$$

На *другому етапі* будемо завантажувати транспортний засіб предметами вже першого і другого типів. Якщо було завантажено $x_2$ предметів другого типу, то вага предметів першого типу не повинна перевищувати $P - p_2 x_2$.

Тоді вартість предметів першого і другого типів відповідно дорівнює $c_1(P - p_2 x_2)$ і $c_2 x_2$.

Позначимо через $W_2(P)$ − максимальний прибуток на другому етапі. Тоді, враховуючи вираз (5.20), отримаємо:

$$W_2(P) = \max_{0 \le x_2 \le \left[ \frac{P}{p_2} \right]} \left\{ c_2 x_2 + W_1(P - p_2 x_2) \right\}.$$

Продовжуючи таким чином процес, додаючи предмети нових типів, через $k, k = \overline{1, N}$ кроків отримаємо функціональне рівняння

$$W_k(P) = \max_{0 \le x_k \le \left[ \frac{P}{p_k} \right]} \left\{ c_k x_k + W_{k-1}(P - p_k x_k) \right\}, \tag{5.21}$$

де $W_k(P)$ − максимальний прибуток від вантажу, що складається з предметів $k$ типів;

$c_k x_k$ − вартість предметів $k$-го типу;

$W_{k-1}(P - p_k x_k)$ − максимальний прибуток від вантажу, що складається з предметів $k-1$ типів, загальна вага яких не перевищує $P - p_k x_k$.

**Приклад 5.** Транспортний засіб вантажопідйомністю $P = 15$ вагов. од. завантажується вантажами трьох видів. Вага вантажу кожного виду і прибуток, який він дає, відповідно дорівнюють $p_1, p_2, p_3$ вагов. од. і $c_1, c_2, c_3$ грош. од.:

$$p_1 = 4, p_2 = 2, p_3 = 10;$$
$$c_1 = 30, c_2 = 10, c_3 = 40.$$

Знайти оптимальний план завантаження транспортного засобу для одержання максимального прибутку.

**Розв'язання**. Для зручності за умовою прикладу 5 складаємо табл. 5.6, розташувавши предмети в порядку зростання ваги.

Таблиця 5.6

Дані прикладу 5

| $N$ | Вид вантажу | Вага, вагов. од. | Прибуток, грош. од. |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 10 |
| 2 | 1 | 4 | 30 |
| 3 | 3 | 10 | 40 |

*Етап 1.* Транспортний засіб завантажуємо предметами другого типу з вагою 2 од. Їх можна завантажити в кількості $\left[\frac{P}{p_2}\right] = \left[\frac{15}{2}\right] = 7$, тому $x_2 = 0,1,2,...,7.$

Розіб'ємо інтервал $[0; P] = [0;15]$ на однакові інтервали довжиною $l = 2$ (вага одиниці предмета, що завантажуємо). Отримані значення $W_1(P)$ запишемо в табл. 5.7.

Таблиця 5.7

Етап 1

| $N$ | Інтервал | $W_1(P)=10x_2$ | | | | | | | | Оптимальний розв'язок | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_2$ | | | | | | | | $W_1^*(P)$ | $x_2^*$ |
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | |
| 0 | $[0;2)$ | **0** | - | - | - | - | - | - | - | 0 | - |
| 1 | $[2;4)$ | 0 | **10** | - | - | - | - | - | - | 10 | 1 |
| 2 | $[4;6)$ | 0 | 10 | **20** | - | - | - | - | - | 20 | 2 |
| 3 | $[6;8)$ | 0 | 10 | 20 | **30** | - | - | - | - | 30 | 3 |
| 4 | $[8;10)$ | 0 | 10 | 20 | 30 | **40** | - | - | - | 40 | 4 |
| 5 | $[10;12)$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | **50** | - | - | 50 | 5 |
| 6 | $[12;14)$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | **60** | - | 60 | 6 |
| 7 | $[14;15]$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | **70** | 70 | 7 |

*Етап 2.* Тепер транспортний засіб завантажуємо предметами першого і другого типів. За умовою $p_1 = 4$ вагов. од., тому $\left[\dfrac{P}{p_1}\right] = \left[\dfrac{15}{4}\right] = 3$ і відповідно $x_2 = 0,1,2,3$. За допомогою функціонального рівняння (5.21)

$$W_2(P) = \max_{0 \le x_1 \le \left[\frac{P}{p_1}\right]} \{c_1 x_1 + W_1(P - p_1 x_1)\} =$$

$$= \max_{0 \le x_1 \le \left[\frac{15}{4}\right]} \{30x_1 - W_1(15 - 4x_1)\}$$

отримаємо табл. 5.8.

Таблиця 5.8

Етап 2

| $N$ | Інтервал | $W_2(P)=30x_1+W_1(15-4x_1)$ | | | | Оптимальний розв'язок | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1=0$ | $x_1=1$ | $x_1=2$ | $x_1=3$ | $W_2^*(P)$ | $x_1^*$ | $x_2^*$ |
| 0 | $[0;2)$ | **0+0** | - | - | - | - | 0 | 0 |
| 1 | $[2;4)$ | **0+10** | - | - | - | 10 | 0 | 1 |
| 2 | $[4;6)$ | 0+20 | **30+0** | - | - | 30 | 1 | 0 |
| 3 | $[6;8)$ | 0+30 | **30+10** | - | - | 40 | 1 | 1 |
| 4 | $[8;10)$ | 0+40 | 30+20 | **60+0** | - | 60 | 2 | 0 |
| 5 | $[10;12)$ | 0+50 | 30+30 | **60+10** | - | 70 | 2 | 1 |
| 6 | $[12;14)$ | 0+60 | 30+40 | 60+20 | **90+0** | 90 | 3 | 0 |
| 7 | $[14;15]$ | 0+70 | 30+50 | 60+30 | **90+10** | 100 | 3 | 1 |

*Етап 3.* Послідовно завантажуємо транспортний засіб предметами першого, другого і третього типів. Використовуючи табл. 5.7 і 5.8, за функціональним рівнянням (5.21)

$$W_3(P)=\max_{0\le x_3\le\left[\frac{P}{p_3}\right]}\{c_3x_3+W_2(P-p_3x_3)\}=$$

$$=\max_{0\le x_3\le\left[\frac{15}{19}\right]}\{40x_3+W_2(15-10x_3)\},$$

$$x_3=0,1$$

складаємо табл. 5.9.

Таблиця 5.9

Етап 3

| $N$ | $P$ | $W_3(P)=40x_3+W_2(P-10x_3)$ | | Оптимальний розв'язок | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_3=0$ | $x_3=1$ | $W_3^*(P)$ | $x_3^*$ | $x_2^*$ | $x_1^*$ |
| 0 | $[0;2)$ | 0+0 | - | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | $[2;4)$ | 0+10 | - | 10 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | $[4;6)$ | 0+30 | - | 30 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | $[6;8)$ | 0+40 | - | 40 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | $[8;10)$ | 0+60 | - | 60 | 0 | 2 | 0 |
| 5 | $[10;12)$ | **0+70** | 40+0 | 70 | 0 | 2 | 1 |
| 6 | $[12;14)$ | **0+90** | 40+10 | 90 | 0 | 3 | 0 |
| 7 | $[14;15]$ | **0+100** | 40+20 | **100** | **0** | **3** | **1** |

На основі табл. 5.9 можна зробити висновок, що максимальний прибуток, який можна отримати, складає 100 грош. од., при цьому повинно бути завантажено три предмети першого типу і один – другого типу.

**Відповідь**: $W_{max} = 100$ грош. од., $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

## Питання до розділу

1. Сформулюйте задачу динамічного програмування.
2. У чому полягає суть принципу поетапної побудови оптимального управління?
3. Сформулюйте принцип оптимальності Беллмана.
4. Недоліки методу динамічного програмування.
5. Обчислювальна схема основного функціонального рівняння Беллмана.
6. Задача про визначення найкоротшого шляху заданої мережі.
7. Задача про заміну обладнання.
8. Задача про розподіл ресурсів між двома галузями.
9. Задача про оптимальне завантаження транспортного засобу.

## Завдання

**1.** Стенд для тестування працездатності переносних радіостанцій для складачів потягів має середній термін експлуатації $n, n = \overline{1,6}$ років, після якого продається. На початку кожного року можна прийняти рішення зберегти стенд або замінити його новим. Вартість нового стенда складає $p_0$ грош. од. Після $t$ років експлуатації $(1 \le t \le n)$ стенд можна продати за $\varphi(t)$ грош. од. (ліквідна вартість). Витрати на експлуатацію протягом року залежать від віку $t$ стенда і дорівнюють $r(t)$ грош. од. Визначити оптимальну стратегію експлуатації стенду для тестування переносних радіостанцій, щоб сумарні витрати з урахуванням початкової покупки і заключного продажу були мінімальними.

а) $p_0 = 1920$; $\varphi(t) = 1920 \cdot 2^{-t}$; $r(t) = 300(t+1)$; $n = 6$;

б) $p_0 = 6080$; $\varphi(t) = 6080 \cdot 2^{-t}$; $r(t) = 1000(t+1)$; $n = 5$;

в) $p_0 = 3240$; $\varphi(t) = 3240 \cdot 3^{-t}$; $r(t) = 700(t+1)$; $n = 4$.

**Відповідь**:

а) $W_{\min} = 6960; U^* = \left(U^н; U^н; U^н; U^з; U^н; U^н\right)$;

б) $W_{\min} = 18880; U^* = \left(U^н; U^н; U^з; U^н; U^н\right)$ або $U^* = \left(U^н; U^н; U^н; U^з; U^н\right)$;

в) $W_{\min} = 9960; U^* = \left(U^н; U^н; U^з; U^н\right)$.

**2**. Необхідно перевезти вантаж з міста А в місто В. Схема мережі залізниць, що з'єднує ці міста, наведена на рис. 5.11. Вартість перевезення вантажу з міста $s, s = \overline{1,9}$ у місто $j, j = \overline{2,10}$ наведено над відповідними стрілками мережі. Необхідно знайти маршрут між А і В, для якого сумарні витрати на перевезення вантажу були б найменшими.

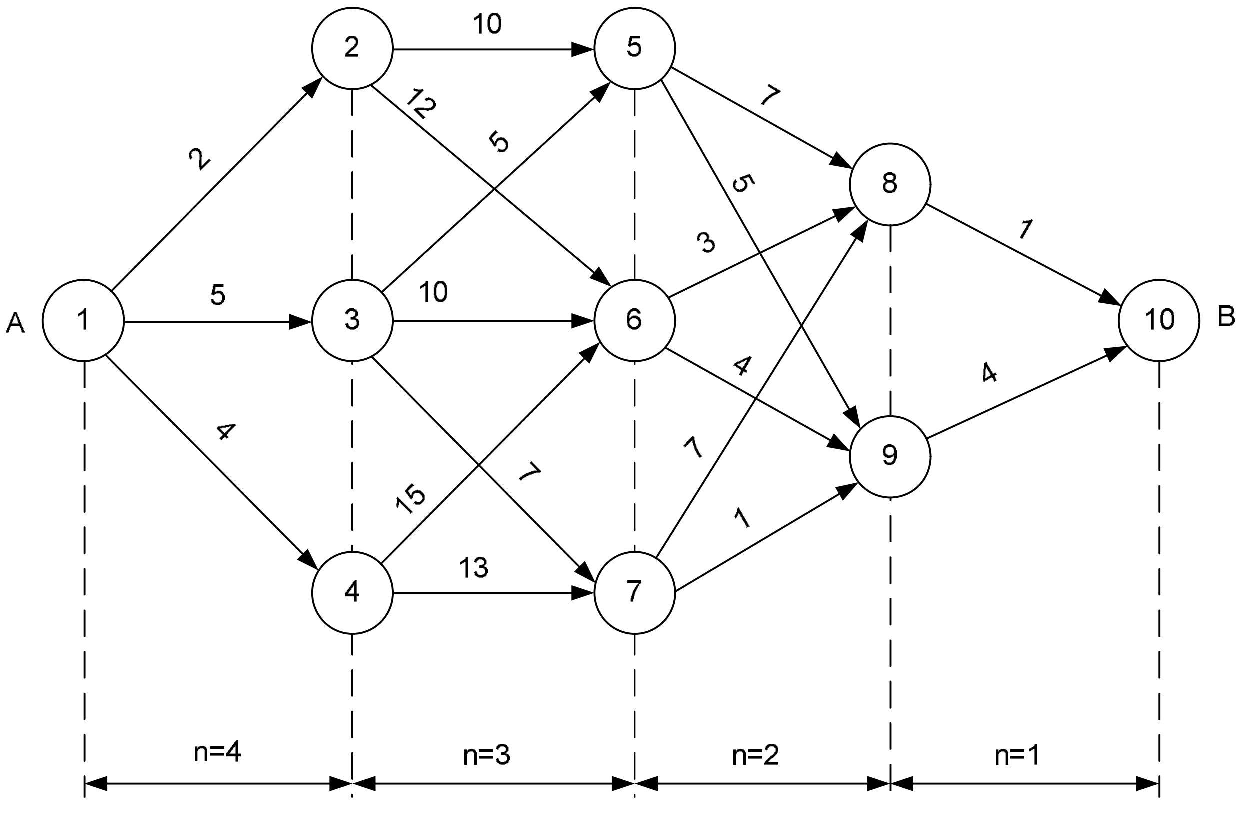



Рис. 5.11. Мережа залізниць

**Відповідь**: оптимальний маршрут $1 \to 3 \to 7 \to 9 \to 10$. Витрати становлять 17 грош. од.

**3.** На даній мережі доріг вказані відстані з пункту 1 в пункт 10 (табл. 5.10), $k = \overline{1,5}$. Знайти найкоротший маршрут перевезення вантажу з пункту 1 у пункт 10.

Таблиця 5.10

Матриця відстаней

| Пункт відправлення | Пункт призначення | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | – | $3+k$ | $6-k$ | – | – | – | – | – | – | – |
| 2 | – | – | – | 5 | $8-k$ | – | – | – | – | – |
| 3 | – | – | – | 4 | $2+k$ | 8 | – | – | – | – |
| 4 | – | – | – | – | – | – | 8 | 6 | $k$ | – |
| 5 | – | – | – | – | – | – | 3 | 5 | $9-k$ | – |
| 6 | – | – | – | – | – | – | – | $3+k$ | $k$ | – |
| 7 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | $4+k$ |
| 8 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | $10-k$ |
| 9 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 7 |
| 10 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – |

**Відповідь**:

3.1) $k=1$: оптимальний маршрут $1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 10$, довжина 16;

3.2) $k=2$: оптимальний маршрут $1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 10$ або $1 \to 3 \to 4 \to 9 \to 10$, довжина 17;

3.3) $k=3$: оптимальний маршрут $1 \to 3 \to 4 \to 9 \to 10$, довжина 17;

3.4) $k=4$: оптимальний маршрут $1 \to 3 \to 4 \to 9 \to 10$, довжина 17;

3.5) $k=5$: оптимальний маршрут $1 \to 3 \to 4 \to 8 \to 10$, довжина 16.

**4.** Для розвитку двох залізниць А і В на три роки виділено $S_0$ грош. од. Кількість коштів, вкладених у залізницю А, дозволяє отримати за один рік прибуток $f_1(x) = x^2$ грош. од. і зменшується до величини $g_1(x) = 0{,}75x$ грош. од. При вкладенні в залізницю В $y$ грош. од. отриманий прибуток складає $f_2(y) = 2y^2$ грош. од., а залишок $g_2(y) = 0{,}3y$ грош. од. Необхідно розподілити виділені ресурси між залізницями на три роки планового періоду таким чином, щоб повний прибуток був максимальним.

**Відповідь**: На початок першого року всі виділені кошти $S_0$ необхідно вкласти в залізницю А і їхня кількість зменшиться до величини $0{,}75S_0$ грош. од. На початку другого року залишок коштів $0{,}75S_0$ грош. од. потрібно вкласти в залізницю В і їхня кількість зменшиться до величини $0{,}3 \cdot 0{,}75S_0 = 0{,}225S_0$ грош. од. На початок третього року залишок коштів $0{,}225S_0$ грош. од. знову вкладається в залізницю В і зменшується до величини $0{,}3 \cdot 0{,}225S_0 = 0{,}0675S_0$ грош. од. При такому розподілі ресурсів максимальний дохід буде дорівнювати $2{,}22625S_0$ грош. од.

**5**. Знайти оптимальний розподіл ресурсів у кількості $S_0$ грош. од. між двома залізницями (I і II) протягом чотирьох років, якщо відомі функції доходів $f_1(x)$ і $f_2(y)$ для кожної залізниці та функції повернення коштів $g_1(x)$ і $g_2(y)$ відповідно. Після закінчення року перерозподіляються тільки всі повернені кошти, дохід надалі не вкладається.

а) $S_0 = 40000$, $f_1(x) = 0{,}5x$, $f_2(y) = 0{,}65y$, $g_1(x) = 0{,}6x$, $g_2(y) = 0{,}2y$;

б) $S_0 = 60000$, $f_1(x) = 0{,}6x$, $f_2(y) = 0{,}7y$, $g_1(x) = 0{,}5x$, $g_2(y) = 0{,}4y$;

в) $S_0 = 5000$, $f_1(x) = 0{,}6x$, $f_2(y) = 0{,}6y$, $g_1(x) = 0{,}8x$, $g_2(y) = 0{,}7y$.

**Відповідь**:

а) $W^*_{\max} = 44816$ грош. од.; $I^*(40000; 24000; 144000; 0)$, $II^*(0; 0; 0; 8640)$;

б) $W^*_{\max} = 68760$ грош. од.; $I^*(60000; 0; 0; 0)$, $II^*(0; 30000; 12000; 4800)$;

в) Розподіл коштів на останньому кроці є довільним і впливає лише на їхній залишок після періоду фінансування. $W^*_{\max} = 8856$ грош. од.; $I^*(5000; 4000; 3200; \alpha)$, $II^*(0; 0; 0; 2560 - \alpha)$, $\alpha \in [0; 2560]$.

**6.** Транспортний засіб вантажопідйомністю $P$ умов. од. завантажується вантажами трьох видів. Вага і вартість вантажу кожного виду відповідно дорівнюють $p_1, p_2, p_3$ умов од ваги і $c_1, c_2, c_3$ грош. од. Знайти оптимальний план завантаження транспортного засобу, щоб сумарна вартість вантажу була максимальною, якщо:

а) $p_1 = 0{,}5, p_2 = 1, p_3 = 2$; $c_1 = 10, c_2 = 27, c_3 = 71$, $P = 3{,}5$;

б) $p_1 = 1{,}8, p_2 = 7, p_3 = 3{,}5$; $c_1 = 25, c_2 = 60, c_3 = 65$, $P = 12{,}25$;

в) $p_1 = 6, p_2 = 33, p_3 = 5{,}5$; $c_1 = 8, c_2 = 50, c_3 = 7$, $P = 38{,}5$;

г) $p_1 = 11, p_2 = 17, p_3 = 23$; $c_1 = 20, c_2 = 36, c_3 = 48$; $P = 50$.

**Відповідь**:

а) $W_{\max} = 108$ грош. од., $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$;

б) $W_{\max} = 195$ грош. од., $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$;

в) $W_{\max} = 57$ грош. од., $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$;

г) $W_{\max} = 96$ грош. од., $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ або $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

**7.** Транспортний засіб вантажопідйомністю $P = 82$ вагов. од. завантажується вантажами чотирьох видів. Вага вантажу кожного виду і прибуток, який він дає, наведено в табл. 5.11. Знайти оптимальний план завантаження транспортного засобу, щоб одержати максимальний прибуток.

Таблиця 5.11

Дані завдання 7

| Вид вантажу | Вага, вагов. од. | Прибуток, грош. од. |
|---|---|---|
| 1 | 24 | 96 |
| 2 | 20 | 84 |
| 3 | 16 | 50 |
| 4 | 10 | 20 |

**Відповідь**: $W_{\max} = 338$ грош. од., $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$.

**8.** На станцію прибуло 6 транспортних засобів для розвантаження та 4 транспортних засоби для завантаження. Відомо, що неможливо здійснювати операції (завантаження та розвантаження) більш ніж над одним об'єктом. Витрати від операцій, що зумовлені простоєм транспорту, наведено на рис. 5.12. Необхідно так спланувати послідовність операцій обох видів, щоб сумарні витрати були мінімальними. На рис. 5.12 $N$ залежно від варіанта може змінюватись у межах $N = \overline{1,10}$.

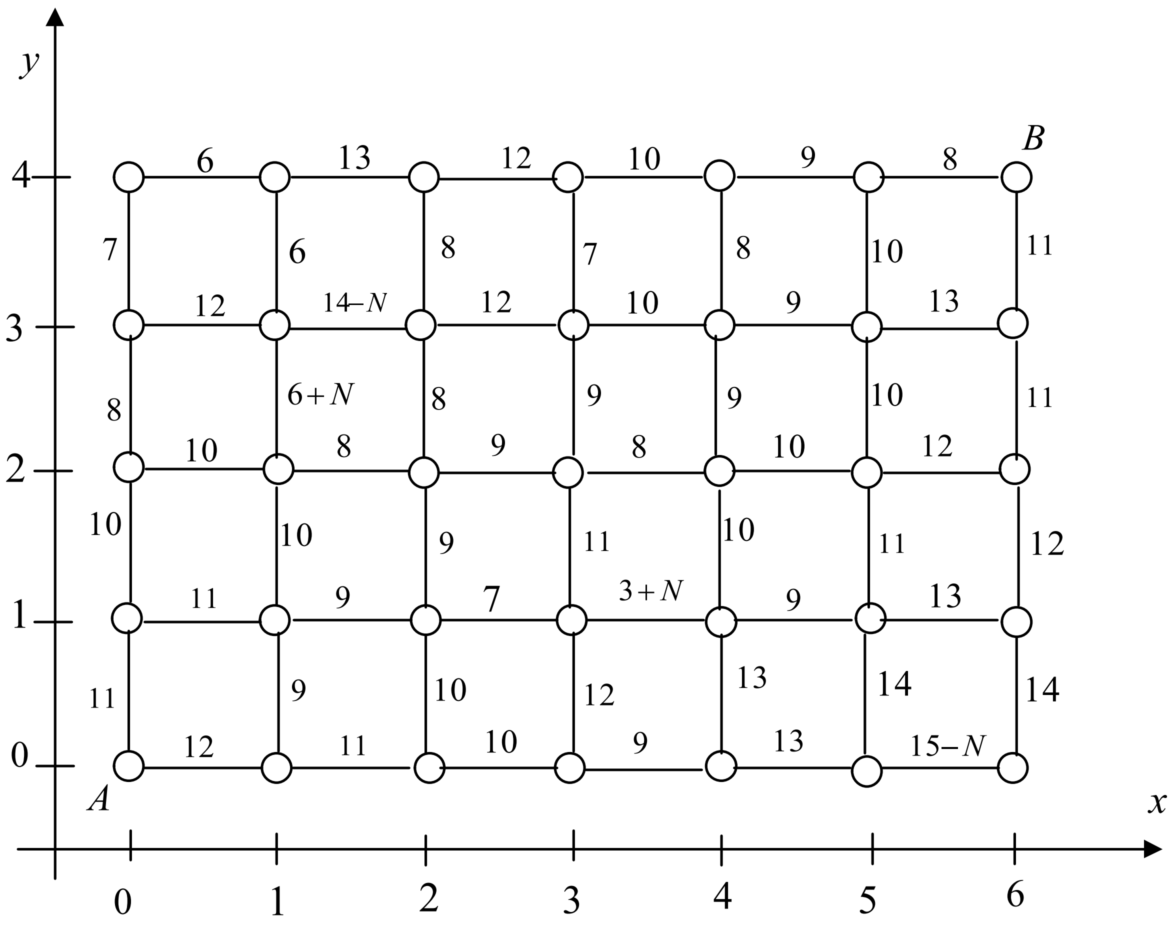



Рис. 5.12. Граф завдання 8

*Вказівка.* Стан даної системи характеризується двома параметрами: кількістю розвантажених (вісь $OX$) і кількістю завантажених (вісь $OY$) транспортних засобів відповідно. Вершини графа (рис. 5.12) визначають виконання роботи з завантаження або розвантаження чергового транспортного засобу. Кожному ребру графа відповідають витрати, що пов'язані з виконанням операції завантаження або розвантаження. Початковому стану системи відповідає точка $A(0;0)$, кінцевому – $B(6;4)$.

**Відповідь**:
8.1) $N=1$: $W_{\min}=85$;
8.2) $N=2$: $W_{\min}=86$;
8.3) $N=3$: $W_{\min}=87$;
8.4) $N=4$: $W_{\min}=88$;
8.5) $N=5$: $W_{\min}=89$;
8.6) $N=6$: $W_{\min}=90$;
8.7) $N=7$: $W_{\min}=90$;
8.8) $N=8$: $W_{\min}=90$;
8.9) $N=9$: $W_{\min}=90$;
8.10) $N=10$: $W_{\min}=90$.

## Розділ 6
# ЕЛЕМЕНТИ СТОХАСТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

### 6.1. Предмет стохастичного програмування

Вищерозглянуті багатоетапні процеси характеризувалися тим, що фактори, які впливають на прийняття рішення, однозначно визначені і їхні значення відомі в момент прийняття рішення. Процеси такого типу називаються *детермінованими*.

Нагадаємо, що для детермінованого $k$-етапного процесу зміни стану системи за формулою (5.4) здійснюється внаслідок дій управління $U_i$, $i = \overline{0, k-1}$, тобто послідовність перетворень, починаючи з першого кроку і закінчуючи $k$-м, можна записати так:

$$\begin{cases} S_1 = \varphi_0(S_0; U_0), \\ S_2 = \varphi_1(S_1; U_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ S_k = \varphi_{k-1}(S_{k-1}; U_{k-1}). \end{cases} \tag{6.1}$$

Послідовність управлінь $U_1, U_2, \dots, U_{k-1}$, яка відповідає послідовності перетворень (6.1), називається *поведінкою* або *стратегією*.

Якщо перетворення обрані у відповідності з певними критеріями, то множина оптимізуючих управлінь називається *оптимальною стратегією* або *оптимальною поведінкою*.

Дотримуючись принципу оптимальності, раніше ми приходили до функціональних рівнянь (5.7)-(5.8):

$$\begin{aligned} &W_1(S_0) = \underset{U_1}{optimum}\{W_1(S_0; U_1) + W_2(\varphi_1(S_1; U_1))\}, \\ &W_2(S_1) = \underset{U_2}{optimum}\{W_2(S_1; U_2) + W_3(\varphi_2(S_2; U_2))\}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &W_{k-1}(S_{k-2}) = \underset{U_{k-1}}{optimum}\{W_{k-1}(S_{k-2}; U_{k-1}) + W_k(\varphi_{k-1}(S_{k-1}; U_{k-1}))\}, \\ &W_k(S_{k-1}) = \underset{U_k}{optimum}\{W_k(S_{k-1}; U_k)\}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Будемо вважати, що тепер на стан системи впливають випадкові фактори. У таких задачах процес управління визначається не тільки початковим станом системи і обраним управлінням, але і залежить від випадку. Такі задачі називаються *стохастичними.*

Стохастичні задачі мають місце тоді, коли:

- не можна точно визначити стан системи на кожному етапі;
- змінні, що характеризують стан системи, є випадковими величинами з відомою функцією розподілу;
- змінюється мета задачі;
- складається планування на тривалий період і т. д.

До задач стохастичного програмування можна віднести:

- комплектування вагоноремонтних депо верстатним парком, коли

заздалегідь невідомий обсяг робіт;

- визначення необхідної кількості транспортних засобів на маршрутах, коли об'єм пасажирських перевезень носить випадковий характер, тощо.

*Стохастичне програмування* − це розділ дослідження операцій, присвячений аналізу процесів, в яких параметри умов або складові розв’язку є *випадковими величинами*.

## 6.2. Загальна характеристика задач стохастичного програмування

Нагадаємо, що задачі, в яких початкова інформація задана однозначно, називають детермінованими. Але в реальності детерміновані задачі є неадекватними. Це пояснюється неповнотою або неточністю даних, на основі яких будується модель задачі.

Ситуаціями, що пов’язані з ризиком, називають випадки, коли деякі параметри (а можливо і всі) носять імовірнісний характер.

*Ризик* є невід’ємною частиною процесу управління (його неможливо уникнути, але обов’язково потрібно враховувати).

Іноді наявна інформація не дозволяє уявити характер зміни параметрів, які характеризують процес, що вивчається. Такі ситуації називаються *невизначеними.*

Оптимізаційні задачі, які не мають вичерпної інформації про їхні початкові умови, називають *стохастичними*.

Для дослідження описаних ситуацій розробляються спеціальні методи, об’єднані в розділі стохастичного програмування для розв’язання екстремальних задач за умови неповної початкової інформації.

Розрізняють активне та пасивне стохастичне програмування.

*Пасивне* стохастичне програмування − це сукупність прийомів, що дозволяють знаходити найкращі рішення і екстремальні значення цільових функцій в оптимізаційних задачах з випадковими вихідними даними.

*Активне* стохастичне програмування − це сукупність прийомів, що дозволяють змінювати методи вибору рішень в умовах ризику та невизначеності.

У стохастичному програмуванні досліджуються одноетапні та багатоетапні задачі.

*Одноетапними* називають задачі, в яких послідовність надходження вихідної інформації не має значення при обранні рішення. Воно приймається один раз і надалі не коригується.

*Двоетапні* стохастичні задачі виникають, коли попереднє рішення, яке прийнято на першому етапі, не повинно виключати можливості його корекції на другому етапі.

У *багатоетапних* задачах з отриманням інформації є можливість неодноразово коригувати рішення (залежно від кількості етапів).

В умовах обмеженої інформації та невизначеності управлінські рішення можуть прийматися або без використання кількісних значень ймовірностей, або з їх використанням.

## 6.3. Постановка задач стохастичного програмування і методи їх розв’язання

У стохастичному програмуванні, на відміну від інших задач математичного програмування, розглядаються екстремальні задачі, в яких параметри умов чи їх частина є випадковими величинами.

Так, наприклад, у стохастичних задачах розв’язок може бути сукупністю керованих змінних $X(x_1;x_2;...;x_k)$, що залежать не лише від детермінованих характеристик чи параметрів задачі, а і від ряду випадкових некерованих параметрів $\omega(\omega_1;\omega_2;...;\omega_k)$.

*Прикладом* стохастичної задачі такого типу є задача дотримання випадкової швидкості насуву вагонів на сортувальну гірку. Сукупністю керованих змінних може виступати потужність вагонних уповільнювачів, маса відчепів, тип сортувальної гірки. У ролі випадкових некерованих параметрів, що значною мірою впливають на результативну швидкість насуву рухомого складу на сортувальну гірку, є швидкість і напрямок вітру, сила гальмування відчепів уповільнювачами тощо.

У стохастичному програмуванні чималі труднощі виникають саме під час постановки задачі. Адже в постановці кожної задачі мають бути відображені особливості прийняття рішень в умовах невизначеності. Постановка задачі стохастичного програмування істотно залежить від її цільових засад та інформаційної структури.

Розглянемо деякі моменти постановки задач стохастичного програмування.

1. Якщо вектор розв’язку задачі стохастичного програмування $X$ (сукупність керованих змінних) є детермінованим, то він не залежить від випадкових параметрів задачі. Якщо він випадковий, то $X(\omega)$ залежить від випадкових параметрів даної задачі.

2. Вагомим є те, як розуміти максимізацію (мінімізацію) цільової функції. Це може бути як абсолютна (для всіх значень $\omega \in \Omega$, $\Omega$ − простір подій) максимізація (мінімізація), так і оптимізація математичного сподівання цільової функції. Але також можна розглядати максимізацію (мінімізацію) деякої іншої ймовірнісної характеристики цільової функції (моди, медіани), або мінімізацію середнього квадратичного відхилення.

3. Слід з’ясувати, як виконуються обмеження задачі − абсолютно для всіх $\omega \in \Omega$ чи в середньому або з допустимими порушеннями, імовірність яких мала.

Детермінованість чи стохастичність вектора розв’язку задачі $X$ визначається сутністю технологічних, економічних процесів, якими описується дана задача.

Так, для наведеного вище прикладу детермінованими є потужність вагонних уповільнювачів, маса відчепів, а стохастичними − погодні умови (швидкість і напрям вітру).

У стохастичному програмуванні за цільову функцію можна прийняти:

− максимізацію математичного сподівання відповідного показника (прибутку, швидкості, рентабельності тощо);

− мінімізацію дисперсії відповідного показника;

− лінійну комбінацію математичного сподівання та дисперсії показника;

− імовірність перевищення (неперевищення) показником певного фіксованого порогу тощо.

Обмеження у стохастичних задачах можуть бути задані в різний спосіб. Нехай задано обмеження в загальному вигляді

$$g_i(X;\omega)\le 0\,,\ i=\overline{1,m}\,. \tag{6.3}$$

Неможливо, а іноді й недоцільно вимагати, щоб знайдений розв'язок задовольняв обмеженням (6.3) за будь-яких реалізацій випадкових параметрів $\omega\in\Omega$. Тому замість обмежень (6.3) можна накласти менш жорсткі обмеження, тобто припустити невиконання або виконання умов з певною ймовірністю:

$$P\left\{g_i(X;\omega)>0\right\}\le\gamma,\quad i=\overline{1,m}, \tag{6.4}$$

$$P\left\{g_i(X;\omega)\le 0\right\}\le 1-\gamma,\quad i=\overline{1,m}. \tag{6.5}$$

Позначимо через $f(X;\omega)$ функцію, яка виражає рівень ефективності плану при заданих $X$ та $\omega$. Тоді задачу визначення оптимального детермінованого плану $X$ при випадкових параметрах $\omega$ можна сформувати в одному з таких виглядів:

1.

$$M\left[f(X;\omega)\right]\to\max \tag{6.6}$$

за умов

$$P\left\{g_i(X;\omega)\le 0\right\}\le 1-\gamma,\quad i=\overline{1,m}, \tag{6.7}$$

$$X \in X,\ \omega \in \Omega, \qquad (6.8)$$

де $M[f(X;\omega)]$ − математичне сподівання ефективності плану (прибутку, рентабельності тощо) за умов, що обмеження (6.3) виконуються з імовірністю $1-\gamma$.

2. Знайти

$$\xi \to \max \qquad (6.9)$$

за умов

$$P\{f(X;\omega) \geq \xi; g_i(X;\omega) \leq 0\} \leq 1-\gamma, \quad i=\overline{1,m}, \qquad (6.10)$$

$$X \in X,\ \omega \in \Omega, \qquad (6.11)$$

де $\xi$ − деяка величина, наперед невідома.

У задачах вигляду (6.9)-(6.11) додатково вимагається, щоб значення функції ефективності було не меншим за $\xi$ з імовірністю $1-\gamma$, а значення $\xi$ було максимальним.

## 6.4. Приклади задач стохастичного програмування

Методи розв'язування стохастичних задач поділяють на прямі та непрямі.

*Прямі* методи застосовуються для розв'язання задач стохастичного програмування, коли існують способи побудови функцій $f(X;\omega)$ і $g_i(X;\omega), i=\overline{1,m}$ на базі наявної інформації щодо параметра $\omega$.

У *непрямих* методах стохастичну задачу намагаються звести до задачі лінійного або нелінійного програмування, тобто розглядають детермінований аналог задачі стохастичного програмування.

Наведемо деякі приклади задач, яку можуть бути розв'язані як прямими, так і непрямими методами розв'язування стохастичних задач.

### *Задача про розподіл ресурсів*

Нехай ресурси $S_0$ потрібно вкласти в розвиток двох неоднорідних підприємств $A$ і $B$ впродовж деякого періоду.

Якщо в підприємство $A$ вкласти $x$ одиниць ресурсу, то:

1) з імовірністю $p_1$ прибуток буде становити $f_1(x)$, залишок – $a_1 x$ $(0 < a_1 < 1)$;

2) з імовірністю $p_2 = 1 - p_1$ прибуток складатиме $f_2(x)$, залишок коштів – $a_2 x$ $(0 < a_2 < 1)$.

Якщо в підприємство $B$ вкласти $y$ одиниць ресурсу, то:

1) з імовірністю $q_1$ прибуток складатиме $g_1(y)$, залишок – $b_1 y$ $(0 < b_1 < 1)$;

2) з імовірністю $q_2 = 1 - q_1$ прибуток складатиме $g_2(y)$, залишок -–$b_2 y$ $(0 < b_2 < 1)$.

Необхідно розподілити ресурси між двома підприємствами на $k$-річний період таким чином, щоб повний прибуток був максимальним.

**Розв’язання**. Система управління – два підприємства $A$ і $B$, а управління полягає у виділенні коштів кожному підприємству на наступний рік.

Процес управління розбиваємо на декілька кроків, кожен з яких відповідає номеру року інвестиційного періоду. Параметр стану системи $S_i\ , i = \overline{1,k}$ – це кількість ресурсів, що підлягають розподілу на початок $i$-го року.

Введемо змінні управління $x_i, y_i, i = \overline{1,k}$ – кількість ресурсів, що підлягають розподілу між підприємствами $A$ і $B$ відповідно на початку $i$-го року. Звідси $x_i + y_i = S_{i-1}$, тобто $y_i = S_{i-1} - x_i, i = \overline{1,k}$.

Оскільки випадкові величини $a_1 x_i$; $a_2 x_i$; $b_1(S_{i-1} - x_i)$; $b_2(S_{i-1} - x_i)$, $i = \overline{1,k}$ – незалежні, то

$$
\begin{aligned}
&P(a_1 x_i + b_1(S_{i-1} - x_i)) = p_1 q_1, \\
&P(a_2 x_i + b_1(S_{i-1} - x_i)) = p_2 q_1, \\
&P(a_1 x_i + b_2(S_{i-1} - x_i)) = p_1 q_2, \\
&P(a_2 x_i + b_2(S_{i-1} - x_i)) = p_2 q_2, \\
&i = \overline{1,k}.
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Закон розподілу дискретної випадкової величини $S_i$ – кількості коштів, що підлягають розподілу на початку $i$-го року, $i=\overline{1,k}$, наведений у табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Закон розподілу дискретної випадкової величини $S_i$

| $S_i$ | $a_1x_i + b_1(S_{i-1} - x_i)$ | $a_2x_i + b_1(S_{i-1} - x_i)$ |
|---|---|---|
| $P$ | $p_1q_1$ | $p_2q_1$ |

| $S_i$ | $a_1x_i + b_2(S_{i-1} - x_i)$ | $a_2x_i + b_2(S_{i-1} - x_i)$ |
|---|---|---|
| $P$ | $p_1q_2$ | $p_2q_2$ |

Позначимо через $W_i(S_{i-1})$ математичне сподівання повного доходу. Тоді кількість коштів від обох підприємств наприкінці $i$-го року:

$$\begin{aligned} W_i(S_{i-1}) &= p_1q_1 \cdot (f_1(x_i) + g_1(S_{i-1} - x_i)) + \\ &+ p_1q_2 \cdot (f_1(x_i) + g_2(S_{i-1} - x_i)) + \\ &+ p_2q_1 \cdot (f_2(x_i) + g_1(S_{i-1} - x_i)) + \\ &+ p_2q_2 \cdot (f_2(x_i) + g_2(S_{i-1} - x_i)),\ i=\overline{1,k}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Позначимо через $W_i^*(S_{i-1})$ умовний оптимальний прибуток за $(k+1-i)$ років, починаючи з $i$-го року до $k$-го року включно за умови, що наявні на початок $i$-го року кошти $S_{i-1}$ надалі розподілися оптимально. Тоді оптимальний прибуток за $k$ років складатиме $W_{\max}^* = W_1(S_0)$.

Запишемо функціональні рівняння:

$$\begin{aligned} W_i^*(S_{i-1}) = \max_{0 \le x_i \le S_{i-1}} &\{p_1q_1 \cdot [(f_1(x_i) + g_1(S_{i-1} - x_i)) + \\ &+ W_{i+1}^*(a_1x_i + b_1(S_i - x_i))] + \\ &+ p_1q_2 \cdot [(f_1(x_i) + g_2(S_{i-1} - x_i)) + W_{i+1}^*(a_1x_i + b_2(S_i - x_i))] + \\ &+ p_2q_1 \cdot [(f_2(x_i) + g_1(S_{i-1} - x_i)) + W_{i+1}^*(a_2x_i + b_1(S_i - x_i))] + \\ &+ p_2q_2 \cdot [(f_2(x_i) + g_2(S_{i-1} - x_i)) + W_{i+1}^*(a_2x_i + b_2(S_i - x_i))]\}, \\ &i=\overline{1,k-1}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Оскільки нас не цікавить залишок коштів після інвестиційного періоду, то

$$W_{k+1}^{*}(S_k)=0. \quad (6.15)$$

**Приклад 1.** Припустимо, що деякі ресурси в обсязі 100000 грош. од. необхідно вкласти в розвиток двох вагоноремонтних заводів $A$ і $B$.

Відомо, якщо в завод $A$ вкласти $x$ грош. од. ресурсів, то прибуток з імовірністю $p_1=0{,}6$ буде становити $f_1(x)=0{,}7x$, а залишок коштів $a_1x=0{,}4x$ і з імовірністю $p_2=0{,}4$ прибуток буде становити $f_2(x)=0{,}6x$, а залишок − $a_2x=0{,}5x$.

Якщо в завод $B$ вкласти $y$ грош. од. ресурсів, то прибуток з імовірністю $q_1=0{,}7$ складатиме $g_1(y)=0{,}6y$, а залишок коштів $b_1y=0{,}7y$ і прибуток з імовірністю $q_2=0{,}3$ складатиме $g_2(y)=0{,}5y$, а залишок − $b_2y=0{,}4y$.

Необхідно розподілити виділені ресурси між двома вагоноремонтними заводами на дворічний період для отримання максимального прибутку.

**Розв'язання.** Для наочності представимо дані прикладу 1 в табличній формі (табл.6.2).

Таблиця 6.2

Дані прикладу 1

| | Завод $A$, $x$ грош. од. | | Завод $B$, $y$ грош. од. | |
|---|---|---|---|---|
| | Імовірність | | | |
| | $p_1=0{,}6$ | $p_2=0{,}4$ | $q_1=0{,}7$ | $q_2=0{,}3$ |
| Прибуток | 0,7 | 0,6 | 0,6 | 0,5 |
| Залишок | 0,4 | 0,5 | 0,7 | 0,4 |

Період тривалістю два роки розбиваємо на два стани:

а) $S_i, i=\overline{1,2}$ − стан системи (кількість ресурсів, що підлягають розподілу між двома вагоноремонтними заводами на початок $i$-го року);

б) $x_i, y_i, i=\overline{1,2}$ − кількість ресурсів, вкладених на початку $i$-го року в заводи $A$ і $B$ відповідно.

Очевидно, $y_i = S_{i-1} - x_i$, $0 \le x_i \le S_{i-1}, i=\overline{1,2}$. Оскільки за формулою (6.15) $W_3^*(S_2)=0$, то, використовуючи вираз (6.14), запишемо функціональне рівняння для останнього року $(i=2)$:

$$W_2^*(S_1) = \max_{0 \le x_2 \le S_1} \{0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot (0{,}7x_2 + 0{,}6 \cdot (S_1 - x_2)) +$$
$$+ 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}7x_2 + 0{,}5 \cdot (S_1 - x_2)) + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot (0{,}6x_2 + 0{,}6 \cdot (S_1 - x_2)) +$$
$$+ 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}6x_2 + 0{,}5 \cdot (S_1 - x_2))\} = \max_{0 \le x_2 \le S_1} \{0{,}09x_2 + 0{,}57S_1\} = 0{,}66S_1$$

при $x_2^* = S_1$.

Отже, $W_2^*(S_1) = 0{,}66S_1$ при $x_2^* = S_1$.

Для першого року інвестиційного періоду маємо

$$W_1^*(S_0) = \max_{0 \le x_1 \le S_0} \{0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot [(0{,}7x_1 + 0{,}6 \cdot (S_0 - x_1)) +$$
$$+ 0{,}66 \cdot (0{,}4x_1 + 0{,}7 \cdot (S_0 - x_1))] +$$
$$+ 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot [(0{,}7x_1 + 0{,}5 \cdot (S_0 - x_1)) + 0{,}66 \cdot (0{,}4x_1 + 0{,}4 \cdot (S_0 - x_1))] +$$
$$+ 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot [(0{,}6x_1 + 0{,}6 \cdot (S_0 - x_1)) + 0{,}66 \cdot (0{,}5x_1 + 0{,}7 \cdot (S_0 - x_1))] +$$
$$+ 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot [(0{,}6x_1 + 0{,}5 \cdot (S_0 - x_1)) + 0{,}66 \cdot (0{,}5x_1 + 0{,}4 \cdot (S_0 - x_1))]\} =$$
$$= \max_{0 \le x_1 \le S_0} \{-0{,}0222x_1 + 0{,}9726S_0\} = 0{,}9726S_0$$

при $x_1^* = 0$.

На цьому умовна оптимізація закінчується. У нашому прикладі $S_0 = 100000$, тобто

$$W_{\max} = W_1(100000) = 0{,}9726 \cdot 100000 = 97260 \text{ грош. од.}$$

На основі наведених обчислень отримаємо:

а) $x_1^* = 0$; $y_1^* = S_0 - x_1^* = 100000$ грош. од. (всі ресурси на початку першого року треба виділити вагоноремонтному заводу

$B$). Тоді кількість ресурсів після першого року зменшиться до величини $(0{,}7\cdot 0{,}7+0{,}3\cdot 0{,}4)\cdot y_1^*=0{,}61\cdot 100000=61000$ грош. од.

б) $x_2^*=S_1=61000$ грош. од. (всі ресурси на початок другого року треба виділити вагоноремонтному заводу $A$). У такому випадку кількість ресурсів зменшиться до величини $(0{,}6\cdot 0{,}4+0{,}4\cdot 0{,}5)\cdot 61000=26840$ грош. од.

Прибуток, який отримаємо після першого року, складає $(0{,}7\cdot 0{,}6+0{,}3\cdot 0{,}5)\cdot 100000=57000$ грош. од.

Вкладені кошти в завод $A$ після другого року дозволять отримати прибуток $(0{,}6\cdot 0{,}7+0{,}4\cdot 0{,}6)\cdot 61000=40260$ грош. од.

Таким чином, сумарний прибуток складе $57000+40260=97260$ грош. од. Отримані результаті наведені в табл. 6.3.

Таблиця 6.3

Підсумкова таблиця прикладу 1

| Рік | Прибуток заводу $A$ | Прибуток заводу $B$ | Кошти на початку $i$-го року, $i=1{,}2$ грош. од. | Прибуток за весь період, грош. од. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 57000 | 100000 | |
| 2 | 40260 | 0 | 61000 | |
| $\sum$ | 40260 | 57000 | | **97260** |

**Відповідь**: $X^*=(0;61000), Y^*=(100000;0),\ W_{\max}=97260$ грош. од.

**Приклад 2.** Для ефективного перевезення певного вантажу необхідно мати деяку кількість $n$ піввагонів, цистерн та інших видів вагонів, на які є випадковий попит. При нестачі одиниці $j$-го вагону під завантаження перевізник сплачує штраф $c_j, j=\overline{1,n}$. За простій вагона понад встановлену норму стягується штраф у розмірі $d_j, j=\overline{1,n}$. Сформувати стохастичну задачу, прийнявши за критерій оптимальності мінімізацію функції простою вагонів.

**Розв'язання.** Позначимо через $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ деяку кількість $n$ вагонів різного плану для перевезення вантажу, $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$ – випадковий попит на відповідні вагони.

Тоді функція простою, що відповідає розв'язку $X$, має вигляд

$$f(X;\omega)=\sum_{j=1}^{n}\left\{c_j\cdot\max\left(0;\omega_j-x_j\right)+d_j\cdot\max\left(0;\omega_j-x_j\right)\right\},\qquad(6.16)$$

де $c_j\cdot\max\left(0;\omega_j-x_j\right)$ − штраф за нестачу одиниці $j$-го вагону $j=\overline{1,n}$;

$d_j\cdot\max\left(0;\omega_j-x_j\right)$ − витрати за простій $j$-го вагону $j=\overline{1,n}$ понад встановлену норму.

Тому стохастичну задачу можна подати у вигляді

$$f(X;\omega)=\sum_{j=1}^{n}\left\{c_j\cdot\max\left(0;\omega_j-x_j\right)+d_j\cdot\max\left(0;\omega_j-x_j\right)\right\}\to\min.\qquad(6.17)$$

Для знаходження оптимального розв'язку цієї задачі необхідно знати функцію розподілу випадкової величини $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$.

Якщо така функція розподілу невідома і знайти її неможливо, то вважають, що випадкова величина розподілена рівномірно. При цьому необхідно пам'ятати, що саме таке припущення може привести до прийняття неправильного рішення.

**Приклад 3.** Відомо, що в банку $A$ нараховується більший відсоток на вкладені кошти, ніж у банку $B$. За спостереженнями відомо, що повернення внеску в банку $A$ не гарантується. Сформувати стохастичну схему найбільш доцільного розподілу коштів між банками $A$ і $B$.

**Розв'язання.** Введемо такі позначення:

$S_0$ − загальна сума коштів власника;

$x$ − обсяг внесу до банку $A$;

$y$ − обсяг внеску до банку $B$;

$a,b$ − відсоток нарахування відповідно в банках $A$ і $B$;

$(1-p)$ − ймовірність ліквідації банку $A$.

Джерелом невизначеності є повернення вкладу банком $A$. За певного розподілу $S_0$ на $x$ та $y$ можливі такі ситуації отримання дивідендів:

- за умов успішного функціонування банку $A$ загальна сума прибутку складе $(ax+by)$;

- за умов ліквідації банку $A$ сума прибутку становитиме $(by-x)$.

Тому стохастична схема даної задачі набуває вигляду

$$Z(x,y)=\{p\cdot(ax+by)+(1-p)\cdot(by-x)\}\to\max \tag{6.18}$$

за умов

$$\begin{cases} x+y\le S_0, \\ x\ge 0, y\ge 0. \end{cases} \tag{6.19}$$

**Приклад 4.** Для забезпечення пасажирських перевезень на залізниці П-З за напрямками $A$ і $B$ надається $S_0$ коштів. Потрібно так розподілити кошти, щоб забезпечити максимальне задоволення потреб населення В пасажирських перевезеннях даної залізниці за напрямками $A$ і $B$. Перевезення пасажирів вважати випадковою величиною $\xi$.

**Розв'язання**. Будемо позначати через:

а) $q_1, q_2$ − середні витрати на одного пасажира за напрямками $A$ і $B$ відповідно;

б) $d_1, d_2$ − середній прибуток, отриманий з одного пасажиру, за напрямками $A$ і $B$ відповідно;

в) $x, y$ − середню кількість пасажирів за напрямками $A$ і $B$ відповідно.

Тоді задача набуває вигляду

$$F(x,y)=d_1\cdot M\left[\min_x(\xi,x)\right]+d_2\cdot M\left[\min_y(\xi,y)\right]\to\max, \tag{6.20}$$

$$\begin{cases} q_1\cdot x+q_2\cdot y\le S_0, \\ x\ge 0, y\ge 0. \end{cases} \tag{6.21}$$

## Питання до розділу

1. Поняття і предмет стохастичного програмування.
2. Постановка задач стохастичного програмування.
3. Методи розв’язання задач стохастичного програмування.

## Завдання

**1.** Відомо, що для випуску трьох видів продукції на підприємстві використовують два види ресурсів, об’єми яких відповідно дорівнюють $b_1 = 500$ грош. од. і $b_2 = 450$ грош. од. Прибуток від реалізації одиниці $j$-го виду продукції $c_{kj}, k = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$ є випадковою величиною, але відомі ймовірності одержання $k$-ї величини прибутку від реалізації одиниці $j$-го виду продукції $p_{kj}, k = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$. Норми витрат $i$-го виду ресурсу на одиницю $j$-го виду продукції є детермінованими і дорівнюють $a_{ij}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$. Початкові дані наведені в табл. 6.4 -6.7, $n = \overline{1,10}$.

Таблиця 6.4

Прибуток від реалізації першого виду

| Прибуток від реалізації першого виду продукції, $c_{k1}, k = \overline{1,3}$ грош. од. | Імовірність, $p_{k1}, k = \overline{1,3}$, |
|---|---|
| $9 + n$ | 0,2 |
| 15 | 0,3 |
| $21 - n$ | 0,5 |

Таблиця 6.5

Прибуток від реалізації другого виду

| Прибуток від реалізації другого виду продукції, $c_{k2}, k = \overline{1,3}$ грош. од. | Імовірність, $p_{k2}, k = \overline{1,3}$ |
|---|---|
| 12 | 0,3 |
| $15 - n$ | 0,4 |
| 16 | 0,3 |

Таблиця 6.6

Прибуток від реалізації третього виду

| Прибуток від реалізації третього виду продукції, $c_{k3}, k=\overline{1,3}$, грош. од. | Ймовірність, $p_{k3}, k=\overline{1,3}$ |
|---|---|
| $8+n$ | 0,3 |
| 10 | 0,5 |
| $12-n$ | 0,2 |

Таблиця 6.7

Норма ресурсів

| Вид продукції | Норма витрат ресурсів на виробництво одиниці продукції, грош. од. | |
|---|---|---|
| Перший | 6 | 2 |
| Другий | 4 | 1 |
| Третій | 3 | 1,5 |

Знайти такий план виробництва продукції $X=(x_1;x_2;x_3)$, який дає можливість отримати максимальний прибуток.

**Відповідь**: *Вказівка.* Маємо одноетапну задачу стохастичного програмування. За формулою (6.6) цільова функція є математичним сподіванням прибутку. Позначимо через $M(c_j), j=\overline{1,3}$ математичне сподівання прибутку від реалізації $j$-го виду продукції. Отримаємо

$$M(c_1)\cdot x_1 + M(c_2)\cdot x_2 + M(c_3)\cdot x_3 \to \max F,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}.$$

1.1) $n=1$. Випадкова величина прибутку є дискретною, тому

$$M(c_1)=c_{11}p_{11}+c_{21}p_{21}+c_{31}p_{31}=10\cdot 0{,}2+15\cdot 0{,}3+20\cdot 0{,}5=16{,}5;$$
$$M(c_2)=c_{12}p_{12}+c_{22}p_{22}+c_{32}p_{32}=12\cdot 0{,}3+14\cdot 0{,}4+16\cdot 0{,}3=14;$$
$$M(c_3)=c_{13}p_{13}+c_{23}p_{23}+c_{33}p_{33}=9\cdot 0{,}3+10\cdot 0{,}5+11\cdot 0{,}2=9{,}9.$$

Отримаємо ЗЛП

$$F = 16{,}5x_1 + 14x_2 + 9{,}9x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 500, \\ 2x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 \le 450, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$$

Оптимальним планом є $X^* = (0;0;125)$, причому прибуток складатиме $\max F \approx 1750$ грош. од.;

1.2) $n = 2$. $X^* = (0;125;0)$, $\max F \approx 1700$ грош. од.;
1.3) $n = 3$. $X^* = (0;0;167)$, $\max F \approx 1683$ грош. од.;
1.4) $n = 4$. $X^* = (0;0;167)$, $\max F \approx 1700$ грош. од.;
1.5) $n = 5$. $X^* = (0;0;167)$, $\max F \approx 1717$ грош. од.;
1.6) $n = 6$. $X^* = (0;0;167)$, $\max F \approx 1733$ грош. од.;
1.7) $n = 7$. $X^* = (0;0;167)$, $\max F \approx 1750$ грош. од.;
1.8) $n = 8$. $X^* = (0;0;167)$, $\max F \approx 1767$ грош. од.;
1.9) $n = 9$. $X^* = (0;0;167)$, $\max F \approx 1783$ грош. од.;
1.10) $n = 10$. $X^* = (0;0;167)$, $\max F \approx 1800$ грош. од.

**2.** Припустимо, що деякі ресурси в обсязі 40000 грош. од. необхідно вкласти в розвиток двох підприємств. Якщо в І підприємство вкласти $x$ грош. од. ресурсу, то прибуток з імовірністю $p_1 = 0{,}4$ буде становити $f_1(x) = 0{,}6x$, а $x$ зменшиться до величини $a_1x = 0{,}7x$ і з імовірністю $p_2 = 0{,}6$ прибуток буде становити $f_2(x) = 0{,}5x$, а $x$ зменшиться до величини $a_2x = 0{,}6x$.

Якщо в ІІ підприємство вкласти $y$ грош. од. ресурсу, то прибуток з імовірністю $q_1 = 0{,}2$ складатиме $g_1(y) = 0{,}7y$, а $y$ зменшиться до величини $b_1y = 0{,}8y$ і прибуток з імовірністю $q_2 = 0{,}8$ складатиме $g_2(y) = 0{,}4y$, а $y$ зменшиться до величини $b_2y = 0{,}6y$.

Необхідно так розподілити виділені ресурси між двома підприємствами на дворічний період, щоб повний прибуток був максимальним.

**Відповідь**: $X^* = (40000; 25600)$, $Y^* = (0; 0)$, $W_{\max} = 35424$ грош. од.

## Розділ 7
## ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР

### 7.1. Предмет і задачі теорії ігор. Основні поняття

Одна з основних проблем дослідження операцій – проблема прийняття рішення в умовах невизначеності, коли ймовірності можливих варіантів обстановки невідомі.

Теорія ігор належить до найбільш молодих математичних дисциплін. Її зародження як математичної дисципліни пов'язане з листом Б. Паскаля до П. Ферма від 29 червня 1654 року, у якому розглядалися математичні моделі деяких азартних ігор. Основні ідеї сучасної теорії ігор викладені Жд. фон Нейманом. Ці ідеї були розвинуті ним разом із відомим економістом О. Моргенштерном у роботі «Теорія ігор та економічна поведінка» у 1944 році. Вважаючи, що ринкова економіка – це насамперед економіка конфліктів, автори бачили саме в математичній теорії конфліктів апарат для опису та дослідження економічних явищ. Після цього почався інтенсивний розвиток теорії ігор як спеціального розділу математики. Цю теорію вважають однією з найважливіших частин сучасної кібернетики, дослідження операцій та математичної економіки.

Для обґрунтування рішень в умовах невизначеності існують спеціальні математичні методи, частина яких розглядається в теорії ігор. Ці методи дозволяють провести кількісний аналіз ситуації і виробити рекомендації щодо прийняття рішення.

У різних сферах цілеспрямованої діяльності виникають ситуації, у яких ті чи інші учасники мають як різні інтереси, так і різні шляхи для досягнення своїх цілей. Такі ситуації називаються *конфліктними*. Конфліктні ситуації є типовими при проведенні спортивних змагань, військових операцій, у відношеннях на ринку послуг тощо. Необхідність аналізу таких ситуацій призвела до створення математичного апарату, яким є теорія ігор.

Конфлікт характеризується тим, що один з його учасників наперед не знає рішень, які мають прийняти інші учасники, тому вони діють в умовах невизначеності. Кожна зі сторін, які беруть участь у конфлікті, є оперуючою стороною. Вона має методи для досягнення своїх цілей, здійснює оптимальний (раціональний) вибір поведінки відносно ситуації, що складається, тобто веде своєрідну *гру* з розумними супротивниками. Таким чином, можна вважати, що *гра* – це спрощена формалізована модель дійсної ситуації, яка описує дії двох або більше учасників.

Отже, *метою* теорії ігор є вироблення рекомендацій з вибору оптимальної поведінки учасників конфліктної ситуації, що багатократно повторюється.

*Задачею* теорії ігор є обґрунтування рішення в умовах невизначеності.

В основі теорії ігор лежать два принципи:

1. Кожний гравець вважає інших гравців так само розумними, як і він сам, і не розраховує на їх промахи.

2. Кожний гравець є достатньо обережним і прагне дотримуватися такої лінії поведінки, котра гарантує йому певний середній результат незалежно від поведінки супротивника.

Будь-які аспекти реальних життєвих ситуацій теорія ігор не охоплює, але багатьом ситуаціям при певному досвіді можна надати ігрової схеми і таким чином отримати можливість дослідити її методами теорії ігор. Для аналізу гри властива така термінологія: *гравці* – сторони, які беруть участь у конфлікті, *виграш* − результат конфлікту.

Кожна гра є процесом, що розгортається протягом часу. Елементами цього процесу є ходи.

*Ходом* у теорії ігор називається вибір однієї з передбачених правилами гри дії і її здійснення. Правила гри визначають послідовність ходів і характер кожного ходу.

Під *правилами* гри розуміється система умов, що регламентує:

- можливі варіанти дії гравців;
- об’єм інформації однієї сторони про поведінку іншої;
- результат гри.

Ходи бувають двох видів: особисті й випадкові.

*Особистий хід* – це усвідомлений вибір гравцем однієї з заданої множини варіантів його можливих дій.

*Випадковий хід* – це також вибір гравцем однієї з можливих дій, але цей вибір здійснюється не гравцем, а деяким механізмом випадкового вибору. Прикладами випадкових подій є підкидання монети, гра в кості, рулетка тощо.

Деякі ігри мають тільки випадкові ходи (азартні ігри) або тільки особисті (шашки, шахи), або і ті і інші. Теорія ігор розглядає тільки ті ігри, де поруч з випадковими ходами (або без них) *обов'язково є особисті ходи*.

Важливе значення в теорії ігор має поняття стратегії.

*Стратегією гравця* називається певний закінчений план дій гравця, що показує, як йому треба діяти в будь-яких можливих ситуаціях розвитку гри. Стратегія визначає сукупність усіх рекомендацій для будь-якого стану інформації, яку має гравець на будь-якому етапі розвитку гри. Природно, що гравець приймає рішення за ходом гри. Однак теоретично можна передбачити, що всі ці можливі рішення можуть бути прийняті гравцем завчасно. Тоді сукупність цих рішень складає стратегію гравця. Очевидно, стратегії можуть бути вдалими і невдалими.

Залежно від кількості можливих стратегій ігри поділяються на скінчені і нескінчені.

*Оптимальною* називається стратегія, яка при багаторазовому повторенні гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш або мінімальний середній програш.

Ігри класифікують:

- за видом невизначеностей на комбінаторні, азартні та стратегічні;
- кількістю гравців на парні та множинні.

*Комбінаторні* ігри – це ігри, особливості правил у яких викликають таку різноманітність їхнього розвитку, що передбачити результат гри наперед неможливо. Прикладом таких ігор є шахи, шашки, карти тощо.

*Азартні ігри* – це ігри, у яких результат є невизначеним виключно завдяки випадковим причинам. Прикладом таких ігор є рулетка, гра в кості тощо.

*Стратегічні ігри* – це ігри, що характеризуються відсутністю інформації про дії супротивника, про його стратегії.

*Парні* ігри – це ігри, у яких стикаються інтереси двох супротивників.

*Множинні* ігри – це ігри, у яких стикаються інтереси більшої кількості супротивників. Велика кількість множинних ігор може бути зведена до парних ігор. У подальшому будемо розглядати саме такі ігри.

Для гравців залежно від стратегій, які вони застосовували, і результатів гри правилами передбачені певні виграші.

*Виграш* – це міра ефекту для гравця.

Теорія ігор розглядає тільки такі ігри, де виграш вимірюється числами. Програш подається, як від'ємний виграш. Залежно від кількісного результату ігри поділяють на ігри з нульовою сумою і з ненульовою сумою.

Парні ігри з *нульовою сумою* об'єктивно не надають переваги жодній зі сторін, бо виграш одного гравця дорівнює програшу другого.

Ігри з *ненульовою сумою* – це конфліктні ситуації з явно об'єктивною перевагою однієї зі сторін.

## 7.2. Поняття матричної парної гри

Розглянемо парну скінчену гру з нульовою сумою з двома гравцями $A$ і $B$. Інтереси гравців $A$ і $B$ прямо протилежні: один гравець виграє те, що програє другий. Такий підхід дозволяє вказувати тільки виграш одного гравця. Домовимося, що гравець $A$ прагне збільшити свій виграш, а гравець $B$ − зменшити свій програш.

Нехай гравець $A$ має $m$ стратегій $(A_1, A_2, ..., A_m)$, а гравець $B$ − $n$ стратегій $(B_1, B_2, ..., B_n)$. Таку гру називають грою $m \times n$. В результаті застосування гравцем $A$ стратегії $A_i, i = \overline{1,m}$ і гравцем $B$ стратегії $B_j$, $j = \overline{1,n}$ одночасно визначається результат гри $a_{ij}$ − сума, яку виграє гравець $A$ і програє гравець $B$. Гра є заданою, якщо відомі всі значення $a_{ij}$, які записують у вигляді матриці. Таку матрицю називають *платіжною матрицею* або *матрицею гри*, що надано в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Платіжна матриця гри $m \times n$

| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ |
| … | … | … | … | … |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ |

Рядки табл. 7.1 відповідають стратегіям гравця $A$, а стовпці – стратегіям гравця $B$. Елемент $a_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ табл. 7.1 – це виграш гравця $A$ при виборі ним стратегії $A_i$ і одночасно програш гравцем $B$ при виборі ним стратегії $B_j$.

Платіжну матрицю гри можна також представити у вигляді матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (7.1)$$

Партія в матричній грі реалізується так: гравець $A$ вибирає один з рядків платіжної матриці (одну зі своїх стратегій). Гравець $B$, не знаючи вибору гравця $A$, вибирає один зі стовпчиків платіжної матриці (одну зі своїх стратегій). Елемент матриці, якій стоїть на перетині обраних рядка і стовпця, визначає виграш гравця $A$ і програш гравця $B$.

Мета гравців полягає у виборі таких стратегій, при застосуванні яких гравець $A$ має максимальний виграш, а гравець $B$ − мінімальний програш.

**Приклад 1.** Гравець $A$ вибирає одну з двох сторін монети. Гравець $B$, не знаючи вибору гравця $A$, також вибирає одну зі сторін монети. Після вибору обох гравців гравець $A$ платить гравцю $B$ 1 грош. од., якщо сторони співпали і гравець $B$ платить гравцю $A$ 1 грош. од. у протилежному випадку. Гравець $A$ прагне збільшити свій виграш, гравець $B$ − зменшити свій програш. Побудувати платіжну матрицю гри для гравця $A$.

**Розв'язання.** Гравець $A$ має дві стратегії $(A_1, A_2)$,
де $A_1 = \{$обрано сторону монети з зображенням герба$\}$;
$A_2 = \{$обрано сторону монети з зображенням цифри$\}$.

Гравець $B$ має також дві стратегії $(B_1, B_2)$,
де $B_1 = \{$обрано сторону монети з зображенням герба$\}$;
$B_2 = \{$обрано сторону монети з зображенням цифри$\}$.

У результаті застосування гравцем $A$ стратегії $A_1$ і одночасно гравцем $B$ стратегії $B_1$ отримаємо: $a_{11} = -1$ (гравцем $A$ обрано «герб» і одночасно гравцем $B$ обрано «герб» $\Rightarrow$ гравець $A$ платить гравцю $B$ 1 грош. од.).

Якщо гравець $A$ застосовує стратегію $A_1$, а гравець $B$ стратегію $B_2$, то отримаємо: $a_{12} = 1$ (гравцем $A$ обрано «герб» і одночасно гравцем $B$ обрана «цифра» $\Rightarrow$ гравець $B$ платить гравцю $A$ 1 грош. од.).

З аналогічних міркувань отримаємо $a_{21} = 1$ (гравцем $A$ обрано «цифра», а гравцем $B$ − «герб» $\Rightarrow$ гравець $B$ платить гравцю $A$ 1 грош. од.); $a_{22} = -1$ ( гравцем $A$ обрано «цифру» і одночасно гравцем $B$ обрано «цифру» $\Rightarrow$ гравець $A$ платить гравцю $B$ 1 грош. од.).

Таким чином отримаємо платіжну матрицю у вигляді табл. 7.2.

Таблиця 7.2

Платіжна матриця гри про вибір сторони монети

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | -1 | 1 |
| $A_2$ | 1 | -1 |

## 7.3. Принцип мінімаксу (максиміну). Розв'язок матричної гри в чистих стратегіях

Розглянемо гру $m \times n$, платіжна матриця якої має вигляд виразу (7.1). Визначимо найкращу стратегію гравця $A$ з урахуванням всіх можливих відповідей на неї гравця $B$. При цьому слід розраховувати на те, що на будь-яку стратегію

$A_i, i=\overline{1,m}$ гравця $A$ гравець $B$ відповість стратегією $B_j$, $j=\overline{1,n}$, для якої виграш гравця $A$ виявиться мінімальним, оскільки гравець $B$ намагається зашкодити гравцю $A$ отримати найбільший виграш.

***Алгоритм знаходження максиміну (мінімаксу):***

1. У рядку платіжної матриці, що відповідає стратегії $A_i, i=\overline{1,m}$, знайти мінімальне з чисел $a_{ij}$:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}, \; j=\overline{1,n}. \tag{7.2}$$

Це гарантований виграш гравця $A$ при застосуванні стратегії $A_i$, для якої значення виграшу було б найбільшим.

2. Серед всіх чисел $\alpha_i$ обрати найбільше число $\alpha$, яке визначають за формулою

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}, \; i=\overline{1,m}, \; j=\overline{1,n}, \tag{7.3}$$

і називають *нижньою ціною гри* або *максиміном*.

3. У стовпці платіжної матриці, що відповідає стратегії $B_j$, $j=\overline{1,n}$, знайти максимальне з чисел $a_{ij}$:

$$\beta_j = \max_i a_{ij}, \; i=\overline{1,m}. \tag{7.4}$$

Це гарантований програш гравця $B$ при застосуванні стратегії $B_j$ (найгірший з програшів). Очевидно, що гравець $B$ намагається перетворити виграш гравця $A$ на мінімальний, тобто він повинен вибрати стратегію, яка дає найменший програш.

4. Серед чисел $\beta_j$ обрати найменше число $\beta$ за формулою

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}, \; i=\overline{1,m}, \; j=\overline{1,n}, \tag{7.5}$$

яке називають *верхньою ціною* гри або *мінімаксом*. Очевидно, $\alpha \le \beta$.

*Максимін* – це максимальний виграш, який гравець $A$ може собі гарантувати в грі проти розумного супротивника.

Якщо гравець $A$ буде дотримуватись максимінної стратегії, то йому при будь-якій розумній поведінці гравця $B$ гарантовано виграш не менший, ніж $\alpha$.

Стратегія, що відповідає максиміну, називається *максимінною*.

*Мінімакс* – це мінімальний програш, який гравець $B$ може собі дозволити в грі проти розумного супротивника.

Якщо гравець $B$ буде дотримуватись найбільш обережної з усіх своїх стратегій (мінімаксної), то йому в будь-якому випадку забезпечено програш не більший, ніж $\beta$.

Стратегія, що відповідає мінімаксу, називається *мінімаксною*.

Якщо верхня і нижня ціни гри співпадають, то загальне значення

$$\alpha = \beta = v \tag{7.6}$$

називають *чистою ціною гри* або *ціною гри*, а таку гру називають визначеною *грою в чистих стратегіях* або *грою з сідловою точкою*.

*Чистою стратегією $A_i$ гравця $A$* називають можливий хід, який гравець $A$ обрав з імовірністю 1.

Ціна гри $v$ дорівнює елементу платіжної матриці $a_{i_0 j_0}$. Елемент $a_{i_0 j_0}$, який є одночасно мінімальним у рядку $i_0$ і максимальним у стовпці $j_0$ платіжної матриці (7.1), називається *сідловою точкою*.

Сідловій точці відповідають оптимальні стратегії, сукупність яких є оптимальним розв'язком або розв'язком матричної гри.

Сукупність оптимальних стратегій і ціни гри визначає розв'язок гри.

Якщо один з гравців дотримується своєї оптимальної стратегії, то для другого гравця відхилення від його оптимальної стратегії не може бути вигідним. Відступ гравців від їхніх оптимальних стратегій погіршує їхнє власне становище.

**Приклад 2.** Визначити верхню та нижню ціни гри, яку задано матрицею

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 8 \\ 6 & 5 & 7 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання.** Запишемо платіжну матрицю у вигляді табл. 7.3.

Таблиця 7.3

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $\min\limits_{j} a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 3 | 6 | 8 | 3 |
| $A_2$ | 6 | **5** | 7 | 6 | **5** |
| $A_3$ | 3 | 4 | 2 | 7 | 2 |
| $\max\limits_{i} a_{ij}$ | 6 | **5** | 7 | 8 | $\alpha = \max\{3;5;2\} = 5$, $\beta = \min\{6;5;7;8\} = 5$ |

У кожному рядку платіжної матриці знаходимо мінімальне з чисел $a_{ij}$ і запишемо його в додатковий стовпчик $\min\limits_{j} a_{ij}$. З найдених чисел за формулою (7.3) виберемо найбільше:

$$\alpha = \max_{i} \alpha_i = \max_{i}\{3;5;2\} = 5,$$

що визначить нижню ціну гри (максимін). Цей виграш відповідає стратегії $A_2$, яка є максимінною.

У кожному стовпці платіжної матриці знайдемо максимальне з чисел $a_{ij}$ і запишемо його в додатковий рядок $\max\limits_{i} a_{ij}$. З найдених чисел за формулою (7.5) виберемо найменше:

$$\beta = \min_{j} \beta_j = \min_{j}\{6;5;7;8\} = 5,$$

що визначає верхню ціну гри або мінімакс, який відповідає стратегії $B_2$. Ця стратегія є мінімаксною. Верхня і нижня ціни гри співпадають, тобто $\alpha = \beta = 5$. Досягається це парою стратегій $(A_2, B_2)$, якій відповідає елемент $a_{22} = 5$.

**Відповідь**: гра має сідлову точку $(A_2, B_2)$ і ціну гри $v = 5$.

### *Застосування методу розв'язку скінченої гри з сідловою точкою в управлінні процесом навантаження*

Щоденний попит на завантаження у критих вагонах по підприємству $A$ складає 10, 25 або 30 тонн. Начальник підприємства $A$ наприкінці кожної звітної доби робить заявку на станцію відправлення для наступної доби на перевезення вантажу по одному з вищеназваних об'ємів. Якщо підприємство $A$ замовить більший обсяг вантажу, ніж може завантажити, то воно повинно повернути цей вантаж постачальнику за ціною 20 грош. од. за тонну. Який обсяг вантажу потрібно замовити в постачальника, якщо закупівельна ціна однієї тонни складає 50 грош. од., а роздрібна – 60 грош. од.?

**Розв'язання.** Складемо платіжну матрицю за даними задачі.

Елемент матриці $a_{11}$: замовлено 10 т, завантажено 10 т $\Rightarrow$ чистий прибуток складає $10 \cdot (60-50) = 100$ грош. од.

Елемент матриці $a_{12}$: замовлено 10 т, а завантажити можна 25 т $\Rightarrow$ чистий прибуток складає $10 \cdot (60-50) = 100$ грош. од.

Елемент матриці $a_{13}$: замовлено 10 т, а завантажити можна 30 т $\Rightarrow$ чистий прибуток складає $10 \cdot (60-50) = 100$ грош. од.

Елемент матриці $a_{21}$: замовлено 25 т, а завантажити можна 10 т $\Rightarrow$ чистий прибуток складає $10 \cdot (60-50) - 15 \cdot (50-20) = 100 - 450 = -350$ грош. од.

Елемент матриці $a_{22}$: замовлено 25 т та завантажили 25 т $\Rightarrow$ чистий прибуток складає $25 \cdot (60-50) = 250$ грош. од.

Елемент матриці $a_{23}$: замовлено 25 т, а завантажити можна 30 т $\Rightarrow$ чистий прибуток складає $25 \cdot (60-50) = 250$ грош. од.

Елемент матриці $a_{31}$: замовлено 30 т, а завантажити можна тільки 10 т $\Rightarrow$ чистий прибуток складає $10 \cdot (60-50) - 20 \cdot (50-20) = 100 - 600 = -500$ грош. од.

Елемент матриці $a_{32}$: замовлено 30 т, а завантажити можна 25 т $\Rightarrow$ чистий прибуток складає $25 \cdot (60-50) - 5 \cdot (50-20) = 250 - 150 = 100$ грош. од.

Елемент матриці $a_{33}$: замовлено 30 т і завантажено 30 т $\Rightarrow$ чистий прибуток складає $30 \cdot (60-50) = 300$ грош. од.

Отримаємо платіжну матрицю (табл. 7.4).

Таблиця 7.4

Платіжна матриця

| Варіанти замовлення, т | Рівень попиту | | | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|
| | 10 | 25 | 30 | |
| 10 | **100** | 100 | 100 | 100 |
| 25 | -350 | 250 | 250 | -350 |
| 30 | -500 | 100 | 300 | -500 |
| $\beta_j$ | 100 | 250 | 300 | $\alpha = \max\{100;-350;-500\} = 100$,<br>$\beta = \min\{100;250;300\} = 100$ |

Визначимо нижню та верхню ціни гри:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \{100; -350; -500\} = 100,$$

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \{100; 250; 300\} = 100.$$

Оскільки $\alpha = \beta$, то дана гра має сідлову точку, а ціна гри дорівнює $v = 100$.

**Відповідь**: оптимальна стратегія першого гравця $A_1$, а другого – $B_1$. З табл. 7.4 видно, що гарантований чистий прибуток підприємство $A$ отримає, коли буде замовляти на завантаження 10 т. Відхилення від цієї оптимальної стратегії може зменшити об'єм чистого прибутку підприємства $A$.

### 7.4. Спрощення ігор

Розв'язання матричних ігор тим складніше, чим більше розмірність платіжної матриці. Тому для ігор з платіжними матрицями великої розмірності знаходження оптимального розв'язку можна спростити, якщо зменшити їхню розмірність шляхом виключення дублюючих і наперед невигідних стратегій.

*Дублюючими* називаються стратегії, яким відповідають однакові значення елементів у платіжній матриці (у платіжній матриці містяться однакові рядки чи стовпці).

Якщо в платіжній матриці гри всі елементи деякого рядка, що визначає стратегію $A_i, i = \overline{1,m}$ гравця $A$, не менше за відповідні елементи іншого рядка, то стратегію $A_i$ називають *домінуючою* (наперед вигідною).

Якщо в платіжній матриці гри всі елементи деякого стовпця, що визначає стратегію $B_j, j = \overline{1,n}$ гравця $B$, не більше за відповідні елементи іншого стовпця, то стратегію $B_j$ називають *домінуючою* (наперед вигідною).

***Зауваження:***

1. Розв’язок матричної гри не зміниться, якщо з платіжної матриці виключити рядки і стовпці, що відповідають дублюючим і наперед невигідним стратегіям.
2. Відкидаючи дублюючі і наперед невигідні стратегії в грі з сідловою точкою, ми все одно прийдемо до гри з сідловою точкою, тобто до розв’язку гри в чистих стратегіях. Але зручніше одразу перевірити, чи не має гра сідлової точки. Це набагато простіше, ніж порівнювати всі рядки і всі стовпці платіжної матриці.

Таким чином, *скоротити розмірність платіжної матриці* можна:

1) виключенням однакових рядків чи стовпців;
2) виключенням більших стовпців;
3) виключенням менших рядків.

**Приклад 3.** Проаналізувати платіжну матрицю, яку надано в табл. 7.5. Визначити верхню і нижню ціну гри.

Таблиця 7.5

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 7 | 4 | 8 | 6 | 5 |
| $A_2$ | 5 | 4 | 6 | 1 | 5 |
| $A_3$ | 7 | 4 | 8 | 6 | 5 |
| $A_4$ | 9 | 6 | 3 | 2 | 7 |

**Розв’язання.** Проаналізуємо гру з боку гравця $B$. Стратегія $B_2$ домінує над стратегією $B_1$, яка є гіршою, ніж $B_2$, оскільки гравцю $B$ стратегія $B_1$ несе найбільший програш.

Гравцю $B$ стратегію $B_1$ невигідно застосовувати, тому її можна виключити з платіжної матриці (табл. 7.6).

Таблиця 7.6

Платіжна матриця гри без стратегії $B_1$

| | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 8 | 6 | 5 |
| $A_2$ | 4 | 6 | 1 | 5 |
| $A_3$ | 4 | 8 | 6 | 5 |
| $A_4$ | 6 | 3 | 2 | 7 |

Проаналізуємо гру з боку гравця $A$. Стратегія $A_2$ є гіршою, ніж $A_1$, оскільки гравцю $A$ вона несе найменший виграш. Гравцю $A$ стратегію $A_2$ невигідно застосовувати, тому її можна виключити з платіжної матриці (табл. 7.7).

Таблиця 7.7

Платіжна матриця гри без стратегій $B_1$, $A_2$

| | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 8 | 6 | 5 |
| $A_3$ | 4 | 8 | 6 | 5 |
| $A_4$ | 6 | 3 | 2 | 7 |

Стратегії $A_1$ і $A_3$ є дублюючими. Тому одну з них, наприклад $A_1$, можна виключити з платіжної матриці (табл. 7.8).

Таблиця 7.8

Платіжна матриця гри без стратегій $B_1$, $A_2$, $A_1$

| | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_3$ | 4 | 8 | 6 | 5 |
| $A_4$ | 6 | 3 | 2 | 7 |

Гравець $B$ не буде застосовувати стратегію $B_3$, оскільки елементи платіжної матриці стовпця $B_3$ більше за відповідні елементи стовпця $B_4$. Тому стратегію $B_3$ можна виключити з платіжної матриці (табл. 7.9).

Таблиця 7.9

Платіжна матриця гри без стратегій $B_1$, $A_2$, $A_1$, $B_3$

| | $B_2$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|
| $A_3$ | 4 | 6 | 5 |
| $A_4$ | 6 | 2 | 7 |

Гравець $B$ не буде застосовувати стратегію $B_5$, елементи платіжної матриці стовпця $B_5$ більше за відповідні елементи стовпця $B_2$. Тому стратегію $B_5$ можна виключити з платіжної матриці (табл. 7.10).

Таблиця 7.10

Платіжна матриця гри без стратегій $B_1$, $A_2$, $A_1$, $B_3$, $B_5$

| | $B_2$ | $B_4$ |
|---|---|---|
| $A_3$ | 4 | 6 |
| $A_4$ | 6 | 2 |

Після спрощення розміру платіжної матриці гри визначимо верхню та нижню ціни гри за допомогою алгоритму знаходження мінімаксу (табл. 7.11).

Таблиця 7.11

Платіжна матриця гри без стратегій $B_1$, $A_2$, $A_1$, $B_3$, $B_5$

| | $B_2$ | $B_4$ | $\min\limits_{j} a_{ij}$ |
|---|---|---|---|
| $A_3$ | 4 | 6 | **4** |
| $A_4$ | 6 | 2 | 2 |
| $\max\limits_{i} a_{ij}$ | **6** | **6** | $\alpha = \max\{4;2\} = 4$,<br>$\beta = \min\{6;6\} = 6$ |

Нижня ціна гри (максимін) $\alpha = 4$ − це максимальний виграш, який гравець $A$ може собі гарантувати. Цей виграш відповідає стратегії $A_3$, яка є максимінною.

Верхня ціна гри (мінімакс) дорівнює $\beta = 6$ − це мінімальний програш, який гравець $B$ може собі дозволити в грі. Цей програш відповідає стратегіям $B_2, B_4$. Тобто кожна зі стратегій $B_2, B_4$ є мінімаксною.

**Відповідь**: $\alpha = 4, \beta = 6$.

## 7.5. Мішані стратегії матричної гри та їхні властивості

Серед скінчених ігор, що мають практичне значення, ігри з сідловою точкою зустрічаються рідко. Більш типовим є випадок, коли $\alpha \neq \beta$. Такі ігри називають *іграми без сідлової точки*.

Розглянемо скінчену гру $m \times n$ з платіжною матрицею (7.1), яка не має сідлової точки. У таких іграх, очевидно, $\alpha < \beta$. Якщо кожному гравцю надати можливість вибору однієї чистої стратегії, то цей вибір має визначитися принципом мінімаксу. При цьому гравець $A$ гарантує собі виграш, що дорівнює $\alpha$, а гравець $B$ − програш $\beta$. Для кожного гравця природним є питання збільшення виграшу (зменшення програшу). Це змушує обох гравців застосувати не одну, а декілька чистих стратегій. Вибір чистих стратегій здійснюється випадково. Тому виникає потреба оцінити з точки зору випадкового вибору сукупності чистих стратегій. Такими оцінками можуть бути ймовірності застосування гравцем своїх окремих чистих стратегій. Рішення з оцінки ймовірностей вибору гравцем своїх чистих стратегій дають мішані стратегії цього гравця.

*Мішаною стратегією* $S_A$ гравця $A$ називають повний набір чистих стратегій $A_1, A_2, ..., A_m$ з імовірностями їх застосування $p_1, p_2, ..., p_m$, причому $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$.

Мішану стратегію $S_A$ гравця $A$ записують у вигляді матриці

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{pmatrix}, \tag{7.7}$$

де $0 \le p_i \le 1, i = \overline{1,m}$, $p_i$ − імовірність використання чистої стратегії $A_i$, причому

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1. \tag{7.8}$$

Аналогічно, мішану стратегію $S_B$ гравця $B$ записують у вигляді матриці

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}, \tag{7.9}$$

де $0 \le q_j \le 1, j = \overline{1,n}$, $q_j$ − імовірність використання чистої стратегії $B_j$, причому

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \tag{7.10}$$

Важливо зазначити, що кожну чисту стратегію можна вважати окремим випадком мішаної. Для цього необхідно надати ймовірності, яка відповідає чистій стратегії, значення «1», а всім іншим імовірностям – «0».

Наприклад, чисту стратегію $A_i$ гравця $A$ за формулою (7.7) можна записати $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{i-1} & A_i & A_{i+1} & \dots & A_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

***Зауваження.*** Мішані стратегії гравців $A$ і $B$ іноді також записують у вигляді $S_A = \vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$ та $S_B = \vec{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ відповідно.

Гравці обирають свої чисті стратегії випадково і незалежно один від одного, тому гра має випадковий характер і сума виграшу теж стає випадковою величиною. За даними векторами $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$ і $\vec{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ з виразів (7.7)-(7.10) виграш гравця $A$ при використанні мішаних стратегій визначається як математичне сподівання виграшу

$$f(\vec{p},\vec{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot p_i \cdot q_j , \qquad (7.11)$$

де $f(\vec{p},\vec{q})$ називається *платіжною функцією* гри, яка задана матрицею (7.1).

Перший гравець націлений за рахунок змінення своїх мішаних стратегій $S_A$ максимально збільшити свій середній виграш $f(\vec{p},\vec{q})$, а другий – за рахунок своїх мішаних стратегій $S_B$ зробити $f(\vec{p},\vec{q})$ мінімальним, тобто для розв'язку гри необхідно знайти такі $\vec{p}$ і $\vec{q}$, при яких досягається верхня ціна гри:

$$\beta = \min_{q_j} \max_{p_i} f(\vec{p},\vec{q}), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \qquad (7.12)$$

З іншого боку, ситуація буде аналогічною відносно гравця $B$, тобто нижня ціна гри має бути

$$\alpha = \max_{p_i} \min_{q_j} f(\vec{p},\vec{q}), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \qquad (7.13)$$

Отже, як і в іграх, що мають сідлові точки в чистих стратегіях, доходимо такого визначення.

Оптимальними мішаними стратегіями гравців $A$ і В будуть матриці $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1^* & p_2^* & \dots & p_m^* \end{pmatrix}$ і $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1^* & q_2^* & \dots & q_n^* \end{pmatrix}$ відповідно, які задовольняють рівності

$$\min_{q_j} \max_{p_i} f(\vec{p},\vec{q}) = \max_{p_i} \min_{q_j} f(\vec{p},\vec{q}) = f\left(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}\right), \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, \qquad (7.14)$$

де $\overrightarrow{p^*} = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*)$, $\overrightarrow{q^*} = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$.

Звідси випливає очевидне співвідношення

$$f\left(\vec{p},\overrightarrow{q^*}\right) \le f\left(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}\right) \le f\left(\overrightarrow{p^*},\vec{q}\right), \qquad (7.15)$$

яке можна використовувати як еквівалентне для іншого визначення мішаних стратегій.

Величина $v = f\left(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}\right)$ називається *ціною гри*, а пара $\left(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}\right)$ – сідловою точкою.

Отже, трійка $\left\{\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*},v\right\}$ називається *розв'язком* матричної гри, де $\left(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}\right)$ – пара оптимальних стратегій $S_A^*$, $S_B^*$ в загальному випадку мішаних, $v$ – виграш, що відповідає оптимальному розв'язку гри (ціна гри).

У подальшому розглянемо такі два питання:

1. Які матричні ігри мають розв'язок?
2. Як знайти розв'язок матричної гри?

Відповідь на перше питання дає основна теорема матричних ігор.

**Теорема 1.** Для матричної гри з довільною матрицею вигляду (7.1) величини $\max\limits_{p_i}\min\limits_{q_j} f\left(\vec{p},\vec{q}\right)$ і $\min\limits_{q_j}\max\limits_{p_i} f\left(\vec{p},\vec{q}\right), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ існують і дорівнюють одна одній.

***Наслідки***:

1. Кожна скінчена гра має ціну. Ціна гри завжди лежить між нижньою та верхньою ціною гри:

$$\alpha \le v \le \beta. \qquad (7.16)$$

2. **Теорема Неймана (основна теорема теорії ігор).** Будь-яка скінченна матрична гра має, принаймні, один оптимальний розв'язок, можливо серед мішаних стратегій.

Використання мішаних стратегій гарантує можливість знаходження сідлової точки й оптимальних стратегій гравців $A$ і $B$, на відміну від застосування гравцями своїх чистих стратегій.

Розглянемо властивості оптимальних мішаних стратегій.

**Теорема 2.** Для того щоб у матричній грі з ціною $v$ мішана стратегія $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1^* & p_2^* & \dots & p_m^* \end{pmatrix}$ першого гравця була оптимальною, необхідно і достатньо виконання нерівності

$$f\left(\overrightarrow{p^*}, \vec{q}\right) \geq v \tag{7.17}$$

для довільної мішаної стратегії $S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}$ другого гравця.

**Теорема 3.** Щоб мішана стратегія $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1^* & q_2^* & \dots & q_n^* \end{pmatrix}$ другого гравця була оптимальною, необхідно і достатньо виконання нерівності

$$f\left(\vec{p}, \overrightarrow{q^*}\right) \leq v \tag{7.18}$$

для довільної мішаної стратегії $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}$ першого гравця.

Як наслідок, для того щоб для першого гравця $S_A^*$ була оптимальною мішаною стратегією матричної гри з матрицею (7.1) та ціною гри $v$, необхідно і достатньо виконання нерівностей

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot p_i^* \geq v,\ j = \overline{1, n}. \tag{7.19}$$

Аналогічно для другого гравця: $S_B^*$ буде оптимальною мішаною стратегією в разі виконання нерівностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j^* \le v, i = \overline{1,m}. \qquad (7.20)$$

Отже, щоб встановити, чи буде трійка $\left\{\overrightarrow{p^*}, \overrightarrow{q^*}, v\right\}$ розв'язком матричної гри, достатньо перевірити виконання умов (7.8), (7.10), (7.19), (7.20).

Тобто для розв'язку гри необхідно знайти $m+n-1$ невідомих із системи $m+n$ лінійних нерівностей і двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot p_i \ge v, \; j = \overline{1,n}; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \ge 0, i = \overline{1,m}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j \le v; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1, \; q_j \ge 0, \; j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (7.21)$$

*Активною* називається стратегія, яка входить в оптимальну мішану стратегію з відмінною від нуля ймовірністю.

**Теорема 4 (теорема про активні стратегії).** Якщо один з гравців додержується своєї оптимальної мішаної стратегії, то виграш залишається незмінним і дорівнює ціні гри $v$, незалежно від того, яку стратегію застосовує другий гравець, якщо тільки він не виходить за межі своїх активних стратегій.

## 7.6. Методи розв'язання матричних ігор

Відомі декілька ефективних методів розв'язання матричних ігор. При цьому процес пошуку розв'язку довільної скінченої парної гри доцільно розбити на етапи:

1. Перевірка гри на сідлову точку. Якщо гра має сідлову точку, то перейти до етапу 2, якщо ні – до етапу 3.

2. Розв'язати гру в чистих стратегіях.

3. Спростити гру з метою зменшення розмірності матриці гри.

4. Розв'язати гру в мішаних стратегіях.

***Розглянемо детальніше етап 4.***

Для розв'язання ігор у мішаних стратегіях можна використовувати найбільш поширені методи, такі як графічний (графоаналітичний), аналітичний, чисельний (методи лінійного програмування), що базуються на основній теоремі матричних ігор, властивостях оптимальних мішаних стратегій, теореми про активні стратегії.

### 7.6.1. Аналітичний метод

Будь-яку матричну гру розмірністю $m \times n$ можна розв'язати шляхом зведення до двох систем лінійних рівнянь. Покажемо цей метод для матричної гри $2 \times 2$ з платіжною матрицею (табл. 7.12), яка не має сідлової точки.

Таблиця 7.12

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ |

Для гри, яка не має сідлової точки, у відповідності з основною теоремою матричних ігор оптимальний розв'язок існує і визначається парою мішаних стратегій $S_A^*$ і $S_B^*$.

Позначимо через $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$, $S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ мішані стратегії першого та другого гравців відповідно. Для оптимальності мішаних стратегій необхідно і достатньо виконання умов (7.21). Для наданої матриці ці умови набувають вигляду

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \geq v; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \geq v; \\ p_1 + p_2 = 1; \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0; \end{cases} \tag{7.22}$$

та

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \leq v; \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \leq v; \\ q_1 + q_2 = 1; \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0. \end{cases} \tag{7.23}$$

Згідно з умовою теореми 4 (теореми про активні стратегії) нерівності в системах (7.22), (7.23) перетворюються на рівняння

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v; \\ p_1 + p_2 = 1; \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0; \end{cases} \tag{7.24}$$

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v; \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v; \\ q_1 + q_2 = 1; \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0. \end{cases} \tag{7.25}$$

Розв'язуючи системи (7.24), (7.25), отримаємо

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ p_2 &= \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \end{aligned} \tag{7.26}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ q_2 &= \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \end{aligned} \tag{7.27}$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (7.28)$$

**Приклад 4.** Розв'язати матричну гру, яка задана платіжною матрицею (7.13).

Таблиця 7.13

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 6 |
| $A_2$ | 12 | 4 |

**Розв'язання.** Визначимо нижню та верхню ціни гри: $\alpha = \max_i\{1;4\} = 4$, $\beta = \min_j\{12;6\} = 6$. Оскільки $\alpha \neq \beta$ (гра не має сідлової точки), розв'язуємо за допомогою мішаних стратегій $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$ і $S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$, де ціна гри знаходиться в проміжку $4 \leq v \leq 6$.

За формулами (7.24), (7.25) складаємо системи рівнянь:

$$\begin{cases} p_1 + 12p_2 = v; \\ 6p_1 + 4p_2 = v; \\ p_1 + p_2 = 1; \\ p_1 \geq 0,\, p_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 + 6q_2 = v; \\ 12q_1 + 4q_2 = v; \\ q_1 + q_2 = 1; \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0. \end{cases}$$

За формулами (7.26) – (7.28) отримаємо розв'язок:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{8}{13}, \\ p_2 = \dfrac{5}{13}, \\ v = \dfrac{68}{13}; \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 = \dfrac{2}{13}, \\ q_2 = \dfrac{11}{13}, \\ v = \dfrac{68}{13}. \end{cases}$$

**Відповідь**: оптимальна мішана стратегія першого гравця $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \dfrac{8}{13} & \dfrac{5}{13} \end{pmatrix}$, другого − $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \dfrac{2}{13} & \dfrac{11}{13} \end{pmatrix}$. Для першого гравця середній виграш дорівнює ціні гри $v = \dfrac{68}{13}$.

### 7.6.2. Графоаналітичний метод розв'язання матричних ігор з платіжними матрицями $2 \times n$ і $m \times 2$ без сідлової точки

Спочатку розглянемо найбільш просту матричну гру без сідлової точки, у якій кожний з гравців має дві стратегії, тобто гру $2 \times 2$. Платіжна матриця такої гри має вигляд табл. 7.14.

Таблиця 7.14

Платіжна матриця гри $2 \times 2$

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ |

Знайдемо розв'язок цієї гри графічно. Для цього на осі абсцис $OX$ відкладаємо відрізок, довжина якого дорівнює 1. Лівий кінець відрізка (точка з абсцисою $x = 0$) зображує стратегію $A_1$, правий кінець відрізка (точка з абсцисою $x = 1$) − стратегію $A_2$. Всі проміжні точки одиничного відрізка відповідають мішаним стратегіям гравця $A$. Через кінці обраного відрізка проведемо прямі I та II, що перпендикулярні до осі абсцис. На них будемо відкладати виграш при відповідних чистих стратегіях. На прямій I будемо відкладати виграш гравця $A$ при стратегії $A_1$, а на прямій II – при стратегії $A_2$ (рис. 7.1).

Якщо гравець $B$ застосовує стратегію $B_1$, то виграш при використанні чистих стратегій $A_1$ та $A_2$ складає відповідно $a_{11}$ та $a_{21}$. Відкладаємо ці точки на прямих I і II та з'єднаємо отримані точки прямою $B_1B_1$. Якщо гравець $A$ застосовує мішану стратегію, то його виграшу відповідає деяка точка $M$, що лежить на цій прямій (рис. 7.1).

При цьому відстань від точки $S_A$ до правого кінця відрізка дорівнює ймовірності $p_1$ стратегії $A_1$, а відстань від точки $S_A$ до лівого кінця відрізка дорівнює ймовірності $p_2$ стратегії $A_2$.

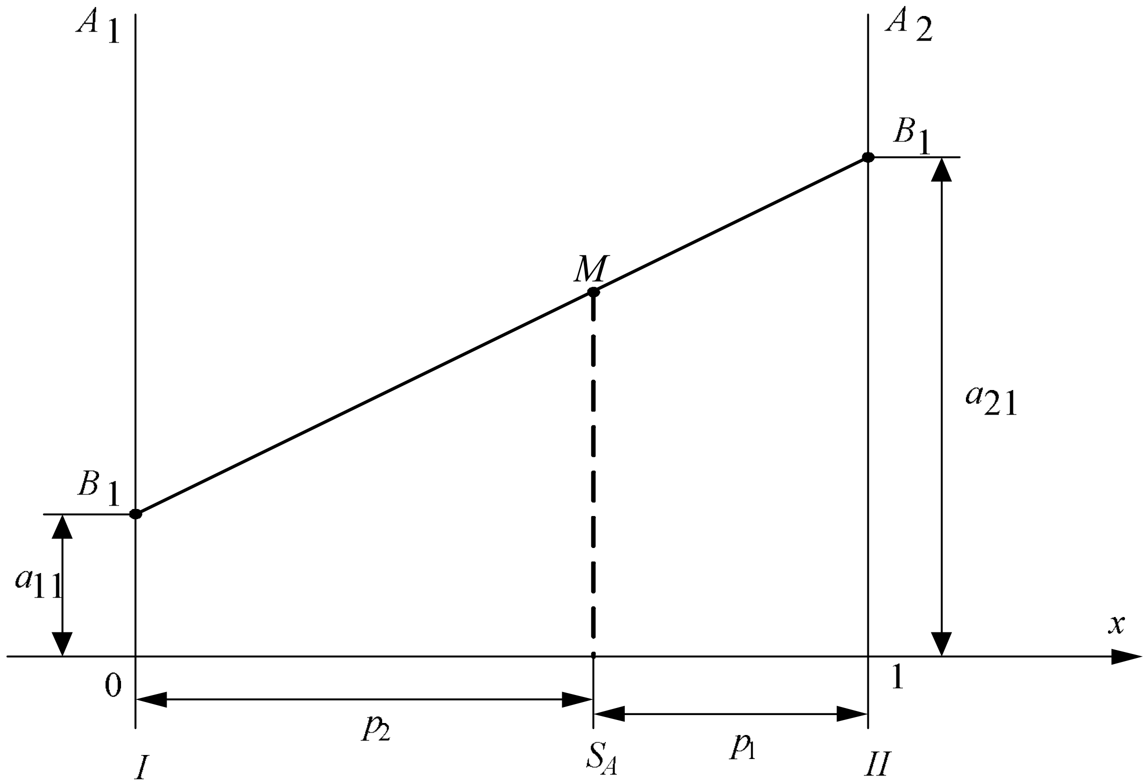



Рис. 7.1. Зображення чистих стратегій $A_1$ і $A_2$

Аналогічно побудуємо пряму $B_2B_2$, яка відповідає стратегії $B_2$ гравця $B$ (рис. 7.2).

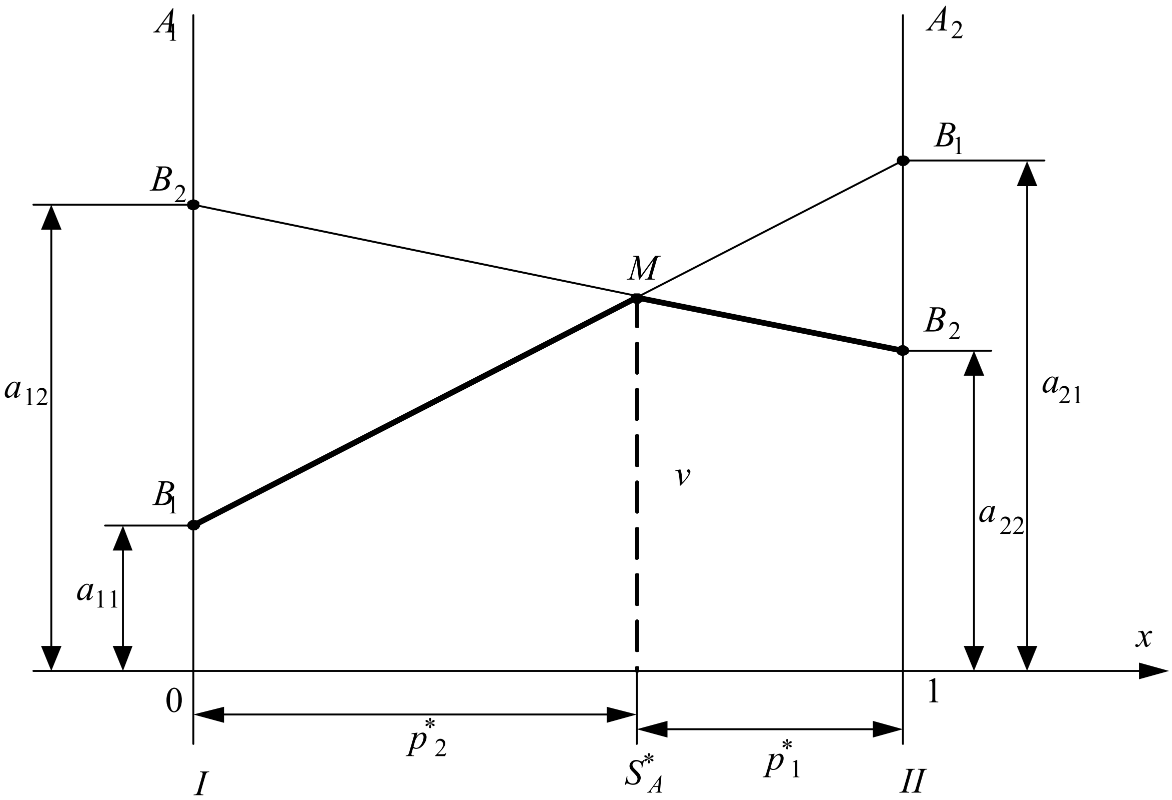



Рис. 7.2. Зображення матричної гри $2 \times 2$ першого гравця

Тепер задача полягає в тому, щоб знайти оптимальну мішану стратегію $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1^* & p_2^* \end{pmatrix}$ першого гравця, за якою його виграш за найгірших для нього умов був би максимальним.

Виділяємо на графіку нижню обвідну. На цій ламаній буде знаходитися мінімальний виграш гравця $A$ при будь-яких його мішаних стратегіях. Точка $M$, у якій виграш першого гравця $A$ досягає максимуму, і визначає розв'язок і ціну гри $v$ (рис. 7.2). Ордината точки $M$ дорівнює ціні гри, а абсциса розділяє відрізок $[0;1]$ на два, довжина яких дорівнює $p_2^*$ і $p_1^*$.

Так само можна дати геометричну інтерпретацію цієї гри з позицій супротивника, тобто гравця $B$. Треба тільки поміняти місцями гравців і замість максимуму нижньої обвідної розглядати мінімум верхньої обвідної, оскільки гравець $B$ намагається зменшити свій програш (рис. 7.3).

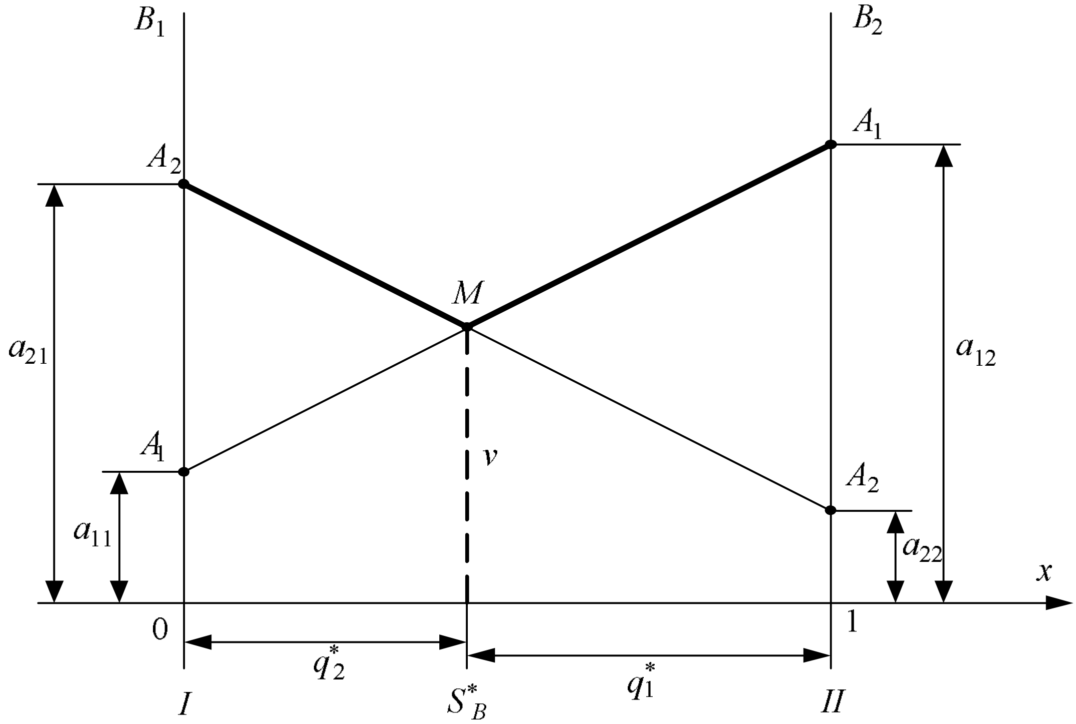



Рис. 7.3. Зображення матричної гри $2 \times 2$ другого гравця

Не завжди розв'язок гри – це точка перетину стратегій $B_1$ і $B_2$. За даними рис. 7.4 отримаємо, що оптимальною стратегією гравця $A$ є чиста стратегія $A_2$, тобто $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

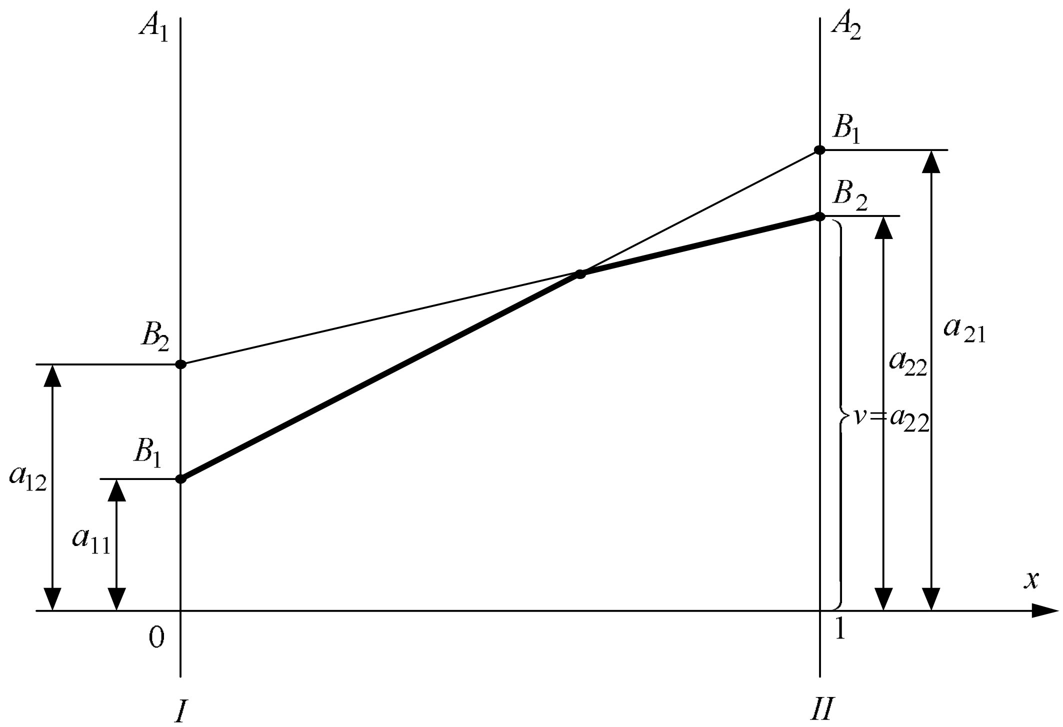



Рис. 7.4. Матрична гра з сідловою точкою

На рис. 7.5 також зображено гру з сідловою точкою. Оптимальна стратегія гравця $A$ − це чиста стратегія $A_1$, тобто $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

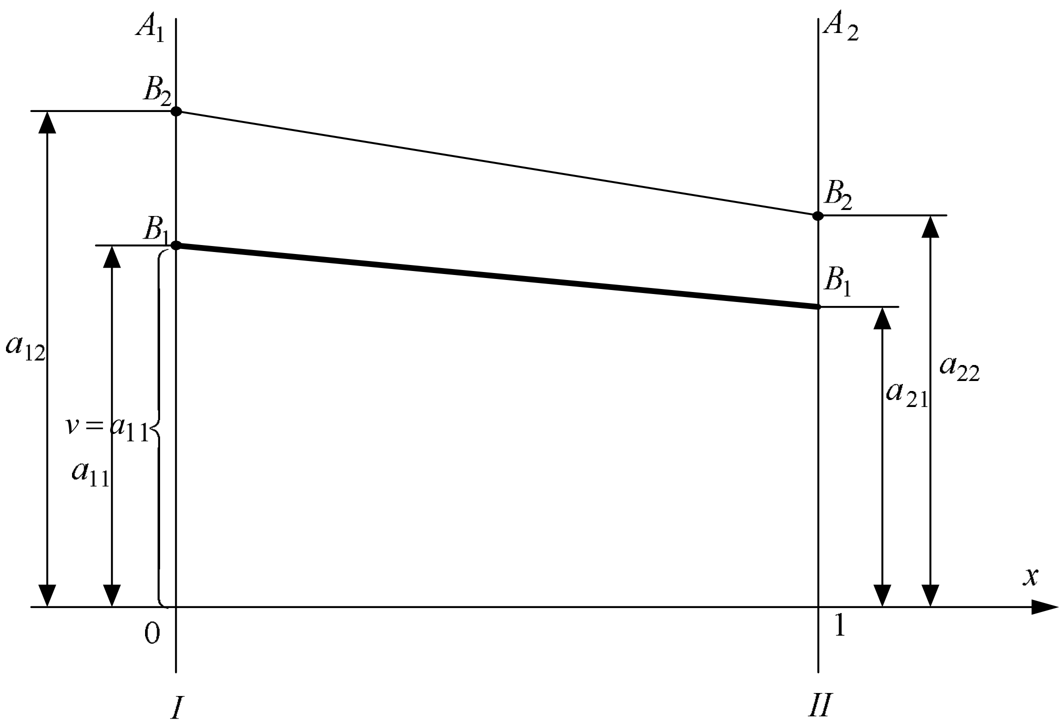



Рис. 7.5. Матрична гра з сідловою точкою

**Приклад 5.** Розв'язати матричну гру графічним методом, якщо матриця гри має вигляд табл. 7.15.

Таблиця 7.15

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 6 |
| $A_2$ | 7 | 5 |

**Розв'язання.** Визначимо нижню та верхню ціни гри: $\alpha = \max\limits_i \{3;5\} = 5$ і $\beta = \min\limits_j \{7;6\} = 6$. Оскільки $\alpha \neq \beta$ (гра не має сідлової точки), розв'язуємо за допомогою мішаних стратегій $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$ і $S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$, ціна гри знаходиться в проміжку $5 \le v \le 6$.

Наведемо графічну інтерпретацію розв’язку даної гри (рис. 7.6 і 7.7).

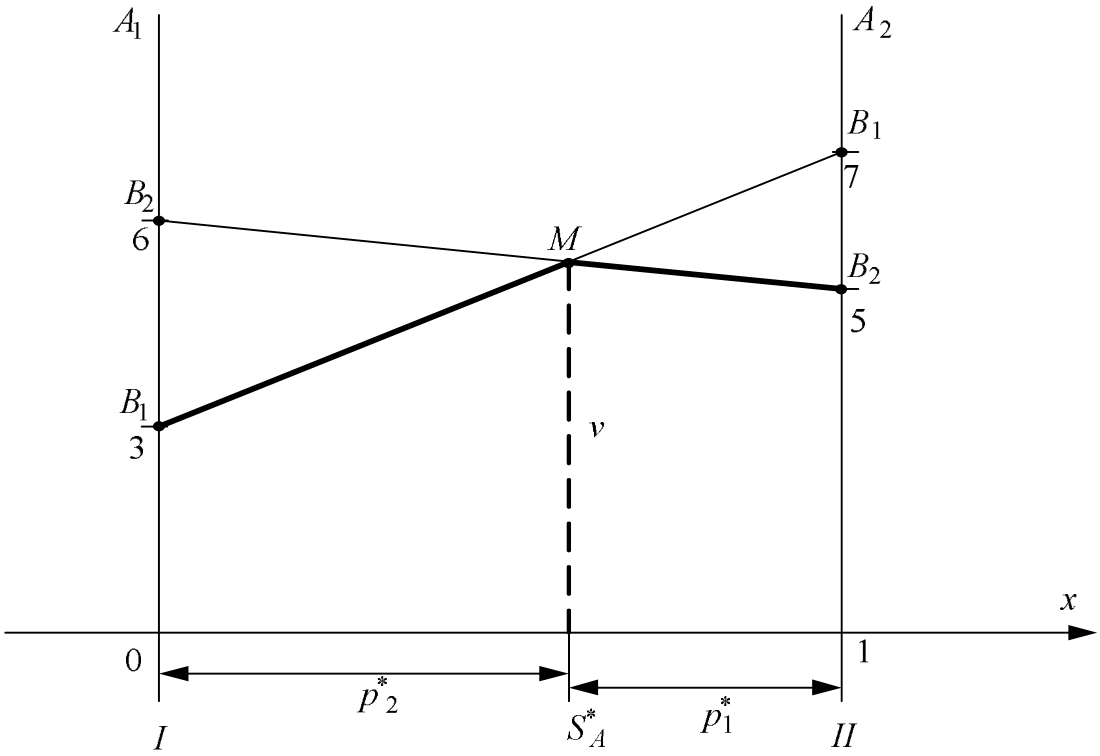



Рис. 7.6. Зображення матричної гри першого гравця

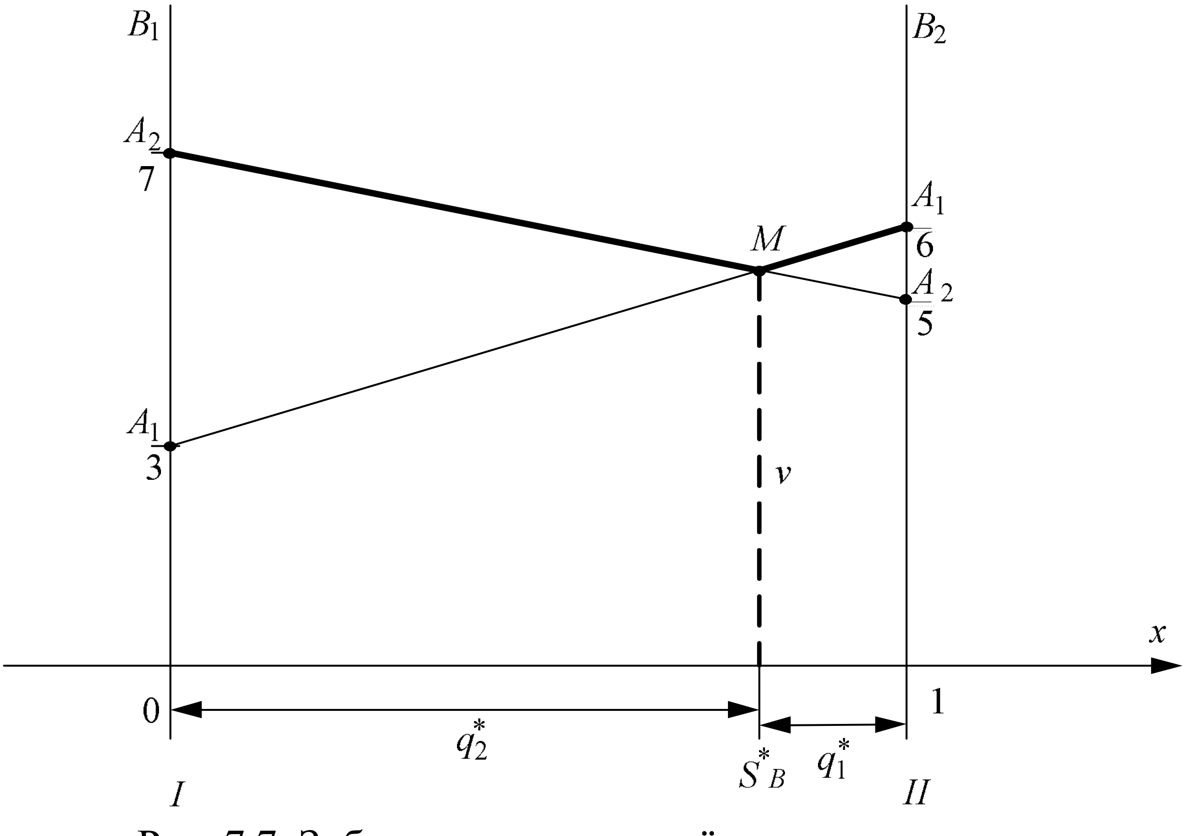



Рис. 7.7. Зображення матричної гри другого гравця

Розглянемо розв'язок гри першого гравця (рис. 7.6). Рівняння прямої $B_1B_1$ знайдемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки $(0;3)$ і $(1;7)$:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-3}{7-3} \text{ або } y=4x+3.$$

Пряма $B_2B_2$ проходить через точки $(0;6)$ і $(1;5)$, тому

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-6}{5-6} \text{ або } y=-x+6.$$

Знаходимо координати точки $M$, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y=4x+3, \\ y=-x+6; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0{,}6, \\ y=5{,}4, \end{cases}$$

де $x$ – відповідає $p_2^*=0{,}6 \Rightarrow p_1^*=0{,}4$; $y$ – відповідає ціні гри $v=5{,}4$, тобто $S_A^*=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ і $v=5{,}4$.

Аналогічно знаходимо розв'язок гри другого гравця (рис. 7.6). Рівняння прямих $A_1A_1$ та $A_2A_2$ мають вигляд $y=3x+3$ та $y=-2x+7$ відповідно. Знаходимо координати точки $M$:

$$\begin{cases} y=3x+3, \\ y=-x+7; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0{,}8, \\ y=5{,}4. \end{cases}$$

Як наслідок, $q_2^*=0{,}8; q_1^*=0{,}2; v=5{,}4$, тобто $S_B^*=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

**Відповідь**: $S_A^*=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, $S_B^*=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$, $v=5{,}4$.

Використовуючи геометричну інтерпретацію ігор $2\times 2$, можна знайти розв'язок ігор, заданих платіжною матрицею $2\times n$, яка не має сідлової точки. Розв'язок її за формулами (7.21) виявиться більш складним, ніж аналіз у випадку $n=2$. Але, як і раніше, можна побудувати прямі – лінії усіх стратегій другого гравця. Ціна гри досягається в точці, яку легко знайти на графіку, побудувавши нижню обвідну. Увага зосереджується тільки на тих прямих, які перетинаються в точці $M$, що визначає ціну гри. Для одержання точки $M$ достатньо перетину лише двох прямих. Ці прямі відповідають активним стратегіям другого гравця, які будуть входити в оптимальну мішану з відмінними від нуля ймовірностями. Решта чистих стратегій другого гравця будуть некорисними (невигідними). Як наслідок, існує такий розв'язок гри $2 \times n$, у якому кількість активних стратегій другого гравця дорівнює двом. Тобто гру $2 \times n$ можна звести до гри $2 \times 2$, вилучивши з платіжної матриці ті стовпці, які відповідають неефективним стратегіям. Розв'язок останньої гри можна отримати як за допомогою формул (7.21), так і з геометричних міркувань.

Аналогічно можна проаналізувати ігри $m \times 2$. На відміну від попереднього випадку, на графіку треба будувати лінії чистих стратегій першого гравця, на них знаходити верхню обвідну і на ній визначати точку з мінімальною ординатою.

**Приклад 6.** Знайти розв'язок гри, що задана платіжною матрицею (табл. 7.16).

Таблиця 7.16

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 5 | 3 | 6 |
| $A_2$ | 6 | 4 | 5 | 3 |

**Розв'язання.** Визначимо нижню та верхню ціни гри: $\alpha = \max\limits_i \{3;3\} = 3$ і $\beta = \min\limits_j \{6;5;5;6\} = 5$. Оскільки $\alpha \neq \beta$ (гра не має сідлової точки), розв'язуємо за допомогою мішаних стратегій.

Побудуємо чисті стратегії гравця $B$ (рис. 7.8).

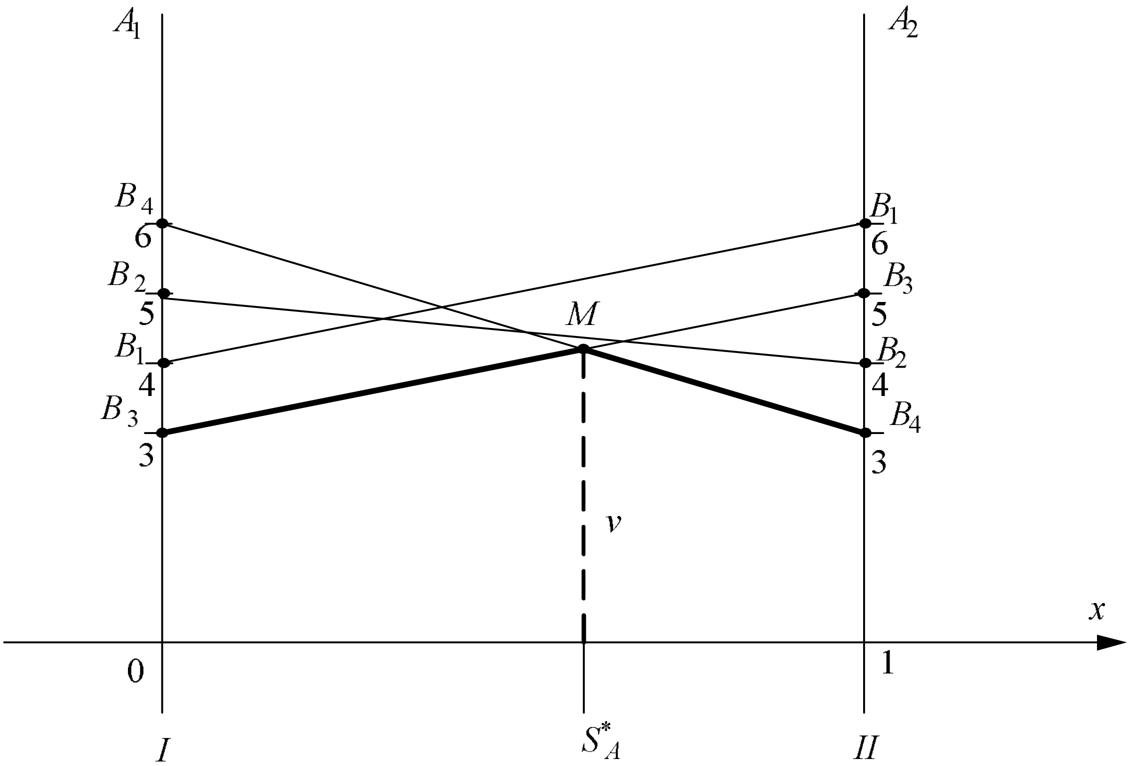



Рис. 7.8. Зображення матричної гри першого гравця

Точка $M$, яка є найвищою точкою обвідної, є перетином прямих, що відповідають третій і четвертій чистим стратегіям другого гравця. Отже, його перша та друга чисті стратегії не реалізуються при оптимальному виборі і їх можна відкинути, викресливши відповідно стовпці платіжної матриці (табл. 7.17).

Таблиця 7.17

Платіжна матриця гри без стратегій $B_1$ та $B_2$

| | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 6 |
| $A_2$ | 5 | 3 |

За формулами (7.21) знаходимо оптимальні мішані стратегії $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1^* & p_2^* \end{pmatrix}$, $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 0 & 0 & q_3^* & q_4^* \end{pmatrix}$ і ціну гри $v$:

$$\begin{cases} 3p_1 + 5p_2 = v; \\ 6p_1 + 3p_2 = v; \\ p_1 + p_2 = 1; \\ p_1 \ge 0,\, p_2 \ge 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0{,}4; \\ p_2 = 0{,}6; \\ v = 4{,}2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3q_3 + 6q_4 = v; \\ 5q_3 + 3q_4 = v; \\ q_3 + q_4 = 1; \\ q_3 \ge 0,\, q_4 \ge 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_3 = 0{,}6; \\ q_4 = 0{,}4; \\ v = 4{,}2. \end{cases}$$

**Відповідь**: $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. Для гравця $A$ середній виграш дорівнює ціні гри $v = 4{,}2$.

**Приклад 7.** Знайти розв'язок гри, що задана платіжною матрицею (табл. 7.18).

Таблиця 7.18

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 11 |
| $A_2$ | 6 | 9 |
| $A_3$ | 7 | 8 |
| $A_4$ | 10 | 4 |

**Розв'язання.** Визначимо нижню та верхню ціни гри: $\alpha = \max\limits_i \{3;6;7;4\} = 7$ і $\beta = \min\limits_j \{10;11\} = 10$. Оскільки $\alpha \ne \beta$ (гра не має сідлової точки), розв'язуємо за допомогою мішаних стратегій.

Побудуємо чисті стратегії $A_i, i = \overline{1,4}$ гравця $A$ (рис. 7.9).

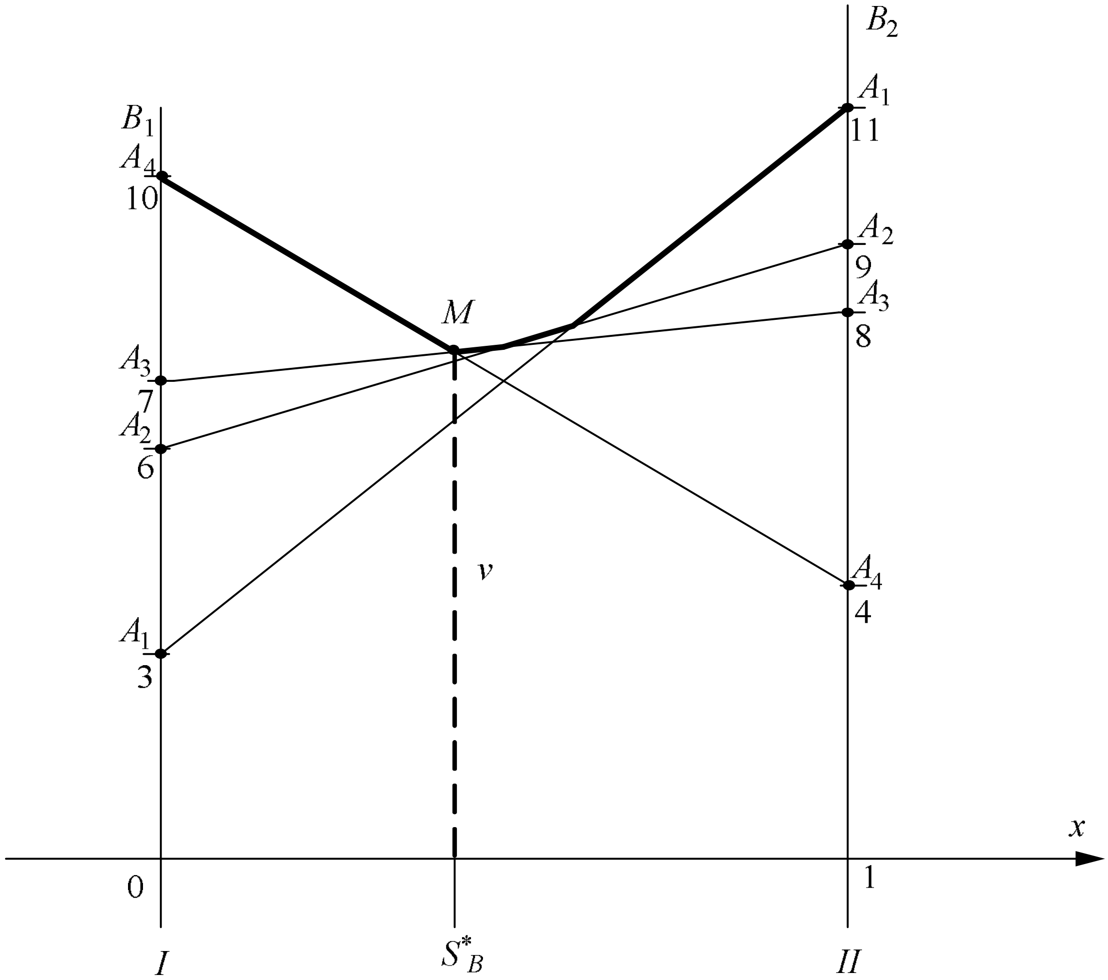



Рис. 7.9. Зображення матричної гри другого гравця

На верхній обвідній знаходимо найменше значення, яке й буде ціною гри або значенням гри в мішаних стратегіях.

Найменший програш матиме гравець $B$, якщо він обере мішану стратегію, що відповідатиме застосуванню гравцем $A$ стратегій $A_3$ і $A_4$. Отже, чисті стратегії $A_1$ і $A_2$ не реалізуються при оптимальному виборі, тому їх можна відкинути. Отримаємо відповідну платіжну матрицю (табл. 7.19).

Таблиця 7.19

Платіжна матриця гри без стратегій $A_1$ і $A_2$

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_3$ | 7 | 8 |
| $A_4$ | 10 | 4 |

За формулами (7.21) знаходимо оптимальні мішані стратегії $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & p_3^* & p_4^* \end{pmatrix}$, $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1^* & q_2^* \end{pmatrix}$ і ціну гри $v$:

$$\begin{cases} 7p_3 + 10p_4 = v; \\ 8p_3 + 4p_4 = v; \\ p_3 + p_4 = 1; \\ p_3 \geq 0, p_4 \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_3 = \dfrac{6}{7}; \\ p_4 = \dfrac{1}{7}; \\ v = \dfrac{52}{7}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7q_1 + 8q_2 = v; \\ 10q_1 + 4q_2 = v; \\ q_1 + q_2 = 1; \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{4}{7}; \\ q_2 = \dfrac{3}{7}; \\ v = \dfrac{52}{7}. \end{cases}$$

**Відповідь**: оптимальні мішані стратегії гравців $A$ і $B$ відповідно $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & \dfrac{6}{7} & \dfrac{1}{7} \end{pmatrix}$ і $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \dfrac{4}{7} & \dfrac{3}{7} \end{pmatrix}$. Для гравця $A$ середній виграш дорівнює ціні грі $v = \dfrac{52}{7}$.

***Зауваження.*** Якщо в точці $M$ перетинаються декілька (більше двох) ліній чистих стратегій, то виникає ситуація, у якій відповідний гравець може лише за власним розсудом вибрати чисті стратегії з перелічених для включення їх в оптимальну мішану стратегію. Тобто визначаються допустимі парні комбінації чистих стратегій, що залишаються для подальшого дослідження.

### 7.6.3. Розв'язання матричних ігор методами лінійного програмування

Теорія ігор міцно пов'язана з лінійним програмуванням. Кожна кінцева гра двох осіб з нульовою сумою може бути представлена як задача лінійного програмування.

Так, гра розміром $m \times n$ у загальному випадку не має геометричної інтерпретації. Її розв'язання трудомістке, тому зручніше розв'язок матричної гри звести до розв'язування пари двоїстих задач лінійного програмування.

Нехай задано матричну гру двох гравців з нульовою сумою платіжною матрицею (табл. 7.20).

Таблиця 7.20

Платіжна матриця гри $m \times n$

| | $B_1$ | $B_2$ | $\ldots$ | $B_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\ldots$ | $a_{1n}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\ldots$ | $a_{2n}$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\ldots$ | $a_{mn}$ |

Нехай $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_m \\ p_1^* & p_2^* & \ldots & p_m^* \end{pmatrix}$ – оптимальна мішана стратегія $A$, де $p_i^* \geq 0, i = \overline{1,m}$ – імовірність використання чистої стратегії $A_i$, $\sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1$ та $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \\ q_1^* & q_2^* & \ldots & q_n^* \end{pmatrix}$ – оптимальна мішана стратегія гравця $B$, де $q_j^* \geq 0, j = \overline{1,n}$ – імовірність використання чистої стратегії $B_j$, $\sum_{j=1}^{n} q_j^* = 1$. Симплекс-метод застосовують у випадку, коли $v > 0$. Для цього достатньо скористатися наступною теоремою.

**Теорема 5.** Нехай маємо матричну гру $G_1$, що задано матрицею (табл. 7.20) і ціною гри $v$. Тоді оптимальні мішані стратегії першого та другого гравців матричної гри $G_2$ з платіжною матрицею (табл. 7.21),

Таблиця 7.21

Платіжна матриця гри $m \times n$

| | $B_1$ | $B_2$ | $\ldots$ | $B_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $k \cdot a_{11} + c$ | $k \cdot a_{12} + c$ | $\ldots$ | $k \cdot a_{1n} + c$ |
| $A_2$ | $k \cdot a_{21} + c$ | $k \cdot a_{22} + c$ | $\ldots$ | $k \cdot a_{2n} + c$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $A_m$ | $k \cdot a_{m1} + c$ | $k \cdot a_{m2} + c$ | $\ldots$ | $k \cdot a_{mn} + c$ |

де $k > 0$, $C$ − довільне число, співпадають з оптимальними мішаними стратегіями відповідних гравців у вихідній грі $G_1$, а ціна гри $G_2$ дорівнює $v_2 = k \cdot v + c$.

Теорема 5 дає змогу приписувати ціні гри певний знак, наприклад додатний. Тому, проводячи обчислення для знаходження ціни гри, завжди можна спочатку збільшити її величину на число $c$, яке дорівнює модулю найменшого від'ємного елемента матриці платежів. Тоді всі елементи нової матриці будуть невід'ємними й ціна гри $v$ буде додатною. Потім, закінчивши обчислення, справжнє значення ціни гри легко встановити, віднявши $c$ від знайденого значення ціни гри. Цей прийом надає можливість введення нових змінних $x_i \geq 0, y_j \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$. Тоді матрична гра може бути представлена як ЗЛП у симетричній формі (2.3)-(2.4) і (2.5)-(2.6).

Якщо гравець $A$ застосовує свою оптимальну мішану стратегію $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1^* & p_2^* & \dots & p_m^* \end{pmatrix}$, а гравець $B$ − деяку чисту стратегію $B_j$, тоді за формулами (7.7), (7.8), (7.19) середній виграш складе $a_{1j} p_1^* + a_{2j} p_2^* + \dots + a_{mj} p_m^*, j = \overline{1,n}$. Для оптимальної мішаної стратегії $S_A^*$ всі середні виграші не можуть бути меншими, ніж ціна гри $v$ (оптимальна мішана стратегія $S_A^*$ гравця $A$ гарантує йому виграш не менш, ніж $v$, незалежно від вибору стратегії $B_j$ гравця $B$). Внаслідок цього одержимо систему нерівностей

$$\begin{cases} a_{11} p_1^* + a_{21} p_2^* + \dots + a_{m1} p_m^* \geq v, \\ a_{12} p_1^* + a_{22} p_2^* + \dots + a_{m2} p_m^* \geq v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} p_1^* + a_{2n} p_2^* + \dots + a_{mn} p_m^* \geq v. \end{cases} \tag{7.29}$$

Поділимо обидві частини системи нерівностей (7.29) на $v$, $v > 0$, отримаємо

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq 1, \end{cases}$$

де

$$x_i = \frac{p_i^*}{v}, i = \overline{1,m}. \qquad (7.30)$$

Мета гравця $A$ полягає в тому, щоб максимізувати свій гарантований виграш, тобто ціну гри $v$. З умови $\sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1$ маємо $x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{v}$. Максимізація ціни гри еквівалентна мінімізації величини $\frac{1}{v}$, тому задачу можна сформулювати так:

$$f = x_1 + x_2 + ... + x_m \to \min, \qquad (7.31)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq 1, \end{cases} \qquad (7.32)$$
$$x_i \geq 0, i = \overline{1,m}.$$

Задача (7.31), (7.32) є задачею лінійного програмування, розв’язавши яку, за формулами (7.30) отримаємо оптимальний розв’язок матричної гри.

Міркуючи аналогічно, для визначення оптимальної мішаної стратегії $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1^* & q_2^* & \dots & q_n^* \end{pmatrix}$ гравця $B$ слід враховувати, що він прагне одержати мінімальний програш, тобто $\frac{1}{v} \to \max$. Якщо гравець $B$ застосовує свою оптимальну мішану стратегію $S_B^*$, а гравець $A$ − деяку чисту стратегію $A_i$, тоді середній програш за формулами (7.9), (7.10), (7.20) складе $a_{i1}q_1^* + a_{i2}q_2^* + ... + a_{im}q_m^*, i = \overline{1,m}$. Для оптимальної стратегії другого гравця $S_B^*$ всі середні програші повинні не перевищувати ціни гри $v$, яку б чисту стратегію не застосував би гравець $A$:

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* + ... + a_{1n}q_n^* \le v, \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* + ... + a_{2n}q_n^* \le v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}q_1^* + a_{m2}q_2^* + ... + a_{mn}q_n^* \le v. \end{cases} \tag{7.33}$$

Поділивши всі члени системи (7.33) на $v$, $v > 0$, і ввівши нові позначення

$$y_j = \frac{q_j^*}{v}, \; j = \overline{1,n}, \tag{7.34}$$

отримаємо

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \le 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le 1. \end{cases}$$

З умови $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j^* = 1$ випливає $y_1 + y_2 + ... + y_n = \frac{1}{v}$. Мінімізація ціни гри еквівалентна максимізації величини $\frac{1}{v}$, тому задачу можна сформулювати так:

$$g = y_1 + y_2 + ... + y_n \to \max, \tag{7.35}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \le 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le 1. \end{cases} \tag{7.36}$$

$$y_j \geq 0, j = \overline{1,n}.$$

Розв’язок ЗЛП (7.35), (7.36) з урахуванням формул (7.34) дає оптимальний розв’язок матричної гри.

Слід зауважити, що отримані задачі лінійного програмування (7.31)-(7.32) і (7.35)-(7.36) складають пару взаємодвоїстих задач лінійного програмування. Як наслідок, при знаходженні оптимальних стратегій у конкретних задачах слід розв’язувати ту зі взаємодвоїстих задач, розв’язання якої менш трудомістке, а розв’язок другої потім знайти за теоремами двоїстості (п. 2.7).

***Алгоритм дій при розв’язанні матричної гри*** $m \times n$**:**

1. Скоротити розмірність платіжної матриці гри (якщо це можливо).
2. Визначити нижню та верхню ціни гри, перевірити матрицю гри на наявність сідлової точки. Якщо ціна гри співпадає з верхньою і нижньою цінами гри (сідлова точка є), то відповідні стратегії оптимальні.
3. Якщо сідлової точки нема, то розв’язок необхідно шукати серед мішаних стратегій шляхом зведення матричної гри до пари двоїстих задач.
4. Розв’язати отримані ЗЛП симплексним методом.
5. Знайти розв’язок матричної гри в мішаних стратегіях за формулами (7.30) і (7.35).

**Приклад 8.** Перевізник $A$ може надавати додаткові послуги трьох видів $A_1, A_2, A_3$, отримуючи прибуток, який залежить від попиту, що може набувати один з п’яти станів $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$. Знайти оптимальні пропорції розподілу додаткових послуг, що гарантують середню величину прибутку перевізнику $A$ при будь-якому стані попиту, якщо вважати його невизначеним. Платіжна матриця гри надана в табл. 7.22.

Таблиця 7.22

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 2 | 3 | 7 | 2 |
| $A_2$ | 4 | -1 | 5 | 2 | 4 |
| $A_3$ | 6 | 1 | 7 | 6 | 6 |

**Розв'язання.** За теоремою 5 збільшимо ціну гри на 1 (модуль найменшого від'ємного елемента платіжної матриці). Тоді всі елементи нової платіжної матриці будуть невід'ємними (табл. 7.23). Потім, закінчивши обчислення, справжнє значення ціни гри знайдемо, віднявши 1 від отриманого значення ціни.

Таблиця 7.23

Платіжна матриця гри з невід'ємними елементами

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $\min\limits_j a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 3 | 4 | 8 | 3 | **2** |
| $A_2$ | 5 | 0 | 6 | 3 | 5 | 0 |
| $A_3$ | 7 | 2 | 8 | 7 | 7 | **2** |
| $\max\limits_i a_{ij}$ | 7 | **3** | 8 | 8 | 7 | $\alpha = \max\{2;0;2\} = 2$,<br>$\beta = \min\{7;3;8;8;7\} = 3$ |

Визначимо верхню і нижню ціни гри за формулами (7.3) та (7.5):

$\alpha = \max\limits_i \{2;0;2\} = 2$ та $\beta = \min\limits_j \{7;3;8;8;7\} = 3$. Оскільки $\alpha \neq \beta$ (гра не має сідлової точки), то цю гру будемо розв'язувати за допомогою мішаних стратегій.

Проаналізуємо платіжну матрицю гри, що надано в табл. 7.23.

Стратегія $B_1$ гравця $B$ домінує над стратегією $B_5$, яка є гіршою, ніж $B_1$, оскільки гравцю $B$ стратегія $B_5$ несе найбільший програш. Тому стратегію $B_5$ можна виключити з платіжної матриці (табл. 7.24).

Таблиця 7.24

Платіжна матриця гри без стратегії $B_5$

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 3 | 4 | 8 |
| $A_2$ | 5 | 0 | 6 | 3 |
| $A_3$ | 7 | 2 | 8 | 7 |

Стратегія $B_2$ гравця $B$ домінує над стратегією $B_3$. Гравцю $B$ стратегію $B_3$ невигідно застосовувати, тому її можна виключити з платіжної матриці (табл. 7.25).

Таблиця 7.25

Платіжна матриця гри без стратегій $B_5$, $B_3$

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 3 | 8 |
| $A_2$ | 5 | 0 | 3 |
| $A_3$ | 7 | 2 | 7 |

Проаналізуємо гру з боку гравця $A$. Стратегія $A_2$ є гіршою, ніж стратегія $A_3$, оскільки гравцю $A$ вона несе менший виграш, тому її можна виключити з платіжної матриці (табл. 7.26).

Таблиця 7.26

Платіжна матриця гри без стратегій $B_5$, $B_3$, $A_2$

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 3 | 8 |
| $A_3$ | 7 | 2 | 7 |

Стратегія $B_4$ гравця $B$ є невигідною (стратегія $B_1$ домінує над стратегією $B_4$). Тому стратегію $B_4$ виключаємо з платіжної матриці (табл. 7.27).

Таблиця 7.27

Платіжна матриця гри без стратегій $B_5$, $B_3$, $A_2$, $B_4$

| | $B_1$ | $B_2$ | $x_i$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 3 | $x_1$ |
| $A_3$ | 7 | 2 | $x_3$ |
| $y_j$ | $y_1$ | $y_2$ | |

Розв'язуємо матричну гру, платіжна матриця якої дана в табл. 7.27, шляхом зведення до пари двоїстих задач.

| Для гравця $A$ | Для гравця $B$ |
|---|---|
| $f = x_1 + x_3 \to \min$, (7.37) | $g = y_1 + y_2 \to \max$, (7.39) |
| $\begin{cases} 2x_1 + 7x_3 \ge 1, \\ 3x_1 + 2x_3 \ge 1, \end{cases}$ (7.38) <br> $x_1 \ge 0, x_3 \ge 0$ | $\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \le 1, \\ 7y_1 + 2y_2 \le 1, \end{cases}$ (7.40) <br> $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$ |

Зручніше розв'язувати ЗЛП для гравця $B$, оскільки її початковий план є опорним. Потім розв'язок задачі, яка відповідає гравцю $A$, знайдемо на основі співвідношень двоїстості.

Введемо балансуючі змінні $y_6, y_7$ (початкова задача містить п'ять стратегій гравця $B$) у систему обмежень (7.40):

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_6 = 1, \\ 7y_1 + 2y_2 + y_7 = 1, \end{cases} \tag{7.41}$$
$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_6 \ge 0, y_7 \ge 0.$$

За виразами (7.39) і (7.40) складаємо симплексну таблицю (табл. 7.28).

Таблиця 7.28

Симплексна таблиця

| | | Вільна змінна | | Вільний член | Симплексні відношення |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $-y_1$ | $-y_2$ | $1$ | |
| Базисна змінна | $y_6$ | 2 | 3 | 1 | 1/2 |
| | $y_7$ | 7 | 2 | 1 | 1/7 |
| Цільова функція | $g$ | -1 | -1 | 0 | $\min\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{7}\right\}=\frac{1}{7}$ |

Початковий опорний план $Y=(y_1,y_2,y_6,y_7)=(0{,}0{,}1{,}1)$ не є оптимальним. Оскільки оцінки цільового рядка однакові, то в якості провідного стовпця можна вибрати будь-який, наприклад $y_1$. Змінну, яку потрібно вивести з базису, визначають з умови мінімуму симплексних відношень, наведених у таблиці. Після перетворення таблиці за алгоритмом симплекс-методу, отримуємо табл. 7.29.

Таблиця 7.29

Ітерація 1

| Після обміну $y_1 \leftrightarrow y_7$ | | Вільна змінна | | Вільний член | Симплексні відношення |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $-y_7$ | $-y_2$ | $1$ | |
| Базисна змінна | $y_6$ | -2/7 | 17/7 | 5/7 | (5/7):(17/7)=5/17 |
| | $y_1$ | 1/7 | 2/7 | 1/7 | (1/7):(2/7)=1/2 |
| Цільова функція | $g$ | 1/7 | -5/7 | 1/7 | $\min\left\{\frac{5}{17};\frac{1}{2}\right\}=\frac{5}{17}$ |

Одержали новий опорний план $Y=(y_1,y_2,y_6,y_7)=\left(\frac{1}{7},0,\frac{5}{7},0\right)$, який збільшив значення цільової функції: $g=\frac{1}{7}$. Після ще одного кроку жорданових виключень з провідним елементом $a_{12}=\frac{17}{7}$ отримаємо табл. 7.30.

Таблиця 7.30

Ітерація 2

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Після обміну<br>$y_2 \leftrightarrow y_6$</td><td colspan="2">Вільна змінна</td><td>Вільний член</td></tr>
<tr><td>$-y_7$</td><td>$-y_6$</td><td>$1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Базисна змінна</td><td>$y_2$</td><td>-2/17</td><td>7/17</td><td>5/17</td></tr>
<tr><td>$y_1$</td><td>3/17</td><td>-2/17</td><td>1/17</td></tr>
<tr><td>Цільова функція</td><td>$g$</td><td>1/17</td><td>5/17</td><td>6/17</td></tr>
</table>

Отримуємо оптимальний розв’язок задачі (7.39), (7.40): $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, y_6^*, y_7^*\right) = \left(\frac{5}{17}, \frac{1}{17}, 0, 0\right)$, $\max g = \frac{6}{17}$.

Таким чином, для перетвореної платіжної матриці ціна гри $v = \frac{1}{\max g} = \frac{17}{6}$. Як наслідок, справжнє значення ціни гри дорівнює $v^* = v - 1 = \frac{17}{6} - 1 = \frac{11}{6}$.

Знайдемо ймовірності стратегій гравця $B$: $q_1^* = \frac{y_1^*}{v} = \frac{1}{6}$, $q_2^* = \frac{y_2^*}{v} = \frac{5}{6}$.

Оскільки стратегії $B_3, B_4, B_5$ були виключені, то $q_3^* = q_4^* = q_5^* = 0$.

Використовуючи зв'язок між змінними взаємодвоїстих задач, випишемо розв’язок для гравця $A$. Нагадаємо, що вільним змінним прямої задачі відповідають базисні змінні двоїстої і навпаки:

$$\begin{array}{cc|cc} y_1 & y_2 & y_6 & y_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ x_4 & x_5 & x_1 & x_3 \end{array}$$

Таким чином, $x_1 = \frac{5}{17}, x_3 = \frac{1}{17}$. Тоді оптимальна мішана стратегія гравця $A$

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1^* & p_2^* & p_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{x_1}{v} & \frac{x_2}{v} & \frac{x_3}{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Імовірність $p_2^* = 0$, оскільки стратегія $A_2$ була виключена з розгляду.

**Відповідь**: $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$v^* = \frac{11}{6}$.

Зауважимо, що спрощення платіжної матриці на початку розв'язання зменшило кількість змінних у ЗЛП, що скоротило час розрахунків, але можна було і не робити цього.

**Питання до розділу**

1. Що являє собою теорія ігор?
2. У чому полягає завдання теорії ігор?
3. У чому полягає конфліктна ситуація?
4. Що таке хід гравця і яким він може бути згідно з теорією ігор?
5. Що необхідно для побудови моделі конфліктної ситуації?
6. У чому полягає раціональна поведінка гравця?
7. Дайте визначення основних понять теорії ігор.
8. Які розрізняють ігри залежно від кількості учасників?
9. Що називають партією в теорії ігор?
10. Як поділяють багатоходові ігри?
11. Наведіть приклади простих матричних ігор.
12. Класифікація ігор.
13. Що визначає результат матричної гри?
14. Що визначає платіжна матриця?
15. Що являють собою нижня і верхня ціни гри?
16. Що називається сідловою точкою гри?
17. Що називається розв'язком матричної гри?
18. Що називають чистою стратегією гравця?
19. Коли гру можна розв'язати в чистих стратегіях?

20. Дайте пояснення геометричної інтерпретації гри розміром $2 \times 2$.

21. Графоаналітичний розв'язок ігор $m \times 2$ і $2 \times n$.

22. Як визначити максимін, мінімакс?

23. Визначення ціни гри.

24. Принципи скорочення розмірності платіжної матриці.

25. Визначення мішаної стратегії.

26. Коли гру можна розв'язати в мішаних стратегіях?

27. Які матричні ігри мають розв'язок?

28. Метод розв'язку скінченої гри з сідловою точкою.

29. Методи розв'язку скінченої гри без сідлової точки.

30. Зведення скінченої гри без сідлової точки до задачі лінійного програмування.

**Завдання**

**1**. Знайти сідлову точку і ціну гри, що задано платіжною матрицею (табл. 7.31).

Таблиця 7.31

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 9 | 7 | 3 | 9 |
| $A_2$ | 9 | 10 | 5 | 6 |
| $A_3$ | 8 | 6 | 4 | 6 |

**Відповідь**: $\alpha = \beta = v = 5, i = 2, j = 3$.

**2.** Знайти сідлову точку і ціну гри, що задано платіжною матрицею (табл. 7.32).

Таблиця 7.32

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | -4 | -3 | 7 |
| $A_2$ | -4 | -5 | -6 | 0 |
| $A_3$ | 6 | 11 | -2 | 4 |
| $A_4$ | 8 | 3 | -9 | 7 |

**Відповідь**: $\alpha = \beta = v = -2, i = 3, j = 3$.

**3.** Визначити нижню і верхню ціни гри та знайти розв'язок гри за даною платіжною матрицею (табл. 7.33).

Таблиця 7.33

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 |
| $A_2$ | 3 | 4 | 6 | 7 | 6 |
| $A_3$ | 7 | 6 | 10 | 8 | 11 |
| $A_4$ | 8 | 5 | 4 | 7 | 3 |

**Відповідь**: $\alpha = \beta = v = 6, i = 3, j = 2$, оптимальні стратегії гравців $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**4.** Спростити платіжні матриці (табл. 7.34, 7.35).

Таблиця 7.34

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 8 | 3 | 4 | 5 |
| $A_2$ | 3 | 5 | 6 | 2 | 8 |
| $A_3$ | 4 | 5 | 6 | 2 | 8 |
| $A_4$ | 3 | 6 | 1 | 2 | 4 |
| $A_5$ | 5 | 8 | 3 | 4 | 5 |

Таблиця 7.35

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 12 | 6 | 12 | 8 |
| $A_2$ | 18 | 9 | 6 | 12 |
| $A_3$ | 12 | 12 | 6 | 6 |
| $A_4$ | 6 | 6 | 6 | 3 |

**5.** Знайти розв'язок гри, яку задано платіжною матрицею (табл. 7.36).

Таблиця 7.36

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 5 |
| $A_2$ | 3 | 2 |

**Відповідь**: $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $v = \frac{11}{4}$.

**6.** Знайти графічно розв'язок гри, яку задано платіжною матрицею:

а) табл. 7.37;
б) табл. 7.38;
в) табл. 7.39;
г) табл. 7.40;
д) табл. 7.41.

Таблиця 7.37

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 3 |
| $A_2$ | 1 | 2 |

Таблиця 7.38

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 3 |
| $A_2$ | 2 | 2 |

Таблиця 7.39

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 3 |
| $A_2$ | 2 | 4 |

Таблиця 7.40

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 4 |
| $A_2$ | 2 | 3 |

Таблиця 7.41

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 4 |
| $A_2$ | 5 | 2 |

**Відповідь**:

а) подане на рис. 7.10, 7.11; $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v = 3$.

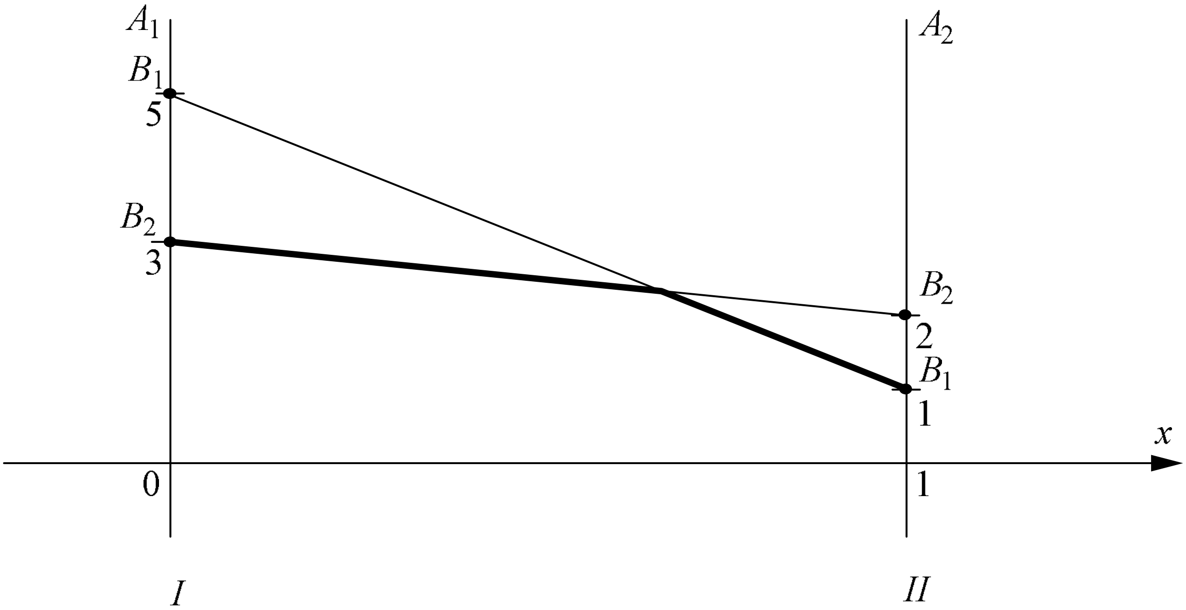



Рис. 7.10. Зображення матричної гри гравця А

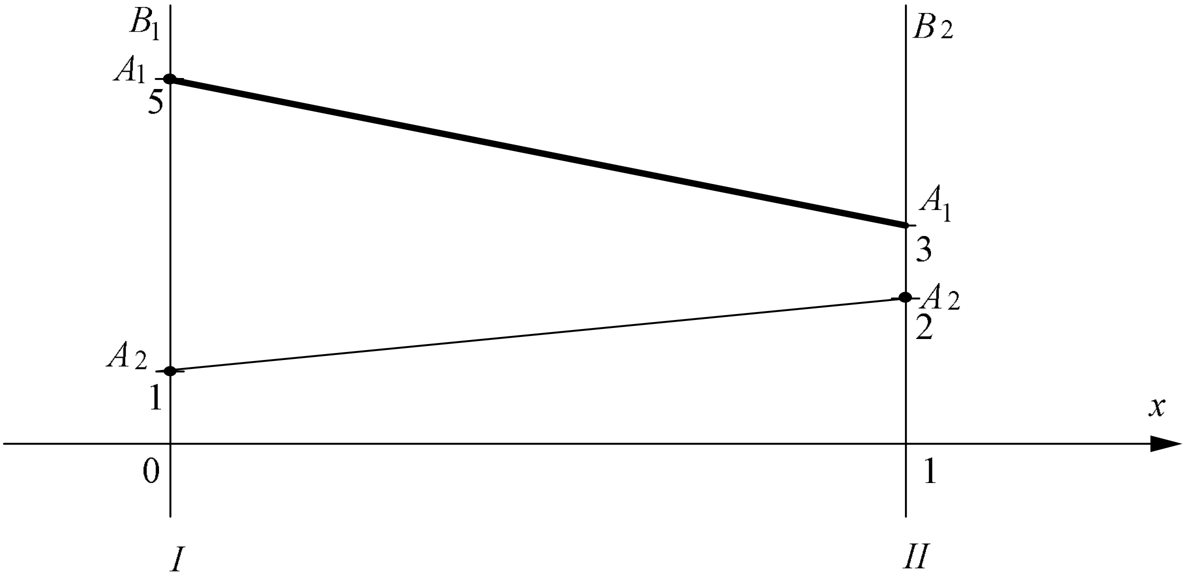



Рис. 7.11. Зображення матричної гри гравця $B$

б) подане на рис. 7.12, 7.13; $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v = 3$.

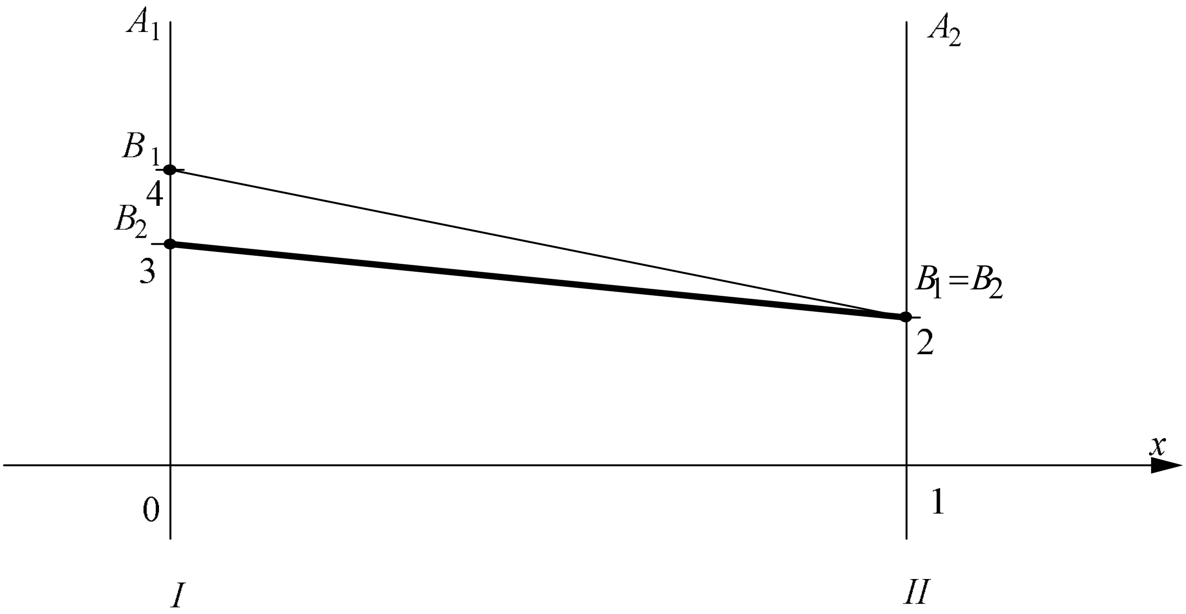



Рис. 7.12. Зображення матричної гри гравця А

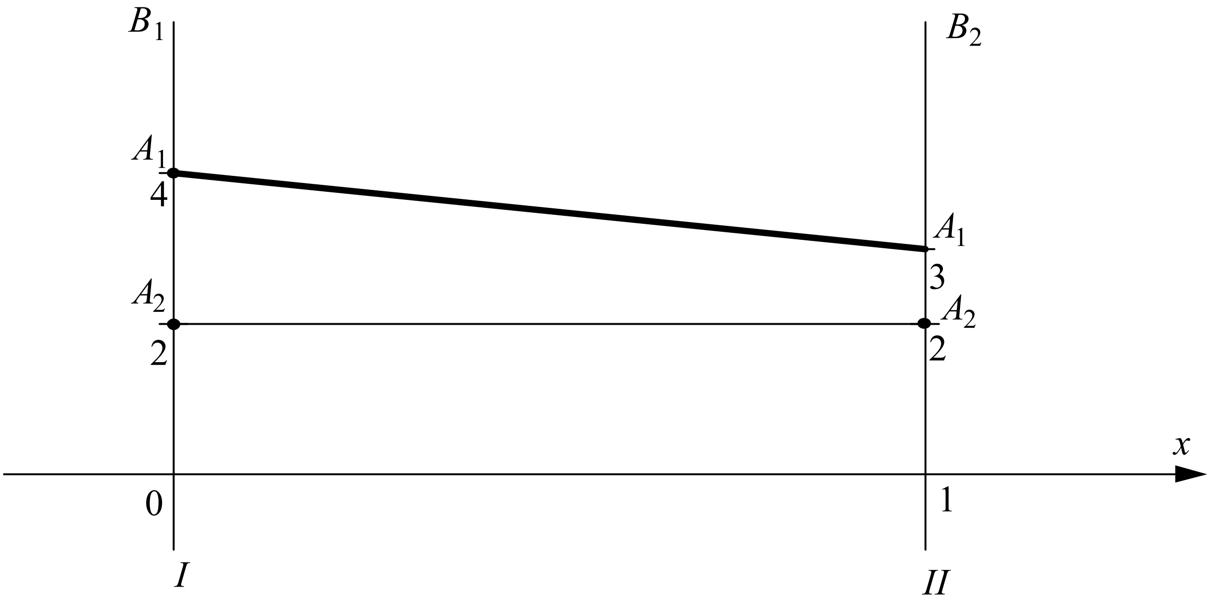



Рис. 7.13. Зображення матричної гри гравця $B$

в) подане на рис. 7.14, 7.15; $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v = 3$.

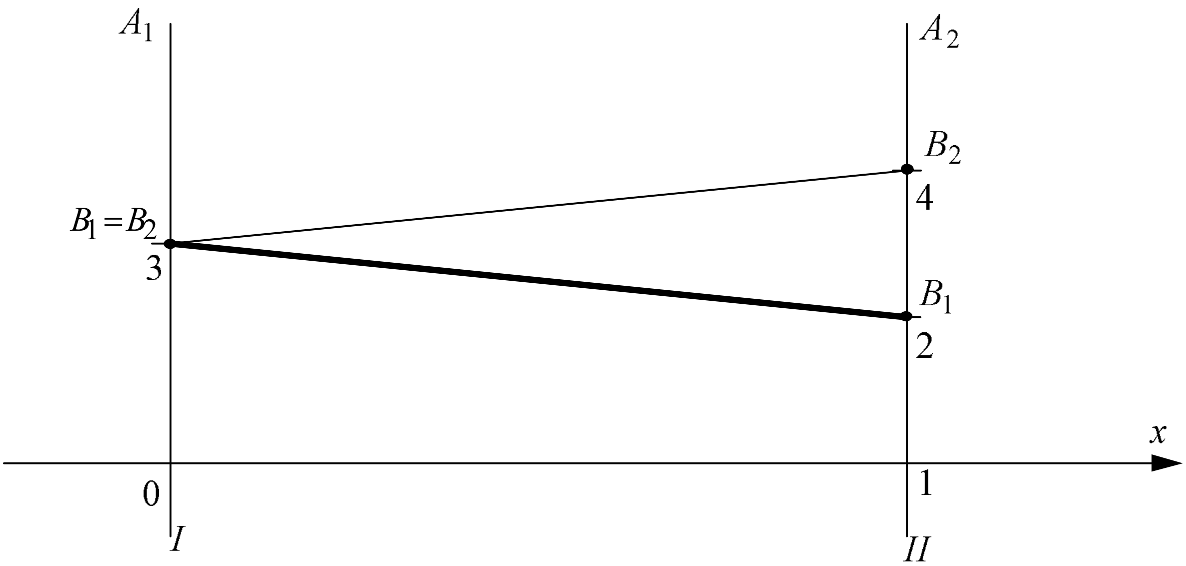



Рис. 7.14. Зображення матричної гри гравця А

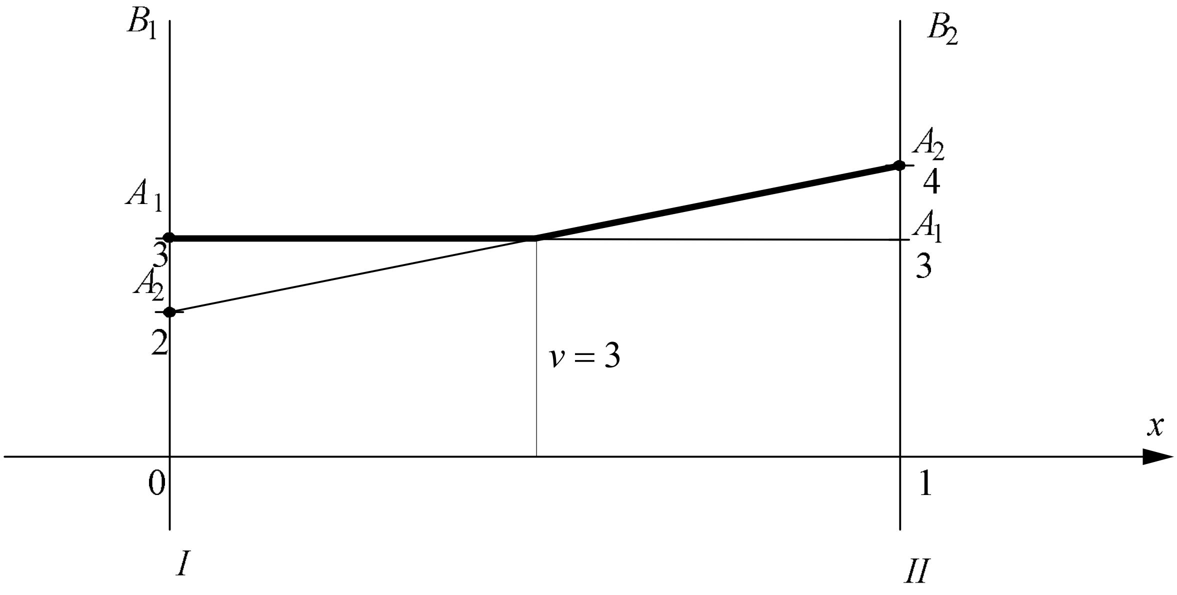



Рис. 7.15. Зображення матричної гри гравця $B$

г) подане на рис. 7.16, 7.17;

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \left[ \begin{array}{l} S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad v = 4.$$

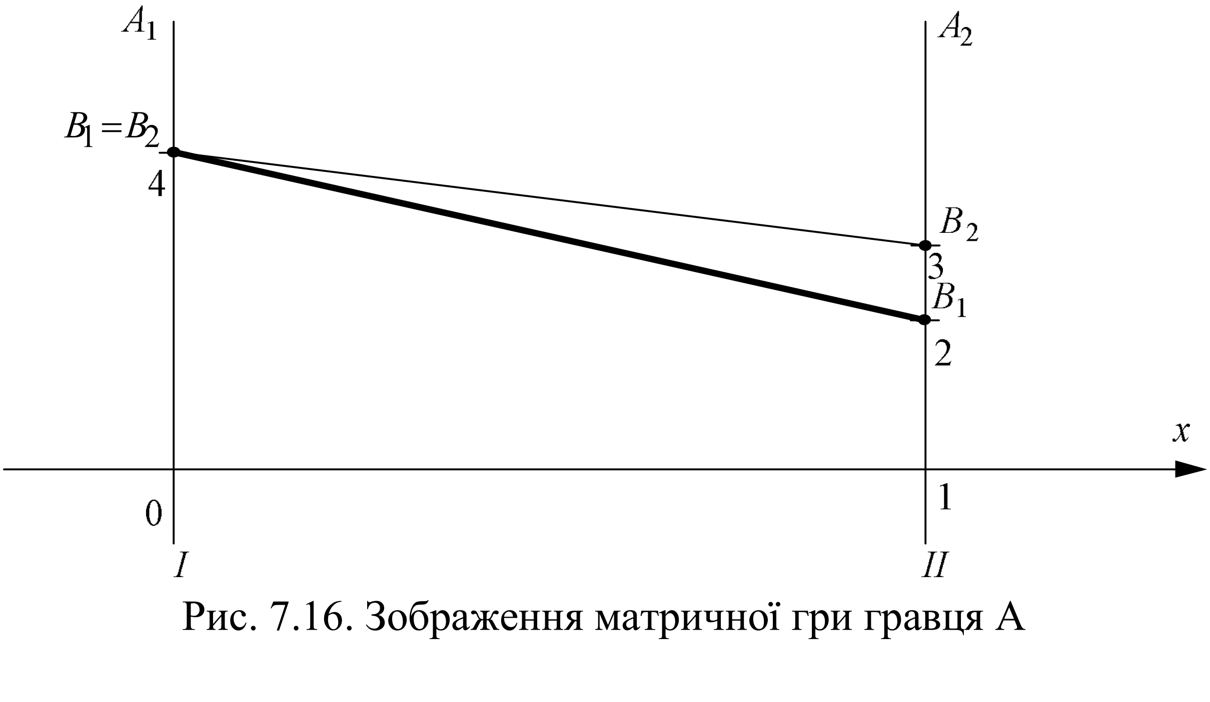



Рис. 7.16. Зображення матричної гри гравця А

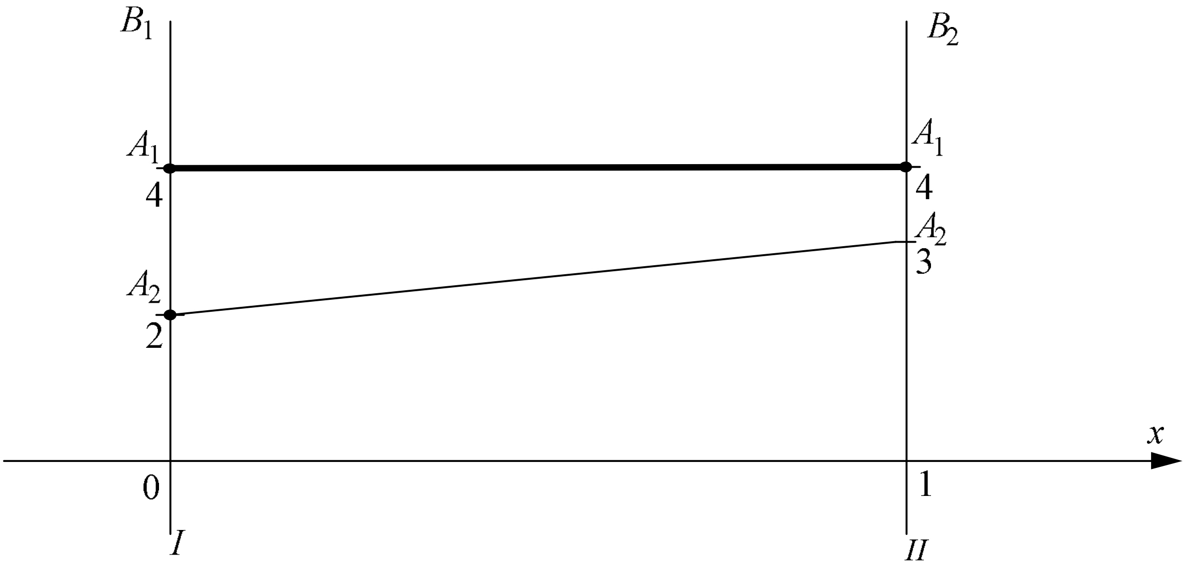



Рис. 7.17. Зображення матричної гри гравця $B$

д) подане на рис. 7.18, 7.19; $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, v = 3$.

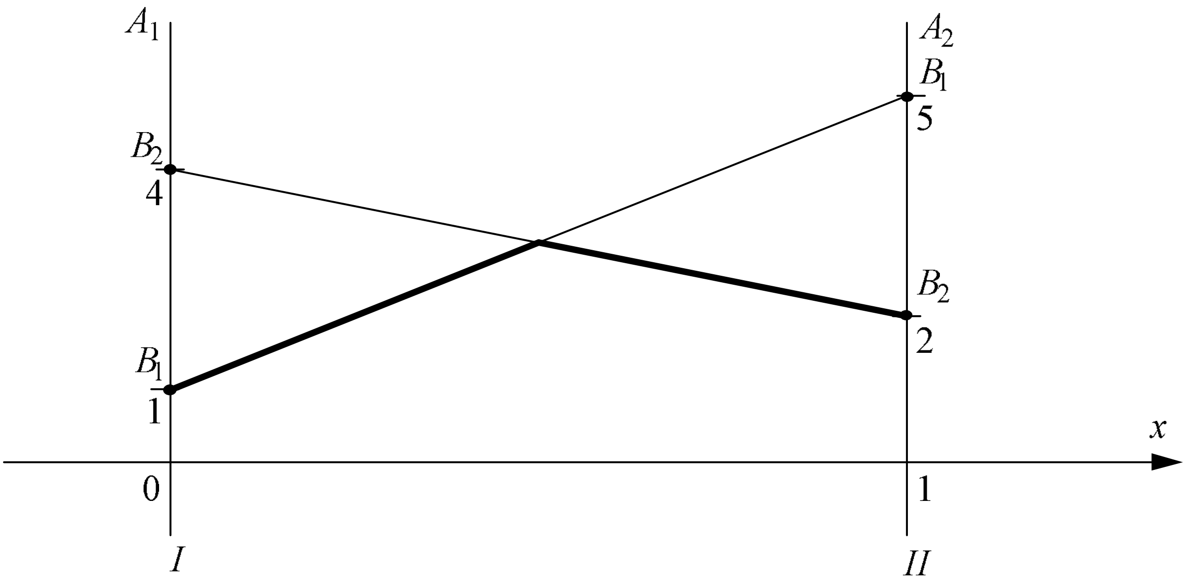



Рис. 7.18. Зображення матричної гри гравця А

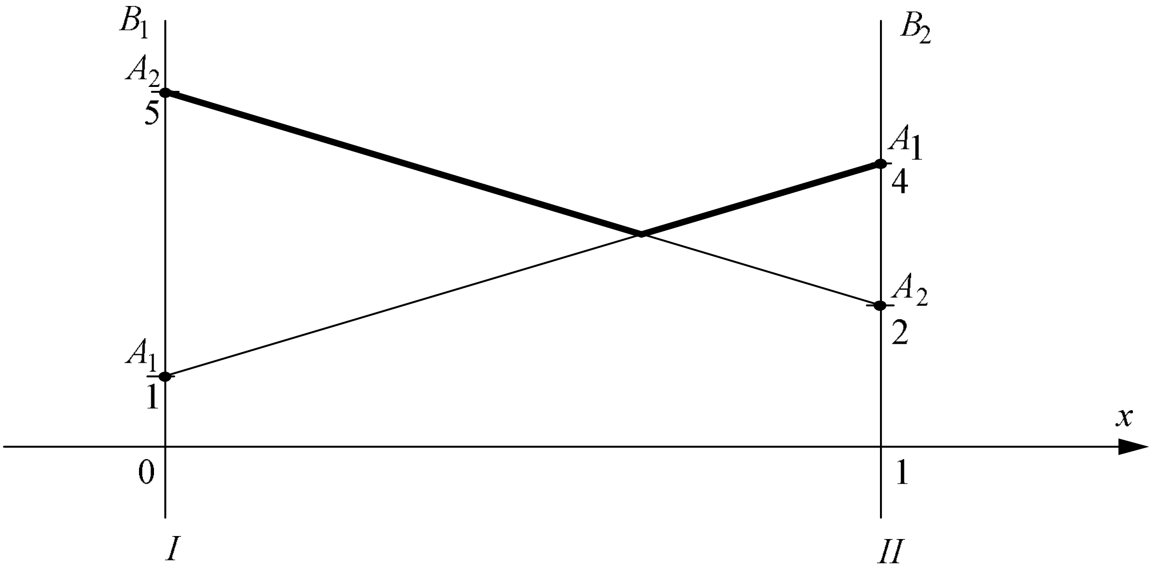



Рис. 7.19. Зображення матричної гри гравця $B$

**7.** Розв’язати матричну гру графоаналітичним методом:
а) табл. 7.42; б) табл. 7.43; в) табл. 7.44; г) табл. 7.45; д) табл. 7.46.

Таблиця 7.42

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 3 | 11 |
| $A_2$ | 7 | 5 | 2 |

Таблиця 7.43

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 6 | 5 |
| $A_2$ | 4 | 6 |
| $A_3$ | 2 | 7 |
| $A_4$ | 1 | 8 |

Таблиця 7.44

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 2 | 3 | -1 |
| $A_2$ | 4 | 3 | 2 | 6 |

Таблиця 7.45

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 4 |
| $A_2$ | 2 | 3 |
| $A_3$ | 3 | 2 |
| $A_4$ | -2 | 6 |

Таблиця 7.46

Платіжна матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 8 | -2 | 1 | -2 | 5 | 2 |
| $A_2$ | 5 | 3 | 2 | 6 | 1 | 4 |

**Відповідь**:

а) подане на рис. 7.20; $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \end{pmatrix}, S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & \frac{9}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}, v = \frac{49}{11}$.

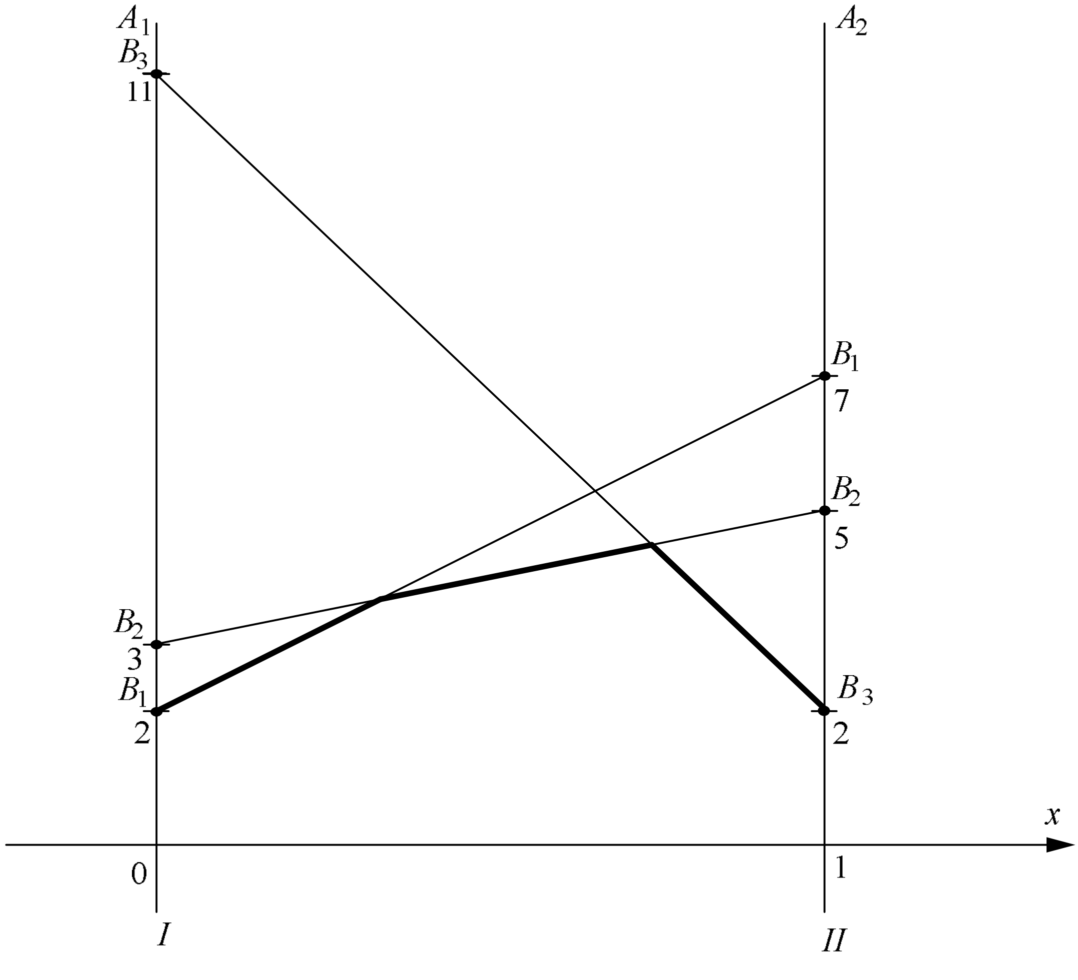



Рис. 7.20. Зображення матричної гри гравця А

б) подане на рис. 7.21; $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \frac{7}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$, $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$,

$v = \frac{43}{8}$.

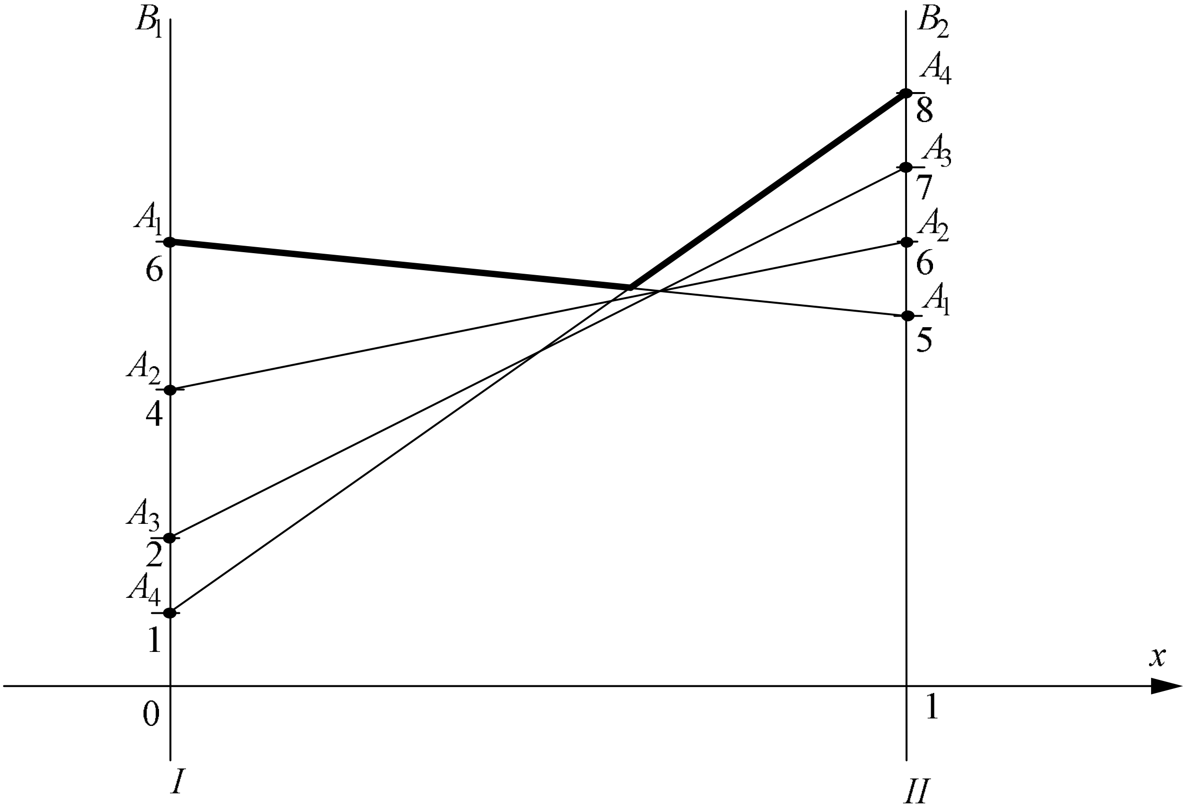



Рис. 7.21. Зображення матричної гри гравця $B$

в) подане на рис. 7.22; $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$,

$v = \frac{5}{2}$.

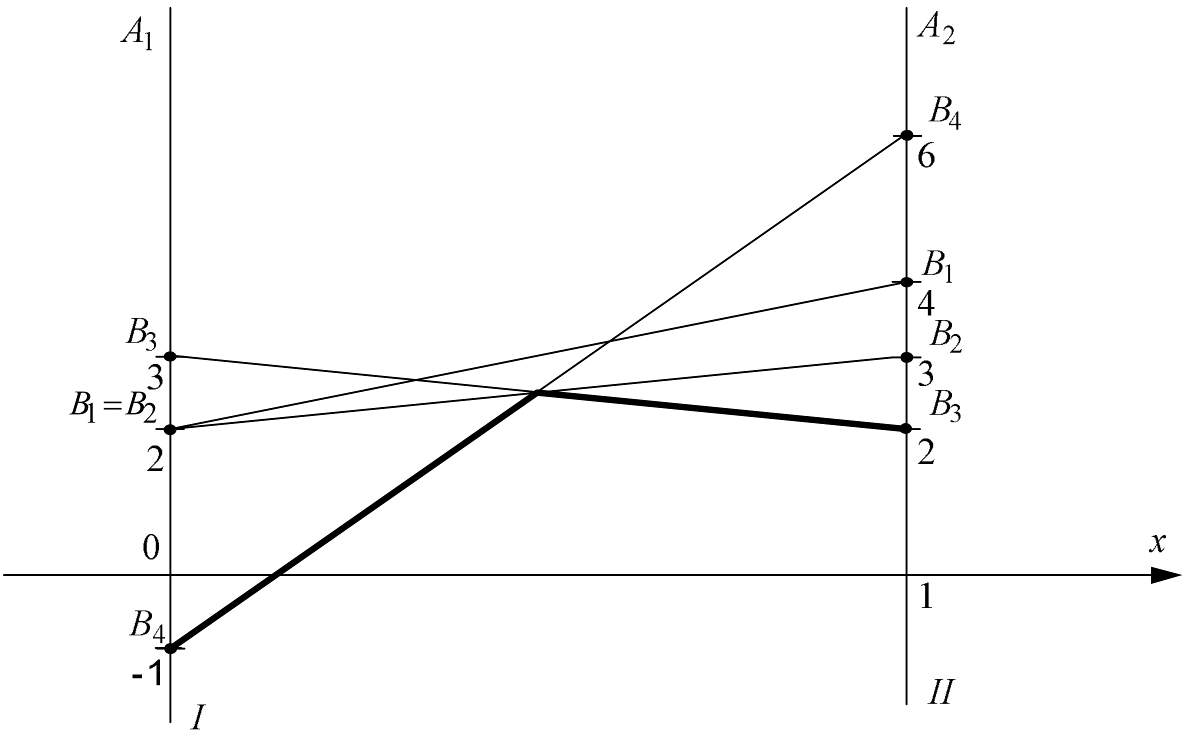



Рис. 7.22. Зображення матричної гри гравця А

г) подане на рис. 7.23; $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$, $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $v = \frac{8}{3}$.

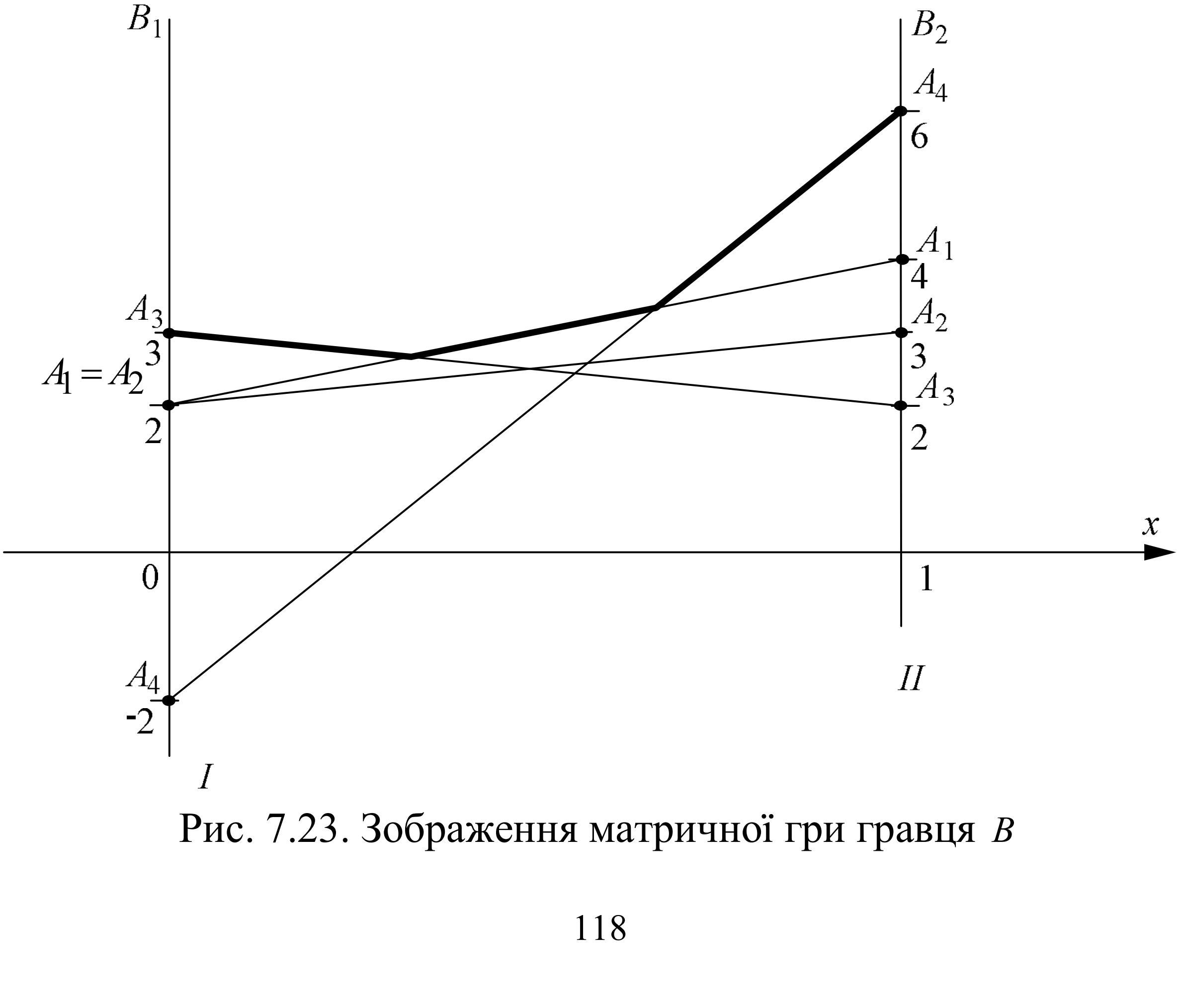



Рис. 7.23. Зображення матричної гри гравця $B$

д) подане на рис. 7.24; $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$,

$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}, v = \frac{9}{5}.$

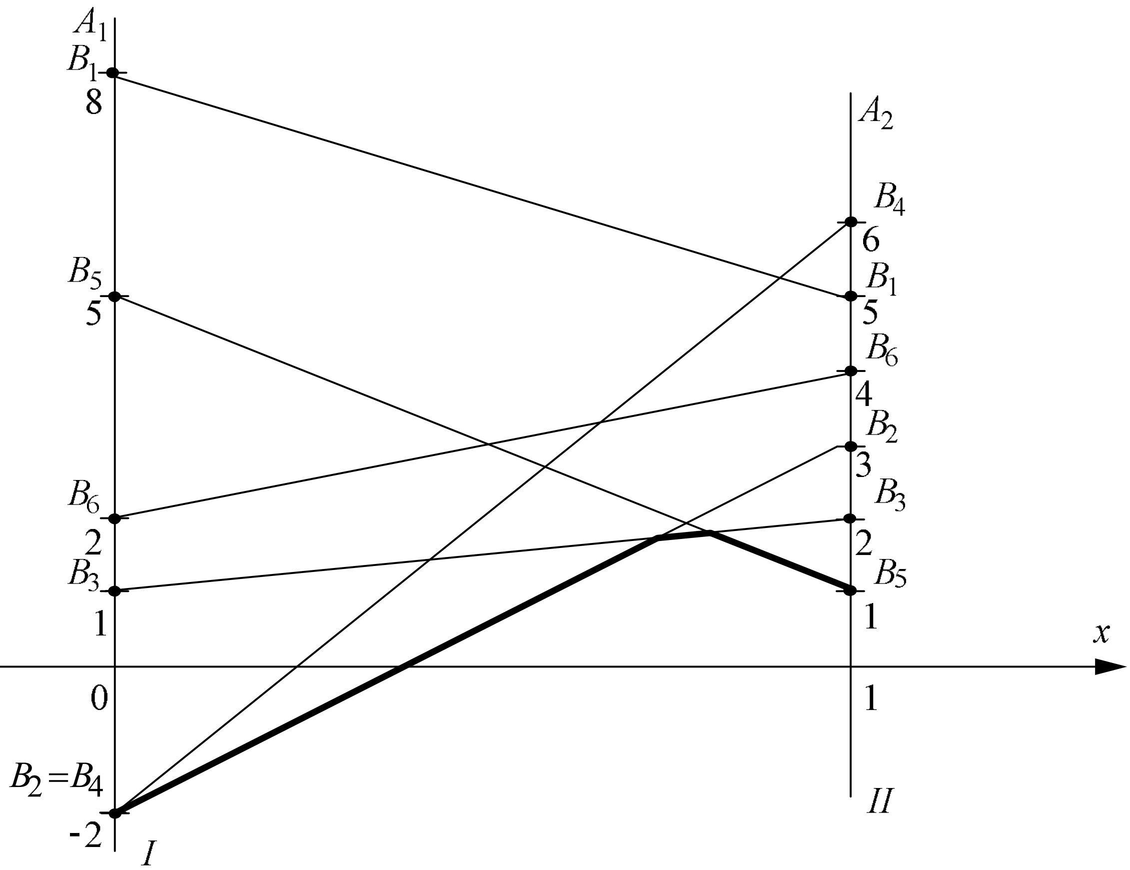



Рис. 7.24. Зображення матричної гри гравця А

**8**. Задано платіжну матрицю. Розв'язати матричну гру в мішаних стратегіях, попередньо спростивши матрицю:

а) графічним методом;

б) алгебраїчним методом;

в) методом зведення до пари двоїстих задач лінійного програмування.

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 1 \\ 7 & 4 & 8 & 6 \\ 9 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Відповідь**: $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $v = \frac{14}{3}$.

**9**. Фірма «Конструкція» − виробник залізничних виробів у регіоні. Відомо, що пік попиту на деякі вироби припадає на літній період (залізобетонні шпали), а інші – на осінній і весняний періоди (мостові конструкції). Витрати на 1 умов. од. продукції за вересень-жовтень склали:

- по першій групі (залізобетонні шпали) – 20 грош. од.;
- по другій групі (мостові конструкції) – 150 грош. од.

За даними досліджень, проведених відділом маркетингу за декілька останніх років, встановлено, що фірма може реалізувати протягом цих двох місяців в умовах теплої погоди – 3000 умов. од. продукції першої групи та 300 умов. од. продукції другої групи; а в умовах холодної погоди – 1300 умов. од. продукції першої групи та 350 умов. од. – другої групи. У зв'язку з можливими змінами погоди визначити стратегію фірми з випуску продукції, яка забезпечить фірмі максимальний прибуток від реалізації за ціною продукції за 1 умов. од. продукції першої групи 40 грош. од. та другої групи – 250 грош. од.

Отримані у ході розв'язання ймовірності округлити до другого знака після коми.

**Відповідь**. *Вказівка.* Позначимо стратегії фірми:

$A_1$ − у цьому році погода буде теплою;

$A_2$ − у цьому році погода буде холодною.

Отримаємо платіжну матрицю (табл. 7.47).

Таблиця 7.47

Платіжна матриця

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 90000 | 22000 |
| $A_1$ | 48500 | 61000 |

$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0{,}16 & 0{,}84 \end{pmatrix}$, $v = 55140$. Оптимальною стратегією для фірми буде виробництво 1572 умов. од. і 342 умов. од. продукції першої та другої групи відповідно, у результаті цього вона отримає гарантований прибуток у розмірі 55140 грош. од.

**10.** Залізнична компанія А зацікавлена у придбанні акцій залізничної компанії $B$. Прагнучи зробити покупку якомога більш вигідною, компанія А надає продавцю інформацію про реальну вартість акцій, яка може бути як істинною $(A_1)$, так і свідомо помилковою $(A_2)$. Продавець може як повірити інформації $(B_1)$, так і не повірити $(B_2)$. У якості платежу використовується прибуток від придбаних акцій по відношенню до вкладених коштів. Платіжна матриця має вигляд табл. 7.48.

Таблиця 7.48

Платіжна матриця

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 0,6 | 1,0 |
| $A_2$ | 1,0 | 0,5 |

Яка нижня ціна гри $\alpha$ і якої стратегії необхідно дотримуватись залізничній компанії $A$, щоб забезпечити собі виграш не менший, ніж $\alpha$?

**Відповідь**: $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$, $\alpha = 0{,}6$.

**11.** Розв’язати матричну гру методами лінійного програмування, заданою платіжною матрицею:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

**Відповідь**:

$$a)\ S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},\ S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},\ v = \frac{5}{2};$$

$$\text{б)}\ S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\ S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},\ v = 5;$$

$$\text{в)}\ S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix},\ S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix},\ v = -\frac{6}{7};$$

$$\text{г)}\ S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{10} & \frac{8}{15} \end{pmatrix},\ S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix},\ v = -\frac{11}{10}.$$

**12.** Звести подану нижче задачу теорії ігор до ЗЛП та розв’язати її.

На дільниці між двома залізничними станціями довжиною 20 км пошкоджено підземну лінію зв’язку в невідомому місці. Необхідно знайти місце знаходження в найкоротший термін. Дільницю розподілено на два райони пошуку, де може знаходитись пошкодження. Для усунення пошкодження виділено три групи механіків зв’язку. Кожна група має свою окрему ділянку пошуку в межах обраного району та проводить свою роботу незалежно від інших груп. Імовірність виявлення пошкодження в першому районі кожної групою механіків дорівнює 0,1, а у другому – 0,3. Визначити оптимальну схему розташування груп механіків зв’язку по районах пошуку.

**Відповідь**. *Вказівка*. Стратегії $A_1$ − три групи механіків зв’язку направити в перший район; $A_2$ − дві групи механіків зв’язку направити в перший район, одну – у другий; $A_3$ − одну групу механіків зв’язку направити в перший район, дві – у другий; $A_4$ − три групи механіків зв’язку направити в другий район. Отримаємо платіжну матрицю (табл. 7.49).

Таблиця 7.49

Розподіл ймовірностей в залежності
від розташування груп механіків

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 0,243 | 0 |
| $A_2$ | 0,18 | 0,3 |
| $A_3$ | 0,1 | 0,42 |
| $A_4$ | 0 | 0,441 |

$$\alpha = 0{,}18,\ \beta = 0{,}243,\ S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \frac{40}{121} & \frac{81}{121} & 0 & 0 \end{pmatrix},\ v = \frac{243}{1210}.$$

**13.** Підприємство УДТЛЦ «ЛІСКИ» в м. Харкові, яке має одну з декількох обмежену в розмірах контейнерну площадку, може розмістити на ній вантажні контейнери трьох типів $(A_1, A_2, A_3)$. Кількість контейнерів залежить від нерівномірності перевезень вантажу, яка може знаходитись в одному з чотирьох станів $(B_1, B_2, B_3, B_4)$. За даними табл. 7.50 визначити співвідношення, у якому підприємству слід приймати контейнери на дану площадку незалежно від нерівномірності перевезень. Відповідь округлити.

Таблиця 7.50

Кількість контейнерів в залежності від нерівномірності перевезень

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 105 | 58 | 200 | 70 |
| $A_2$ | 207 | 100 | 187 | 83 |
| $A_3$ | 57 | 167 | 127 | 100 |

**Відповідь**: 26 % контейнерів типу $A_2$, 74 % контейнерів типу $A_3$.

**14**. Деяка фірма $A$ веде переговори про укладення контракту з фірмою $B$. Платіжна матриця, що відображає інтереси договірних сторін, має вигляд табл. 7.51.

Таблиця 7.51

Розподіл прибутку фірми $A$ та витрат фірми $B$

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 70 | 100 | 60 | 40 |
| $A_2$ | 65 | 55 | 50 | 35 |
| $A_3$ | 75 | 85 | 30 | 45 |
| $A_4$ | 90 | 95 | 45 | 50 |

Визначити оптимальні стратегії, які треба обрати кожній фірмі.

**Відповідь**: $\alpha = 45,\ \beta = 50,\ S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix},$

$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix},\ v = 48.$

Таким чином, фірмі $A$ треба обрати стратегію $A_1$ у 20 % випадках і стратегію $A_2$ у 80 % випадках. Фірма $B$ повинна обрати стратегію $B_3$ з імовірністю 0,4 і стратегію $B_4$ з імовірністю 0,6.

# Розділ 8
# ПОТОКИ ПОДІЙ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ

## 8.1. Найпростіший (пуассонівський) потік

Розглянемо випадкові події $A_i$, які можуть настати в будь-які випадкові моменти часу. Послідовність подій $A_i$, які настають одна за одною у випадкові моменти часу, називають *потоком подій*.

Тобто *потік подій* – це послідовність однорідних подій, що відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу.

Прикладами потоків подій можуть бути:

- потік викликів на телефонній станції;
- потік автомобілів, що під’їжджають на автозаправну станцію;
- прибуття вагонів на переробку до сортувальної станції;
- робота квиткової каси;
- добова подача вагонів до складу підприємства і т. д.

Події, які утворюють потік, взагалі можуть бути і неоднорідними. Наприклад, потік автомобілів, що під’їжджають на автозаправну станцію, поділяються на легкові та вантажні.

Надалі ми розглядатимемо лише потоки однорідних подій. Їх зручно графічно зображувати на осі часу послідовністю точок $t_1, t_2, t_3, ...$, які відповідають моментам настання подій.

Потік подій називають *регулярним*, якщо події відбуваються одна за одною через однакові проміжки часу.

З потоком однорідних подій можна пов’язати процес їх нагромадження. Якщо позначимо через $X(t)$ − кількість подій потоку, які відбулись до моменту часу $t$, то отримаємо східчасту фігуру (рис. 8.1), яка в момент появи чергової події піднімається на одиницю і зберігає це значення до появи наступної події в потоці.

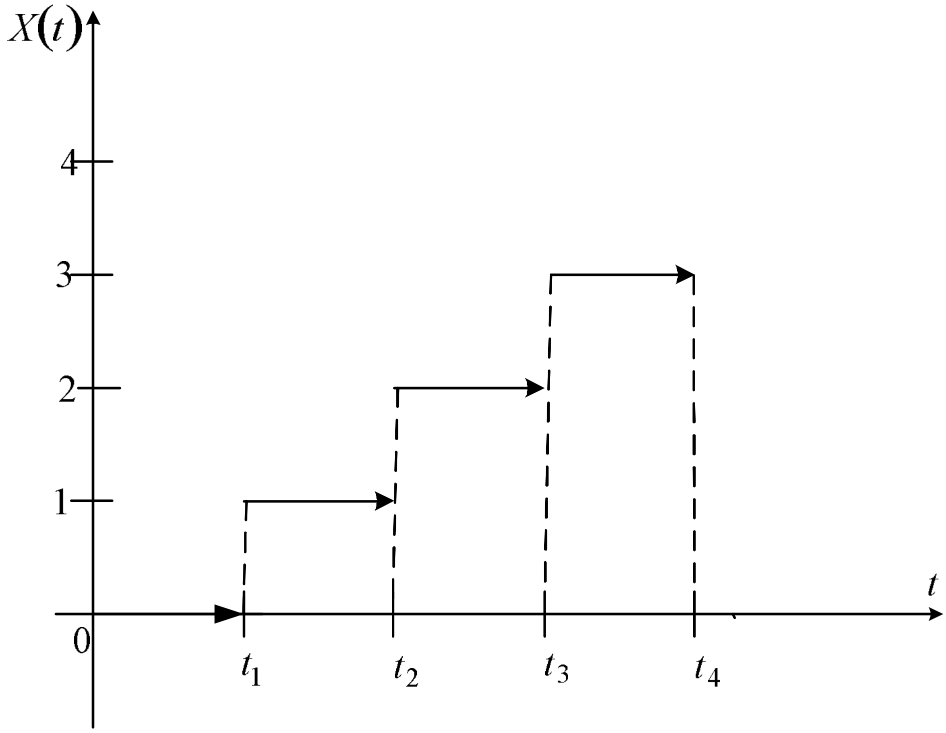



Рис. 8.1. Графік функції $X(t)$

### 8.1.1. Властивості потоків подій

**1. *Ординарність***

Потік подій називається *ординарним*, якщо ймовірність потрапляння на елементарний проміжок часу $\Delta t$ двох і більше подій дуже мала порівняно з імовірністю потрапляння однієї події. Тобто ординарний потік характеризується тим, що події відбуваються в ньому по одній, а не по дві, по три і т. д. одночасно.

Наприклад, потік потягів, що прибувають на станцію, є ординарним, а потік вагонів – неординарним.

Розглянемо елементарний проміжок часу $\Delta t$, який безпосередньо прилягає до точки $t$ (рис. 8.2).

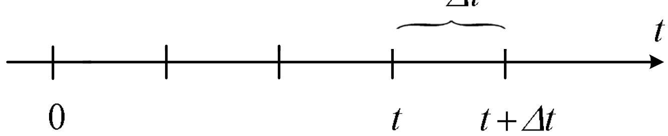



Рис. 8.2. Елементарний проміжок часу $\Delta t$

Ординарність потоку подій означає, що можна знехтувати ймовірністю того, що подія відбудеться більш ніж один раз, якщо проміжок $\Delta t$ досить малий, тобто коли $\Delta t \to 0$, ці ймовірності вищого порядку малості, ніж імовірність появи однієї події.

Введемо позначення:

- $p_0(t, \Delta t)$ – імовірність того, що на проміжку $(t; t+\Delta t)$ не відбудеться жодної події;
- $p_1(t, \Delta t)$ – імовірність того, що на проміжку $(t; t+\Delta t)$ відбудеться одна подія;
- $p_k(t, \Delta t)$ – імовірність того, що на проміжку $(t; t+\Delta t)$ відбудеться $k$ подій $(k > 1)$.

Для довільного $\Delta t$

$$p_0(t, \Delta t) + p_1(t, \Delta t) + p_k(t, \Delta t) = 1, \tag{8.1}$$

оскільки ця сума ймовірностей подій, утворюючих повну групу подій. Причому для ординарного потоку

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_k(t, \Delta t)}{\Delta t} = 0. \tag{8.2}$$

Отже, для ординарного потоку подій можна знехтувати ймовірністю появи двох чи більше подій на проміжку $\Delta t$.

Введемо випадкову величину $X(t, \Delta t)$ – кількість появ подій на елементарному проміжку $(t; t+\Delta t)$. Тоді ряд розподілу випадкової величини $X(t, \Delta t)$ має вигляд табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Ряд розподілу випадкової величини $X(t, \Delta t)$

| $X$ | 0 | 1 | 2 | … |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_0(t, \Delta t)$ | $p_1(t, \Delta t)$ | $p_2(t, \Delta t)$ | … |

Математичне сподівання випадкової величини $X(t, \Delta t)$:

$$M[X(t, \Delta t)] = 0 \cdot p_0(t, \Delta t) + 1 \cdot p_1(t, \Delta t) + 2 \cdot p_2(t, \Delta t) + \ldots = p_1(t, \Delta t) + \bar{o}(t, \Delta t),$$

де $\bar{o}(t,\Delta t)$ − нескінченно мала величина вищого порядку малості, ніж $\Delta t$.

Знайдемо границю відношення $M[X(t,\Delta t)]$ до довжини проміжку $\Delta t$ при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M[X(t,\Delta t)]}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{p_1(t,\Delta t)}{\Delta t}+\frac{\bar{o}(t,\Delta t)}{\Delta t}\right).$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\bar{o}(t,\Delta t)}{\Delta t}=0$, отримаємо

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M[X(t,\Delta t)]}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_1(t,\Delta t)}{\Delta t}. \tag{8.3}$$

Якщо існує $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{M[X(t,\Delta t)]}{\Delta t}$, то цю границю називають *інтенсивністю* ординарного потоку подій у момент $t$.

Позначимо через $\lambda(t)$ інтенсивність потоку. Тоді

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M[X(t,\Delta t)]}{\Delta t}. \tag{8.4}$$

Зміст інтенсивності $\lambda(t)$ потоку подій – це *середня кількість подій, які відбуваються за одиницю часу*.

Таким чином, з виглядів (8.3) і (8.4) отримаємо

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_1(t,\Delta t)}{\Delta t}. \tag{8.5}$$

Перепишемо вираз (8.5) у вигляді

$$p_1(t,\Delta t)=\lambda(t)\cdot\Delta t+\bar{o}(\Delta t)\cdot\Delta t, \tag{8.6}$$

де $\bar{o}(\Delta t)$ − нескінченно мала величина, якщо $\Delta t\to 0$.

**2. *Відсутність післядії***

Потік подій називають *потоком без післядії,* якщо для довільних проміжків часу, які не перетинаються, імовірність появи будь-якої кількості подій на одному з проміжків не залежить від того, скільки подій відбулось на інших проміжках.

Відсутність післядії в потоці означає, що для довільного часу $t_0$ майбутні моменти появ подій потоку (якщо $t > t_0$) не залежать від того, у які моменти відбувались події потоку в минулому.

Наприклад, потік людей, які надходять до залізничної каси, – це потік без післядії, а потік людей, які відходять від каси після обслуговування, – це потік з післядією, бо інтервал часу між окремими покупцями не може бути меншим, ніж мінімальний час обслуговування. Також потоком з післядією є потік пасажирів, які виходять з залізничної станції, бо обумовлений прибуттям потяга.

**3. *Стаціонарність***

Потік подій називають *стаціонарним*, якщо всі його ймовірнісні характеристики не змінюються в часі.

Звідси випливає, що для стаціонарного потоку подій його інтенсивність $\lambda(t)$ стала, тобто $\lambda(t) = \lambda = const$.

*Потік подій*, який має всі три властивості, тобто є *ординарним, стаціонарним* і *без післядії*, називають ***найпростішим (стаціонарним пуассонівським) потоком***.

**Приклад 1.** Потік машин, що проїжджають по шосе в одному напрямку, регулярний з інтенсивністю $\lambda$. Людина виходить на шосе, щоб зупинити першу-ліпшу машину, що рухається в цьому напрямку. Знайти закон розподілу випадкової величини $T$ − час очікування, математичне сподівання $M(T)$, дисперсію $D(T)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(T)$.

**Розв'язання.** Випадкова величина $T$ − час очікування розподілена рівномірно на проміжку часу між двома машинами $\left[0; \frac{1}{\lambda}\right]$. Тому щільність розподілу має вигляд

$$f(t)=\begin{cases}\lambda,\ t\in\left[0;\frac{1}{\lambda}\right];\\ 0,\ t\notin\left[0;\frac{1}{\lambda}\right].\end{cases}$$

Числові характеристики цього розподілу:

$$M(T)=\frac{1}{2\lambda},\ D(T)=\frac{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2}{12}=\frac{1}{12\lambda^2},\ \sigma(T)=\frac{1}{2\sqrt{3}\lambda}.$$

**Відповідь**: $M(T)=\frac{1}{2\lambda},\ D(T)=\frac{1}{12\lambda^2},\ \sigma(T)=\frac{1}{2\sqrt{3}\lambda}.$

### 8.1.2. Найпростіший потік

Розглянемо випадкову величину $X(t)$ − кількість появ події $A$, яка може відбутися у випадковий момент часу $[0;t]$. Обчислимо ймовірність того, що подія $A$ відбудеться $k$ разів упродовж часу від $0$ до $t$. Позначимо невідому ймовірність через $P_t(k)=P(X(t)=k)$.

Припустимо, що випадковий процес $X(t)$ має такі властивості:

1. *Умова стаціонарності*.

Це означає, що ймовірність того, що подія $A$ відбудеться $k$ разів за проміжок часу від $T$ до $T+t$, не залежить від $T$.

2. *Відсутність післядії*.

Тобто ймовірність $P_t(k)$ не залежить від того, скільки разів відбувалась подія $A$ до моменту $T$.

3. *Ординарність*.

Ординарність потоку надає можливість знехтувати ймовірністю появи двох чи більше подій за малий проміжок часу $\Delta t$.

Отже, випадковий процес $X(t)$ є найпростішим потоком.

**Теорема 1.** У найпростішому потоці з інтенсивністю $\lambda$ кількість подій $X(t)$, які настали за проміжок часу $[0;t]$, розподілено за *законом Пуассона*

$$P_t(k) = P(X(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}, k = 0,1,2,..., \tag{8.7}$$

причому

$$\begin{aligned} &M(X(t)) = D(X(t)) = \lambda t, \\ &\sigma(X(t)) = \sqrt{\lambda t}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

***Наслідок.*** Для найпростішого потоку з інтенсивністю $\lambda$ характерні такі твердження:

1. Імовірність того, що за проміжок часу $[0;t]$ не настане жодної події, дорівнює

$$P_t(0) = P(X(t) = 0) = e^{-\lambda t}. \tag{8.9}$$

2. Імовірність того, що за проміжок часу $[0;t]$ відбудеться менше ніж $k$ подій, $k = 1,2,3,...$:

$$P(X(t) < k) = e^{-\lambda t} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}, \ k = 1,2,3,.... \tag{8.10}$$

3. Імовірність того, що за проміжок часу $[0;t]$ настане не менше $k$ подій, $k = 1,2,3,...$:

$$P(X(t) \geq k) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}, \ k = 1,2,3,.... \tag{8.11}$$

4. Імовірність того, що за проміжок часу $[0;t]$ настане хоча б одна подія:

$$P(X(t) \geq 1) = 1 - e^{-\lambda t}. \tag{8.12}$$

Найпростіший потік також називається *пуассонівським потоком,* тому що ймовірність появи $k$ подій найпростішого потоку протягом часу $t$ описується законом Пуассона з параметром $\lambda t$.

Наведемо приклади найпростіших (пуассонівських) потоків:

а) надходження викликів на телефонну станцію.

Якщо в середньому надходить $\lambda = 3$ виклики за хвилину, то ймовірність того, що за час *t, хв.,* надійде $k$ викликів, дорівнює

$$P_t(k) = P\bigl(X(t) = k\bigr) = \frac{(3t)^k}{k!} \cdot e^{-3t};$$

б) надходження потягів до сортувального парку.

Припустимо, що середня інтенсивність прибуття $\lambda = 2$ *потяг/год*. Випадкова величина $X(t)$ − кількість потягів, що прибудуть за час *t, год*, розподілена за законом

$$P_t(k) = P\bigl(X(t) = k\bigr) = \frac{(2t)^k}{k!} \cdot e^{-2t};$$

в) надходження пасажирів до білетної каси.

Припустимо, що в середньому за годину до каси звертаються 15 *пас*. Тоді кількість заявок $X(t)$, що надійдуть за час *t* (*хв*), розподілено за законом Пуассона

$$P_t\bigl(k\bigr) = P(X(t) = k) = \frac{(0{,}25t)^k}{k!} \cdot e^{-0{,}25t}$$

з інтенсивністю $\lambda = \dfrac{15}{60} = 0{,}25$ *пас/хв.*

Таким чином, закон Пуассона служить *математичною моделлю* найпростішого потоку випадкових подій.

**Приклад 2.** По магістралі проходить пуассонівський потік автомобілів з інтенсивністю $\lambda = 6$ *маш/хв*. Для переходу магістралі пішоходу необхідно 15 *с*. Обчислити ймовірність очікування пішоходом вільної магістралі.

**Розв'язання.** Очікування пішоходом вільної магістралі – це подія, що є протилежною до події відсутності машин впродовж

$t = 15\ c = 0{,}25\ хв$. Імовірність того, що протягом цього часу не проїде жодної машини, обчислюється за формулою (8.9):

$$P_{t=0,25}(0) = P\bigl(X(0{,}25) = 0\bigr) = e^{-6\cdot 0{,}25} = e^{-1{,}5} \approx 0{,}223.$$

Звідси ймовірність $P_{оч}$ того, що пішохід змушений буде чекати вільної магістралі, дорівнює $P_{оч} = 1 - P_{t=0,25}(0) = 1 - 0{,}223 = 0{,}777$.

**Відповідь**: $P_{оч} = 0{,}777$.

**Приклад 3.** На сортувальну станцію, що обслуговує промисловий район з трьома підприємствами, надходять подачі з завантаженими вагонами. Середній час очікування простою партії вагонів під завантаженням на кожному підприємстві складає 4 *год*, а надходження подач вагонів на станцію підлягає пуассонівському закону розподілу.

Знайти середню кількість подач, що надійдуть протягом 2 *год*.

Знайти ймовірність того, що за півтори години на станцію прибуде:

а) рівно одна подача; б) хоча б одна подача;

в) не більше двох подач.

**Розв'язання.** Кількість подач, що надходять на станцію з одного підприємства за годину, дорівнює $\lambda_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25$ *потяг/год*, а загальна кількість подач з трьох підприємств за годину дорівнює $\lambda = 3\lambda_1 = 0{,}75$ *потяг/год*.

Розглянемо випадкову величину $X(t)$ − кількість подач, що надходять за час *t*. Тоді $X(t)$ підлягає закону розподілу Пуассона (8.7) з інтенсивністю $\lambda = 0{,}75$ *потяг/год*. Тому середня кількість подач, що надійдуть протягом $t = 2$ *год*, за формулою (8.8) дорівнює математичному сподіванню $M(X) = \lambda \cdot t = 0{,}75 \cdot 2 = 1{,}5$ потяги.

Імовірності того, що за $t = 1{,}5$ *год* на станцію прибуде:

а) рівно одна подача:

$$P_{t=1,5}(1) = P(X(t=1,5)=1) = \frac{(0,75\cdot 1,5)^1}{1!}\cdot e^{-0,75\cdot 1,5} \approx 1,125\cdot 0,325 \approx 0,366;$$

б) за виразом (8.12) хоча б одна подача:

$$P_{t=1,5}(k \ge 1) = P(X(t=1,5) \ge 1) = 1 - e^{-1,125} \approx 1 - 0,325 = 0,675;$$

в) не більше двох подач:

$$P_{t=1,5}(k \le 2) = P(X(t=1,5) \le 2) = P(X(t=1,5)=0) + P(X(t=1,5)=1) +$$
$$+ P(X(t=1,5)=2) \approx 0,325 + 0,366 + 0,205 = 0,896.$$

**Відповідь**: а) $P_{t=1,5}(1) \approx 0,366$; б) $P_{t=1,5}(k \ge 1) \approx 0,675$; в) $P_{t=1,5}(k \le 2) \approx 0,896$.

### 8.1.3. Закон розподілу проміжку часу між сусідніми подіями найпростішого потоку

Другою важливою характеристикою найпростішого потоку (процесу Пуассона) є неперервна випадкова величина $T$ − проміжок часу між двома послідовними подіями потоку. Знайдемо функцію розподілу $F(t)$ випадкової величини $T$. Згідно з визначенням функції розподілу $F(t) = P(T < t)$.

Якщо випадкова величина $T$ набула значення, менше за $t$, то на проміжку часу завдовжки $t$ відбулась хоча б одна подія потоку (рис. 8.3).

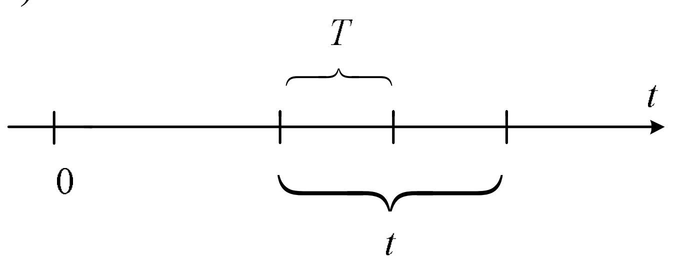



Рис. 8.3. Проміжок часу між довільними двома сусідніми подіями в найпростішому потоці

Позначимо: подія $A$={на проміжку часу $t$ відбулась хоча б одна подія}. Тоді протилежна подія $\overline{A}$={на проміжку часу $t$ не відбулось жодної події}. Тому

$$P(\overline{A}) = P_t(0) = e^{-\lambda t};$$
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Але $P(A) = P(T < t) = F(t)$. Отже, інтегральна функція розподілу випадкової величини $T$ − проміжку часу між двома послідовними подіями в найпростішому потоці з інтенсивністю $\lambda$ має вигляд

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},\ t \geq 0. \tag{8.13}$$

Тоді диференціальна функція розподілу випадкової величини $T$:

$$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ t \geq 0. \tag{8.14}$$

Цей розподіл, як відомо, називається *показниковим розподілом*. Тому математичне сподівання $M(T)$, дисперсія $D(T)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(T)$ відповідно дорівнюють

$$M(T) = \frac{1}{\lambda};\ D(T) = \frac{1}{\lambda^2};\ \sigma(T) = \frac{1}{\lambda}. \tag{8.15}$$

***Наслідок.*** Імовірність $P(T \geq t)$ того, що проміжок часу $T$ між будь-якими двома сусідніми подіями в найпростішому потоці буде не меншим за $t$, обчислюється за формулою

$$P(T \geq t) = e^{-\lambda t},\ t \geq 0. \tag{8.16}$$

**Приклад 4.** Білетна каса працює з $8^{\underline{00}}$ до $20^{\underline{00}}$. Пасажири, що звертаються за квитками, утворюють найпростіший потік з інтенсивністю $\lambda = 0{,}1$ *пас/хв*. Знайти ймовірність того, що:

1) за 40 *хв* до каси звернеться 3 пасажири;

2) за 40 *хв* до каси звернеться менше 3 пасажирів;

3) за 40 *хв* до каси звернеться не менше 3 пасажирів;

4) за 5 *хв* до каси не звернеться жодного пасажиру;

5) за 10 *хв* до каси звернеться принаймні 1 пасажир;

6) інтервал часу між сусідніми зверненнями менший за 8 *хв*;

7) інтервал часу між сусідніми зверненнями не менший за 8 *хв*.

**Розв'язання.** За умовою задачі потік звернень до білетної каси є найпростішим потоком з інтенсивністю $\lambda = 0{,}1$ *пас/хв*. Введемо такі позначення:

- $X(t)$ − кількість пасажирів, що звернулись до білетної каси за проміжок $t$, *хв*;

- $T$ − проміжок часу між двома сусідніми зверненнями, *хв*.

Підставляючи $t = 40$ *хв*, $k = 3$ *пас* у вирази (8.7), (8.10) і (8.11), отримаємо:

1) $P(X(40) = 3) = \dfrac{(0{,}1 \cdot 40)^3}{3!} \cdot e^{-4} \approx 0{,}195$;

2) $P(X(40) < 3) = e^{-4} \cdot \sum\limits_{m=0}^{2} \dfrac{(0{,}1 \cdot 40)^m}{m!} \approx 0{,}24$;

3) $P(X(40) \geq 3) = 1 - P(X(40) < 3) = 1 - 0{,}24 = 0{,}76$;

4) при $t = 5$ *хв* за формулою (8.9) маємо

$$P(X(5) = 0) = e^{-0{,}1 \cdot 5} \approx 0{,}61;$$

5) якщо $t = 10$ *хв*, то за формулою (8.12)

$$P(X(10) \geq 1) = 1 - e^{-0{,}1 \cdot 10} \approx 0{,}63;$$

При $t = 8$ *хв* за формулами (8.13) і (8.16) отримаємо

6) $P(T < 8) = 1 - e^{-0{,}1 \cdot 8} \approx 0{,}55$;

7) $P(T \geq 8) = e^{-0{,}1 \cdot 8} \approx 0{,}45$.

**Відповідь**: 1) $P(X(40) = 3) \approx 0{,}195$; 2) $P(X(40) < 3) \approx 0{,}24$; 3) $P(X(40) \geq 3) = 0{,}76$; 4) $P(X(5) = 0) \approx 0{,}61$; 5) $P(X(10) \geq 1) \approx 0{,}63$; 6) $P(T < 8) \approx 0{,}55$; 7) $P(T \geq 8) \approx 0{,}45$.

Найпростіші і близькі до них потоки часто зустрічаються на практиці. Виявляється, що при підсумовуванні (взаємному накладанні) великої кількості незалежних стаціонарних ординарних потоків, які не мають властивості відсутності післядії, отримаємо потік, як завгодно близький до найпростішого, якщо тільки потоки, що складаються, впливають на суму приблизно рівномірно мало. Тобто при такому підсумовуванні з'являється властивість відсутності післядії, причому властивості стаціонарності й ординарності залишаються в силі.

Зазначена властивість аналогічна ***центральній граничній теоремі***: *при додаванні великої кількості незалежних випадкових величин, які мають рівномірно малий вплив на суму, у результаті виходить величина, розподілена за законом, близьким до нормального, хоча доданки можуть мати будь-які розподіли.*

Практика показує, що часто заміна будь-якого потоку найпростішим з тією самою щільністю дає задовільні результати.

## 8.2. Нестаціонарний пуассонівський потік

Потік подій називається *нестаціонарним*, якщо ймовірність появи певної кількості подій за будь-який проміжок часу залежить не тільки від довжини цього проміжку, але й від моменту його початку.

Нестаціонарність потоку означає, що його ймовірнісні характеристики залежать від часу. Інтенсивність такого потоку $\lambda(t)$ − змінна величина, яка в точці $t$, за визначенням, дорівнює

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = m'(t), \tag{8.17}$$

де $m(t)$ – математичне сподівання кількості подій на ділянці $(0;t)$.

Розглянемо нестаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю $\lambda(t)$ на деякому проміжку часу $[t_0;t_0+\tau]$ довжиною $\tau>0$ і дискретну випадкову величину $X(t_0,\tau)$ – кількість подій, які настають у потоці за проміжок часу $[t_0;t_0+\tau]$.

**Теорема 2.** В нестаціонарному пуассонівському потоці з інтенсивністю $\lambda(t)$ кількість подій, які припадають на проміжок довжини $\tau$, що починається в точці $t_0$, має розподіл Пуассона

$$P_\tau(k)=\frac{a^k\cdot e^{-a}}{k!},\ k=0,1,2,\ldots, \qquad (8.18)$$

де $P_\tau(k)$ – імовірність того, що за проміжок часу $[t_0;t_0+\tau]$ у потоці настане рівно $k$ подій.

Параметр $a$ являє собою математичне сподівання випадкової величини $X(t_0,\tau)$, яке залежить не тільки від $\tau$, але і від $t_0$, і виражається формулою

$$a=M[X(t_0,\tau)]=\int_{t_0}^{t_0+\tau}\lambda(t)dt. \qquad (8.19)$$

Відповідно дисперсія випадкової величини $X(t_0,\tau)$ дорівнює

$$D[X(t_0,\tau)]=a. \qquad (8.20)$$

***Наслідок.*** У нестаціонарному пуассонівському потоці з інтенсивністю $\lambda(t)$ імовірність того, що за проміжок від $t_0$ до $t_0+\tau$:

1) не настане жодної події

$$P(X(t_0,\tau)=0)=e^{-a}; \qquad (8.21)$$

2) настане менше $k$ подій

$$P(X(t_0,\tau)<k)=e^{-a}\cdot\sum_{m=0}^{k-1}\frac{a^m}{m!},\ k=1,2,3,\ldots; \tag{8.22}$$

3) настане не менше $k$ подій

$$P(X(t_0,\tau)\geq k)=1-e^{-a}\cdot\sum_{m=0}^{k-1}\frac{a^m}{m!},\ k=1,2,3,\ldots; \tag{8.23}$$

4) настане хоча б одна подія

$$P(X(t_0,\tau)\geq 1)=1-e^{-a}. \tag{8.24}$$

Розглянемо випадкову величину $T(t_0)$ − проміжок часу між двома сусідніми подіями в потоці, перша з яких настала в момент часу $t_0$. Знайдемо для нестаціонарного потоку закон розподілу проміжку часу $T(t_0)$. За умовою перша з двох подій відбулась в момент $t_0$, тому закон розподілу часу між цією подією і наступною

$$F_{t_0}(\tau)=P(T(t_0)<\tau)=1-P(T(t_0)\geq\tau). \tag{8.25}$$

Імовірність того, що на проміжку $[t_0;t_0+\tau]$ не відбудеться жодної події, дорівнює

$$P(T(t_0)\geq\tau)=e^{-a}=e^{-\int\limits_{t_0}^{t_0+\tau}\lambda(t)dt}, \tag{8.26}$$

тому

$$F_{t_0}(\tau)=1-e^{-\int\limits_{t_0}^{t_0+\tau}\lambda(t)dt}. \tag{8.27}$$

Тоді диференціальна функція розподілу випадкової величини $T(t_0)$ (щільність розподілу):

$$f_{t_0}(\tau)=\frac{d}{d\tau}\left(F_{t_0}(\tau)\right)=\frac{d}{d\tau}\left(1-e^{-\int\limits_{t_0}^{t_0+\tau}\lambda(t)dt}\right)=e^{-\int\limits_{t_0}^{t_0+\tau}\lambda(t)dt}\cdot\lambda(t_0+\tau), \qquad (8.28)$$

тобто

$$f_{t_0}(\tau)=\lambda(t_0+\tau)\cdot e^{-\int\limits_{t_0}^{t_0+\tau}\lambda(t)dt}. \qquad (8.29)$$

Математичне сподівання випадкової величини $T(t_0)$, тобто середній проміжок часу між двома сусідніми подіями в потоці, перша з яких настане в момент $t_0$, обчислюється за формулою

$$M(T(t_0))=\int\limits_0^{+\infty}\tau\cdot f_{t_0}(\tau)d\tau=\int\limits_0^{+\infty}\tau\cdot e^{-a}\cdot\lambda(t_0+\tau)d\tau. \qquad (8.30)$$

Дисперсія та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $T(t_0)$ обчислюється за формулами (8.31) та (8.32) відповідно:

$$D(T(t_0))=\int\limits_0^{+\infty}\tau^2\cdot f_{t_0}(\tau)d\tau-\left(\int\limits_0^{+\infty}\tau\cdot e^{-a}\cdot\lambda(t_0+\tau)d\tau\right)^2, \qquad (8.31)$$

$$\sigma(T(t_0))=\sqrt{D(T(t_0))}. \qquad (8.32)$$

**Приклад 5.** Юридична служба залізниці звертається до страхової компанії з вимогами виплат за страховими полюсами за період з початку жовтня до кінця грудня. Статистика стверджує, що кількість вимог з виплат, які надходять у страхову компанію за проміжок часу $\tau$, залежить не тільки від його тривалості, але й від його потоку. Незалежність надходжень вимог з виплат у будь-які інтервали часу, що не перетинаються, і надходження вимог по одній у малі проміжки часу в даному випадку зберігаються. Залежність кількості вимог, які надходять у страхову компанію, від часу задається функцією $\lambda(t)=t^{\frac{1}{5}}$. Знайти ймовірність того, що:

а) за жовтень надійде 5 вимог;

б) за листопад надійде 5 вимог;

в) за грудень надійде не менше 6 вимог;

г) інтервали часу між двома послідовними надходженнями вимог буде не менше чотирьох діб, якщо перша з них надійде в перший день другого тижня листопада.

**Розв'язання.** Потік вимог з виплат є ординарним потоком без післядії, тобто найпростішим. За одиницю часу візьмемо один тиждень.

Випадкова величина $X(t_0, \tau)$ − кількість вимог, які надійшли в страхову компанію за проміжок часу $[t_0; t_0 + \tau]$, $T(t_0)$ − випадковий інтервал часу між двома послідовними вимогами, перша з яких надійшла в момент часу $t_0$.

а) $\tau = 1$ місяць = 4 тижні; момент початку проміжку $t_0$ =0; $k = 5$. За формулою (8.19)

$$a = M[X(0;4)] = \int_0^{0+4} t^{\frac{1}{5}} dt = \frac{5}{6} \cdot t^{\frac{6}{5}} \Bigg|_0^4 \approx 4{,}4 .$$

Тоді за формулою (8.18) шукана ймовірність дорівнює

$$P_4(5) = \frac{(4{,}4)^5}{5!} \cdot e^{-4{,}4} \approx 0{,}17 ;$$

б) $\tau = 1$ місяць = 4 тижні; момент початку проміжку $t_0$ =4; $k = 5$. За формулою (8.19)

$$a = M[X(4;4)] = \int_4^{4+4} t^{\frac{1}{5}} dt = \frac{5}{6} \cdot t^{\frac{6}{5}} \Bigg|_4^8 \approx 5{,}7 .$$

За формулою (8.18) отримаємо

$$P_4(5) = \frac{(5{,}7)^5}{5!} \cdot e^{-5{,}7} \approx 0{,}17 ;$$

в) $\tau=1$ місяць = 4 тижні; момент початку проміжку $t_0$ =8; $k\geq 6$. За формулою (8.19)

$$a=M\left[X(8;4)\right]=\int_{8}^{8+4} t^{\frac{1}{5}}dt=\frac{5}{6}\cdot t^{\frac{6}{5}}\Bigg|_{8}^{12}\approx 6{,}33\,.$$

За формулою (8.11) маємо

$$P_4\left(X(8;4)\geq 6\right)=1-e^{-6{,}33}\cdot\sum_{m=0}^{5}\frac{(6{,}33)^m}{m!}\approx 0{,}61;$$

г) $t_0=5$; $\tau=4$ доби $=\frac{4}{7}$ тижня. Використовуючи формулу (8.19), знайдемо

$$a=M\left[X\left(5;\frac{4}{7}\right)\right]=\int_{5}^{5+\frac{4}{7}} t^{\frac{1}{5}}dt=\frac{5}{6}\cdot t^{\frac{6}{5}}\Bigg|_{5}^{\frac{39}{7}}\approx 0{,}797\,.$$

І за формулою (8.26) отримаємо

$$P\left(T(5)\geq\frac{4}{7}\right)=e^{-0{,}797}\approx 0{,}45\,.$$

**Відповідь**: а) $P_4(5)\approx 0{,}17$; б) $P_4(5)\approx 0{,}17$; в) $P_4\left(X(8;4)\geq 6\right)\approx 0{,}61$; г) $P\left(T(5)\geq\frac{4}{7}\right)\approx 0{,}45$.

## 8.3. Потік Пальма (потік з обмеженою післядією)

Ординарний потік називається *потоком Пальма* (*потоком з обмеженою післядією*), якщо проміжки часу між будь-якими двома послідовними подіями є незалежними випадковими величинами.

У найпростішому потоці внаслідок відсутності післядії всі інтервали між двома сусідніми подіями являють собою незалежні випадкові величини, тому найпростіший потік є окремим випадком стаціонарного потоку Пальма.

Потоки Пальма найчастіше застосовують у *теорії відновлення*, яка є розділом теорії надійності технічних пристроїв.

Цікавим прикладом потоків з обмеженою післядією є потоки Ерланга.

## 8.4. Потоки Ерланга

Потоки Ерланга одержують як результат перетворення найпростішого потоку.

Якщо в найпростішому потоці залишимо кожну другу подію, тобто другу, четверту, шосту і т. д., то події, що залишилися, утворюють новий потік, який називають *потоком Ерланга другого порядку* (рис. 8.4). Інтервали між сусідніми подіями потоку Ерланга другого порядку одержують підсумовуванням двох інтервалів між відповідними подіями найпростішого потоку.

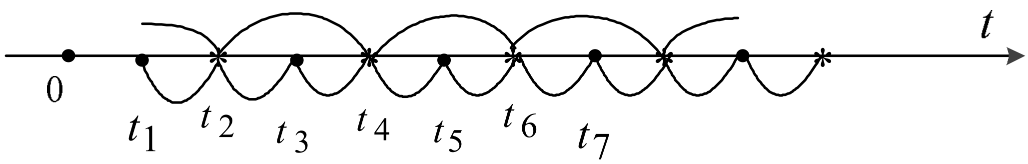



Рис. 8.4. Потік Ерланга другого порядку

Так само, *потік Ерланга третього порядку* отримують з найпростішого шляхом зберігання кожної третьої події (рис. 8.5). Інтервали між сусідніми подіями потоку Ерланга третього порядку являють собою суму трьох інтервалів між відповідними подіями найпростішого потоку.

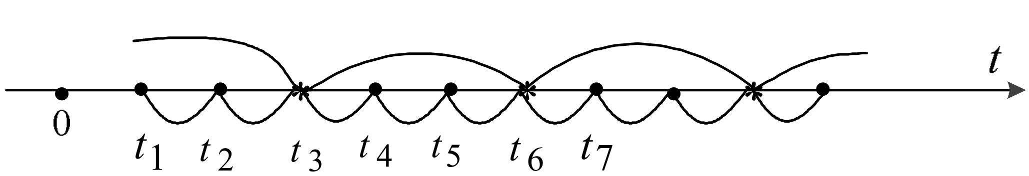



Рис. 8.5. Потік Ерланга третього порядку

*Потік Ерланга $k$-го порядку* $(E_k)$ отримують з найпростішого потоку зберіганням кожної $k$-ї події та відкиданням решти.

Найпростіший потік можна розглядати як потік Ерланга першого порядку $(E_1)$.

Розглянемо випадкову величину $T$ − інтервал між двома послідовними подіями в потоці Ерланга $k$-го порядку:

$$T = \sum_{i=1}^{k} T_i\,, \tag{8.33}$$

де $T_i, i=\overline{1,k}$ − незалежні випадкові величини, розподілені за показниковим законом $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$, $t > 0$.

Позначимо через $f_k(t)$ − щільність розподілу випадкової величини $T$ для потоку Ерланга $k$-го порядку $(E_k)$. Доведено, що $f_k(t)$ має вигляд

$$f_k(t) = \lambda \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda t}\ , t > 0\,. \tag{8.34}$$

Закон розподілу зі щільністю (8.34) називається *законом розподілу Ерланга $k$-го порядку*.

Числові характеристики випадкової величини $T$ закону Ерланга $k$-го порядку обчислюються за такими формулами:

$$M(T) = \frac{k}{\lambda}, \tag{8.35}$$

$$D(T) = \frac{k}{\lambda^2}, \tag{8.36}$$

$$\sigma(T) = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}, \tag{8.37}$$

де $M(T)$ − математичне сподівання,
$D(T)$ − дисперсія;
$\sigma(T)$ − середнє квадратичне відхилення.

Закон розподілу потоку Ерланга $k$-го порядку (8.34) і його числові характеристики (8.34)-(8.37) наведені через інтенсивність найпростішого потоку $\lambda$, який породжує його. Обчислимо ці самі показники через інтенсивність $\lambda_k$ самого потоку Ерланга $(E_k)$.

Очевидно,

$$\lambda_k = \frac{\lambda}{k}, \; \lambda = k \cdot \lambda_k . \tag{8.38}$$

Підставимо вираз $\lambda = k \cdot \lambda_k$ у вираз (8.34) та отримаємо

$$f_k(t) = (k\lambda_k) \cdot \frac{(k\lambda_k t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-k\lambda_k t},$$

або

$$f_k(t) = \frac{(k\lambda_k)^k}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} \cdot e^{-k\lambda_k t}, \; t > 0 . \tag{8.39}$$

Математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення закону (8.39) відповідно дорівнюють

$$M_k(T) = \frac{1}{\lambda_k}, \tag{8.40}$$

$$D_k(T) = \frac{1}{k\lambda_k^2}, \tag{8.41}$$

$$\sigma_k(T) = \frac{1}{\sqrt{k}\lambda_k}. \tag{8.42}$$

Припустимо, що інтенсивність потоку Ерланга $k$-го порядку є сталою, тобто $\lambda_k = \lambda_C = const$, а порядок $k$ змінюється, тоді формули (8.40)-(8.42) мають вигляд

$$M_k(T)=\frac{1}{\lambda_C}, \qquad (8.43)$$

$$D_k(T)=\frac{1}{k\lambda_C^2}, \qquad (8.44)$$

$$\sigma_k(T)=\frac{1}{\sqrt{k}\lambda_C}, \qquad (8.45)$$

тобто при $k \to +\infty$ дисперсія $D_k(T)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma_k(T)$ наближаються до нуля.

***Висновок.*** При $k \to +\infty$ потік Ерланга $k$-го порядку з заданою інтенсивністю $\lambda_k = \lambda_C = const$ необмежено наближається до регулярного потоку зі сталим інтервалом між двома послідовними подіями $T = \frac{1}{\lambda_C} = const$.

**Питання до розділу**

1. Що називають потоком подій?
2. У чому полягає властивість стаціонарності?
3. У чому полягає властивість ординарності?
4. У чому полягає властивість відсутності післядії?
5. Який поток називається найпростішим?
6. Чому дорівнює ймовірність появи за час $t$ рівно $k$ подій у випадку найпростішого потоку?
7. Закон розподілу інтервалу часу між послідовними подіями найпростішого потоку.
8. Які властивості найпростішого потоку?
9. Чим відрізняється нестаціонарний пуассонівський потік від найпростішого потоку?
10. Який потік подій називають потоком Пальма?
11. Потік Ерланга $k$-го порядку.
12. Який закон розподілу називається законом Ерланга $k$-го порядку?

**Завдання**

**1.** У середньому кожні 5 *хв* надходить одна заявка на обслуговування. Вважаючи, що потік заявок найпростіший, знайти ймовірність того, що за 8 *хв* надійде 3 замовлення.

**Відповідь**: $\approx 0{,}14$.

**2.** У багажну касу бюро в середньому надходить 12 заявок за годину. Вважаючи потік заявок найпростішим, знайти ймовірність того, що: а) за 2 *хв* не надійде жодного замовлення; б) за 10 *хв* надійде не більше трьох замовлень.

**Відповідь**: а) $\approx 0{,}67$; б) $\approx 0{,}86$.

**3.** У зал очікування вокзалу в середньому надходить 20 пасажирів на годину. Вважаючи потік пасажирів найпростішим і знаючи, що зал очікування відкривається об $11^{\underline{00}}$, визначити:

а) імовірність того, що об $11^{\underline{12}}$ в зал очікування прийде 20 пасажирів, за умови, що об $11^{\underline{07}}$ їх було 18;

б) імовірність того, що між $11^{\underline{28}}$ і $11^{\underline{30}}$ у залі з'явиться хоча б один новий пасажир.

**Відповідь**: а) $\approx 0{,}2623$; б) $\approx 0{,}4866$.

**4.** Пасажири, що звертаються до приміської білетної каси, утворюють найпростіший потік. Знайти ймовірності того, що:

а) за 5 *хв* до каси звернеться 2 пасажири;

б) за 5 *хв* до каси звернеться не більше двох пасажирів;

в) за 5 *хв* до каси звернеться не менше двох пасажирів та не більше чотирьох пасажирів;

г) за 5 *хв.* до каси не звернеться жодного пасажира;

д) за 5 *хв* до каси звернеться хоча б один пасажир,

якщо в середньому до приміської білетної каси за годину звертаються 15 пасажирів.

**Відповідь**: а) $P_5\left(X(5)=2\right)\approx 0{,}22$; б) $P\left(X(5)\le 2\right)\approx 0{,}87$;

в) $P\left(2\le X(5)\le 4\right)\approx 0{,}35$; г) $P\left(X(5)=0\right)\approx 0{,}29$;

д) $P\left(X(5)>0\right)\approx 0{,}71$.

**5.** Час прибуття маршрутних таксі на зупинку є випадковою величиною, що розподілена за показниковим законом з середнім значенням 10 *хв*. Знайти:

а) імовірність того, що пасажир, буде очікувати дане маршрутне таксі на зупинці не більше 25 *хв*;

б) імовірність того, що пасажир піде, не дочекавшись маршрутного таксі об 11 *год* 15 *хв*, якщо попереднє маршрутне таксі відбуло об 11 *год* 07 *хв*.

**Відповідь**. а) $\approx 0{,}92$; б) $\approx 0{,}45$. *Вказівка:* а) за 25 *хв* буде відправлене хоча б одне маршрутне таксі; б) за 8 *хв* не приїде жодного маршрутного таксі;

**6.** До АЗС в середньому за 1 *год* прибуває 12 машин. Знайти ймовірність того, що:

а) за 5 *хв* прибуде 1 машина;

б) за 20 *хв* під'їде менше трьох машин;

в) за 15 *хв* під'їде більше трьох машин.

**Відповідь**: а) $\approx 0{,}37$; б) $\approx 0{,}24$; в) 0,35.

**7.** Час між послідовними зверненнями пасажирів до «Довідкового бюро» розподілено за показниковим законом з математичним сподіванням 4 *хв*. Необхідно:

а) скласти диференціальну функцію розподілу випадкової величини $T$ − проміжку часу між сусідніми зверненнями;

б) знайти ймовірність того, що за 6 *хв* до «Довідкового бюро» не звернеться жодного пасажира;

в) знайти ймовірність того, що за 3 *хв* до «Довідкового буро» звернеться хоча б один пасажир;

г) імовірність того, що за 6 *хв* до «Довідкового бюро» звернеться не менше 2 пасажирів і не більше 4 пасажирів.

**Відповідь**: а) $f(t)=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}, t\ge 0$ ; б) $P\big(X(6)=0\big)\approx 0{,}22$ ;

в) $P\big(X(3)\ge 1\big)\approx 0{,}53$ ; г) $P\big(2\le X(6)\le 4\big)\approx 0{,}42$.

**8.** Тривалість розформування состава на сортувальній гірці є випадковою величиною $T$, що розподілена за показниковим (експоненціальним) законом. Середня інтенсивність розформування дорівнює $\lambda = 4$ *потяг/год*. Скласти функцію розподілу випадкової величини $T$ і визначити ймовірності того, що тривалість розформування буде:

а) менше півгодини;

б) більше 10 *хв*, але менше 25 *хв*.

**Відповідь**: $F(t) = 1 - e^{-4t}$, $t \geq 0$;

а) $P(T < 0{,}5) \approx 0{,}86$;

б) $P\left(\frac{1}{6} < T < \frac{5}{12}\right) \approx 0{,}37.$

**9.** Інтервали між прибуттям потягів на сортувальну станцію розподілені за показниковим законом. Інтенсивність надходження потягів на станцію дорівнює $\lambda = 3$ *потяг/год*. Визначити ймовірність того, що інтервал між прибуттям двох потягів буде не більше 15 *хв*.

**Відповідь**: $P(0 < T < 0{,}25) \approx 0{,}53$.

**10.** Час формування складу потяга в парку відправлення підкоряється закону розподілу Ерланга третього порядку з середньою інтенсивністю $\lambda_3 = 3$ *потяг/год*. Визначити ймовірність того, що тривалість формування складу буде більше 30 *хв*.

**Відповідь**: $P(T > 0{,}5) = \frac{729}{2} \int\limits_{0{,}5}^{+\infty} t^2 \cdot e^{-9t} dt \approx 0{,}17$ .

**11.** Час, витрачений локомотивом витяжки на один склад, залежить від категорії формованого потяга, величини складу, наявності вагонів, що потребують особливих умов постановки їх у потязі, технічного стану вагонів і т. д. Середній час, витрачений локомотивом на один склад дорівнює 35 *хв.* Аналіз часу, що витрачається локомотивом на один склад, по багатьох станціях показує, що він може бути аппроксимований ерланговським розподілом четвертого порядку. Знайти ймовірність того, що:

а) час, витрачений локомотивом на один склад, буде більше 50 *хв*;

б) час, витрачений локомотивом на один склад, буде більше 40 *хв*, але менше 1 *год.*

**Відповідь**: а) $\approx 0{,}943$; б) $\approx 0{,}0663$.

*Вказівка.* $\lambda_4 = \dfrac{1}{35}$ *потяг/год,* $\lambda = \dfrac{4}{35}$ *потяг/год*,

$$f_4(t) = \frac{\left(\frac{4}{35}\right)^4}{3!} \cdot t^3 \cdot e^{-\frac{4}{35}t}, \quad t > 0.$$

*Примітка.* Для зручності розв'язання задач у Додатку 1 надано значення функції $P(k, \lambda) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$.

## Розділ 9

# МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ З ДИСКРЕТНИМИ СТАНАМИ. ЛАНЦЮГИ МАРКОВА

Велика кількість операцій, які доводиться аналізувати, розвиваються як випадкові процеси, хід і результат яких залежить від ряду випадкових факторів, що супроводжують ці операції. Тому в таких випадках застосовують математичний апарат, розроблений у теорії ймовірностей для так званих марковських випадкових процесів. Марковські випадкові процеси названі на честь видатного російського математика А.А. Маркова (1856-1922), який вперше почав вивчення ймовірнісного зв'язку випадкових величин. Основи теорії, розробленої Марковим, широко використовуються в теорії надійності, теорії масового обслуговування і т. д.

### 9.1. Граф станів системи

Нехай задана деяка фізична система $S$, стан якої змінюється з часом. У кожний момент часу система може перебувати в одному з можливих станів:

$$S_1, S_2, ..., S_i, ..., \tag{9.1}$$

кількість яких скінченна або зчисленна.

Залізничний вузол, технічний пристрій, обчислювальна машина і т. д. можуть розглядатись як деяка фізична система $S$.

*Випадковий процес*, який відбувається у фізичній системі $S$, – це випадкові переходи системи зі стану в стан. Тобто стан системи $S$ змінюється з часом випадково, наперед непередбачувано.

Розглянемо множину станів (9.1) з погляду її структури, тобто можливості системи $S$ переходити зі стану $S_i$ в стан $S_j$ безпосередньо або через інші стани. Для цього зручно використовувати геометричну схему, яка називається *графом станів.*

Існують два види графів: неорієнтований та орієнтований.

*Неорієнтований граф* – це сукупність точок (вершин графа) і відрізків (ребра графа), що з’єднують деякі вершини.

*Орієнтований граф* – це сукупність точок (вершин графа), деякі з яких з’єднуються орієнтованими відрізками (стрілками).

У теорії випадкових процесів з дискретними станами використовують лише орієнтовані графи. Вершини такого графа відповідають станам системи. Вершину графа зображають колом (квадратом), у який внесено позначення відповідного стану. Стрілка, яка з’єднує вершину $S_i$ з вершиною $S_j$, означає можливість безпосереднього переходу системи $S$ зі стану $S_i$ в стан $S_j$ безпосередньо. Стрілки графа зазвичай зображують прямолінійними відрізками або криволінійними дугами.

**Приклад 1.** Технічний пристрій складається з двох вузлів I і II, кожний з яких може відмовити в процесі роботи пристрою. Побудувати графи станів, якщо:

а) ремонт вузлів у ході процесу не здійснюється (випадок, коли одночасно виходять з ладу обидва вузли, не враховувати);

б) ремонт вузлів у ході процесу здійснюється відразу після того, як вони вийшли з ладу (випадок, коли одночасно виходять з ладу обидва вузли, не враховувати).

**Розв’язання.** Введемо такі позначення:

$S_1$={стан, у якому обидва вузли працюють};

$S_2$={стан, у якому перший вузол відмовив, другий працює};

$S_3$={стан, у якому другий вузол відмовив, перший працює};

$S_4$={стан, у якому обидва вузли відмовили}.

Тоді граф станів має такий вигляд, як на рис. 9.1, а, б.

**Відповідь**:

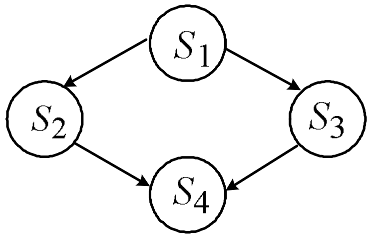



Рис. 9.1,а. Граф станів

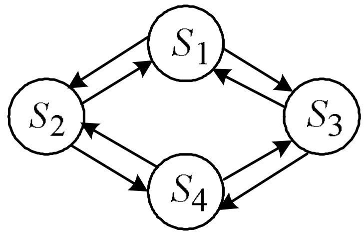



Рис. 9.1,б. Граф станів

## 9.2. Визначення марковського випадкового процесу

Нехай задана деяка фізична система $S$, стан якої змінюється з часом. Якщо стан системи $S$ змінюється з часом випадково (наперед непередбачувано), то кажуть, що в системі $S$ протікає випадковий процес.

Випадковий процес, який відбувається в системі $S$, називається *марковським* або *«процесом без післядії»*, якщо він має таку властивість: для кожного моменту часу $t_0$ імовірність довільного стану системи в майбутньому (при $t > t_0$) залежить лише від її стану на даний момент (при $t = t_0$) і не залежить від того, коли і як саме система перейшла в цей стан, тобто як розвивався процес у минулому.

Це можна сформулювати так: для марковського випадкового процесу при заданому теперішньому майбутнє не залежить від минулого.

Марковські випадкові процеси поділяються на два класи залежно від того, як і в які моменти часу система $S$ може змінювати свій стан.

Випадковий процес називається процесом з *дискретними станами*, якщо можливі стани системи $S_1, S_2, ..., S_i, ...$ можна перерахувати один за одним, а сам процес полягає в тому, що час від часу система $S$ стрибком (миттєво) перестрибує з одного стану в інший.

## 9.3. Марковські випадкові процеси з дискретними станами і дискретним часом (ланцюги Маркова)

### 9.3.1. Визначення марковського випадкового процесу з дискретними станами і дискретним часом

Випадковий процес називається процесом з *дискретним часом*, якщо переходи системи зі стану в стан можливі лише у визначені, наперед фіксовані моменти часу. У проміжках часу між цими моментами система $S$ зберігає свій стан.

Випадковий процес називається процесом з *неперервним часом*, якщо перехід зі стану в стан можливий у будь-який, наперед невідомий, випадковий момент часу $t$.

Розглянемо марковський випадковий процес з кінцевою кількістю станів і дискретним часом.

Нехай задана деяка фізична система $S$, яка може знаходитись у станах $S_1, S_2, ..., S_n$ (кількість станів скінчена). Переходи зі стану в стан для системи $S$ можливі тільки в моменти часу $t_1, t_2, t_3, ..., t_m, ...$. Ці фіксовані моменти часу називаються *кроками* або *етапами* випадкового процесу, що відбувається в системі $S$.

Цей процес полягає в тому, що в послідовні моменти часу $t_1, t_2, t_3, ..., t_m, ...$ система $S$ набуває деякого стану $S_i, i = \overline{1,n}$.

**Приклад 2.** Студент може знаходитися в таких станах:

$S_1$={студент навчається та отримує стипендію};

$S_2$={студент навчається та не отримує стипендію};

$S_3$={студент відрахований}.

Ці стани можуть змінюватись після сесії (раз у семестр). Граф станів цього процесу наведений на рис. 9.2.

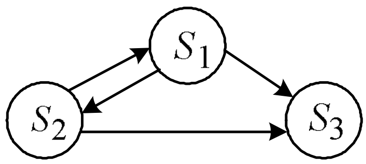



Рис. 9.2. Граф станів

Будемо позначати через $S_i^{(k)}$ подію, яка полягає у тому, що через $k$ кроків система буде перебувати в стані $S_i, i = \overline{1,n}$. Таким чином, при довільному $k$ $(k = 0,1,2,2,...)$ отримаємо послідовність подій $S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, S_3^{(k)}, ..., S_n^{(k)}$, які утворюють повну групу.

Найважливішою характеристикою такої послідовності подій є їхня ймовірність. Введемо позначення ймовірностей цих подій:

$$
\begin{aligned}
&q_1(k) = P\Big(S(k) = S_1^{(k)}\Big);\\
&q_2(k) = P\Big(S(k) = S_2^{(k)}\Big);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&q_n(k) = P\Big(S(k) = S_n^{(k)}\Big).
\end{aligned}
\tag{9.2}
$$

З теорії ймовірностей відомо, що для кожного номера кроку $k$ $(k = 0,1,2,3,\ldots)$

$$q_1(k) + q_2(k) + \ldots + q_n(k) = 1\,. \tag{9.3}$$

Імовірності $q_1(k), q_2(k), \ldots, q_n(k)$ називаються *ймовірностями станів* системи, а вираз (9.3) − *умовою нормування*.

Процес, який відбувається в такій системі $S$, називається *марковським процесом з дискретними станами і дискретним часом* або *марковським* ланцюгом, якщо для будь-якого фіксованого моменту часу (кроку $k_0$) імовірність переходу з довільного стану $S_i$ в довільний стан $S_j$ в майбутньому ($k > k_0$) залежить лише від стану системи в теперішньому ($k = k_0$) і не залежить від того, коли ($k < k_0$) і як система потрапила в цей стан $S_i$.

Марковський ланцюг (МЛ) – це різновид марковського процесу, у якому майбутнє залежить від минулого лише через теперішнє. З визначення МЛ випливає, що для нього ймовірність переходу системи $S$ в стан $S_j$ на $(k+1)$-му кроці залежить лише від того, у якому стані перебувала система на попередньому $k$-му кроці і не залежить від того, як вона вела себе до цього $k$-го кроку.

### 9.3.2. Матриця перехідних імовірностей

*Основна задача* дослідження МЛ полягає в знаходженні *безумовних імовірностей* $q_i(k)$ перебування системи $S$ в станах $S_i$, $i = \overline{1,n}$ на довільному $k$-му кроці

$$q_i(k) = P\Big(S(k) = S_i^{(k)}\Big), i = \overline{1,n}, k = 0,1,2,\dots. \qquad (9.4)$$

Для того щоб знайти ймовірності $q_i(k), i = \overline{1,n}$, потрібно обчислити *умовні ймовірності* переходу системи $S$ на $k$-му кроці в стан $S_j$, якщо відомо, що на $(k-1)$-му кроці система перебувала в стані $S_i$. Ця ймовірність позначається $p_{ij}^{(k)}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}, k = 1,2,\dots$:

$$p_{ij}^{(k)} = P_{S(k-1)=S_i^{(k-1)}}\Big(S(k) = S_j^{(k)}\Big), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}, k = 1,2,\dots. \qquad (9.5)$$

Імовірності $p_{ij}^{(k)}$ називають *перехідними ймовірностями* МЛ на $k$-му кроці.

Очевидно, імовірність $p_{ii}^{(k)}$ – це ймовірність того, що на $k$-му кроці система не вийде зі стану $S_i$ (залишиться в ньому).

Матриця вигляду

$$P^{(k)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & \dots & p_{1n}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & \dots & p_{2n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}^{(k)} & p_{n2}^{(k)} & \dots & p_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}, \qquad (9.6)$$

де $k = 1,2,\dots$, називається *матрицею перехідних ймовірностей на $k$-му кроці.*

На головній діагоналі матриці (9.6) знаходяться ймовірності затримки системи $S$ в станах $S_i, i = \overline{1,n}$ на $k$-му кроці

$$p_{11}^{(k)}, p_{22}^{(k)}, \dots, p_{nn}^{(k)}, k = 1,2,\dots. \qquad (9.7)$$

***Властивості матриці перехідних імовірностей*** $P^{(k)}$:

1. Сума елементів, що знаходяться в кожному рядку матриці (9.6), дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = 1, i = \overline{1,n}, k = 1,2,\dots. \qquad (9.8)$$

Це випливає з того, що, у якому б стані система $S$ не знаходилася перед $k$-м кроком, події $S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, S_3^{(k)}, \ldots, S_i^{(k)}, \ldots, S_n^{(k)}$ утворюють повну групу подій.

2. Всі елементи матриці (9.6) задовольняють умову

$$0 \le p_{ij}^{(k)} \le 1,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n},\ k=1,2,\ldots. \tag{9.9}$$

Квадратна матриця, елементи якої задовольняють умови (9.8) і (9.9), називається *стохастичною матрицею*.

З формули (9.8) імовірність $p_{ii}^{(k)}$ затримки системи в стані $S_i, i=\overline{1,n}$ можна знаходити так:

$$p_{ii}^{(k)} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ i \ne j}}^{n} p_{ij}^{(k)},\ i=\overline{1,n}, k=1,2,\ldots \tag{9.10}$$

Для знаходження безумовних імовірностей $q_i(k), i=\overline{1,n}$ необхідно мати матрицю перехідних імовірностей (9.6) і знати *початковий розподіл* імовірностей, тобто ймовірності станів $q_i(0), i=\overline{1,n}$, які відповідають початку процесу (момент $t_0=0$)

$$q_1(0), q_2(0), \ldots, q_n(0), \tag{9.11}$$

сума яких дорівнює одиниці

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(0) = 1. \tag{9.12}$$

Якщо відомо, що у початковий момент $t_0=0$ система $S$ перебувала в стані $S_i$, то ймовірність $q_i(0)=1$, а всі інші ймовірності дорівнюють нулю:

$$\begin{aligned} &q_1(0) = q_2(0) = \ldots = q_{i-1}(0) = 0, \\ &q_i(0) = 1, \\ &q_{i+1}(0) = q_{i+2}(0) = \ldots = q_n(0) = 0. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Як відомо, безумовні ймовірності $q_1(k), q_2(k), ..., q_n(k)$ можуть бути знайдені за такими формулами:

$$q_i(k) = \sum_{j=1}^{n} q_j(k-1) \cdot p_{ij}^{(k)},$$
$$i = \overline{1,n},\ k = 1,2,3,.... \tag{9.14}$$

### 9.3.3. Однорідний ланцюг Маркова

Ланцюг Маркова (МЛ) називається *однорідним*, якщо ймовірності $p_{ij}^{(k)}$ не залежать від номера кроку $k$, тобто $p_{ij}^{(k)} = p_{ij}$.

Тому матриця перехідних імовірностей для однорідного МЛ має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \tag{9.15}$$

де сума перехідних імовірностей кожного рядка матриці $P$ дорівнює одиниці

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n}. \tag{9.16}$$

Надалі будемо розглядати тільки однорідні МЛ.

При дослідженні МЛ часто буває зручно користуватись графом станів, на якому біля кожної стрілки, яка йде зі стану $S_i$ в стан $S_j$, записують перехідну ймовірність $p_{ij}$, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$. Імовірності $p_{ii}$ затримки в стані $S_i$ на графі не пишуть, оскільки їх отримують як доповнення до одиниці суми ймовірностей, які відповідають всім стрілкам, що виходять зі стану $S_i$. Такий граф називається *розміченим графом станів* системи $S$.

**Приклад 3.** Записати матрицю перехідних ймовірностей, якщо розмічений граф станів має вигляд як на рис. 9.3.

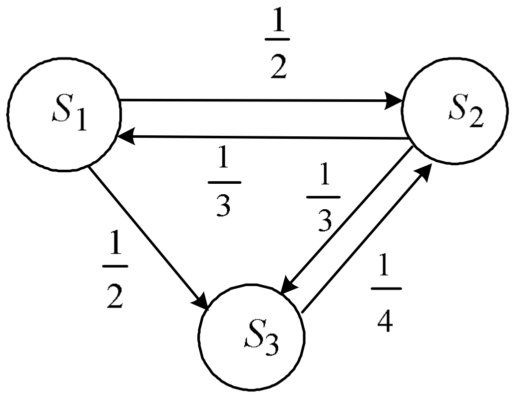



Рис. 9.3. Розмічений граф станів прикладу 3

**Розв'язання.** Розглянемо стан $S_1$ (рис. 9.3). З нього виходить дві стрілки. Імовірність, що відповідає переходу зі стану $S_1$ до стану $S_2$, дорівнює $\frac{1}{2}$, тобто $p_{12} = \frac{1}{2}$. Імовірність переходу зі стану $S_1$ до стану $S_3$ дорівнює $\frac{1}{2}$, тобто $p_{13} = \frac{1}{2}$. Звідси ймовірність затримки для стану $S_1$: $p_{11} = 1 - (p_{12} + p_{13}) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$.

Аналогічно для станів $S_2$ і $S_3$ маємо:

$$p_{21} = \frac{1}{3}, p_{23} = \frac{1}{3} \Rightarrow p_{22} = 1 - (p_{21} + p_{23}) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3};$$

$$p_{31} = 0, p_{32} = \frac{1}{4} \Rightarrow p_{33} = 1 - (p_{31} + p_{32}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

**Відповідь**: матриця перехідних імовірностей $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

**Приклад 4.** Побудувати розмічений граф станів, якщо відома матриця перехідних імовірностей

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Відповідь**: наведена на рис. 9.4.

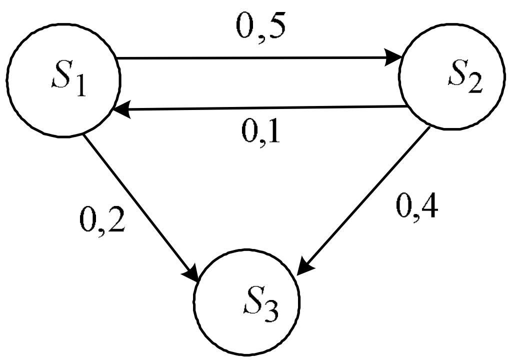



Рис. 9.4. Розмічений граф станів прикладу 4

### 9.3.4. Рівність Маркова

Розглянемо однорідний МЛ з матрицею перехідних імовірностей (9.15). Будемо позначати через $p_{ij}(m)$ − імовірність переходу системи зі стану $S_i$ в стан $S_j$ за $m$ кроків.

Знайдемо ймовірності $p_{ij}(m)$, якщо відомі перехідні ймовірності $p_{ij}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$. Введемо деякий проміжний стан $S_r, r=\overline{1,n}$ і будемо вважати, що процес з імовірністю $p_{ir}(s)$ перейде зі стану $S_i$ в стан $S_r$ за $s$ кроків, після чого з імовірністю $p_{rj}(m-s)$ здійсниться перехід зі стану $S_r$ в стан $S_j$ за $(m-s)$ кроків, що залишилися. Імовірність переходу зі стану $S_i$ в стан $S_j$ за $m$ кроків відмінна від нуля, якщо можливим є перехід зі стану $S_i$ в стан $S_r$ за $s$ кроків і можливим є перехід зі стану $S_r$ в стан $S_j$ за $(m-s)$ кроків. Тоді ймовірність переходу зі стану $S_i$ в стан $S_j$ через стан $S_r$ дорівнює $p_{ir}(s)\cdot p_{rj}(m-s)$. За формулою повної ймовірності для обчислення ймовірності переходу зі стану $S_i$ в стан $S_j$ за $m$ кроків потрібно просумувати такі добутки за всіма проміжними станами. Таким чином отримаємо

$$p_{ij}(m) = \sum_{r=1}^{n} p_{ir}(s) \cdot p_{rj}(m-s). \tag{9.17}$$

Формулу (9.17) іноді називають *рівністю Маркова*. Справедливість рівності Маркова є характерною властивістю МЛ.

Подібно до ймовірностей $p_{ij}$, що утворюють матрицю перехідних імовірностей $P$ (9.15), складаємо матрицю $P(m)$ з імовірностями $p_{ij}(m)$:

$$P(m) = \begin{pmatrix} p_{11}(m) & p_{12}(m) & \dots & p_{1n}(m) \\ p_{21}(m) & p_{22}(m) & \dots & p_{2n}(m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(m) & p_{n2}(m) & \dots & p_{nn}(m) \end{pmatrix}. \tag{9.18}$$

Матриця вигляду (9.18) називається *матрицею перехідних імовірностей за $m$ кроків*.

Перехідні ймовірності $p_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$ є ймовірностями переходу зі стану $S_i$ в стан $S_j$ за *один крок*, тому $P(1) = P$.

Матричний вигляд рівності Маркова (9.17) має вигляд:

$$P(m) = P(s) \cdot P(m-s). \tag{9.19}$$

Матрична формула (9.19) дозволяє знайти перехідні ймовірності між станами за будь-яку кількість кроків, якщо відома матриця перехідних імовірностей за один крок, тобто

$$P(2) = P(1) \cdot P(1) = (P(1))^2 = P^2,$$
$$P(3) = P(2) \cdot P(1) = P^2 \cdot P = P^3, \dots .$$

У загальному випадку

$$P(m) = P^m. \qquad (9.20)$$

**Приклад 5.** За розміченим графом станів (рис. 9.5) знайти матрицю перехідних імовірностей за 2 кроки.

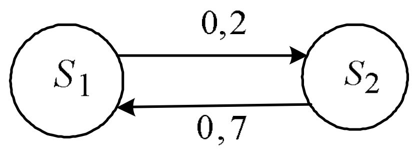



Рис. 9.5. Розмічений граф станів прикладу 5

**Розв'язання:**

$p_{12} = 0{,}2 \Rightarrow p_{11} = 1 - p_{12} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8;$

$p_{21} = 0{,}7 \Rightarrow p_{22} = 1 - p_{21} = 1 - 0{,}7 = 0{,}3.$

Отримаємо матрицю перехідних імовірностей $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

За формулою (9.20) маємо

$$P(2) = P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}78 & 0{,}22 \\ 0{,}77 & 0{,}23 \end{pmatrix}.$$

За формулою (9.16) для кожного рядка отриманої матриці виконується $0{,}78 + 0{,}22 = 1;\ 0{,}77 + 0{,}23 = 1$, що свідчить про правильні обчислення.

**Відповідь**: $P(2) = \begin{pmatrix} 0{,}78 & 0{,}22 \\ 0{,}77 & 0{,}23 \end{pmatrix}$.

### 9.3.5. Розподіл імовірностей станів

Визначимо для однорідного МЛ безумовну ймовірність перебування системи $S$ після $m$-го кроку в стані $S_j$, $j = \overline{1,n}$, якщо задано матрицю перехідних імовірностей (9.15) і початковий розподіл імовірностей $q_i(0), i = \overline{1,n}$.

Введемо гіпотезу $H_i$={у початковий момент $(m = 0)$ система знаходиться в стані $S_i$}. Імовірність цієї гіпотези $H_i$ дорівнює

$P(H_i) = P(S(0) = S_i) = q_i(0)$. Умовна ймовірність того, що система $S$ після першого кроку перейде в стан $S_j$ за умови, що на початку вона була в стані $S_i$, дорівнює перехідній імовірності $p_{ij}$, тобто $p_{ij} = P_{S(0)=S_i}(S(1) = S_j)$. Тоді за формулою повної ймовірності отримаємо

$$q_j(1) = \sum_{i=1}^{n} P(S(0) = S_i) \cdot P_{S(0)=S_i}(S(1) = S_j) = \sum_{i=1}^{n} q_i(0) \cdot p_{ij}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{9.21}$$

Таким чином, ми вже маємо розподіл імовірностей системи $S$ після першого кроку. Тепер так само можна знайти розподіл імовірностей після другого кроку. Як і в попередньому випадку, розглянемо гіпотезу $H_i$={після першого кроку система потрапила в стан $S_i$}. Імовірність цієї гіпотези $H_i$ вже знайдена $P(H_i) = q_i(1), i = \overline{1,n}$. Умовна ймовірність того, що після другого кроку система $S$ потрапить у стан $S_j$, за умови, що після першого кроку вона перебувала в стані $S_i$, дорівнює $p_{ij} = P_{S(1)=S_i}(S(2) = S_j)$. За формулою повної ймовірності отримаємо

$$q_j(2) = \sum_{i=1}^{n} q_i(1) \cdot p_{ij}, \; j = \overline{1,n}.$$

Продовжуючи так само далі цей процес, отримаємо

$$q_j(m) = \sum_{i=1}^{n} q_i(m-1) \cdot p_{ij}, \; j = \overline{1,n}, \; m = 1,2,3,... \tag{9.22}$$

Формулу (9.22) зручніше використовувати в матричному вигляді. Для цього введемо позначення. Розподіл імовірностей станів системи $S$ після $m$-го кроку будемо позначати через *матрицю-рядок (вектор)* вигляду

$$\vec{Q}(m) = (q_1(m), q_2(m), ..., q_n(m)), \tag{9.23}$$

де $q_j(m), j=\overline{1,n}$ − ймовірність того, що система після $m$-го кроку потрапить у стан $S_j$.

Зокрема $\vec{Q}(0)=(q_1(0), q_2(0),..., q_n(0))$ називається вектором початкового розподілу ймовірностей станів. Очевидно, що для вектора розподілу ймовірностей $\vec{Q}(m)$ характерні дві властивості:

1) $0 \le q_j(m) \le 1,\ j=\overline{1,n};$

2) $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j(m)=1, m=1,2,3,...$

Вираз $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j(m)=1, m=1,2,3,...$ називається *умовою нормування.*

Тоді розподіл імовірностей після $m$-го кроку запишемо в матричному вигляді

$$\vec{Q}(m)=\vec{Q}(m-1)\cdot \mathrm{P}. \tag{9.24}$$

За виразом (9.24) отримаємо

$$\vec{Q}(1)=\vec{Q}(0)\cdot P,$$
$$\vec{Q}(2)=\vec{Q}(1)\cdot P=\vec{Q}(0)\cdot P\cdot P=\vec{Q}(0)\cdot P^2,$$
$$\vec{Q}(3)=\vec{Q}(2)\cdot P=\vec{Q}(0)\cdot P^2\cdot P=\vec{Q}(0)\cdot P^3,....$$

У загальному випадку

$$\vec{Q}(m)=\vec{Q}(0)\cdot P^m, m=1,2,3,.... \tag{9.25}$$

**Приклад 6.** Розглянемо процес функціонування деякої системи, наприклад приладу. Нехай протягом однієї доби він знаходиться в одному з двох станів: справному ($S_1$) і несправному ($S_2$). У результаті спостережень за роботою приладу складена така матриця перехідних імовірностей :

$$P=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix},$$

де $p_{11} = 0{,}9$ − імовірність того, що прилад залишиться в справному стані;

$p_{12} = 0{,}1$ − імовірність переходу приладу зі справного в несправний стан;

$p_{21} = 0{,}8$ − імовірність переходу приладу з несправного в справний стан (заміна приладу);

$p_{22} = 0{,}2$ − імовірність того, що прилад залишиться в стані «несправний».

Відомо, що вектор початкового розподілу ймовірностей має вигляд $\vec{Q}(0) = (0;1)$ (у початковий момент прилад був несправний). Необхідно визначити розподіл імовірностей станів приладу через три доби.

**Розв’язання**

*1 спосіб.*

За формулою (9.20) знаходимо матрицю перехідних імовірностей за дві і три доби відповідно:

$$P(2) = P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}89 & 0{,}11 \\ 0{,}88 & 0{,}12 \end{pmatrix},$$

$$P(3) = P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0{,}89 & 0{,}11 \\ 0{,}88 & 0{,}12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}889 & 0{,}111 \\ 0{,}888 & 0{,}112 \end{pmatrix}.$$

За формулою (9.25) при $m = 3$ отримаємо

$$\vec{Q}(3) = \vec{Q}(0) \cdot P^3 = (0;1) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}889 & 0{,}111 \\ 0{,}888 & 0{,}112 \end{pmatrix} = (0{,}888;0{,}112).$$

**Відповідь**: імовірність того, що за три доби прилад буде справним, дорівнює $q_1(3) = 0{,}888$; імовірність того, що за три доби прилад буде несправним, $q_2(3) = 0{,}112$.

*2 спосіб.*

За формулою (9.24) знаходимо послідовно розподіл імовірностей станів за 1 добу ($m = 1$), 2 доби ($m = 2$) і 3 доби ($m = 3$) відповідно:

$$\vec{Q}(1)=\vec{Q}(0)\cdot P=(0;1)\cdot\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,8 & 0,2\end{pmatrix}=(0,8;0,2);$$

$$\vec{Q}(2)=\vec{Q}(1)\cdot P=(0,8;0,2)\cdot\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,8 & 0,2\end{pmatrix}=(0,88;0,12);$$

$$\vec{Q}(3)=\vec{Q}(2)\cdot P=(0,88;0,12)\cdot\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,8 & 0,2\end{pmatrix}=(0,888;0,112).$$

Відповіді співпали.

**Відповідь**: $\vec{Q}(3)=(0,888;0,112)$.

**Приклад 7.** Відомо, що від 5 до 15 % населення деякого регіону користуються приміським електричним транспортом у «час пік» з $6^{\underline{00}}$ до $9^{\underline{00}}$ *год*. Після проведення моніторингу пасажирською службою було розділено об’єм пасажирів на три стани:

- стан $S_1$: 5-7 %;
- стан $S_2$: 8-10 %;
- стан $S_3$: 11-15 %.

Кожні 15 *хв* об’єм пасажирів змінюється за даним розміченим графом (рис. 9.6). Знайти найімовірніший об’єм пасажирів, %, що користуються приміським електричним транспортом о $7^{\underline{00}}$ *год*, якщо о $6^{\underline{00}}$ *год* об’єм пасажирів знаходився у другому стані.

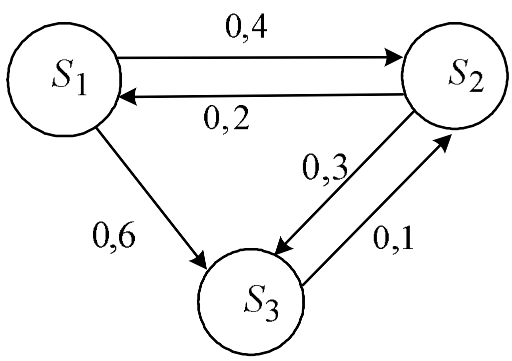



Рис. 9.6. Розмічений граф станів прикладу 7

**Розв’язання.** За розміченим графом станів (рис. 9.6) складаємо матрицю перехідних імовірностей $P = \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

Оскільки о $6^{\underline{00}}$ *год* об’єм пасажирів знаходився у другому стані, то вектор початкового розподілу ймовірностей станів має вигляд $\vec{Q}(0) = (0;1;0)$. За умовою задачі треба знайти вектор розподілу ймовірностей станів за 4 кроки (1 крок дорівнює 15 *хв*), тобто $\vec{Q}(4)$. Це можна зробити за виразом (9.24) або за формулою (9.25). Обчислюємо невідомий вектор $\vec{Q}(4)$ за виразом (9.24):

$$\vec{Q}(1) = \vec{Q}(0) \cdot P = (0;1;0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = (0,2;0,5;0,3);$$

$$\vec{Q}(2) = \vec{Q}(1) \cdot P = (0,2;0,5;0,3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = (0,1;0,36;0,54);$$

$$\vec{Q}(3) = \vec{Q}(2) \cdot P = (0,1;0,36;0,54) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = (0,072;0,274;0,654);$$

$$\vec{Q}(4) = \vec{Q}(3) \cdot P = (0,072;0,274;0,654) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = (0,0548;0,2312;0,714).$$

Тобто $q_1(4) = 0,0548, q_2(4) = 0,2312, q_3(4) = 0,714.$

**Відповідь**: найбільш імовірнішим буде те, що о $7^{\underline{00}}$ *год* приміським електричним транспортом буде користуватись 11-15 % населення.

## 9.3.6. Стаціонарний розподіл імовірностей марковського ланцюга

Розподіл імовірностей $\vec{Q}=(q_1,q_2,...,q_n)$, де $q_j \ge 0, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$, називається *стаціонарним розподілом* МЛ, якщо для будь-якого стану $S_j, j=\overline{1,n}$ системи $S$ і для будь-якого кроку $k=1,2,...$ виконується рівність

$$q_j = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot p_{ij}, j=\overline{1,n}, \tag{9.26}$$

де $p_{ij}$ – елементи матриці перехідних імовірностей (9.15).

МЛ називається *стаціонарним*, якщо ймовірності $q_j, j=\overline{1,n}$ не залежать від номера кроку.

Зокрема звідси випливає, що для будь-якого стаціонарного МЛ початковий розподіл $q_j(0), j=\overline{1,n}$ є стаціонарним (тобто $q_j(0)=q_j$ , $j=\overline{1,n}$), оскільки він задовольняє систему (9.26).

Таким чином, стаціонарний розподіл імовірностей можна знайти як розв’язок системи рівнянь (9.26) або в матричному вигляді

$$\vec{Q}=\vec{Q}\cdot P. \tag{9.27}$$

Ця система лінійних рівнянь має безліч розв’язків. Необхідно обрати той розв’язок, який задовольняє умову нормування

$$q_1+q_2+...+q_n=1. \tag{9.28}$$

***Зауваження.*** Можна скоротити час обчислень, якщо одразу одне з рівнянь системи (9.27) (найбільш громіздке) замінити умовою нормування (9.28). Тоді отримана неоднорідна система лінійних рівнянь буде мати єдиний розв’язок.

**Приклад 8.** Знайти стаціонарний розподіл МЛ, матриця перехідних імовірностей якого має вигляд $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

**Розв'язання.** Стаціонарний розподіл імовірностей позначимо через $\vec{Q} = (q_1; q_2)$. За виразом (9.27) отримаємо

$$(q_1; q_2) = (q_1; q_2) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Запишемо матричне рівняння у вигляді системи

$$\begin{cases} q_1 = 0{,}8q_1 + 0{,}7q_2, \\ q_2 = 0{,}2q_1 + 0{,}3q_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}2q_1 - 0{,}7q_2 = 0, \\ -0{,}2q_1 + 0{,}7q_2 = 0. \end{cases}$$

Перше рівняння отриманої системи згідно з зауваженням замінюємо умовою нормування $(q_1 + q_2 = 1)$:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = 1, \\ -0{,}2q_1 + 0{,}7q_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{7}{9}, \\ q_2 = \dfrac{2}{9}. \end{cases}$$

**Відповідь**: стаціонарний розподіл імовірностей $\vec{Q} = (q_1; q_2) = \left(\dfrac{7}{9}; \dfrac{2}{9}\right)$.

### 9.3.7. Граничний розподіл імовірностей марковського ланцюга

За деяких умов у МЛ із зростанням номера кроку $k$ встановлюється режим, у якому система $S$ продовжує змінювати свої стани, але ймовірності цих станів не залежать від номера кроку. Такі ймовірності називають *граничними* (*фінальними*). Тобто якщо існують границі

$$\lim_{k \to +\infty} q_j(k) = q_j^*,\ j = \overline{1,n},\ q_j^* = const, \qquad (9.29)$$

то вони називаються *граничними (фінальними)* імовірностями МЛ.

*Граничним (фінальним) розподілом* називається матриця-рядок (вектор) $\overrightarrow{Q^*} = \left(q_1^*; q_2^*; ...; q_n^*\right)$, елементами якої є граничні ймовірності станів системи.

**Твердження.** Якщо кількість станів системи $S$ зчислена і з будь-якого її стану можна перейти в інший стан, то граничні (фінальні) імовірності станів існують і не залежать від початкового стану системи.

Марковський ланцюг називається *ергодичним*, якщо для будь-яких його станів $S_1, S_2, ..., S_n$ існують границі

$$\lim_{k \to +\infty} q_j(k) = q_j^*,\ j = \overline{1,n}\ ,\ \sum_{j=1}^{n} q_j^* = 1. \qquad (9.30)$$

Тобто граничний (фінальний) розподіл $\overrightarrow{Q^*} = \left(q_1^*; q_2^*; ...; q_n^*\right)$ також називається *ергодичним розподілом* МЛ.

Якщо $q_j^* > 0, j = \overline{1,n}$, то ергодичний МЛ називається *строго ергодичним*.

Ергодичний розподіл МЛ (якщо він існує), очевидно, є стаціонарним розподілом, отже, граничні (фінальні) імовірності також визначаються системою рівнянь (9.27).

Марковський ланцюг називається *регулярним*, якщо існують граничні ймовірності станів, які не залежать від початкового стану системи.

Розглянемо умову існування граничного (фінального) розподілу МЛ.

Стан $S_i$ називається *несуттєвим (незворотним),* якщо існує такий стан $S_j$, що для деякої кількості кроків $m$ імовірність $p_{ij}(m) > 0$, а для будь-якої кількості кроків $n$ імовірність $p_{ij}(n) = 0$, тобто система $S$ може вийти зі стану $S_i$, але не може повернутися в нього.

У протилежному випадку стан $S_i$ системи $S$ називається *суттєвим (зворотним).*

На рис. 9.7-9.9 надані приклади суттєвих і несуттєвих станів.

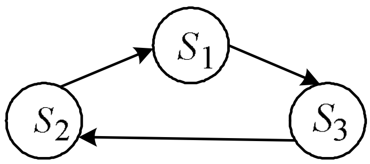



Рис. 9.7. Розмічений граф. Стани $S_1, S_2, S_3$ - суттєві

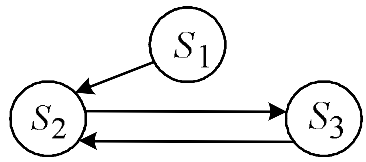



Рис. 9.8. Розмічений граф. Стан $S_1$ - несуттєвий, стани $S_2, S_3$ - суттєві

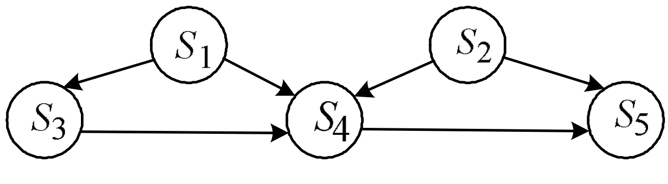



Рис. 9.9. Розмічений граф. Стани $S_1, S_2, S_3, S_4$- несуттєві

**Теорема 1.** У випадку, коли всі стани $S_i, i=\overline{1,n}$ марковського ланцюга є суттєвими, для доказу регулярності необхідно знайти такий номер кроку $m$, для якого матриця перехідних імовірностей $P(m)=P^m$ не має нульових елементів.

**Приклад 9.** Задано розмічений граф станів системи $S$ (рис. 9.10). Перевірити, чи є МЛ регулярним.

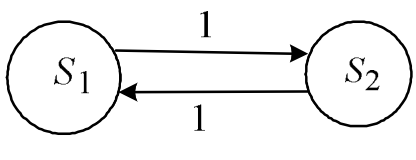



Рис. 9.10. Розмічений граф станів прикладу 9

**Розв'язання.** Обидва стани $S_1, S_2$ є суттєвими. Матриця перехідних імовірностей цієї системи $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді маємо

$$P(2n)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ для } m=2n \ (m \text{ − парного});$$

$$P(2n+1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ для } m=2n+1 \ (m \text{ − непарного}).$$

Тобто не існує такої кількості кроків $m$, щоб $P(m)=P^m$ не містила нульових елементів.

**Відповідь**: МЛ не є регулярним.

**Приклад 10.** Задано розмічений граф станів системи $S$ (рис. 9.11). Перевірити, чи є МЛ регулярним.

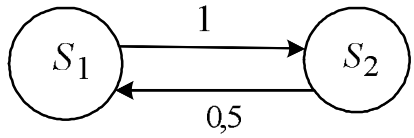



Рис. 9.11. Розмічений граф станів прикладу 10

**Розв'язання.** Обидва стани $S_1, S_2$ є суттєвими. Матриця перехідних імовірностей має вигляд $P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$. Обчислюємо матрицю перехідних імовірностей за два кроки:

$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}25 & 0{,}75\end{pmatrix}.$$

Отже, вже на другому кроці матриця $P(2)$ не містить нульових елементів.

**Відповідь**: МЛ є регулярним.

**Теорема 2** *(Ергодична теорема Маркова-Бернштейна).* Якщо існує такий стан $S_j$ і таке натуральне число $k \geq 1$, що для довільного стану $S_i$ виконано нерівність $p_{ij}(k)>0, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$, то МЛ є ергодичним і існує єдиний стаціонарний розподіл цього ланцюга, що співпадає з його ергодичним розподілом, і навпаки, якщо МЛ ергодичний, то існує такий стан $S_j$, що для довільного стану $S_i$ при досить великих $k \geq 1$ виконується нерівність $p_{ij}(k) > 0$.

***Наслідок.*** Регулярний МЛ має єдиний стаціонарний розподіл, який співпадає з граничним (фінальним) розподілом.

Таким чином, для знаходження граничного (фінального) розподілу $\overrightarrow{Q^*} = \left(q_1^*; q_2^*; ...; q_n^*\right)$, необхідно:

1. Перевірити МЛ на регулярність.
2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$q_j^* = \sum_{i=1}^{n} q_i^* \cdot p_{ij},\ j = \overline{1,n} \text{ або } \overrightarrow{Q^*} = \overrightarrow{Q^*} \cdot P \tag{9.31}$$

і обрати розв'язок, який задовольняє умову нормування (9.28)

$$q_1^* + q_2^* + ... + q_n^* = 1.$$

**Приклад 11.** Розмічений граф станів має вигляд рис. 9.12. Знайти граничний (фінальний) розподіл МЛ.

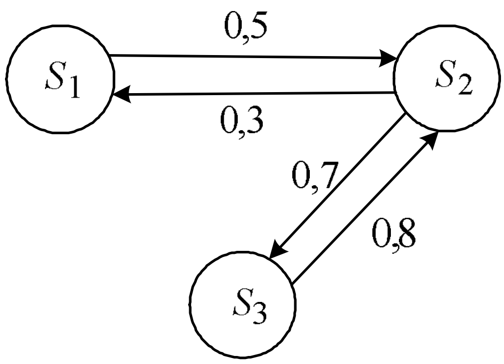



Рис. 9.12. Розмічений граф станів прикладу 11

**Розв'язання.** Всі три стани розміченого графа є суттєвими. Оскільки матриця перехідних імовірностей $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ містить нульові елементи, знайдемо $P(2)$:

$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5 & 0\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5 & 0\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}25 & 0{,}35\\ 0{,}15 & 0{,}71 & 0{,}14\\ 0{,}24 & 0{,}16 & 0{,}6\end{pmatrix}.$$

Таким чином, існує крок $m=2$, на якому матриця перехідних імовірностей $P(m)=P(2)$ не містить нульових елементів. За теоремою 1 даний МЛ є регулярним.

Знаходимо граничний (фінальний) розподіл за формулою (9.31):

$$\overrightarrow{Q^*}=\overrightarrow{Q^*}\cdot P;$$

$$\left(q_1^*;q_2^*;q_3^*\right)=\left(q_1^*;q_2^*;q_3^*\right)\cdot\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5 & 0\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix};$$

$$\begin{cases}q_1^*=0{,}5q_1^*+0{,}3q_2^*,\\ q_2^*=0{,}5q_1^*+0{,}8q_3^*,\\ q_3^*=0{,}7q_2^*+0{,}2q_3^*.\end{cases}$$

Одне з рівнянь, наприклад третє, замінюємо умовою нормування (9.28):

$$\begin{cases}0{,}5q_1^*-0{,}3q_2^*=0,\\ -0{,}5q_1^*+q_2^*-0{,}8q_3^*=0,\\ q_1^*+q_2^*+q_3^*=1.\end{cases}$$

Розв’язуючи систему рівнянь отримаємо

$$\begin{cases}q_1^*=\dfrac{8}{33},\\ q_2^*=\dfrac{40}{99},\\ q_3^*=\dfrac{35}{99}.\end{cases}$$

**Відповідь**: граничний (фінальний) розподіл має вигляд $\overrightarrow{Q^*} = \left(q_1^*; q_2^*; q_3^*\right) = \left(\frac{8}{33}; \frac{40}{99}; \frac{35}{99}\right)$.

**Теорема 3.** Для регулярного МЛ з $n$ станами існує границя

$$\lim_{n \to +\infty} P^n = P^{(+\infty)}, \tag{9.32}$$

причому матриця $P^{(+\infty)}$ має вигляд

$$P^{(+\infty)} = \begin{pmatrix} q_1^* & q_2^* & \cdots & q_n^* \\ q_1^* & q_2^* & \cdots & q_n^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_1^* & q_2^* & \cdots & q_n^* \end{pmatrix}, \tag{9.33}$$

де $q_1^*; q_2^*; \ldots; q_n^*$ − граничні (фінальні) імовірності.

## 9.4. Марковські процеси з дискретними станами і неперервним часом. Диференціальні рівняння Колмогорова

### 9.4.1. Визначення марковського випадкового процесу з дискретними станами і неперервним часом (ланцюга Маркова)

Знов розглянемо деяку фізичну систему, яка може знаходитись у станах $S_1, S_2, \ldots, S_n$. На практиці, як правило, переходи системи зі стану в стан відбуваються у випадкові моменту часу. Як наслідок, виникає необхідність розглянути випадковий процес з дискретними станами і неперервним часом.

Випадковий процес з дискретними станами і неперервним часом називається *марковським* (*або марковським ланцюгом з неперервним часом*), якщо для будь-якого моменту часу $t_0$ умовні ймовірності всіх станів системи $S$ у майбутньому ($t > t_0$) залежать від того, у якому стані $S_j$ знаходиться система $S$ зараз ($t = t_0$), і не залежить від того, коли і як система потрапила в цей стан $(t < t_0)$. Отже, у марковському процесі майбутнє залежить від минулого через теперішнє.

Далі при розгляді марковських ланцюгів з неперервним часом будемо припускати, що система $S$ переходить зі стану в стан під дією пуассонівських потоків подій. Тобто будемо надалі розглядати випадковий процес з дискретними станами і неперервним часом, для якого виконуються три умови:

***1. Відсутність післядії.***

Імовірність переходу $p_{ij}(t_3;t_4)$ системи зі стану $S_i$ в стан $S_j$ за проміжок часу $(t_3;t_4)$ не залежить від того, які переходи були на попередньому інтервалі $(t_1;t_2)$.

***2. Стаціонарність.***

Перехідна ймовірність залежить тільки від довжини інтервалу і не залежить від його початку.

***3. Ординарність.***

Імовірність того, що за короткий інтервал часу $\Delta t$ система змінює свій стан більше, ніж один раз, є нескінченно малою величиною більш високого порядку, ніж $\Delta t$, при $\Delta t \to 0$.

Введемо поняття *інтенсивності (щільності ймовірностей)* $\lambda_{ij}$ переходу зі стану $S_i$ в стан $S_j$

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}, i \neq j, \tag{9.34}$$

де $p_{ij}(\Delta t)$ – ймовірність того, що система, яка знаходилась в момент часу $t$ в стані $S_i$, за час $\Delta t$ перейшла в стан $S_j$.

З формули (9.34) випливає, що при малому $\Delta t$

$$p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \cdot \Delta t, i \neq j. \tag{9.35}$$

Отже, системи, у яких протікають дискретні марковські випадкові процеси з неперервним часом, називають *пуассонівськими системами*.

Аналогічно до МЛ з дискретним часом (п. 9.3.3) надалі будемо розглядати тільки *однорідні* марковські ланцюги з неперервним часом.

### 9.4.2. Матриця перехідних імовірностей

Квадратна матриця порядку $n$ (кількість станів системи $S$)

$$P(t)=\begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad (9.36)$$

де

$$p_{ij}(t)=P_{S(\delta)=S_i}\left(S(t+\delta)=S_j\right),\ i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}, t\ge 0, \qquad (9.37)$$

називається *матрицею перехідних імовірностей* за час $t$.

***Властивості матриці перехідних імовірностей*** $P(t)$:

1. $0\le p_{ij}(t)\le 1,\ t\ge 0,\ i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}.$ (9.38)

2. $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}(t)=1, \quad i=\overline{1,n}.$ (9.39)

3. $P(0)=E$, або $p_{ij}(0)=\begin{cases} 0 & при\ i\ne j, \\ 1 & при\ i=j. \end{cases}$ (9.40)

Матриця перехідних імовірностей задовольняє рівнянню Колмогорова-Чепмена:

$$P(t+s)=P(t)\cdot P(s), \qquad (9.41)$$

або

$$p_{ij}(t+s)=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)\cdot p_{kj}(s). \qquad (9.42)$$

### 9.4.3. Інтенсивності переходів

За формулою (9.34) інтенсивність $\lambda_{ij}$ переходу системи зі стану $S_i$ в стан $S_j$ дорівнює

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = p'_{ij}(t)\big|_{t=0} = p'_{ij}(0), \quad i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n}. \qquad (9.43)$$

З визначення похідної функції $p'_{ij}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{p_{ij}(t + \Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t}$ отримаємо $p_{ij}(t + \Delta t) \approx p'_{ij}(t) \cdot \Delta t + p_{ij}(t)$.

При $t = 0$, враховуючи, що $p'_{ij}(0) = \lambda_{ij}$, одержимо

$$p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \cdot \Delta t + p_{ij}(0), \quad i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n}. \qquad (9.44)$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $i \neq j$. Тоді згідно з виразом (9.40) $p_{ij}(0) = 0$ і вираз (9.44) набуває вигляду

$$p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \cdot \Delta t, \quad i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n}, \; i \neq j. \qquad (9.45)$$

Зазначимо, що $p_{ij}(\Delta t)$ є ймовірністю опинитися системі через час $\Delta t$ у стані $S_j$ за умови, що в початковий момент вона знаходилась у стані $S_i$. Потрапити зі стану $S_i$ в стан $S_j$ система може тільки за один стрибок (умова ординарності).

Якщо $i = j$, то $p_{ij}(0) = 1$, а вираз (9.44) має вигляд

$$p_{ii}(\Delta t) \approx \lambda_{ii} \cdot \Delta t + 1, \quad i = \overline{1,n}.$$

Як наслідок,

$$1 - p_{ii}(\Delta t) \approx -\lambda_{ii} \cdot \Delta t, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (9.46)$$

де $p_{ii}(\Delta t)$ − імовірність того, що через час $\Delta t$ система опиниться в стані $S_i$ за умови, що в початковий момент вона теж у ньому знаходилася.

Тобто вираз $1 - p_{ii}(\Delta t)$ є ймовірністю виходу системи зі стану $S_i$ за час $\Delta t$. Величину $(-\lambda_{ii})$ називають *інтенсивністю виходу* системи зі стану $S_i$.

Квадратна матриця вигляду

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \ldots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \tag{9.47}$$

називається *матрицею інтенсивностей* переходів МЛ *(генератором МЛ).*

***Властивості матриці інтенсивностей переходів*** $\Lambda$:

1. $\lambda_{ij} \geq 0$ при $i \neq j, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$.

Елементи, які не знаходяться на головній діагоналі матриці, невід’ємні.

2. $\lambda_{ii} \leq 0, \quad i = \overline{1,n}$.

Діагональні матричні елементи недодатні.

3. $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij} = 0, i = \overline{1,n}$.

Сума елементів будь-якого рядка матриці дорівнює 0.

Аналогічно до МЛ з дискретним часом МЛ з неперервним часом зручно зображувати за допомогою графа станів, на якому біля стрілок, що вказують на можливі переходи, ставлять відповідні інтенсивності $\lambda_{ij}$. При цьому, як правило, не вказуються інтенсивності виходів і відповідні стрілки не зображуються.

Граф станів системи з проставленими на стрілках інтенсивностями називають *розміченим.*

**Приклад 12.** Матриця інтенсивностей має вигляд $\Lambda = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Побудувати розмічений граф станів МЛ з неперервним часом.

**Відповідь** подана на рис. 9.13.

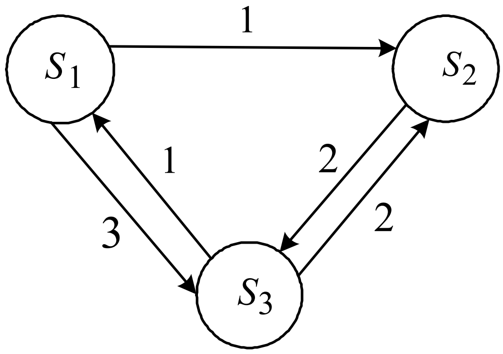



Рис. 9.13. Розмічений граф станів прикладу 12

**Приклад 13.** На станції працюють два вантажопідйомні козлові крани, які при виході з ладу обслуговуються однією бригадою ремонтників. Час безаварійної роботи кожного з них є випадковим, час ремонту кранів також випадковий. Побудувати розмічений граф станів і записати матрицю інтенсивностей, якщо кожний кран виходить з ладу з інтенсивністю $\lambda$, а ремонтується з інтенсивністю $\mu$. Усі виникаючі випадкові процеси (виходу з ладу й ремонту) вважаються марковськими.

**Розв'язання.** За даними задачі система може перебувати в одному зі станів:

$S_0$ – два вантажопідйомні козлові крани справні;

$S_1$ – один вантажопідйомний козловий кран справний, другий ремонтується;

$S_2$ – два вантажопідйомні козлові крани ремонтуються.

Будуємо розмічений граф станів (рис. 9.14).

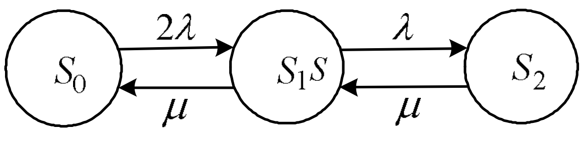



Рис. 9.14. Розмічений граф станів прикладу 13

На розміченому графі станів переходи праворуч здійснюються в моменти виходу з ладу козлових кранів, а переходи ліворуч – у моменти закінчення ремонту.

Інтенсивність переходу зі стану $S_0$ в стан $S_1$ дорівнює $2\lambda$, оскільки в стані $S_0$ працюють два вантажопідйомні крани і кожний з них може вийти з ладу незалежно один від одного. Інтенсивність переходу зі стану $S_1$ в стан $S_2$ дорівнює $\lambda$, бо в стані $S_1$ залишився працювати лише один кран, інший вийшов з ладу. Інтенсивності переходів зі стану $S_2$ в стан $S_1$ та зі стану $S_1$ в стан $S_0$ рівні між собою і дорівнюють $\mu$ (крани ремонтуються однією бригадою).

За рис. 9.14 отримаємо матрицю інтенсивностей:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

**Відповідь**: $\Lambda = \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}.$

***Зауваження.*** При складанні матриці інтенсивностей $\Lambda$ в першу чергу в кожному її рядку пишуть недіагональні елементи $\lambda_{ij}$, а діагональні $\lambda_{ii}$ визначають за допомогою третьої властивості матриці інтенсивностей.

### 9.4.4. Диференціальні рівняння О.М. Колмогорова

За формулою (9.42)

$$p_{ij}(t+\Delta t) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t) \cdot p_{kj}(\Delta t).$$

Враховуючи формулу (9.34), отримаємо

$$p_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij} \cdot \Delta t + \bar{o}(\Delta t), i \neq j;$$
$$1 - p_{ii}(\Delta t) = -\lambda_{ii} \cdot \Delta t - \bar{o}(\Delta t) \text{ або } p_{ii}(\Delta t) = 1 + \lambda_{ii} \cdot \Delta t + \bar{o}(\Delta t),$$

де $\bar{o}(\Delta t)$ − нескінченно мала величина відносно $\Delta t$.

Обчислимо

$$p_{ij}(t + \Delta t) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left[ p_{ik}(t) \cdot (\lambda_{kj} \cdot \Delta t + \bar{o}(\Delta t)) + p_{ij}(t) \cdot (1 + \lambda_{jj} \cdot \Delta t + \bar{o}(\Delta t)) \right].$$

Віднімемо $p_{ij}(t)$ від обох частин останньої рівності, а потім поділимо на $\Delta t$:

$$\frac{p_{ij}(t + \Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left[ \frac{p_{ik}(t) \cdot (\lambda_{kj} \cdot \Delta t + \bar{o}(\Delta t))}{\Delta t} + \frac{p_{ij}(t) \cdot (\lambda_{jj} \cdot \Delta t + \bar{o}(\Delta t))}{\Delta t} \right].$$

Перейдемо до границі в обох частинах при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t + \Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left[ \frac{p_{ik}(t) \cdot (\lambda_{kj} \cdot \Delta t + \bar{o}(\Delta t))}{\Delta t} + \frac{p_{ij}(t) \cdot (\lambda_{jj} \cdot \Delta t + \bar{o}(\Delta t))}{\Delta t} \right],$$

оскільки за визначенням нескінченно малої величини $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{o}(t)}{\Delta t} = 0$, то

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} p_{ik}(t) \cdot \lambda_{kj} + p_{ij}(t) \cdot \lambda_{jj},$$

тобто

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}(t)\cdot\lambda_{kj}\,. \qquad (9.48)$$

Система (9.48) є системою звичайних диференціальних рівнянь, до якої треба додати початкові умови

$$p_{ij}(0)=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases} \qquad (9.49)$$

Формулу (9.48) зручніше записати в матричному вигляді і отримати *пряме рівняння Колмогорова*:

$$\frac{dP(t)}{dt}=P(t)\cdot\Lambda\,. \qquad (9.50)$$

Аналогічно можна отримати *обернене рівняння Колмогорова*:

$$\frac{dP(t)}{dt}=\Lambda\cdot P(t)\,. \qquad (9.51)$$

Для обох рівнянь початковою умовою є

$$P(0)=E\,. \qquad (9.52)$$

**Приклад 14.** За розміченим графом станів (рис. 9.15) знайти матрицю перехідних імовірностей.

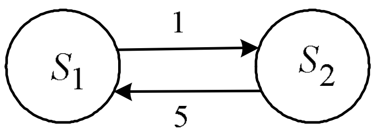



Рис. 9.15. Розмічений граф станів прикладу 14

**Розв'язання**

За розміченим графом станів (рис. 9.15) складаємо матрицю інтенсивностей $\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 5 & -5\end{pmatrix}$.

Будемо шукати матрицю перехідних імовірностей $P(t)=\begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}$ за формулою (9.50) (пряме рівняння Колмогорова):

$$\begin{pmatrix} p'_{11}(t) & p'_{12}(t) \\ p'_{21}(t) & p'_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи властивості $P(t)$ (9.39), достатньо знайти значення лише однієї ймовірності в кожному рядку матриці.

Записуємо диференціальні рівняння для функцій $p_{11}(t)$ та $p_{21}(t)$:

$$\begin{cases} p'_{11}(t) = -p_{11}(t) + 5p_{12}(t), \\ p'_{21}(t) = -p_{21}(t) + 5p_{22}(t). \end{cases} \tag{9.53}$$

Розв’яжемо будь-яке диференціальне рівняння системи (9.53), наприклад перше:

$$p'_{11} = -p_{11}(t) + 5p_{12}(t);$$
$$p'_{11}(t) = -p_{11} + 5(1 - p_{11}(t));$$
$$p'_{11}(t) = -6p_{11}(t) + 5.$$

Отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dp_{11}(t)}{dt} = -6p_{11}(t) + 5;$$
$$\frac{dp_{11}(t)}{-6p_{11}(t) + 5} = dt.$$

Інтегруючи отриманий вираз, одержимо

$$\int \frac{dp_{11}(t)}{-6p_{11}(t)+5} = \int dt;$$

$$-\frac{1}{6}\ln\left|-6p_{11}(t)+5\right| = t + c;$$

$$-6p_{11}(t)+5 = e^{-6t-6C};$$

$$p_{11}(t) = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}e^{-6C} \cdot e^{-6t}.$$

Введемо позначення $C_1 = -\frac{1}{6}e^{-6C}$, тоді $p_{11}(t) = \frac{5}{6} + C_1 e^{-6t}$. Іншу ймовірність отримуємо, використовуючи умову (9.39), $p_{21} = 1 - p_{11}(t) = \frac{1}{6} - C_1 e^{-6t}$, тоді

$$\begin{cases} p_{11}(t) = \frac{5}{6} + C_1 e^{-6t}, \\ p_{12}(t) = \frac{1}{6} - C_1 e^{-6t}. \end{cases}$$

Таким чином матриця перехідних імовірностей $P(t)$ буде мати вигляд

$$P(t) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} + C_1 e^{-6t} & \frac{1}{6} - C_1 e^{-6t} \\ \frac{5}{6} + C_2 e^{-6t} & \frac{1}{6} - C_2 e^{-6t} \end{pmatrix}.$$

Для знаходження сталих $C_1$ і $C_2$ (частинних розв'язків диференціальних рівнянь) використовуємо початкову умову (9.52):

$$P(0) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} + C_1 & \frac{1}{6} - C_1 \\ \frac{5}{6} + C_2 & \frac{1}{6} - C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{6},\ C_2 = -\frac{5}{6}.$$

**Відповідь**: $P(t) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} + \frac{1}{6}e^{-6t} & \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-6t} \\ \frac{5}{6} - \frac{5}{6}e^{-6t} & \frac{1}{6} + \frac{5}{6}C_2 e^{-6t} \end{pmatrix}.$

### 9.4.5. Розподіл імовірностей станів

Розглянемо однорідний марковський ланцюг з $n$ можливими станами $S_1, S_2, ..., S_n$ і неперервним часом.

*Розподілом імовірностей станів* системи через час $t$ називається матриця-рядок (вектор) вигляду

$$\vec{Q}(t) = (q_1(t), q_2(t), ..., q_n(t)), \tag{9.54}$$

де $q_j(t), j = \overline{1,n}$ − імовірність того, що система $S$ в момент часу $t$ знаходиться в стані $S_j$.

***Властивості розподілу ймовірностей:***

1. $0 \le q_j(t) \le 1, \quad j = \overline{1,n}, t \ge 0$.

2. $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j(t) = 1, t \ge 0$ (умова нормування).

Зокрема, якщо $t = 0$, то матриця-рядок (вектор) $\vec{Q}(0) = (q_1(0), q_2(0), ..., q_n(0))$ називається *початковим розподілом імовірностей* станів.

Розподіл імовірностей станів (9.54) системи можна знайти двома способами:

1. За допомогою матриці перехідних імовірностей:

$$\vec{Q}(t) = \vec{Q}(0) \cdot P(t). \tag{9.55}$$

2. За допомогою матриці інтенсивностей:

$$\vec{Q}'(t) = \vec{Q}(t) \cdot \Lambda. \tag{9.56}$$

**Приклад 15.** Знайти розподіл імовірностей станів через час $t$ для марковського ланцюга, заданого матрицею інтенсивностей

$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$, якщо в початковий момент часу система перебувала в першому стані.

**Розв’язання**

*I спосіб.*

За умовою спочатку система перебувала в першому стані, тобто початковий розподіл імовірностей $\vec{Q}(0) = (1;0)$.

Матриця перехідних імовірностей для даної системи була знайдена в попередньому прикладі 14:

$$P(t) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} + \frac{1}{6}e^{-6t} & \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-6t} \\ \frac{5}{6} - \frac{5}{6}e^{-6t} & \frac{1}{6} + \frac{5}{6}C_2e^{-6t} \end{pmatrix}.$$

За формулою (9.55) отримаємо

$$\vec{Q}(t) = (1;0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{6} + \frac{1}{6}e^{-6t} & \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-6t} \\ \frac{5}{6} - \frac{5}{6}e^{-6t} & \frac{1}{6} + \frac{5}{6}C_2e^{-6t} \end{pmatrix} = \left( \frac{5}{6} + \frac{1}{6}e^{-6t}; \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-6t} \right).$$

*II спосіб.*

За формулою (9.56) отримаємо

$$\left(q'_1(t); q'_2(t)\right) = \left(q_1(t); q_2(t)\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Достатньо знайти одну з імовірностей $q_1(t)$ або $q_2(t)$. Знайдемо $q_1(t)$:

$$q'_1(t) = -q_1(t) + 5q_2(t);$$
$$q'_1(t) = -q_1(t) + 5 \cdot (1 - q_1(t));$$
$$q'_1(t) - 6q_1(t) + 5.$$

Оскільки $q_1'(t) = \frac{dq_1}{dt}$, то

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = -6q_1(t) + 5;$$

$$\frac{dq_1(t)}{-6q_1(t)+5} = dt;$$

$$\int \frac{dq_1(t)}{-6q_1(t)+5} = \int dt;$$

$$-\frac{1}{6}\ln\left|-6q_1(t)+5\right| = t + C;$$

$$\ln\left|-6q_1(t)+5\right| = -6t - 6C;$$

$$-6q_1(t) + 5 = e^{-6C-6t}.$$

Позначаючи $C_1 = -\frac{1}{6}e^{-6C}$, знайдемо $q_1(t) = \frac{5}{6} + C_1 e^{-6t}$.

Тоді $q_2(t) = 1 - q_1(t) = \frac{1}{6} - C_1 e^{-6t}$.

Загальний розв’язок диференціального рівняння

$$\begin{cases} q_1(t) = \frac{5}{6} + C_1 e^{-6t}, \\ q_2(t) = \frac{1}{6} - C_1 e^{-6t}. \end{cases} \qquad (9.57)$$

За умовою прикладу в початковий момент часу система знаходилась у першому стані, тобто $q_1(0) = 1$. Знайдемо частинний розв’язок, який відповідає початковій умові, поклавши в загальному розв’язку (9.57) $t = 0$:

$$q_1(0) = \frac{5}{6} + C_1 e^{-6\cdot 0} = \frac{5}{6} + C_1;\; \frac{5}{6} + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{6}.$$

Отже, частинний розв’язок має вигляд

$$q_1(t) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}e^{-6t},\; q_2(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-6t}.$$

**Відповідь**: розподіл імовірностей станів через час $t$ $\vec{Q}(t)=\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}e^{-6t};\frac{1}{6}-\frac{1}{6}e^{-6t}\right)$.

### 9.4.6. Стаціонарний розподіл імовірностей

Розподіл імовірностей станів називається *стаціонарним,* якщо він не змінюється з часом, тобто

$$q_j(t)=q_j=const,\quad i=\overline{1,n},\ t\geq 0\,.$$

Стаціонарні ймовірності повинні задовольняти умову нормування

$$\sum_{i=1}^{n}q_j(0)=1\,.$$

Враховуючи визначення стаціонарного розподілу ймовірностей

$$\vec{Q}'(t)=\left(q'_1(t);q'_2(t);...;q'_n(t)\right)=(0;0;...;0)=\vec{0}$$

за виразом (9.56) отримаємо формулу для знаходження стаціонарного розподілу ймовірностей МЛ з неперервним часом:

$$\vec{Q}(t)\cdot \Lambda=\vec{0}\,, \tag{9.58}$$

де $\Lambda$ − матриця інтенсивностей.

На практиці вираз (9.58) записують у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases}\lambda_{11}\cdot q_1+\lambda_{21}\cdot q_2+...+\lambda_{n1}\cdot q_n=0,\\ \lambda_{12}\cdot q_1+\lambda_{22}\cdot q_2+...+\lambda_{n2}\cdot q_n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \lambda_{1n}\cdot q_1+\lambda_{2n}\cdot q_2+...+\lambda_{nn}\cdot q_n=0.\end{cases} \tag{9.59}$$

Головний визначник системи (9.59) дорівнює нулю і тому одне з рівнянь системи треба замінити умовою нормування $q_1 + q_2 + ... + q_n = 1$.

**Приклад 16**

**1.** Знайти стаціонарний розподіл станів для МЛ з неперервним часом, розмічений граф станів якого зображений на рис. 9.15.

**Розв'язання**. За виразом (9.58) отримаємо

$$(q_1; q_2) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = (0;0)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} -q_1 + 5q_2 = 0, \\ q_1 - 5q_2 = 0. \end{cases}$$

Враховуючи зазначене вище, одне з рівнянь замінюємо умовою нормування:

$$\begin{cases} -q_1 + 5q_2 = 0, \\ q_1 + q_2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6q_2 = 1, \\ q_1 = 1 - q_2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{5}{6}, \\ q_2 = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

**Відповідь**: стаціонарний розподіл імовірностей $\vec{Q} = (q_1; q_2) = \left( \frac{5}{6}; \frac{1}{6} \right)$.

**2**. Знайти стаціонарний розподіл імовірностей станів для марковського ланцюга з неперервним часом, граф якого зображено на рис. 9.16.

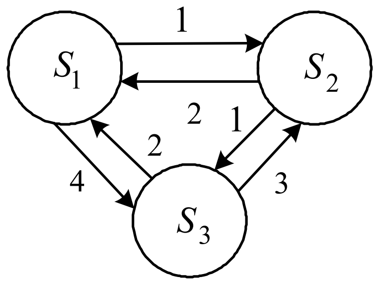



Рис. 9.16. Розмічений граф станів прикладу 16.2

**Розв'язання.** Складемо матрицю інтенсивностей переходів:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

На розміченому графі зображено три стани, тому їхні стаціонарні ймовірності $\vec{Q} = (q_1; q_2; q_3)$ знаходимо за виразом (9.58):

$$(q_1; q_2; q_3) \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = 0, \Leftrightarrow \begin{cases} -5q_1 + 2q_2 + 2q_3 = 0, \\ q_1 - 3q_2 + 3q_3 = 0, \\ 4q_1 + q_2 - 5q_3 = 0. \end{cases}$$

Враховуючи зазначене вище, одне з рівнянь системи є зайвим. Відкинемо, наприклад, останнє рівняння і замінимо його умовою нормування:

$$\begin{cases} -5q_1 + 2q_2 + 2q_3 = 0, \\ q_1 - 3q_2 + 3q_3 = 0, \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{12}{42}, \\ q_2 = \dfrac{17}{42}, \\ q_3 = \dfrac{13}{42}. \end{cases}$$

**Відповідь**: стаціонарний розподіл ймовірностей $\vec{Q} = (q_1; q_2; q_3) = \left(\frac{12}{42}; \frac{17}{42}; \frac{13}{42}\right)$.

### 9.4.7. Фінальні ймовірності станів

Розглянемо МЛ з неперервним часом. Стан $S_i$ називають *несуттєвим*, якщо існує такий стан $S_j$, що зі стану $S_i$ в стан $S_j$ перехід можливий, а навпаки – ні.

Стан називають *суттєвим* (*істотним),* якщо він не є несуттєвим.

Якщо стани $S_i$ і $S_j$ суттєві і з $S_i$ можна потрапити в $S_j$, то і з $S_j$ можна перейти в $S_i$. Такі стани називають *сполученими*.

Якщо стан $S_r$ – несуттєвий, то

$$\lim_{t \to +\infty} q_r(t) = 0. \tag{9.60}$$

Ланцюг називають *регулярним*, якщо для усіх його станів існують границі

$$\lim_{t \to +\infty} q_i(t) = q_i^*, \ i = \overline{1,n}. \tag{9.61}$$

Значення границь (9.61) називають *фінальними* (*граничними*) імовірностями станів.

Набір усіх фінальних імовірностей $\overrightarrow{Q^*} = (q_1^*; q_2^*; ...; q_n^*)$ називається *фінальним (граничним)* розподілом.

Необхідні та достатні умови регулярності марковського ланцюга з неперервним часом формулюються простіше, ніж для марковського ланцюга з дискретним часом.

У теорії випадкових процесів доводиться, що якщо кількість станів системи скінченна та з кожного з них можна (за скінченну кількість кроків) перейти в будь-який інший стан, то фінальні (граничні) імовірності існують.

**Теорема 4.** Для регулярності МЛ з неперервним часом необхідно і достатньо, щоб усі його суттєві стани сполучалися між собою.

**Теорема 5.** Регулярний МЛ має єдиний стаціонарний розподіл імовірностей станів, що співпадає з фінальним (граничним) розподілом.

Таким чином, фінальний розподіл необхідно шукати як розв'язок системи

$$\overrightarrow{Q^*} \cdot \Lambda = 0, \tag{9.62}$$

який задовольняє умову нормування

$$q_1^* + q_2^* + \ldots + q_n^* = 1.$$

Гранична ймовірність стану $S_i$ має чіткий *зміст*: вона показує середній відносний час перебування системи в цьому стані. Наприклад, якщо гранична ймовірність стану $S_0$ дорівнює 0,5, тобто $q_0^* = 0{,}5$, то це означає, що в середньому половину часу система перебуває в цьому стані.

***Зауваження 1.*** У прикладі 15 було знайдено розподіл імовірностей станів через час $t$: $\vec{Q}(t) = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}e^{-6t}; \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-6t}\right)$. Цей МЛ з неперервним часом є регулярним, тому за визначенням фінального розподілу

$$q_1^* = \lim_{t \to +\infty}\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}e^{-6t}\right) = \frac{5}{6}; \quad q_2^* = \lim_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-6t}\right) = \frac{1}{6},$$

тобто $\overrightarrow{Q^*} = \left(\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right)$.

Такий же розподіл можна знайти за виразом (9.62):

$$\left(q_1^*; q_2^*\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = (0;0);$$

$$\begin{cases} -q_1^* + 5q_2^* = 0, \\ q_1^* - 5q_2^* = 0. \end{cases}$$

Одне з двох рівнянь є зайвим, тому відкидаємо, наприклад, перше рівняння і замінюємо його умовою нормування:

$$\begin{cases} q_1^* - 5q_2^* = 0, \\ q_1^* + q_2^* = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1^* = \dfrac{5}{6}, \\ q_2^* = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

**Відповідь**: граничний (фінальний) розподіл ймовірностей станів $\overrightarrow{Q^*} = \left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{1}{6}\right)$.

***Зауваження 2.*** Аналогічно до МЛ з дискретним часом, якщо задано регулярний МЛ з неперервним часом і матрицею перехідних імовірностей $P(t)$, то існує границя

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = P^{\infty}. \tag{9.63}$$

Матриця $P^{\infty}$ має вигляд

$$P^{\infty} = \begin{pmatrix} q_1^* & q_2^* & \cdots & q_n^* \\ q_1^* & q_2^* & \cdots & q_n^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_1^* & q_2^* & \cdots & q_n^* \end{pmatrix}, \tag{9.64}$$

де $q_1^*; q_2^*; \ldots; q_n^*$ − фінальні (граничні) імовірності станів.

**Приклад 17.** Граф МЛ з неперервним часом зображений на рис. 9.17, 9.18, 9.19. Перевірити, чи є цей ланцюг регулярним, і в разі регулярності знайти фінальний розподіл імовірностей його станів.

**1.**

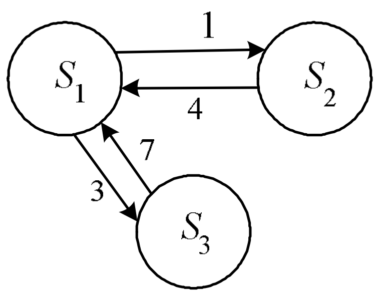



Рис. 9.17. Розмічений граф станів прикладу 17.1

**Розв'язання.** Усі три стани $S_1;S_2;S_3$ суттєві й вони сполучаються один з одним. Тому даний ланцюг – регулярний. За даним рис. 9.17 складаємо матрицю інтенсивностей

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

За виразом (9.62) отримаємо

$$\left(q_1^*;q_2^*;q_3^*\right)\cdot\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} = (0;0;0), \Leftrightarrow \begin{cases} -4q_1^* + 4q_2^* + 7q_3^* = 0, \\ q_1^* - 4q_2^* = 0, \\ 3q_1^* - 7q_3^* = 0. \end{cases}$$

Враховуючи зазначене вище, одне з рівнянь системи, наприклад перше, замінюємо умовою нормування

$$\begin{cases} q_1^* - 4q_2^* = 0, \\ 3q_1^* - 7q_3^* = 0, \\ q_1^* + q_2^* + q_3^* = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1^* = \dfrac{28}{47}, \\ q_2^* = \dfrac{7}{47}, \\ q_3^* = \dfrac{12}{47}. \end{cases}$$

**Відповідь**: фінальний розподіл імовірностей $\overrightarrow{Q^*} = \left(q_1^*;q_2^*;q_3^*\right) = \left(\dfrac{28}{47};\dfrac{7}{47};\dfrac{12}{47}\right).$

**2.**

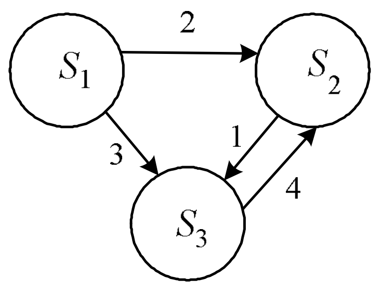



Рис. 9.18. Розмічений граф станів прикладу 17.2

**Розв'язання.** На рис. 9.18 стан $S_1$ є несуттєвим, стани $S_2$ і $S_3$ − суттєві і сполучаються. Отже, даний ланцюг – регулярний, матриця інтенсивностей якого

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Отже, згідно з виразом (9.62), маємо

$$\left(q_1^*; q_2^*; q_3^*\right) \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} = (0;0;0).$$

Для фінальних імовірностей складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -5q_1^* = 0, \\ -q_2^* + 4q_3^* = 0, \\ q_2^* - 4q_3^* = 0. \end{cases}$$

Друге і третє рівняння системи відрізняються лише знаком, тому одне з них замінюємо умовою нормування

$$\begin{cases} q_1^* = 0, \\ -q_2^* + 4q_3^* = 0, \\ q_2^* + q_3^* = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1^* = 0, \\ q_2^* = \dfrac{4}{5}, \\ q_3^* = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Імовірність $q_1^* = 0$, що відповідає виразу (9.60).

**Відповідь**: фінальний розподіл імовірностей $\overrightarrow{Q^*} = \left(q_1^*; q_2^*; q_3^*\right) = \left(0; \frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

**3.**

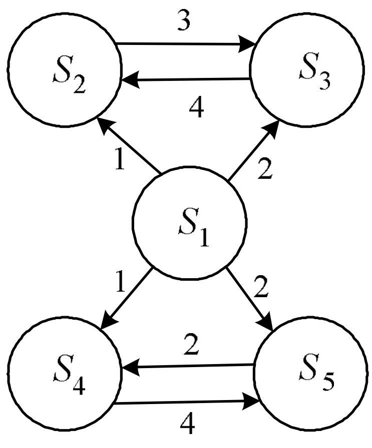



Рис. 9.19. Розмічений граф станів прикладу 17.3

**Розв'язання.** Стан $S_1$ − несуттєвий, стани $S_2, S_3, S_4, S_5$ є суттєвими. Але стани $S_2$ і $S_3$ не сполучаються зі станами $S_4$ і $S_5$. Тому ланцюг – нерегулярний. Як наслідок, фінального (граничного) розподілу його станів не існує.

**Відповідь**: фінального розподілу не існує.

## 9.5. Процес загибелі та розмноження

*Процесом чистого розмноження* називається марковський процес, граф якого зображено на рис. 9.20, де $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ − інтенсивності відповідних переходів.

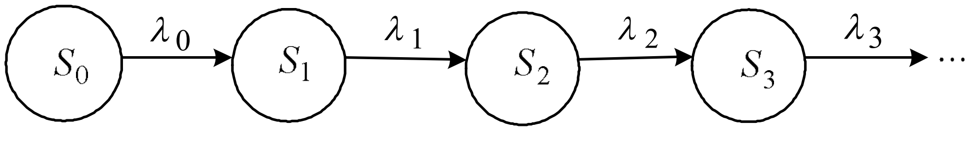



Рис. 9.20. Розмічений граф станів

Матриця інтенсивностей процесу чистого розмноження має вигляд

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Використовуючи вираз (9.56), отримаємо систему диференціальних рівнянь для ймовірностей станів:

$$(q'_0(t), q'_1(t), q'_2(t), \dots) =$$

$$= (q_0(t), q_1(t), q_2(t), \dots) \cdot \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{cases} q'_0(t) = -\lambda_0 \cdot q_0(t), \\ q'_1(t) = \lambda_0 \cdot q_0(t) - \lambda_1 \cdot q_1(t), \\ q'_2(t) = \lambda_1 \cdot q_1(t) - \lambda_2 \cdot q_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{9.65}$$

Цю систему можна розв’язати послідовно. Спочатку розв’язати перше диференціальне рівняння і знайти функцію $q_0(t)$. Її значення підставити у друге рівняння і знайти функцію $q_1(t)$ і так далі.

Процес чистого розмноження у випадку, коли всі інтенсивності однакові $(\lambda_i = \lambda, i = 1,2,...)$, називається *процесом Пуассона*.

Граф цього процесу зображений на рис. 9.21.

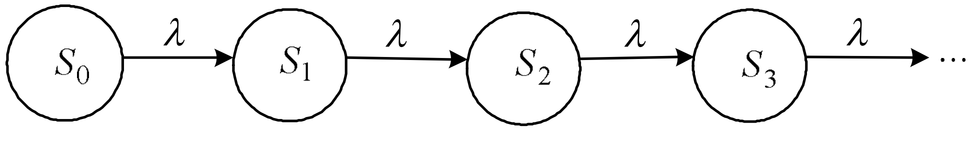



Рис. 9.21. Розмічений граф станів процесу Пуассона

Матриця інтенсивностей процессу Пуассона має вигляд

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Аналогічно до процесу чистого розмноження за виразом (9.56) складаємо систему диференціальних рівнянь імовірностей станів:

$$\begin{cases} q'_0(t) = -\lambda \cdot q_0(t), \\ q'_1(t) = \lambda \cdot q_0(t) - \lambda \cdot q_1(t), \\ q'_2(t) = \lambda \cdot q_1(t) - \lambda \cdot q_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{9.66}$$

Припустимо, що в початковий момент система перебувала в стані $S_0$, тобто

$$q_0(0) = 1,\ q_1(0) = 0,\ q_2(0) = 0,\ q_3(0) = 0, \dots \tag{9.67}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи (9.66):

$$\frac{dq_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot q_0(t); \quad \frac{dq_0(t)}{q_0(t)} = -\lambda dt; \quad q_0(t) = C \cdot e^{-\lambda t}.$$

Знайдемо $C$ за початковою умовою (9.67)

$$q_0(0) = C = 1.$$

Як наслідок, $q_0(t) = e^{-\lambda t}$. Підставимо отримане значення $q_0(t)$ у друге рівняння системи (9.66):

$$q'_1(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} - \lambda \cdot q_1(t);$$
$$q'_1(t) + \lambda \cdot q_1(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}.$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку, розв'язок якого, як відомо, можна шукати у вигляді $q_1(t) = u(t) \cdot v(t)$ добутку двох функцій $u(t)$ і $v(t)$, одна з яких, наприклад $v(t)$, є частинним розв'язком відповідного однорідного диференціального рівняння $v'(t) + \lambda \cdot v(t) = 0$ і має вигляд $v(t) = e^{-\lambda t}$, а інша $u(t)$ є загальним розв'язком диференціального рівняння $u(t) = \lambda t + C$. Таким чином,

$$q_1(t) = (\lambda t + C) \cdot e^{-\lambda t}.$$

За початковою умовою (9.67),

$$q_1(0) = C = 0,$$

тому

$$q_1(t) = \lambda t \cdot e^{-\lambda t}.$$

Знайдене значення $q_1(t)$ підставимо у третє рівняння системи (9.66):

$$q'_2(t) = \lambda^2 t \cdot e^{-\lambda t} - \lambda \cdot q_2(t).$$

Так само знаходимо розв'язок отриманого диференціального рівняння першого порядку:

$$q_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} \cdot e^{-\lambda t}.$$

Аналогічно можна визначити інші функції $q_k(t)$:

$$q_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}, k = 0,1,2,\ldots \tag{9.68}$$

Якщо в момент $t$ система знаходиться в стані $S_k$, то це означає, що за час $t$ в системі відбулося $k$ стрибків. Отже, кількість стрибків у цьому процесі розподілене за відомим законом Пуассона (п. 8.1.2).

Марковський ланцюг з неперервним часом називається *процесом загибелі та розмноження*, якщо його граф має вигляд, показаний на рис. 9.22.

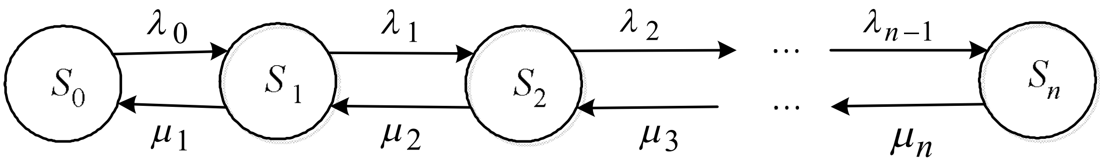



Рис. 9.22. Розмічений граф станів

Тобто всі стани можна витягнути в один ланцюг, у якому кожний стан пов'язаний прямим та оберненим зв'язком з кожним із сусідніх станів, а крайні стани $S_0$ та $S_n$ − тільки з сусідніми.

На цьому графі $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$ − інтенсивності переходів системи зліва направо, $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ − інтенсивності переходів системи справа наліво.

Схема загибелі та розмноження часто зустрічається в найрізноманітніших практичних задачах. Назва цього процесу пов'язана з низкою біологічних задач, де він є математичною моделлю змін чисельності біологічних популяцій.

Розглянемо впорядковану множину станів $S_0, S_1, ... S_n$ (рис. 9.22). При аналізі чисельності популяцій вважають, що стан $S_k$ відповідає чисельності популяцій, яка дорівнює $k$, і перехід системи зі стану $S_k$ в стан $S_{k+1}$ відбувається при народженні одного члена популяції, а перехід у стан $S_{k-1}$ − при загибелі одного члена популяції.

Процес загибелі та розмноження – це типовий марковський ланцюг.

Припустимо, що всі потоки подій, що переводять систему по стрілках графа (рис. 9.22), найпростіші з інтенсивностями $\lambda_i, i = \overline{0, n-1}$ та $\mu_j, j = \overline{1, n}$. За графом (рис. 9.22) складаємо матрицю інтенсивностей:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(\lambda_{n-1}+\mu_{n-1}) & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_n & -\mu_n \end{pmatrix}.$$

За виразом (9.62) складаємо систему алгебраїчних рівнянь для фінальних (граничних) імовірностей станів $\overrightarrow{Q^*} = (q_0^*; q_1^*; q_2^*; \dots; q_n^*)$:

$$\begin{cases} -\lambda_0 q_0^* + \mu_1 q_1^* = 0, \\ \lambda_0 q_0^* - (\lambda_1 + \mu_1) q_1^* + \mu_2 q_2^* = 0, \\ \lambda_1 q_1^* - (\lambda_2 + \mu_2) q_2^* + \mu_3 q_3^* = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_{n-2} q_{n-2}^* - (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) q_{n-1}^* + \mu_n q_n^* = 0, \\ \lambda_{n-1} q_{n-1}^* - \mu_n q_n^* = 0. \end{cases}$$

Будемо розв’язувати цю систему так. З першого рівняння виразимо $q_1^*$:

$$q_1^* = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot q_0^*.$$

З другого рівняння з урахуванням попереднього $q_1^*$ знайдемо $q_2^*$:

$$q_2^* = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot q_1^* = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \cdot q_0^*.$$

З третього рівняння маємо

$$q_3^* = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \cdot q_0^*.$$

Продовжуючи так далі, одержимо вираз для знаходження довільної ймовірності $q_k, k=\overline{0,n}$:

$$q_k^* = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3\ldots\mu_k}\cdot q_0^*,\; k=\overline{0,n}\,.$$

За умовою нормування отримаємо

$$q_0^* + \frac{\lambda_0}{\mu_1}q_0^* + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}q_0^* + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}q_0^* + \ldots + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3\ldots\mu_n}\cdot q_0^* = 1,$$

звідки

$$q_0^* = \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda_0}{\mu_1}+\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}+\frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}+\ldots+\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\right)}. \tag{9.69}$$

Інші фінальні ймовірності потім виражаються через $q_0^*$:

$$\begin{aligned}
&q_1^* = \frac{\lambda_0}{\mu_1}q_0^*; \quad q_2^* = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}q_0^*;\\
&q_3^* = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}q_0^*;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&q_n^* = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3\ldots\mu_n}\cdot q_0^*.
\end{aligned} \tag{9.70}$$

***Зауваження.*** Якщо деяка фізична система може перебувати в одному зі станів $S_0, S_1, S_2, \ldots$, множина яких зчислена (рис. 9.23), то система алгебраїчних рівнянь для фінальних імовірностей станів $\overrightarrow{Q^*} = \left(q_0^*; q_1^*; q_2^*; \ldots\right)$

$$\begin{cases} -\lambda_0\cdot q_0^* + \mu_1\cdot q_1^* = 0,\\ \lambda_{k-1}\cdot q_{k-1}^* - \left(\lambda_k+\mu_k\right)\cdot q_k^* + \mu_{k+1}\cdot q_{k+1}^* = 0,\; k=1,2,\ldots \end{cases} \tag{9.71}$$

має єдиний розв’язок за умови, що $\lambda_k, \mu_k$ – обмежені або зростають повільно, причому $\sum_{k=0}^{\infty} q_k^* = 1$.

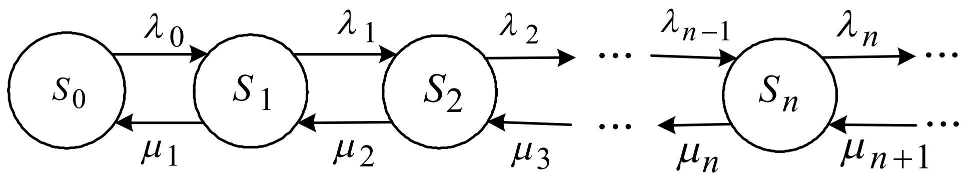



Рис. 9.23. Розмічений граф станів

**Приклад 18.** Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою з чотирьох турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмов кожного турнікета – найпростіший, середній час безвідмовної роботи кожного турнікета 90 год. При виході з ладу кожний турнікет починають одразу ремонтувати. Час ремонту розподілений за показниковим законом і в середньому складає 3 год. Побудувати граф станів системи та знайти її фінальні (граничні) імовірності.

**Розв’язання.** Маємо процес загибелі та розмноження. Введемо такі стани:

$S_0$ – всі чотири турнікети справні;

$S_1$ – один турнікет ремонтується, три – справні;

$S_2$ – два турнікети ремонтуються, два – справні;

$S_3$ – три турнікети ремонтуються, один – справний;

$S_4$ – всі турнікети ремонтуються.

Потоки виходу з ладу і відновлення турнікетів найпростіші з інтенсивностями $\lambda = \frac{1}{90}$ *відмова/год* , $\mu = \frac{1}{3}$ *віднов/год* відповідно.

Отримаємо розмічений граф станів (рис. 9.24).

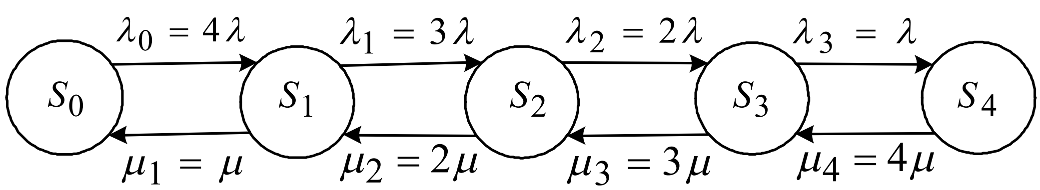



Рис. 9.24. Розмічений граф станів прикладу 18

Оскільки в стані $S_0$ працюють всі чотири турнікети, кожен з яких може відмовити з інтенсивністю $\lambda$, то система переходить зі стану $S_0$ в стан $S_1$ з інтенсивністю $\lambda_0 = 4\lambda$; перехід зі стану $S_1$ в стан $S_2$ має інтенсивність $\lambda_1 = 3\lambda$ (працюють вже три турнікети, кожен з яких може відмовити з інтенсивністю $\lambda$); аналогічно обчислюються інтенсивності $\lambda_2, \lambda_3$. Зі стану $S_4$ у стан $S_3$ система переходить з інтенсивністю $\mu_4 = 4\mu$, тому що відновлюються всі чотири турнікета; перехід зі стану $S_3$ в стан $S_2$ відбувається з інтенсивністю $\mu_3 = 3\mu$ (відновлюються тільки три турнікети, один – працює); аналогічно визначаються $\mu_2, \mu_1$. За виразом (9.69) обчислюємо:

$$q_0^* = \frac{1}{\left(1 + \frac{4\lambda}{\mu} + \frac{4\lambda \cdot 3\lambda}{\mu \cdot 2\mu} + \frac{4\lambda \cdot 3\lambda \cdot 2\lambda}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu} + \frac{4\lambda \cdot 3\lambda \cdot 2\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \cdot 4\mu}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left(1 + 4\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 6\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 4\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4\right)} = \frac{1}{\left(1 + 4\rho + 6\rho^2 + 4\rho^3 + \rho^4\right)},$$

де $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{30}$.

Тоді

$$q_0^* = \frac{1}{\left(1 + 4\left(\frac{1}{30}\right) + 6\left(\frac{1}{30}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{30}\right)^3 + \left(\frac{1}{30}\right)^4\right)} \approx 0{,}877;$$

$$q_1^* = 4\rho \cdot q_0^* \approx 0{,}1169;$$

$$q_2^* = 6\rho^2 \cdot q_0^* \approx 0{,}0058;$$

$$q_3^* = 4\rho^3 \cdot q_0^* \approx 0{,}00013;$$

$$q_4^* = \rho^4 \cdot q_0^* \approx 0{,}0000011.$$

Тобто у стаціонарному режимі в середньому 87,7 % часу система буде перебувати у стані $S_0$ (всі чотири турнікети справні); 11,69 % − у стані $S_1$ (один турнікет ремонтується, три –

справні); 0,58 % − у стані $S_2$ (два турнікета ремонтуються, два справні). Імовірності перебування системи у станах $S_3$ та $S_4$ приблизно дорівнюють нулю.

**Відповідь**: $\overrightarrow{Q^*} = (0{,}877;\ 0{,}1169;\ 0{,}0058;\ 0{,}00013;\ 0{,}0000011)$.

***Зауваження.*** Число $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ називається *коефіцієнтом завантаження системи*.

## Питання до розділу

### Марковські випадкові процеси з дискретними станами і дискретним часом (ланцюги Маркова)

1. Що таке випадковий процес?
2. Що називається орієнтованим графом?
3. Визначення випадкового процесу з дискретним часом.
4. Який випадковий процес називається марковським?
5. Що називається ланцюгом Маркова?
6. Що таке перехідні ймовірності $p_{ij}$?
7. Що являє собою матриця перехідних імовірностей?
8. Однорідний МЛ.
9. Розмічений граф станів.
10. Матриця перехідних імовірностей за $m$ кроків.
11. У чому полягає зміст рівності Маркова?
12. Стаціонарний розподіл імовірностей для марковського ланцюга.
13. Початковий розподіл імовірностей.
14. У якому випадку в теорії випадкових процесів граничні ймовірності існують?
15. Граничний (фінальний) розподіл імовірностей МЛ.
16. Що таке несуттєвий стан, суттєвий стан?
17. Умова нормування.

### Марковські процеси з дискретними станами і неперервним часом. Диференціальні рівняння Колмогорова

18. Визначення марковського випадкового процесу з дискретними станами і неперервним часом.

19. Матриця перехідних імовірностей та її властивості. Рівняння Колмогорова-Чепмена.

20. Матриця інтенсивностей переходів та її властивості.

21. Диференціальні рівняння О.М. Колмогорова.

22. Які можливості надають рівняння Колмогорова?

23. Розподіл імовірностей станів. Що називається ймовірністю $i$-го стану?

24. Способи знаходження розподілу ймовірностей станів.

25. Стаціонарний розподіл імовірностей.

26. Що називається суттєвим, несуттєвим станами?

27. Умова регулярності МЛ.

28. Скільки існує стаціонарних розподілів імовірностей?

29. У якому випадку в теорії випадкових процесів граничні ймовірності існують?

30. У чому полягає зміст граничної ймовірності стану $S_i$?

31. Способи знаходження фінальних (граничних) імовірностей станів.

32. У чому полягає зміст процесів загибелі та розмноження?

**Завдання**

**1.** Задано матрицю перехідних імовірностей для МЛ з дискретним часом $P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Необхідно:

а) побудувати розмічений граф станів;

б) знайти матрицю перехідних імовірностей за два кроки;

в) знайти $P(3)$.

**Відповідь**: б) $P(2) = \begin{pmatrix} 0{,}58 & 0{,}42 \\ 0{,}49 & 0{,}51 \end{pmatrix}$; в) $P(3) = \begin{pmatrix} 0{,}526 & 0{,}474 \\ 0{,}553 & 0{,}447 \end{pmatrix}$.

**2.** Задано матрицю перехідних імовірностей для МЛ з дискретним часом $P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Початковий розподіл імовірностей (момент $t_0 = 0$) визначається вектором $\vec{Q}(0) = (0{,}1; 0{,}9)$. Знайти:

а) розподіл імовірностей за два кроки;

б) розподіл імовірностей за три кроки.

**Відповідь**: а) $\vec{Q}(2)=(0{,}331;\,0{,}669)$; б) $\vec{Q}(3)=(0{,}3331;\,0{,}6669)$.

**3.** Для МЛ з дискретним часом системи, що знаходиться у двох станах, задано матрицю перехідних імовірностей $P=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Перевірити, чи є МЛ регулярним.

**4.** Знайти стаціонарний розподіл імовірностей станів МЛ з дискретним часом, якщо його матриця перехідних імовірностей $P=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}$.

**Відповідь**: $\vec{Q}=(q_1;q_2)=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

**5.** Для МЛ з дискретним часом системи, що знаходиться у трьох станах, задано матрицю перехідних імовірностей $P=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2\\ 0{,}7 & 0 & 0{,}3\end{pmatrix}$. Перевірити, чи є МЛ регулярним. Знайти стаціонарний розподіл імовірностей.

**Відповідь**: $\vec{Q}=(q_1;q_2;q_3)=\left(\frac{7}{11};\,0;\,\frac{4}{11}\right)$.

**6.** Задано матрицю $P$ перехідних імовірностей МЛ з дискретним часом. Необхідно:

1. Побудувати розмічений граф станів.
2. Перевірити МЛ на регулярність і визначити фінальний розподіл імовірностей станів, якщо він існує.
3. Знайти стаціонарний розподіл імовірностей.

а) $P=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$; б) $P=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; в) $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$;

г) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; д) $P=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$.

**Відповідь**:

а) фінальний розподіл $\vec{Q}^* = \left(q_1^*; q_2^*; q_3^*\right) = \left(\frac{5}{14}; \frac{3}{14}; \frac{3}{7}\right)$;

б) стаціонарний розподіл $\vec{Q} = (q_1; q_2; q_3) = \left(\frac{4}{7}; \frac{3}{7}; 0\right)$;

в) фінальний розподіл $\vec{Q}^* = \left(q_1^*; q_2^*; q_3^*\right) = \left(\frac{8}{23}; \frac{3}{23}; \frac{12}{23}\right)$;

г) стаціонарний розподіл $\vec{Q} = (q_1; q_2; q_3) = \left(\frac{7}{19}; \frac{12}{19}; 0\right)$;

д) стаціонарний розподіл $\vec{Q} = (q_1; q_2; q_3) = \left(\frac{4}{11}; 0; \frac{7}{11}\right)$.

**7.** Задано матрицю $P$ перехідних імовірностей МЛ з дискретним часом $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Початковий розподіл імовірностей визначається вектором $\vec{Q}(0) = (0{,}2; 0{,}5; 0{,}3)$. Знайти:

а) розподіл імовірностей за два кроки;

б) стаціонарний розподіл імовірностей;

в) чи існує фінальний (граничний) розподіл імовірностей?

**Відповідь**: а) $\vec{Q}(2) = \left(\frac{143}{240}; 0; \frac{97}{240}\right)$;

б) стаціонарний розподіл $\vec{Q} = (q_1; q_2; q_3) = \left(\frac{4}{7}; 0; \frac{3}{7}\right)$;

в) ні.

**8.** Знайти фінальні ймовірності станів МЛ з дискретним часом, якщо матриця перехідних імовірностей має вигляд $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

**Відповідь**: $\vec{Q}^*=\left(q_1^*;q_2^*;q_3^*\right)=\left(\frac{4}{15};\frac{2}{5};\frac{1}{3}\right)$.

**9**. Два автомобілі $A$ і $B$ здають в оренду за однією і тією самою ціною. Автомобілі можуть перебувати в одному з таких станів:

$S_1$ − працює добре;

$S_2$ − потребує регулювання.

Матриці перехідних імовірностей для автомобілів $A$ і $B$ відповідно мають вигляд

$$P_A=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix},\ P_B=\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Знайти стаціонарний розподіл імовірностей для обох автомобілів. Який автомобіль вигідніше орендувати?

**Відповідь**: $\vec{Q}_A=\left(q_1;q_2\right)=\left(\frac{7}{9};\frac{2}{9}\right)$, $\vec{Q}_B=\left(q_1;q_2\right)=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Вигідніше орендувати автомобіль $A$.

**10.** Фірма, яка виконує доставку обладнання залізничним транспортом по території України, має декілька транспортних експедиторських компаній, які обслуговують північну ($A$), південну ($B$) і центральну ($C$) частини країни. Статистично було отримано:

1) після здійснення доставки в $A$ наступна доставка в 30 випадках здійснюється в $A$, у 30 випадках – у $B$ та у 40 випадках – у $C$;

2) після здійснення доставки в $B$ наступна доставка в 40 випадках здійснюється в $A$, у 40 випадках – у $B$ та у 20 випадках – у $C$;

3) після здійснення доставки в $C$ наступна доставка в 50 випадках здійснюється в $A$, у 30 випадках – у $B$ та у 20 випадках – у $C$. Таким чином, район наступної доставки визначається тільки попередньою доставкою.

Визначити:

а) імовірність того, що здійснивши дві доставки, фірма буде робити доставку в південну частину ($B$), якщо попередньо вона зробила доставку в центральну частину ($C$);

б) знайти фінальні ймовірності станів.

**Відповідь**: а) 0,33; б) $\vec{Q}^* = \left(q_1^*; q_2^*; q_3^*\right) = \left(\frac{7}{18}; \frac{1}{3}; \frac{5}{18}\right)$.

**11**. Задано матрицю інтенсивностей:

1) $\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$;

2) $\Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$;

3) $\Lambda = \begin{pmatrix} -0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & -0{,}7 \end{pmatrix}$.

Необхідно:

а) побудувати розмічений граф станів;

б) знайти матрицю перехідних імовірностей.

**Відповідь**:

1) а) розмічений граф станів подано на рис. 9.25;

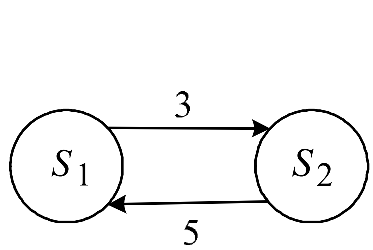



Рис. 9.25. Розмічений граф станів

б) $P(t)=\begin{pmatrix} \frac{3}{8}e^{-8t}+\frac{5}{8} & -\frac{3}{8}e^{-8t}+\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8}e^{-8t}+\frac{5}{8} & \frac{5}{8}e^{-8t}+\frac{3}{8} \end{pmatrix};$

2) а) розмічений граф станів подано на рис. 9.26;

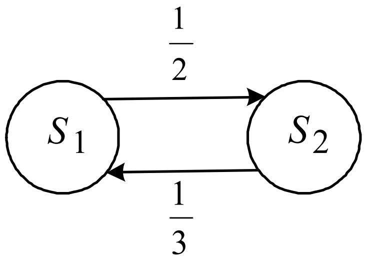



Рис. 9.26. Розмічений граф станів

б) $P(t)=\begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5}e^{-\frac{5}{6}t} & \frac{3}{5}-\frac{3}{5}e^{-\frac{5}{6}t} \\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{6}t} & \frac{3}{5}+\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{6}t} \end{pmatrix};$

3) а) розмічений граф станів подано на рис. 9.27;

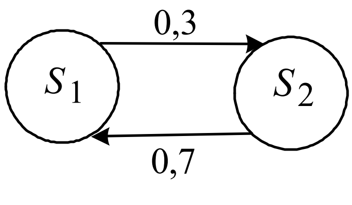



Рис. 9.27. Розмічений граф станів

б) $P(t)=\begin{pmatrix} 0{,}7+0{,}3e^{-t} & 0{,}3-0{,}3e^{-t} \\ 0{,}7-0{,}7e^{-t} & 0{,}3+0{,}7e^{-t} \end{pmatrix}.$

**12.** За даним розміченим графом (рис. 9.28) необхідно:
а) скласти матрицю інтенсивностей;
б) знайти матрицю перехідних імовірностей.

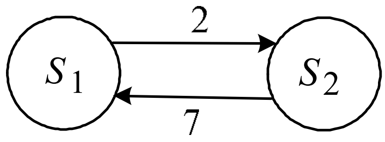



Рис. 9.28. Розмічений граф станів завдання 12

**Відповідь**: б) $P(t)=\begin{pmatrix} \frac{2}{9}e^{-9t}+\frac{7}{9} & -\frac{2}{9}e^{-9t}+\frac{2}{9} \\ -\frac{7}{9}e^{-9t}+\frac{7}{9} & \frac{7}{9}e^{-9t}+\frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

**13.** Для марковського ланцюга з неперервним часом з матрицею інтенсивностей $\Lambda=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ знайти:

а) матрицю перехідних імовірностей $P(t)$;

б) знайти фінальний (граничний) розподіл станів.

**Відповідь**:

а) $P(t)=\begin{pmatrix} \frac{3}{10}+\frac{1}{5}e^{-5t}+\frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{5}-\frac{1}{5}e^{-5t} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{3}{10}-\frac{4}{5}e^{-5t}+\frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{5}+\frac{4}{5}e^{-5t} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{3}{10}+\frac{1}{5}e^{-5t}-\frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{5}-\frac{1}{5}e^{-5t} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}$;

б) $\vec{Q}^{*}=\left(q_1^*;q_2^*;q_3^*\right)=(0,6;0,2;0,2)$.

**14.** Задано матрицю інтенсивностей марковського ланцюга з неперервним часом. Знайти:

а) розподіл імовірностей станів через час $t$, якщо відомо, що в початковий момент часу система знаходилась в $i$-ому стані;

б) фінальний розподіл імовірностей.

1) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, $i=2$;  2) $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $i=1$;

3) $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, i = 3;$ 4) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}, i = 1;$

5) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, i = 2.$

**Відповідь**:

1) а) $\overrightarrow{Q(t)} = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-6t}; \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-6t}\right)$; б) $\vec{Q}^* = (q_1^*; q_2^*) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$;

2) а) $\overrightarrow{Q(t)} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-4t}; \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-4t}\right)$; б) $\vec{Q}^* = (q_1^*; q_2^*) = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$;

3) а) $\overrightarrow{Q(t)} = \left(0; \frac{2}{5} - \frac{2}{5}e^{-5t}; \frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{-5t}\right)$; б) $\vec{Q}^* = (q_1^*; q_2^*; q_3^*) = \left(0; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$;

4) а) $\overrightarrow{Q(t)} = \left(\frac{3}{5}e^{-3t} + \frac{3}{20}e^{-8t} + \frac{1}{4}; -\frac{3}{5}e^{-3t} + \frac{9}{40}e^{-8t} + \frac{3}{8}; -\frac{3}{8}e^{-8t} + \frac{3}{8}\right)$;

б) $\vec{Q}^* = (q_1^*; q_2^*; q_3^*) = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{8}; \frac{3}{8}\right)$;

5) а) $\overrightarrow{Q(t)} = \left(\left(t - \frac{1}{3}\right) \cdot e^{-3t} + \frac{1}{3}; e^{-3t}; \frac{2}{3} - \left(t + \frac{2}{3}\right) \cdot e^{-3t}\right)$;

б) $\vec{Q}^* = (q_1^*; q_2^*; q_3^*) = \left(\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}\right)$.

**15.** На залізничній станції працюють два мостові крани, які при виході з ладу обслуговуються однією ремонтною бригадою. Потік відмов кожного мостового крана найпростіший, середній час безвідмовної роботи кожного мостового крана дорівнює 6 місяців. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому дорівнює 1 місяць. Необхідно:

а) побудувати розмічений граф станів;

б) записати матрицю інтенсивностей;

в) знайти матрицю перехідних імовірностей;

г) знайти фінальний (граничний) розподіл імовірностей.

**Відповідь**:

а) за даними система може перебувати в одному зі станів:

$S_0$ – два мостові крани справні;

$S_1$ – один мостовий кран справний, другий ремонтується;

$S_2$ – два мостові крани ремонтуються;

$\lambda = \frac{1}{6}$ (*відмова /міс.*), $\mu = 1$ (*відновл /міс.*) (рис. 9.29);

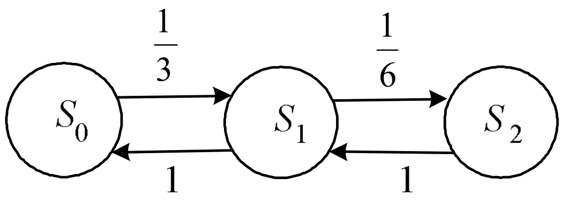



Рис. 9.29. Розмічений граф станів завдання 15

б) $\Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $P(t) =$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3e^{-\frac{5}{3}t} + 4e^{-\frac{5}{6}t} + 18 & -4e^{-\frac{5}{3}t} - 2e^{-\frac{5}{6}t} + 6 & e^{-\frac{5}{3}t} - 2e^{-\frac{5}{6}t} + 1 \\ -30e^{-\frac{5}{3}t} + 12e^{-\frac{5}{6}t} + 18 & 40e^{-\frac{5}{3}t} - 6e^{-\frac{5}{6}t} + 6 & -10e^{-\frac{5}{3}t} - 6e^{-\frac{5}{6}t} + 1 \\ 18e^{-\frac{5}{3}t} - 36e^{-\frac{5}{6}t} + 18 & -24e^{-\frac{5}{3}t} + 18e^{-\frac{5}{6}t} + 6 & 6e^{-\frac{5}{3}t} + 18e^{-\frac{5}{6}t} + 1 \end{pmatrix};$$

г) $\overrightarrow{Q^*} = \left(q_1^*; q_2^*; q_3^*\right) = \left(\frac{18}{25}; \frac{6}{25}; \frac{1}{25}\right)$.

**16.** Технічний пристрій складається з трьох однакових вузлів, кожен з яких може виходити з ладу незалежно від іншого. При відмові вузла його відразу починають ремонтувати. Можливі стани системи:

$S_0$ – всі три вузли справні;

$S_1$ – один вузол відмовив, два справні;

$S_2$ − два вузли відмовили, один справний;

$S_3$ − всі три вузли відмовили.

Граф станів такої системи наведено на рис. 9.30:

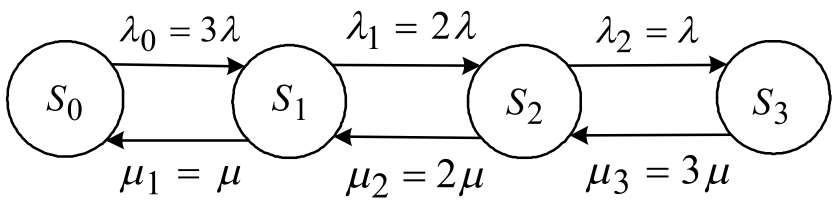



Рис. 9.30. Розмічений граф станів завдання 16

Необхідно:

а) записати матрицю інтенсивностей;

б) знайти фінальний розподіл системи, якщо $\lambda = \frac{1}{30}\left(\textit{відмова /доба}\right),\ \mu = \frac{1}{6}\left(\textit{відновл /доба}\right)$.

**Відповідь**:

а)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -3\lambda & 3\lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(2\lambda+\mu) & 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{7}{30} & \frac{1}{15} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{11}{30} & \frac{1}{30} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

б) $\overrightarrow{Q^*} = \left(q_1^*; q_2^*; q_3^*; q_4^*\right) = \left(\frac{125}{216}; \frac{25}{72}; \frac{5}{72}; \frac{1}{216}\right)$.

**17.** На залізничній станції одночасно можуть завантажувати 5 вагонів. Інтенсивність завантаження будь-якого з вагонів не залежить від інших і дорівнює $\mu$. Подача вагонів під завантаження здійснюється з інтенсивністю $\lambda$. Необхідно:

а) зобразити розмічений граф станів такої системи;

б) записати матрицю інтенсивностей.

**Відповідь**:
а) розмічений граф станів подано на рис. 9.31;

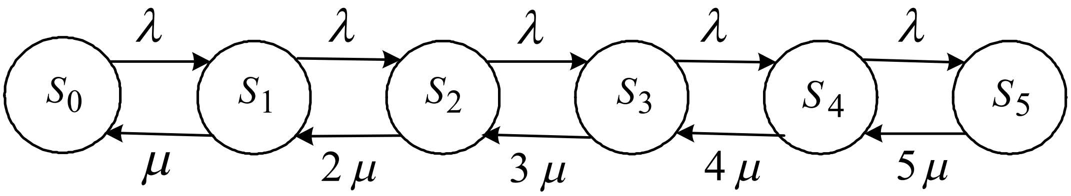



Рис. 9.31. Розмічений граф станів завдання 17

б) $$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\mu & -(\lambda+4\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\mu & -5\mu \end{pmatrix}.$$

# Розділ 10
# ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

## 10.1. Предмет і задачі теорії масового обслуговування

При дослідженні операцій часто доводиться аналізувати роботу своєрідних систем, що призначені для багаторазового розв'язання однотипних задач. Процеси, які при цьому виникають, називають *процесами обслуговування*, а системи – *системами масового обслуговування* (СМО).

Основи *теорії масового обслуговування* (ТМО) було закладено у працях датського математика А.К. Ерланга, який застосував методи теорії ймовірностей для упорядкування роботи телефонної станції й розрахунку якості обслуговування абонентів залежно від кількості пристроїв. Радянський вчений О. Я. Хінчин розробив теорію потоку однорідних подій, яка стала основою ТМО. Вагомий внесок у розвиток ТМО зробили А.А. Марков, К. Пальма, А.Н. Колмогоров, Д. Кендалл.

*Системами масового обслуговування* називаються системи, до яких у випадкові моменти часу надходять замовлення на обслуговування.

До таких систем відносять телефонні станції, ремонтні майстерні, квиткові каси, довідкові бюро, станції технічного обслуговування автомобілів, магазини тощо.

Кожна СМО складається з деякої кількості обслуговуючих одиниць, які називаються *каналами обслуговування*. У ролі каналів можуть виступати лінії зв'язку, залізничні колії, прилади, робочі бригади тощо.

Залежно від кількості каналів СМО поділяють на *одноканальні* та *багатоканальні*.

Іноді СМО мають обмежені можливості щодо задоволення вимог і це призводить до накопичування на вході СМО надмірної кількості заявок (вони або утворюють чергу, або залишають СМО необслуженими). З іншого боку, у деякі моменти часу СМО може взагалі простоювати або працювати з недовантаженням. Наприклад, квиткові каси, турнікети метрополітену, подача вагонів під навантаження і розвантаження, касові апарати тощо.

Черги виникають внаслідок того, що потік вимог на обслуговування має випадковий характер. Якщо кількість пристроїв обслуговування досить велика, то черги виникають рідко, однак тоді існують довготривалі простої обладнання, і навпаки, якщо система має недостатню кількість пристроїв обслуговування, то створюються черги і можливі великі втрати внаслідок очікування.

*Предметом* теорії масового обслуговування є встановлення залежності між характером потоку заявок, кількістю каналів, їхньою продуктивністю, правилами роботи СМО та успішністю (ефективністю) обслуговування.

Випадковий характер потоку заявок, а в загальному випадку і тривалості обслуговування, призводить до того, що в системі масового обслуговування відбувається деякий випадковий процес. Для того щоб визначити рекомендації щодо раціональної організації цього процесу і вимог до СМО, необхідно вивчити випадковий процес, який протікає в системі, та описати його математично, що і визначає основні *задачі* теорії масового обслуговування.

## 10.2. Математична модель СМО

*Математична модель* СМО включає такі елементи:

- *вхідний потік вимог (заявок)*, що надходять на обслуговування;
- *черга*, яка складається з вимог (заявок), що очікують на обслуговування;
- *система обслуговування*;
- *вихідні потоки* (обслужені вимоги, втрачені вимоги та вимоги, що надходять на повторне обслуговування);
- показники *ефективності* системи;
- механізм обслуговування.

Схема СМО зображена на рис. 10.1.

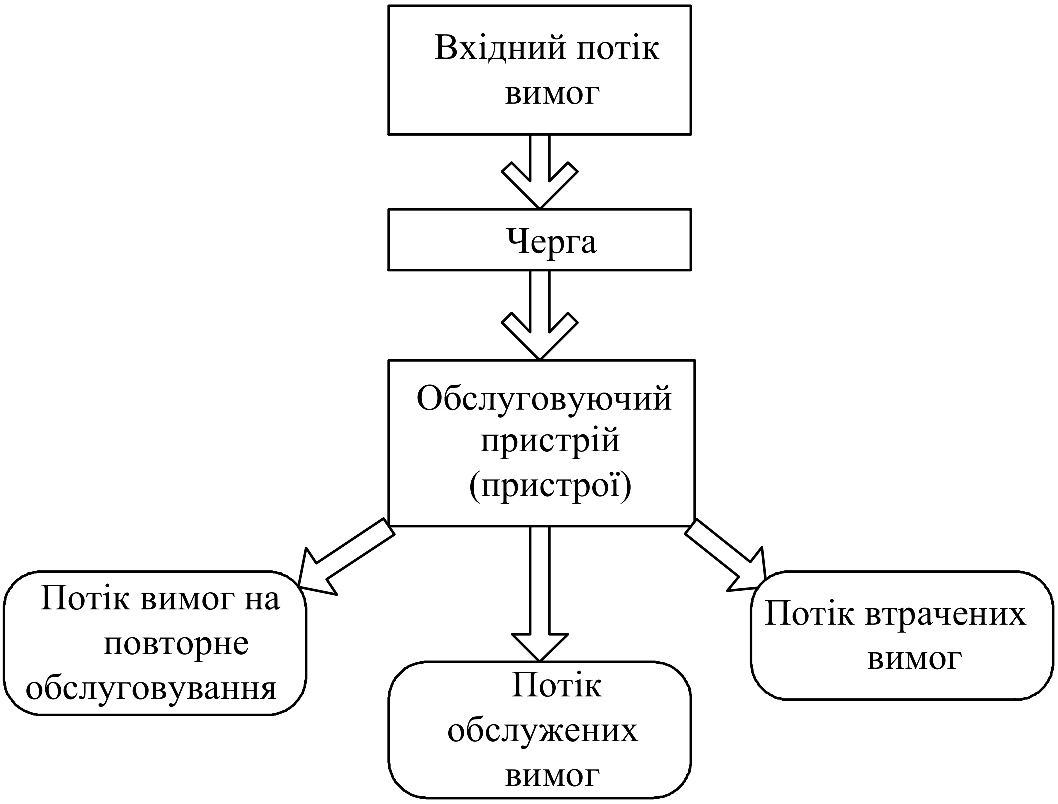



Рис. 10.1. Схема СМО

## 10.3. Основні елементи математичної моделі СМО

*Основними елементами СМО є*:

1. Вхідний потік вимог (заявок на обслуговування).
2. Дисципліна черги.
3. Механізм обслуговування.

*Вхідний потік вимог* визначає послідовність моментів надходження вимог (заявок) на обслуговування і кількість таких вимог по кожному черговому надходженню.

Як було зазначено вище (п. 8.1.2), вхідний потік вимог є найпростішим потоком з інтенсивністю $\lambda$, яка вказує на середню кількість замовлень, що надходять у систему за одиницю часу. Було показано, що у випадку найпростішого потоку з інтенсивністю $\lambda$ ймовірність $P_t(k)$ прибуття до СМО $k$ заявок протягом часу $t$ розподілено за законом Пуассона (п. 8.1.2).

Другою важливою характеристикою вхідного потоку вимог є неперервна випадкова величина $T$ − проміжок часу між появами двох послідовних заявок. Було доведено (п. 8.1.3), що випадкова величина $T$ розподілена за показниковим законом. Тому математичне сподівання $M(T)$, дисперсія $D(T)$, середнє квадратичне відхилення мають відповідно вигляд

$$M(T) = \frac{1}{\lambda}, \tag{10.1}$$

$$D(T) = \frac{1}{\lambda^2}, \tag{10.2}$$

$$\sigma(T) = \frac{1}{\lambda}, \tag{10.3}$$

де $\lambda$ − інтенсивність потоку.

*Чергою* називається ряд заявок, що очікують на обслуговування. Існує дві її характеристики: довжина і дисципліна черги.

*Довжина* черги може бути скінчена і нескінчена.

*Дисципліна* черги визначає принцип, відповідно до якого обслуговуються заявки в системі. Найчастіше дисципліна черги обумовлена такими правилами:

- першим прийшов – першим обслуговується;
- останнім прийшов – першим обслуговується;
- випадковий добір замовлень;
- добір замовлень на обслуговування за критерієм пріоритетності;
- обмеження часу очікування початку обслуговування.

*Механізм обслуговування* визначається двома характеристиками: тривалістю процедур обслуговування $t$ і кількістю вимог $\mu$, що обслужені за одиницю часу. Слід зазначити, що механізм обслуговування може складатися з одного або декількох каналів обслуговування. При цьому ці канали можуть бути розташовані *паралельно* (наприклад, працює декілька кас у супермаркеті) або *послідовно* (наприклад, послідовна обробка деталей у цеху).

Для аналітичного опису характеристик механізму обслуговування використовують поняття «ймовірнісний розподіл часу обслуговування». Позначимо цей час через $T_{обсл}$. Величина $T_{обсл}$ є випадковою. У багатьох задачах теорії масового обслуговування закон розподілу часу обслуговування вважається показниковим, тобто функція розподілу має вигляд

$$F(t) = P(T_{обсл} < t) = 1 - e^{-\mu t}. \qquad (10.4)$$

Параметр цього розподілу $\mu$ є величиною оберненою до середнього часу обслуговування

$$\mu = \frac{1}{M(T_{обсл})}. \qquad (10.5)$$

Часто $\mu$ називають *інтенсивністю потоку обслуговування*. При цьому під потоком обслуговування розуміють потік заявок, які обслуговуються єдиним неперервно зайнятим каналом одна за одною.

Якщо $T_{обсл}$ є випадковою величиною, яка має показниковий розподіл, то *потік обслуговування* є *найпростішим*.

Якщо вхідний потік і всі потоки обслуговування є найпростішими, то процес, що протікає в СМО, є марковським випадковим процесом (ланцюгом) з дискретними станами і неперервним часом. Тому СМО, у якій всі потоки найпростіші, називають *марковською*.

Як наслідок, припущення про показниковий розподіл часу обслуговування та інтервалу часу між двома послідовними прибуттями заявок відіграє важливу роль у теорії масового обслуговування, оскільки спрощує аналітичне дослідження СМО, зводячи його до дослідження ланцюгів Маркова.

***Зауваження.*** Для марковського випадкового процесу необхідно і достатньо, щоб всі потоки подій, під дією яких відбуваються переходи зі стану в стан, були найпростішими.

Якщо процес, що протікає в СМО не є марковським, то математичний опис потоків подій, що відбуваються в СМО, стає значно складнішим. У цьому випадку показники ефективності СМО можуть бути оцінені наближено, використовуючи математичний апарат «марковської» СМО. При цьому, чим складніша СМО, чим більше в ній каналів обслуговування, тим точнішими є наближені формули, отримані в припущенні, що в СМО виконуються «марковські» умови. Тому для обґрунтування рекомендацій щодо практичного управління СМО взагалі і не вимагається знань точних характеристик, а лише необхідно обчислити їхні наближені значення.

*При дослідженні СМО можуть розв’язуватися*:

1. *Задачі аналізу СМО* – визначення характеристик якості обслуговування залежно від параметрів і властивостей вхідного потоку вимог, параметрів і структури системи обслуговування і дисципліни обслуговування.

2. *Задачі параметричного синтезу* – визначення параметрів системи обслуговування при заданій структурі залежно від параметрів і властивостей потоку вимог, дисципліни і якості обслуговування.

3. *Задачі синтезу структури системи з оптимізацією її параметрів* – при заданих потоках, дисципліні і якості обслуговування вартість СМО була б мінімальною або були б мінімальними втрати замовлень при заданих потоках, дисципліні і вартості системи.

## 10.4. Класифікація систем масового обслуговування

Системи масового обслуговування класифікують за різноманітними ознаками (рис. 10.2).

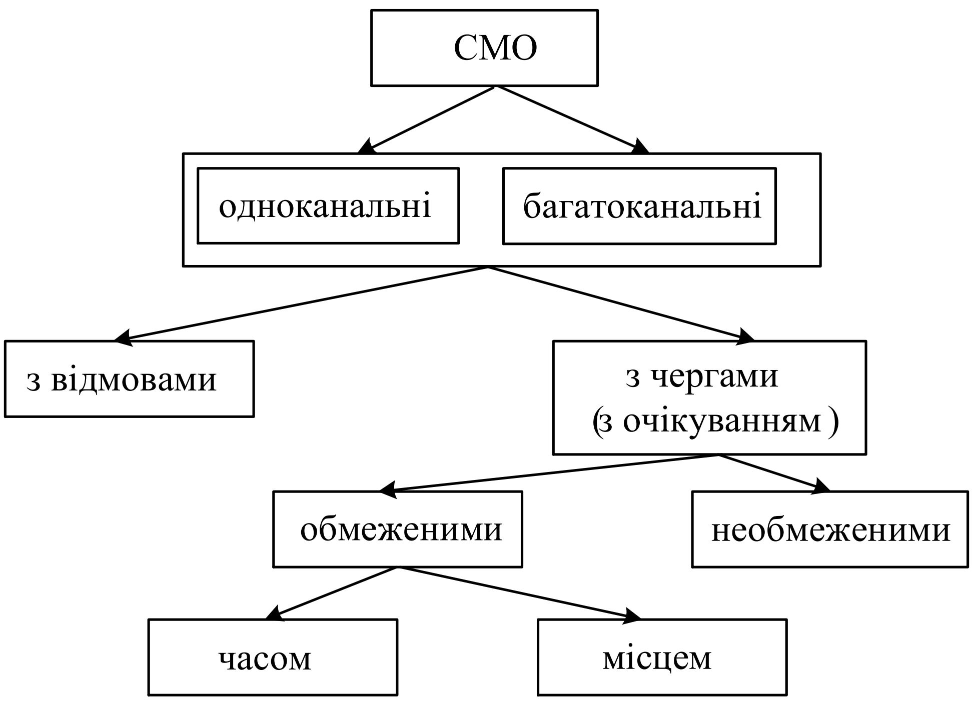



Рис. 10.2. Класифікація СМО

Як було показано вище, за складом СМО можуть бути:

- *одноканальними* (з одним обслуговуючим пристроєм);
- *багатоканальними* (з декількома паралельними обслуговуючими пристроями).

За часом перебування вимоги (заявки) у системі до початку обслуговування:

- *з відмовами* (заявка, що поступила в СМО в момент, коли всі канали зайняті, отримує відмову, покидає СМО і в подальшому процесі обслуговування участі не бере). Наприклад, телефонуючи до «Довідкового бюро», пасажир почув, що номер зайнятий. Пасажиру відмовлено в обслуговуванні, йому необхідно ще раз набрати номер, тобто ще раз подати заявку на обслуговування;
- з *очікуванням* (заявка, що поступила в СМО в момент, коли всі канали зайняті, стає в чергу і перебуває в ній, поки не звільниться один з каналів. Як тільки звільняється канал, одна з заявок черги приймається до обслуговування).

Очікування може бути *обмеженим* і *необмеженим*.

У СМО з необмеженим очікуванням кожна заявка, що поступила в момент, коли немає вільних каналів, стає в чергу і чекає звільнення каналу, який прийме її до обслуговування. У таких системах кожна заявка рано чи пізно буде задоволена.

У системах з обмеженим очікуванням на перебування заявки в черзі накладаються деякі обмеження. Ці обмеження стосуються довжини черги (кількості заявок, що одночасно знаходяться в черзі), часу перебування в черзі (після певного часу перебування в черзі заявка її покидає) і т. ін.

За складом обслуговуючих пристроїв багатоканальні СМО поділяються:

- *на однофазні* (якщо після проходження одного обслуговуючого пристрою заявка вважається обслуженою);
- *багатофазні* (заявка повинна послідовно пройти через декілька обслуговуючих пристроїв).

Для оцінки ефективності роботи СМО використовують певні величини (*показники ефективності*).

## 10.5. Показники ефективності СМО

Звичайно в теорії масового обслуговування цікавлять граничні середні характеристики систем, які називаються *показниками ефективності СМО*. У якості показників ефективності для стаціонарного режиму можуть розглядатися:

1) $A$ − середня кількість заявок, які обслуговуються за одиницю часу. Цю характеристику називають *абсолютною пропускною спроможністю СМО*;

2) $Q$ − імовірність обслуговування заявки, або *відносна пропускна спроможність СМО*. Очевидно

$$Q = \frac{A}{\lambda}; \tag{10.6}$$

3) $P_{відм}$ − імовірність відмови, тобто ймовірність того, що заявка, яка надійшла в СМО, не буде обслужена:

$$P_{відм} = 1 - Q; \tag{10.7}$$

4) $\overline{Z}_{сист}$ − середня кількість заявок у СМО (тобто всі заявки, що обслуговуються або чекають у черзі, якщо вона існує);

5) $\overline{r}$ − середня кількість заявок у черзі, якщо вона є;

6) $\overline{t}_{сист}$ − середній час перебування заявки в СМО (як у черзі, якщо вона є, так і впродовж обслуговування);

7) $\overline{t}_{черг}$ − середній час перебування заявки в черзі;

8) $\overline{K}$ −середня кількість зайнятих каналів.

Вибір показників ефективності СМО залежить від її типу.

**Приклад 1.** Черговий по станції має дві лінії зв'язку. Потік викликів є найпростішим з інтенсивністю $\lambda = 0{,}05\,виклик/хв$. Виклик, що надходить до чергового, отримує відмову тоді, коли обидві лінії зайняті. Середній час переговорів з черговим по станції складає 1,6 $хв$. Час переговорів розподілений за показниковим законом. Необхідно знайти:

а) імовірність відмови;

б) абсолютну пропускну спроможність.

**Розв'язання.** а) Позначимо стани СМО за кількістю зайнятих ліній зв'язку:

$S_0$ − обидві лінії зв’язку вільні;

$S_1$ − одна лінія зв’язку зайнята, інша − вільна;

$S_2$ − обидві лінії зв’язку зайняті.

Відомо, що потік викликів є найпростішим з інтенсивністю $\lambda = 0{,}05\,\textit{виклик/хв}$. Оскільки потік відмов розподілено за показниковим законом, то його інтенсивність обчислюється за формулою (10.5): $\mu = \dfrac{1}{M(T_{обсл})} = \dfrac{1}{1{,}6} = 0{,}625\ \textit{відмов/хв}$.

Будуємо розмічений граф станів (рис. 10.3).

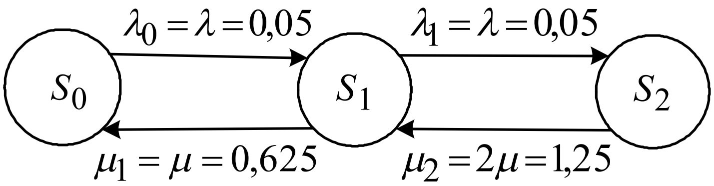



Рис. 10.3 Розмічений граф станів прикладу 1

Оскільки інтенсивність викликів однакова, то система переходить зі стану $S_i$ в стан $S_{i+1}, i = \overline{0,1}$ з інтенсивністю $\lambda = 0{,}05$.

Зі стану $S_2$ в стан $S_1$ система переходить з інтенсивністю $\mu_2 = 2 \cdot \mu = 2 \cdot 0{,}625 = 1{,}25$, тому що зайняті дві лінії зв’язку; перехід зі стану $S_1$ в стан $S_0$ відбувається з інтенсивністю $\mu_1 = \mu = 0{,}625$ (одна лінія зв’язку зайнята, інша – вільна).

Отриманий граф є графом процесу загибелі та розмноження. Отже, в описаній СМО відбувається процес загибелі та розмноження. За формулами (9.69) і (9.70) обчислюємо фінальний розподіл імовірностей:

$$q_0^* = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\lambda_0}{\mu_1} + \dfrac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\right)} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{0{,}05}{0{,}625} + \dfrac{0{,}05 \cdot 0{,}05}{0{,}625 \cdot 1{,}25}\right)} = \frac{625}{677};$$

$$q_1^* = \frac{\lambda_0}{\mu_1} q_0^* = \frac{0{,}05}{0{,}625} \cdot \frac{625}{677} = \frac{50}{677};$$

$$q_2^* = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} q_0^* = \frac{\lambda_1}{\mu_2} q_1^* = \frac{0{,}05}{1{,}25} \cdot \frac{50}{677} = \frac{2}{677}.$$

Перевіримо:

$$q_0^* + q_1^* + q_2^* = \frac{625}{677} + \frac{50}{677} + \frac{2}{677} = 1,$$

чого і слід було чекати, оскільки система може перебувати в одному з трьох можливих станів $S_0$, $S_1$, $S_2$.

Тоді ймовірність того, що обидві лінії зв'язку зайняті (імовірність відмови) дорівнює $P_{відм} = q_2^* = \frac{2}{677} \approx 0{,}003$;

б) За формулою (10.7) обчислюємо відносну пропускну спроможність:

$$Q = 1 - P_{відм} = 1 - \frac{2}{677} = \frac{675}{677} \approx 0{,}997,$$

тобто ймовірність обслуговування заявки дорівнює 0,997.

Абсолютна пропускна спроможність СМО за формулою (10.6)

$$A = Q \cdot \lambda = \frac{675}{677} \cdot 0{,}05 = \frac{135}{2708} \approx 0{,}0499.$$

Отже, СМО обслуговує в середньому 0,0499 заявки в хвилину.

**Відповідь**: а) $P_{відм} \approx 0{,}003$; б) $A \approx 0{,}0499$.

## 10.6. Одноканальна СМО з необмеженою чергою

### 10.6.1. Загальні поняття одноканальної СМО з необмеженою чергою

Одноканальна СМО з необмеженою чергою (з необмеженим очікуванням) є найпростішою одноканальною СМО, що працює так:

- якщо заявка, що надійшла, застає канал вільним, то вона одразу починає обслуговуватись;

- якщо в момент надходження заявки канал виявляється зайнятим обслуговуванням іншої заявки, то заявка встає в чергу.

Довжина черги може бути довільною. Як наслідок, будь-яка заявка, що надійшла в СМО, обов'язково буде обслуженою (очікування необмежене).

На рис. 10.4 зображено розмічений граф станів даної системи.

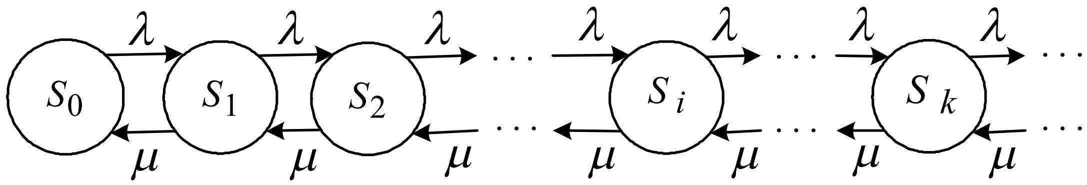


Рис. 10.4. Розмічений граф станів одноканальної СМО з необмеженою чергою

Будемо вважати, що в момент часу $t$ система знаходиться у стані $S_k$, якщо в цей момент у системі знаходиться рівно $k$ заявок. Тоді отримаємо такі стани СМО:

$S_0$ − канал вільний;

$S_1$ − канал зайнятий (черги немає);

$S_2$ − канал зайнятий ( одна заявка знаходиться в черзі);

...;

$S_i$ − канал зайнятий ($(i-1)$ заявка знаходиться в черзі);

…;

$S_k$ − канал зайнятий ($(k-1)$ заявка знаходиться в черзі);

….

Переходи зі стану $S_i$ в стан $S_{i+1}$, $i = 0,1,2,...$ здійснюються в моменти надходження заявок, а обернені переходи зі стану $S_{i+1}$ в стан $S_i$, $i = 0,1,2,...$ − у моменти закінчення обслуговування.

Якщо потік заявок до СМО є найпростішим з інтенсивністю $\lambda$ і час обслуговування однієї заявки розподілений за показниковим законом з параметром $\mu$ $\left(\mu = \dfrac{1}{M(T_{обсл})}\right)$, то розмічений граф станів (рис. 10.4) є графом процесу загибелі та розмноження.

Знайдемо фінальні (граничні) імовірності станів СМО, якщо вони існують, адже кількість станів системи нескінченна.

Позначаючи коефіцієнт завантаження системи через $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, обчислюємо фінальний (граничний) розподіл системи за виразом (9.69):

$$q_0^* = \frac{1}{\left(1 + \rho + \rho^2 + ... + \rho^k + ...\right)}.$$

У дужках знаходиться сума нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $\rho$.

Якщо знаменник прогресії $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$, то сума нескінченної спадної геометричної прогресії дорівнює

$$1 + \rho + \rho^2 + ... + \rho^k + ... = \frac{1}{1 - \rho}.$$

Якщо $\rho \geq 1$, то ряд $1 + \rho + \rho^2 + ... + \rho^k + ...$ розбігається, сума його зростає необмежено, що говорить про те, що СМО не може працювати, оскільки черга необмежено зростає.

Для найпростішого потоку загибелі та розмноження при виконанні умови $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ система виходить на стаціонарний режим, при цьому фінальні ймовірності співпадають зі стаціонарними і визначаються за формулами

$$q_0^* = 1 - \rho,$$
$$q_1^* = \rho \cdot q_0^* = \rho \cdot (1 - \rho),$$
$$q_2^* = \rho^2 \cdot q_0^* = \rho^2 \cdot (1 - \rho),$$
$$....$$

У загальному випадку

$$q_k^* = \rho^k \cdot q_0^* = \rho^k \cdot (1-\rho),$$
$$q_0^* = 1-\rho, \qquad (10.8)$$
$$k = 1,2,3,...$$

Умова $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{M(T_{обсл})}{M(T)} < 1$ означає, що середній час, необхідний для обслуговування однієї заявки, повинен бути менший, ніж середній інтервал часу між моментами надходження заявок.

Якщо ж $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{M(T_{обсл})}{M(T)} \geq 1$, то система буде перевантаженою і довжина черги при цьому прямує до нескінченності.

### 10.6.2. Показники ефективності одноканальної СМО з необмеженою чергою

Нехай СМО має один канал обслуговування, до якого надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю $\lambda$. Час обслуговування розподілено за показниковим законом з параметром $\mu$. Якщо заявка надходить у СМО в момент зайнятості каналу, то вона стає в чергу, що необмежена. Тому кожна заявка врешті-решт буде обслугована, тобто

$$P_{відм} = 0. \qquad (10.9)$$

Як наслідок, за виразом (10.7) відносна пропускна спроможність

$$Q = 1 - P_{відм} = 1, \qquad (10.10)$$

і за співвідношенням (10.6) абсолютна пропускна спроможність

$$A = Q \cdot \lambda = \lambda. \qquad (10.11)$$

Знайдемо середню кількість заявок, що знаходяться в системі в стаціонарному режимі. Позначимо через $X$ − кількість заявок, що надійшли до СМО. Очевидно, $X$ − дискретна випадкова величина, що набуває значення 0,1,2,3,… Відомо, що середнє значення ДВВ Х дорівнює математичному сподіванню $M(X)$. За формулою (10.8) складемо розподіл ДВВ $X$ в табличному вигляді (табл. 10.1).

Таблиця 10.1

Розподіл ДВВ $X$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | … | $k$ | … |
| $p_i$ | $1-\rho$ | $\rho\cdot(1-\rho)$ | $\rho^2\cdot(1-\rho)$ | … | $\rho^k\cdot(1-\rho)$ | … |

Математичне сподівання ДВВ $X$ дорівнює

$$M(X)=0\cdot(1-\rho)+1\cdot\rho\cdot(1-\rho)+2\cdot\rho^2\cdot(1-\rho)+\ldots+k\cdot\rho^k\cdot(1-\rho)+\ldots=$$
$$=\rho\cdot(1-\rho)\left(1+2\cdot\rho+3\cdot\rho^2+\ldots+k\cdot\rho^{k-1}+\ldots\right).$$

Оскільки

$$1+2\rho+3\rho^2+\ldots+k\rho^{k-1}+\ldots=\frac{d}{d\rho}\left(\rho+\rho^2+\rho^3+\ldots+\rho^k+\ldots\right),$$

то

$$M(X)=\rho\cdot(1-\rho)\cdot\frac{d}{d\rho}\left(\rho+\rho^2+\rho^3+\ldots+\rho^k+\ldots\right). \qquad (10.12)$$

Вираз у дужках (10.12) − це нескінченна геометрична прогресія зі знаменником $\rho$. Якщо $\rho<1$, то

$$\rho+\rho^2+\rho^3+\ldots+\rho^k+\ldots=\frac{\rho}{1-\rho}.$$

Знаходимо від цієї суми похідну

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho+\rho^2+\rho^3+\ldots+\rho^k+\ldots\right)=\frac{1}{(1-\rho)^2}$$

і підставляємо її у вираз (10.12):

$$M(X) = \rho \cdot (1-\rho) \cdot \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}. \quad (10.13)$$

Таким чином, середня кількість заявок в одноканальній СМО з необмеженою чергою обчислюється за формулою

$$\overline{Z}_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho}. \quad (10.14)$$

Знайдемо середню довжину черги $\overline{r}$ одноканальної СМО з необмеженою чергою.

Позначимо через дискретну випадкову величину $Y$ − довжину черги одноканальної СМО з необмеженою чергою. Для знаходження її математичного сподівання $M(Y)$ введемо випадкову величину $R = X - Y$, де $X$ − кількість заявок, що надійшли до СМО.

Якщо $X = 0$, то це означає, що в системі взагалі немає заявок. Як наслідок, $R = 0$ (черги також немає), а сама система простоює.

Якщо $X > 0$, то в СМО одна заявка обслуговується, а довжина черги $Y = X - 1$. Тому при $X > 0$ завжди $R = X - Y = X - (X-1) = 1$. Отже, ДВВ $R$ набуває всього двох значень: 0 і 1. Імовірність того, що $R = 0$ (імовірність простою), як відомо, дорівнює $q_0^*$. Як наслідок, імовірність того, що $R = 1$, є ймовірністю протилежної події і дорівнює $1 - q_0^*$. Отримаємо закон розподілу ДВВ $R$ в табличному вигляді (табл. 10.2)

Таблиця 10.2

Розподіл ДВВ $R$

| $R$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | $q_0^*$ | $1-q_0^*$ |

Обчислюємо математичне сподівання ДВВ $R$:

$$M(R) = 0 \cdot q_0^* + 1 \cdot \left(1 - q_0^*\right) = 1 - q_0^* = \rho.$$

$$M(R) = \rho. \quad (10.15)$$

З іншого боку, використовуючи властивості математичного сподівання і формулу (10.13), отримаємо

$$M(R)=M(X-Y)=M(X)-M(Y)=\frac{\rho}{1-\rho}-M(Y).$$

Звідси з урахуванням виразу (10.15) отримаємо

$$M(Y)=\frac{\rho}{1-\rho}-M(R)=\frac{\rho}{1-\rho}-\rho=\frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Отже, середня довжина черги обчислюється за формулою

$$\bar{r}=\frac{\rho^2}{1-\rho}. \tag{10.16}$$

Для знаходження середнього часу перебування заявки в системі $\bar{t}_{сист}$ використовують формулу Літтла

$$\bar{Z}_{сист}=\lambda\cdot\bar{t}_{сист}, \tag{10.17}$$

звідки

$$\bar{t}_{сист}=\frac{\bar{Z}_{сист}}{\lambda}. \tag{10.18}$$

Знайдемо середній час очікування заявки в черзі. Оскільки $\bar{t}_{черг}=\bar{t}_{сист}-\bar{t}_{обсл}$, то за формулами (10.18) і (10.14) отримаємо

$$\bar{t}_{черг}=\frac{\bar{Z}_{сист}}{\lambda}-\frac{1}{\mu}=\frac{\rho}{\lambda\cdot(1-\rho)}-\frac{1}{\mu}=\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\lambda\cdot\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}-\frac{1}{\mu}=$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda\cdot(\mu-\lambda)}-\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu-\lambda}-\frac{1}{\mu}=\frac{\lambda}{\mu\cdot(\mu-\lambda)}=\frac{\lambda^2}{\mu\cdot\lambda\cdot(\mu-\lambda)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{\lambda-\frac{\lambda^2}{\mu}}=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{\lambda\cdot\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}=\frac{\rho^2}{\lambda\cdot(1-\rho)}.$$

Остаточно отримаємо

$$\bar{t}_{черг} = \frac{\rho^2}{\lambda \cdot (1-\rho)}. \qquad (10.19)$$

Формули для обчислення показників ефективності одноканальної СМО з необмеженою чергою наведено в табл. 10.3.

Таблиця 10.3

Показники ефективності одноканальної СМО з необмеженою чергою

| Показник | Формула |
|---|---|
| Коефіцієнт завантаження системи | $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ |
| Фінальні ймовірності станів | $q_0^* = 1-\rho$, $q_k^* = \rho^k \cdot q_0^* = \rho^k \cdot (1-\rho), k = 1,2,3,...$ |
| Відносна пропускна спроможність | $Q = 1$ |
| Абсолютна пропускна спроможність | $A = \lambda \cdot Q = \lambda$ |
| Імовірність відмовлення | $P_{відм} = 1 - Q = 0$ |
| Середня кількість заявок у системі | $\bar{Z}_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho}$ |
| Середня кількість заявок у черзі | $\bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$ |
| Середній час перебування заявки в системі | $\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{Z}_{сист}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$ |
| Середній час перебування заявки в черзі | $\bar{t}_{черг} = \frac{\rho^2}{\lambda \cdot (1-\rho)}$ |

**Приклад 2.** До сортувальної станції прибувають потяги з інтенсивністю 0,8 *потяг/год*. Середній час обслуговування одного потягу складає 0,4 *год*. Потік прибуття потягів до станції вважається пуассонівським, час обслуговування потяга має показниковий розподіл. Знайти показники ефективності роботи сортувальної станції:

а) інтенсивність потоку обслуговування, коефіцієнт завантаження системи, фінальні ймовірності;

б) імовірність того, що система вільна; імовірність того, що система зайнята;

в) середню кількість потягів у черзі; середню кількість потягів у системі;

г) середній час перебування потягу в черзі; середній час перебування потягу в системі.

**Розв'язання.** Сортувальну станцію вважаємо одноканальною СМО з необмеженою чергою (необмеженим очікуванням). За формулою (10.5) знаходимо інтенсивність обслуговування $\mu = \dfrac{1}{M(T_{обсл})} = \dfrac{1}{0{,}4} = 2{,}5$ *потяг/год*. Таким чином, коефіцієнт завантаження $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0{,}8}{2{,}5} = 0{,}32$. З умови $\rho = 0{,}32 < 1$ випливає, що черга потягів до сортувальної станції не може нескінченно зростати. Тому фінальні (граничні) імовірності існують.

а) за виразом (10.8) обчислимо:

$$q_0^* = 1 - \rho = 1 - 0{,}32 = 0{,}68,$$

$$q_1^* = \rho \cdot (1 - \rho) = 0{,}32 \cdot (1 - 0{,}32) = 0{,}2176,$$

$$q_2^* = \rho^2 \cdot (1 - \rho) = (0{,}32)^2 \cdot (1 - 0{,}32) = 0{,}069632,$$

...,

$$q_k^* = \rho^k \cdot (1 - \rho) = (0{,}32)^k \cdot (1 - 0{,}32),$$

....;

б) імовірність того, що сортувальна станція вільна, $P_{вільн} = q_0^* = 0{,}68$ і ймовірність того, що система зайнята, $P_{зайн} = 1 - q_0^* = 1 - 0{,}68 = 0{,}32$;

в) середня кількість потягів, що очікують обслуговування (середня кількість заявок у черзі) обчислюємо за виразом (10.16):

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{(0{,}32)^2}{1 - 0{,}32} \approx 0{,}15 \text{ } потяг.$$

За виразом (10.14) знаходимо середню кількість заявок у системі:

$$\overline{Z}_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0,32}{1-0,32} \approx 0,47 \ \textit{потяг}.$$

г) використовуючи вирази (10.19) і (10.18), отримаємо

$\bar{t}_{черг} = \dfrac{\rho^2}{\lambda \cdot (1-\rho)} = \dfrac{(0,32)^2}{0,8 \cdot (1-0,32)} \approx 0,19 \ \textit{год}$ – середній час перебування заявки в черзі;

$\bar{t}_{сист} = \dfrac{\overline{Z}_{сист}}{\lambda} \approx \dfrac{0,47}{0,8} \approx 0,59 \ \textit{год}$ – середній час перебування заявки в системі.

**Відповідь**:

а) $\mu = 2,5 \ \textit{потяг/год}, \rho = 0,32,$

$q_0^* = 0,68, q_1^* = 0,2176, q_2^* = 0,069632, ....;$

$q_k^* = (0,32)^k \cdot (1-0,32); ...$

б) $P_{вільн} = 0,68; \ P_{зайн} = 0,32;$

в) $\bar{r} \approx 0,15 \textit{потяг}; \ \overline{Z}_{сист} \approx 0,47 \ \textit{потяг};$

г) $\bar{t}_{черг} \approx 0,19 \textit{год}; \ \bar{t}_{сист} \approx 0,59 \ \textit{год}.$

**Приклад 3.** На залізничну сортувальну гірку прибувають потяги з інтенсивністю $\lambda = 1,5 \ \textit{потяг/год}$. Гірковий технологічний інтервал у середньому складає 25 *хв*. Якщо під час прибуття потяга на гірці ще триває розформування попереднього потяга, то він становиться в чергу і очікує в парку прибуття, де є дві запасні колії, на кожній з яких може знаходитись лише один потяг. Якщо під час прибуття потяга запасні колії зайняті, то потяг направляється до парку відстою. Вважаючи, що вхідний потік потягів є найпростішим, а час розформування потяга має показниковий розподіл, необхідно:

а) побудувати розмічений граф станів системи;

б) знайти фінальні ймовірності станів системи;

в) знайти показники ефективності системи і зробити висновки про якість роботи сортувальної гірки.

**Розв'язання.** а) Сортувальна гірка – це одноканальна СМО з необмеженою чергою. Система може знаходитись в одному зі станів:

$S_0$ – 0 потягів прибули до сортувальної гірки (система простоює);

$S_1$ – 1 потяг прибув до сортувальної гірки і він обслуговується;

$S_2$ – 2 потяги знаходяться в системі (один обслуговується, другий відправлено на запасну колію);

$S_3$ – 3 потяги в системі (один обслуговується, два відправлено на запасні колії);

$S_4$ – 4 потяги в системі (один обслуговується, два відправлено на запасні колії, один – до парку відстою);

$S_5$ – 5 потягів у системі (один обслуговується, два відправлено на запасні колії, два – до парку відстою) і т. д.

Розмічений граф станів побудовано на рис. 10.5;

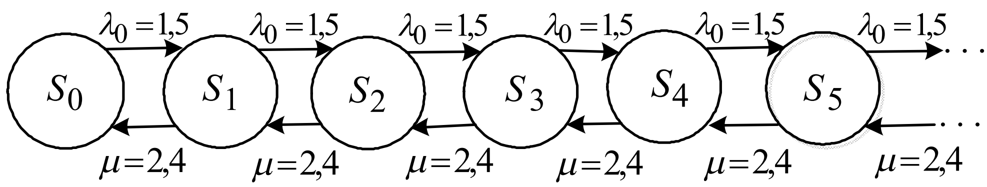



Рис. 10.5. Розмічений граф станів прикладу 3

б) за умовою задачі середній час обслуговування $M(T_{обсл}) = 25\ хв = \frac{25}{60}\ год = \frac{5}{12}\ год$. Оскільки час обслуговування розподілено за показниковим законом, інтенсивність обслуговування дорівнює $\mu = \frac{1}{M(T_{обсл})} = \frac{12}{5} = 2{,}4\ потяг/год$, звідси коефіцієнт завантаження системи дорівнює $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1{,}5}{2{,}4} = \frac{5}{8} < 1$.

За виразом (10.8) обчислюємо фінальні ймовірності станів СМО:

$$q_0^* = 1 - \rho = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8},$$

$$q_1^* = \rho \cdot (1 - \rho) = \frac{5}{8} \cdot \left(1 - \frac{5}{8}\right) = \frac{15}{64},$$

$$q_2^* = \rho^2 \cdot (1 - \rho) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{5}{8}\right) = \frac{75}{512}, ...;$$

$$q_k^* = \rho^k \cdot (1 - \rho) = \left(\frac{5}{8}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{5}{8}\right) = \left(\frac{5}{8}\right)^k \cdot \frac{3}{8}, ...$$

Імовірність того, що потяг, який надійшов на сортувальну гірку, буде відправлено до парку відстою:

$$P = q_4^* + q_5^* + q_6^* + ... = \rho^4 \cdot (1 - \rho) + \rho^5 \cdot (1 - \rho) + \rho^6 \cdot (1 - \rho) + ... =$$
$$= \rho^4 \cdot (1 - \rho) \cdot \left(1 + \rho + \rho^2 + ...\right) = \rho^4 \cdot (1 - \rho) \cdot \frac{1}{(1 - \rho)} = \rho^4,$$

тобто $P = \left(\frac{5}{8}\right)^4 = \frac{625}{4096} \approx 0{,}15$. Таким чином близько 15 % потягів потрапить до парку відстою;

в) за виразом (10.14) обчислюємо середню кількість потягів, що знаходяться в системі (у парку розформування):

$$\overline{Z}_{сист} = \frac{\frac{5}{8}}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{5}{3} \ \textit{потяга}.$$

Середню кількість потягів у черзі знайдемо за формулою (10.16):

$$\overline{r} = \frac{\left(\frac{5}{8}\right)^2}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{25}{24} \ \textit{потяга}.$$

Для знаходження середнього часу перебування потяга в системі використовуємо формулу (10.18):

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\frac{5}{8}}{1{,}5 \cdot \frac{3}{8}} = \frac{\frac{5}{3}}{1{,}5} = \frac{10}{9} \ год.$$

За формулою (10.19) обчислюємо середній час перебування потяга в черзі:

$$\bar{t}_{черг} = \frac{\left(\frac{5}{8}\right)^2}{1{,}5 \cdot \left(1 - \frac{5}{8}\right)} = \frac{25}{36} \ год.$$

Обчислимо середній час очікування потяга в парку відстою. Для цього позначимо через $K$ кількість потягів, що знаходяться в парку відстою. $K$ − дискретна випадкова величина, закон розподілу якої наведений у табл. 10.4.

Таблиця 10.4

Закон розподілу ДВВ $K$

| $K$ | 0 | 1 | 2 | 3 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $q(0)$ | $q_4^*$ | $q_5^*$ | $q_6^*$ | … |

$$q(0) = q_0^* + q_1^* + q_2^* + q_3^*.$$

Таким чином, середнє значення $\bar{k}_{відст}$ ДВВ $K$ дорівнює

$$M(K) = 0 \cdot q(0) + 1 \cdot q_4^* + 2 \cdot q_5^* + 3 \cdot q_6^* + ... = \rho^4 \cdot (1-\rho) + 2 \cdot \rho^5 \cdot (1-\rho) +$$
$$+ 3 \cdot \rho^6 \cdot (1-\rho) + ... = \rho^4 \cdot (1-\rho) \cdot \left(1 + 2\rho + 3\rho^2 + ...\right) =$$
$$= \rho^4 \cdot (1-\rho) \cdot \frac{d}{d\rho}\left(\rho + \rho^2 + \rho^3 + ...\right) = \rho^4 \cdot (1-\rho) \cdot \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) = \frac{\rho^4 \cdot (1-\rho)}{(1-\rho)^2} =$$
$$= \frac{\rho^4}{(1-\rho)},$$

тобто

$$M(K)=\frac{\left(\frac{5}{8}\right)^4}{1-\frac{5}{8}}\approx 0{,}41\,;\,\overline{k}_{відст}\approx 0{,}41\,.$$

Остаточно за виразом (10.18) отримаємо середній час очікування в парку відстою

$$\overline{t}_{відст}=\frac{\overline{k}_{відст}}{\lambda}\approx\frac{0{,}41}{1{,}5}\approx 0{,}27\,год\,.$$

**Відповідь**: б) $q_0^*=\frac{3}{8},q_1^*=\frac{15}{64},q_2^*=\frac{75}{512},....;q_k^*=\left(\frac{5}{8}\right)^k\cdot\frac{3}{8},...;$

в) $\overline{Z}_{сист}=\frac{5}{3}\,потяга$; $\overline{r}=\frac{25}{24}\,потяга$; $\overline{t}_{сист}=\frac{10}{9}\,год$; $\overline{t}_{черг}=\frac{25}{36}\,год$; $\overline{t}_{відст}\approx 0{,}27\,год$; 15 % потягів потрапить до парку відстою.

**Приклад 4.** У локомотивному депо залізниці працює ремонтний цех, який ремонтує обладнання двох видів $A$ і $B$. Інтенсивність потоку заявок на ремонт одиниці обладнання виду $A$ дорівнює 0,1, а виду $B$ − 0,3 за зміну. Якщо під час заявки на ремонт будь-якого виду обладнання цех зайнято ремонтом, то ця заявка становиться в чергу. Час ремонту одиниці обладнання, незалежно якого, у середньому складає дві зміни. Потік заявок на ремонт обладнання можна вважати найпростішим (пуассонівським), а час обслуговування – показниковим. Необхідно:

а) встановити, чи існують фінальні (граничні) імовірності станів СМО і, якщо так, обчислити їх;

б) знайти показники ефективності роботи СМО (ремонтного цеху).

**Розв’язання.** а) інтенсивність потоку заявок на ремонт обладнання виду $A$ дорівнює $\lambda_A=0{,}1\,обладн/зміна$, а виду $B$ − $\lambda_B=0{,}3\,обладн/зміна$, тоді загальна інтенсивність заявок $\lambda=\lambda_A+\lambda_B=0{,}4\,обладн/зміна$.

Час обслуговування в середньому складає дві зміни, тому інтенсивність обслуговування $\mu = \frac{1}{M(T_{обсл})} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ *обладн/зміна*.

Коефіцієнт завантаження системи $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = 0{,}8 < 1$. Оскільки $\rho < 1$, то фінальні ймовірності існують і черга на ремонт обладнання не може нескінченно зростати. За виразом (10.8) обчислюємо фінальні ймовірності:

$$q_0^* = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;\ q_1^* = 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}16;$$
$$q_2^* = (0{,}8)^2 \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}128;\ q_3^* = (0{,}8)^3 \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}1024;$$
$$...;$$
$$q_k^* = (0{,}8)^k \cdot 0{,}2; ...$$

Таким чином,

1) імовірність простою СМО (цех вільний): $q_0^* = 0{,}2$;

2) імовірність того, що ремонтний цех зайнято: $P = 1 - q_0^* = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$;

3) імовірність того, що в системі знаходиться $k, k = 1,2,3,...$ од. обладнання, відповідно дорівнюють $q_2^* = 0{,}128;\ q_3^* = 0{,}1024;...;\ q_k^* = (0{,}8)^k \cdot 0{,}2;...$;

б) знаходимо показники ефективності системи за формулами (10.14), (10.16), (10.18), (10.19):

$$\overline{Z}_{сист} = \frac{0{,}8}{1 - 0{,}8} = 4\ обладн;\ \bar{r} = \frac{(0{,}8)^2}{1 - 0{,}8} = 3{,}2\ обладн;$$

$$\bar{t}_{сист} = \frac{4}{0{,}4} = 10\ змін;\ \bar{t}_{черг} = \frac{(0{,}8)^2}{0{,}4 \cdot (1 - 0{,}8)} = 8\ змін.$$

**Відповідь**: а) імовірність простою $q_0^* = 0{,}2$; імовірність того, що ремонтний цех зайнято, $P = 0{,}8$; імовірність того, що в системі знаходяться 1,2,3,… обладнання, відповідно дорівнюють $q_1^* = 0{,}16;\ q_2^* = 0{,}128;\ q_3^* = 0{,}1024;...;\ q_k^* = (0{,}8)^k \cdot 0{,}2;...$;

б) середня кількість заявок у системі $\overline{Z}_{сист} = \frac{0,8}{1-0,8} = 4$ *обладн* ;

середня довжина черги $\bar{r} = \frac{(0,8)^2}{1-0,8} = 3,2$ *обладн*;

середній час перебування заявки в системі $\bar{t}_{сист} = \frac{4}{0,4} = 10$ *змін*;

середній час перебування заявки в черзі $\bar{t}_{черг} = \frac{(0,8)^2}{0,4 \cdot (1-0,8)} = 8$ *змін*.

## 10.7. Одноканальна СМО з обмеженою чергою

### 10.7.1. Загальні поняття одноканальної СМО з обмеженою чергою

Припустимо, що довжина черги одноканальної СМО обмежена числом $n$, тобто якщо заявка, що надійшла, застає у черзі $n$ заявок, то вона покидає систему необслуженою. Припущення про найпростіший вхідний потік заявок і показниковий розподіл часу обслуговування однієї заявки, як і в одноканальних СМО з необмеженою чергою, зберігається. Граф станів такої системи наведено на рис. 10.6.

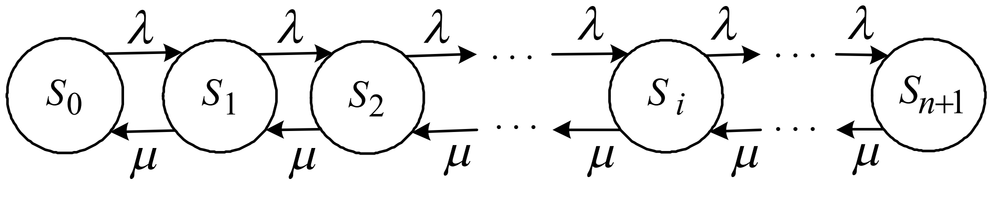



Рис. 10.6. Розмічений граф станів одноканальної СМО з обмеженою чергою

Як відомо (п. 9.5), даний марковський ланцюг регулярний, тому він має стаціонарний розподіл, який співпадає з фінальним (граничним) розподілом імовірностей.

За графом (рис. 10.6) складаємо матрицю інтенсивностей

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

і за виразом (9.62) запишемо систему рівнянь для знаходження фінальних імовірностей $q_i^*$ станів $S_i, i = \overline{0, n+1}$:

$$\begin{cases} -\lambda q_0^* + \mu q_1^* = 0, \\ \lambda q_0^* - (\lambda+\mu) q_1^* + \mu q_2^* = 0, \\ \lambda q_1^* - (\lambda+\mu) q_2^* + \mu q_3^* = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda q_n^* - \mu q_{n+1}^* = 0. \end{cases}$$

Будемо розв'язувати цю систему послідовно, починаючи з першого рівняння, з якого виразимо $q_1^*$:

$$q_1^* = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot q_0^*.$$

З другого рівняння, з урахуванням знайденого значення $q_1^*$, виразимо $q_2^*$:

$$\lambda q_0^* - (\lambda+\mu) \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) q_0^* + \mu q_2^* = 0,$$

$$q_2^* = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot q_0^*.$$

З третього рівняння, враховуючи знайдені $q_1^*$ і $q_2^*$, отримаємо

$$q_3^* = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot q_0^*.$$

Тоді фінальні ймовірності станів обчислюються за формулами

$$q_k^* = \rho^k \cdot q_0^*, \ \rho = \frac{\lambda}{\mu},$$
$$k = \overline{0, n+1}. \tag{10.20}$$

За умовою нормування маємо

$$q_0^* + q_1^* + q_2^* + \ldots + q_{n+1}^* = 1,$$
$$q_0^* \left(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n+1}\right) = 1.$$

Обчислюючи суму $(n+2)$ членів геометричної прогресії

$$1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n+1} = \frac{1 - \rho^{n+2}}{1 - \rho}, \rho \neq 1,$$

отримаємо

$$q_0^* \cdot \frac{1 - \rho^{n+2}}{1 - \rho} = 1,$$
$$q_0^* = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{n+2}}.$$

Отже, формула для обчислення фінальних імовірностей станів має вигляд

$$q_k^* = \rho^k \cdot \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{n+2}},$$
$$k = \overline{0, n+1}, \ \rho \neq 1. \tag{10.21}$$

### 10.7.2. Показники ефективності одноканальної СМО з обмеженою чергою

Розглянемо одноканальну СМО з обмеженою чергою довжиною $n$. Відмова заявці в обслуговуванні відбувається тоді, коли заявка, що надійшла, застає систему в стані $S_{n+1}$. За формулою (10.21) відповідна ймовірність дорівнює

$$P_{відм} = q_{n+1}^{*} = \rho^{n+1} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}}. \qquad (10.22)$$

Тому за формулою (10.7) *відносна пропускна спроможність* $Q$ (імовірність того, що заявка, яка надійшла в СМО, буде обслужена), дорівнює

$$Q = 1 - \rho^{n+1} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}}. \qquad (10.23)$$

Таким чином, за формулою (10.6) *абсолютна пропускна спроможність* $A$ дорівнює

$$A = \lambda \cdot \left( 1 - \rho^{n+1} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}} \right). \qquad (10.24)$$

Для визначення середньої кількості заявок у СМО застосуємо той самий метод, за допомогою якого була отримана відповідна формула (10.14) для одноканальної СМО з необмеженою чергою.

Позначимо через $X$ − кількість заявок, що надійшли до СМО з обмеженою чергою, закон розподілу якої наведено в табл. 10.5.

Таблиця 10.5

Закон розподілу ДВВ $X$ − кількості заявок, що надійшли до одноканальної СМО з обмеженою чергою

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | … | $n$ | $n+1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $q_0^*$ | $q_1^*$ | $q_2^*$ | … | $q_n^*$ | $q_{n+1}^*$ |

Обчислимо математичне сподівання:

$$M(X)=\sum_{k=0}^{n+1} k\cdot q_k^* = \sum_{k=1}^{n+1} k\cdot\rho^k \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}} = \frac{\rho\cdot(1-\rho)}{1-\rho^{n+2}}\cdot\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot\rho^{k-1} =$$

$$=\frac{\rho\cdot(1-\rho)}{1-\rho^{n+2}}\cdot\frac{d}{d\rho}\left(1+\sum_{k=1}^{n+1}\rho^k\right)=\frac{\rho\cdot(1-\rho)}{1-\rho^{n+2}}\cdot\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{n+2}}{1-\rho}\right)=$$

$$=\frac{\rho\cdot(1-\rho)}{1-\rho^{n+2}}\cdot\frac{-(n+2)\cdot\rho^{n+1}\cdot(1-\rho)+1-\rho^{n+2}}{(1-\rho)^2}=$$

$$=\frac{\rho}{1-\rho^{n+2}}\cdot\frac{1-(n+2)\cdot\rho^{n+1}+(n+1)\cdot\rho^{n+2}}{(1-\rho)}.$$

Остаточно отримаємо формулу для обчислення середньої кількості заявок в одноканальній СМО з обмеженою чергою:

$$\overline{Z}_{сист}=\frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1-(n+2)\cdot\rho^{n+1}+(n+1)\cdot\rho^{n+2}}{1-\rho^{n+2}}. \qquad (10.25)$$

Аналогічно до п. 10.6.2 знайдемо середню довжину черги $\overline{r}$ одноканальної СМО з обмеженою чергою, для чого розглянемо ДВВ $Y$ − довжину черги та ДВВ $R, R=X-Y$, тоді

$$M(R)=1-q_0^*=1-\frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}},$$

$$M(Y)=M(X)-M(R)=$$

$$=\frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1-(n+2)\cdot\rho^{n+1}+(n+1)\cdot\rho^{n+2}}{1-\rho^{n+2}}-1+\frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}},$$

тобто

$$\overline{r}=\frac{\rho^2\cdot\left(1-\rho^n\cdot(n+1-n\rho)\right)}{(1-\rho)\cdot\left(1-\rho^{n+2}\right)}. \qquad (10.26)$$

Для знаходження середнього часу $\overline{t}_{сист}$ перебування заявки в системі використовують формулу

$$\overline{t}_{сист}=\frac{\overline{r}}{\lambda}+\frac{Q}{\mu}. \qquad (10.27)$$

Середній час $\bar{t}_{черг}$ перебування заявки в черзі

$$\bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda}. \tag{10.28}$$

Формули для обчислення показників ефективності одноканальної СМО з обмеженою чергою наведені в табл. 10.6.

***Зауваження.*** Для роботи СМО з обмеженою чергою коефіцієнт завантаження $\rho$ може бути більшим одиниці.

Таблиця 10.6

Показники ефективності одноканальної СМО з обмеженою чергою довжиною $n$

| Показник | Формула |
|---|---|
| Коефіцієнт завантаження системи | $\rho = \frac{\lambda}{\mu} \neq 1$ |
| Фінальні ймовірності станів | $q_k^* = \rho^k \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}}, k = \overline{0, n+1}$ |
| Імовірність відмови | $P_{відм} = \rho^{n+1} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}}$ |
| Відносна пропускна спроможність | $Q = 1 - \rho^{n+1} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}}$ |
| Абсолютна пропускна спроможність | $A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \rho^{n+1} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}}\right)$ |
| Середня кількість заявок в черзі | $\bar{r} = \frac{\rho^2 \cdot \left(1-\rho^n \cdot (n+1-n\rho)\right)}{(1-\rho) \cdot \left(1-\rho^{n+2}\right)}$ |
| Середня кількість заявок в системі | $\bar{Z}_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1-(n+2) \cdot \rho^{n+1} + (n+1) \cdot \rho^{n+2}}{1-\rho^{n+2}}$ |
| Середній час перебування заявки в черзі | $\bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda}$ |
| Середній час перебування заявки в системі | $\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{r}}{\lambda} + \frac{Q}{\mu}$ |
| Середня кількість заявок, що обслуговуються | $\bar{l}_{обсл} = \bar{Z}_{сист} - \bar{r}$ |

**Приклад 5.** АЗС автобази залізниці обладнана однією колонкою, а майданчик біля неї вміщує не більше трьох машин одночасно. Якщо він зайнятий, то чергова машина, яка прибула на станцію, направляється до сусідньої заправки. Машини прибувають на станцію з інтенсивністю $\lambda = 0{,}3$ *машина / хв*. Інтенсивність процесу обслуговування дорівнює $\mu = 0{,}25$ *машина / хв*. Вважається, що вхідний потік – найпростіший, а час обслуговування однієї машини розподілено за показниковим законом. Визначити:

а) фінальні ймовірності станів, імовірність відмови;

б) відносну $Q$ та абсолютну $A$ пропускні спроможності;

в) середню кількість машин, що знаходяться в черзі; середню кількість машин, що знаходяться на станції (під обслуговуванням і в черзі); середню кількість машин, що знаходяться під обслуговуванням;

г) середній час очікування машини в черзі; середній час перебування машини на автозаправці.

**Розв'язання.** а) дана АЗС є одноканальною СМО з обмеженою чергою довжиною $n = 3$. Тоді система може знаходитись у таких станах:

$S_0$ – заявок у СМО немає (система простоює);

$S_1$ – у СМО одна заявка і вона обслуговується;

$S_2$ – у СМО дві заявки (одна обслуговується, друга стоїть у черзі);

$S_3$ – у СМО три заявки (одна обслуговується, дві – у черзі);

$S_4$ – у СМО чотири заявки (одна обслуговується, три – у черзі).

Отримаємо розмічений граф станів (рис. 10.7).

$$S_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_1 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_2 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_3 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_4$$

Рис. 10.7. Розмічений граф станів прикладу 5

Коефіцієнт завантаження системи $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0,3}{0,25} = 1,2 \neq 1$ (для СМО з обмеженою чергою цей коефіцієнт може бути більшим за 1). За формулою (10.21) обчислюємо фінальні ймовірності станів:

$$q_0^* = \frac{1-1,2}{1-(1,2)^5} \approx 0,134;$$

$$q_1^* = 1,2 \cdot \frac{1-1,2}{1-(1,2)^5} \approx 0,161;$$

$$q_2^* = (1,2)^2 \cdot \frac{1-1,2}{1-(1,2)^5} \approx 0,193;$$

$$q_3^* = (1,2)^3 \cdot \frac{1-1,2}{1-(1,2)^5} \approx 0,232;$$

$$q_4^* = (1,2)^4 \cdot \frac{1-1,2}{1-(1,2)^5} \approx 0,279.$$

За формулою (10.22) ймовірність відмови: $P_{відм} = q_4^* \approx 0,279$;

б) за формулами (10.23) і (10.24):

$Q = 1 - P_{відм} \approx 1 - 0,279 = 0,721$ *машина/хв* – відносна пропускна спроможність;

$A = \lambda \cdot Q \approx 0,3 \cdot 0,721 \approx 0,216$ *машина/хв* – абсолютна пропускна спроможність;

в) середня кількість машин, що знаходяться в черзі, обчислюємо за формулою (10.26):

$$\bar{r} = \frac{(1,2)^2 \cdot \left(1-(1,2)^3 \cdot (3+1-3\cdot 1,2)\right)}{(1-1,2)\cdot\left(1-(1,2)^5\right)} \approx 1,49 \text{ машини}.$$

За формулою (10.25) обчислюємо середню кількість машин, що знаходяться на станції (під обслуговуванням і в черзі):

$$\bar{Z}_{сист} = \frac{1,2}{1-1,2} \cdot \frac{1-5\cdot(1,2)^4 + 4\cdot(1,2)^5}{1-(1,2)^5} \approx 2,36 \text{ машини}.$$

Тоді середня кількість машин, що обслуговується:

$$\bar{l}_{обсл} = \bar{Z}_{сист} - \bar{r} \approx 2{,}36 - 1{,}49 = 0{,}87 \ машини;$$

г) за формулою (10.28) отримаємо середній час очікування в черзі

$$\bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \approx \frac{1{,}49}{0{,}3} \approx 4{,}97 \ хв$$

і за формулою (10.27) середній час перебування машини на автозаправці

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{r}}{\lambda} + \frac{Q}{\mu} = \bar{t}_{черг} + \frac{Q}{\mu} \approx 4{,}97 + \frac{0{,}721}{0{,}25} \approx 7{,}86 \ хв.$$

**Відповідь**:
а) $q_0^* \approx 0{,}134;\ q_1^* \approx 0{,}161;\ q_2^* \approx 0{,}193;\ q_3^* \approx 0{,}232;\ q_4^* \approx 0{,}279$;
б) $Q \approx 0{,}721$ *машина/хв*, $A \approx 0{,}216$ *машина/хв*;
в) $\bar{r} \approx 1{,}49$ *машини*, $\bar{Z}_{сист} \approx 2{,}36$ *машини*, $\bar{l}_{обсл} \approx 0{,}87$ *машини*;
г) $\bar{t}_{черг} \approx 4{,}97$ *хв*, $\bar{t}_{сист} \approx 7{,}86$ *хв*.

## 10.8. Одноканальна СМО з відмовами

### 10.8.1. Загальні поняття одноканальної СМО з відмовами

Розглянемо одноканальну СМО з відмовами. Нехай маємо один канал, на який надходить пуассонівський потік заявок з інтенсивністю $\lambda$. Якщо заявка, що надійшла до системи, застає канал зайнятим, то вона залишає СМО необслуженою, тобто отримує відмову. Час обслуговування розподілено за показниковим законом з параметром $\mu = \dfrac{1}{M(T_{обсл})}$. Граф станів такої СМО наведено на рис. 10.8.

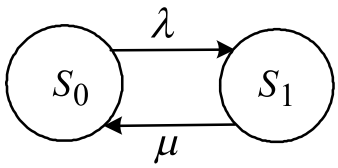



Рис. 10.8. Розмічений граф станів одноканальної СМО з відмовами

Така система може приймати два стани:

$S_0$ – канал вільний;

$S_1$ – канал зайнятий (відбувається обслуговування заявки).

Даний марковський ланцюг регулярний (п. 9.4.7), тому він має стаціонарний розподіл імовірностей, що співпадає з фінальним.

За графом (рис. 10.8) складаємо матрицю інтенсивностей $\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$. За формулою (9.62) система рівнянь для знаходження фінальних імовірностей $q_i^*$ станів $S_i, i = 0,1$ має вигляд

$$\begin{cases} -\lambda q_0^* + \mu q_1^* = 0, \\ q_0^* + q_1^* = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримаємо

$$q_0^* = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \tag{10.29}$$

$$q_1^* = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \tag{10.30}$$

### 10.8.2. Показники ефективності одноканальної СМО з відмовами

Очевидно, що в одноканальній СМО з відмовами фінальна ймовірність $q_0^*$ є відносною пропускною спроможністю, тобто

$$Q = q_0^* = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \qquad (10.31)$$

За формулою (10.6) знаходимо абсолютну пропускну спроможність $A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \frac{\mu}{\lambda + \mu}$, тобто

$$A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}. \qquad (10.32)$$

Імовірність відмови $P_{відм} = q_1^*$ (імовірність того, що в даний момент часу система зайнята обслуговуванням)

$$P_{відм} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \qquad (10.33)$$

Формули для обчислення показників ефективності одноканальної СМО з відмовами наведено в табл. 10.7.

Таблиця 10.7

Показники ефективності одноканальної СМО з відмовами

| Показник | Формула |
|---|---|
| Фінальні ймовірності станів | $q_0^* = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$, $q_1^* = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ |
| Імовірність відмови | $P_{відм} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ |
| Відносна пропускна спроможність | $Q = q_0^* = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ |
| Абсолютна пропускна спроможність | $A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}$ |

**Приклад 6.** Служба доставки залізничних квитків приймає телефонні замовлення на придбання квитків. Інтенсивність вхідного потоку заявок – 80 замовлень за *годину*, а середня тривалість оформлення – 2 *хв*. Вважаючи, що вхідний потік

заявок – найпростіший, а час обслуговування однієї заявки розподілено за показниковим законом, обчислити показники ефективності роботи телефонного зв'язку за наявності одного телефонного номера.

**Розв'язання**. За умовою задачі $\lambda = 80$ *замовл/год*, $\overline{T}_{обсл} = 2\ хв = \frac{1}{30}\ год$, $\mu = \frac{1}{M(T_{обсл})} = 30\ замовл/год$. Знаходимо граничні ймовірності за формулами (10.29), (10.30): $q_0^* = \frac{30}{80+30} = \frac{3}{11}$; $q_1^* = \frac{80}{80+30} = \frac{8}{11}$.

Відносна пропускна спроможність $Q = q_0^* = \frac{3}{11}$, абсолютна пропускна спроможність $A = \frac{80 \cdot 30}{80+30} = \frac{240}{11}\ замовл/год$ і за формулою (10.33) імовірність відмови $P_{відм} = \frac{80}{80+30} = \frac{8}{11}$.

**Відповідь**: $q_0^* = \frac{3}{11}$; $q_1^* = \frac{8}{11}$; $Q = \frac{3}{11}$; $A = \frac{240}{11}\ замовл/год$; $P_{відм} = \frac{8}{11}$.

## 10.9. Багатоканальна СМО з необмеженою чергою

### 10.9.1. Загальні поняття багатоканальної СМО з необмеженою чергою

Розглянемо СМО, яка складається з кількох паралельно працюючих каналів обслуговування. Одна заявка, що надходить до СМО, повністю обслуговується одним (будь-яким) каналом. Такі СМО називаються *багатоканальними.*

Припустимо, що СМО складається з $m, m > 1$ каналів обслуговування, кожен з яких може бути зайнятим обслуговуванням тільки однієї заявки. Якщо заявка, яка надійшла в СМО, застає, принаймні, один канал вільним, то вона одразу починає обслуговуватись цим каналом. Якщо в момент надходження заявки всі канали виявляються зайнятими, то заявка стає в чергу, довжина якої може бути довільною, і чекає свого обслуговування. Черга до всіх каналів спільна. За наявності черги будь-який канал після завершення обслуговування «своєї» заявки переходить до обслуговування чергової заявки. Таким чином, будь-яка заявка системи обов'язково буде обслуженою.

Припустимо, що в СМО надходить найпростіший потік вимог (заявок) з інтенсивністю $\lambda$, час обслуговування кожним каналом однієї заявки розподілено за показниковим законом з параметром $\mu$.

Будемо вважати, що система в деякий момент часу знаходиться в стані $S_k$, якщо в цей момент у системі міститься рівно $k$ заявок.

Таким чином, система може знаходитися в одному з нескінченної множини станів:

$S_k, k = \overline{0,m}$ − $k$ каналів зайнято і черги немає;

$S_{m+r}, r = 1,2,3,...$ − всі $m$ каналів зайняті, а в черзі $r$ заявок.

Розмічений граф станів такої СМО зображено на рис. 10.9.

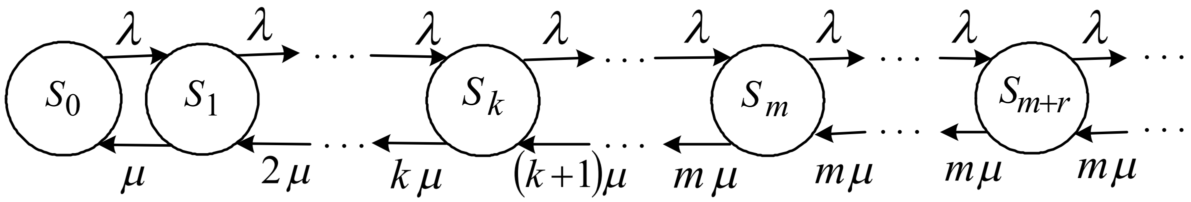



Рис. 10.9. Розмічений граф станів багатоканальної СМО з необмеженою чергою

Тобто в деякий момент часу система знаходиться в одному зі станів:

$S_0$ − всі канали вільні (система простоює);

$S_1$ − у системі одна заявка і вона обслуговується одним каналом, решта каналів вільні;

$S_2$ − у системі дві заявки і вони обслуговуються двома каналами, решта каналів $(m-2)$ вільні;

………………………………..;

$S_m$ − у системі $m$ заявок і вони обслуговуються $m$ каналами, черги немає;

$S_{m+1}$ – у системі $(m+1)$ заявка ($m$ обслуговується, одна стоїть у черзі);

$S_{m+2}$ – у системі $(m+2)$ заявки ($m$ обслуговується, дві стоять у черзі);

…………………………………..

Інтенсивність переходу зі стану $S_2$ в стан $S_1$ дорівнює $2\mu$, тому що в стані $S_2$ два канали зайняті обслуговуванням заявок і кожен з них незалежно один від одного завершує обслуговування. Аналогічно інтенсивність переходів зі станів $S_{i+1}$ в стани $S_i, i = 2,3,...,m-1$ дорівнює $(i+1)\mu$. При $i \geq m$ інтенсивності переходів зі станів $S_{i+1}$ в стани $S_i$ виявляються однаковими і рівними $m\mu$, оскільки в цьому випадку всі $m$ каналів зайняті.

Знайдемо фінальні ймовірності станів СМО. За розміченим графом станів (рис. 10.9) складемо матрицю інтенсивностей:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \lambda & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь для знаходження фінальних (граничних) ймовірностей станів має вигляд

$$\begin{cases} -\lambda q_0^* + \mu q_1^* = 0, \\ \lambda q_0^* - (\lambda+\mu) q_1^* + 2\mu q_2^* = 0, \\ \lambda q_1^* - (\lambda+2\mu) q_2^* + 3\mu q_3^* = 0, \\ \lambda q_2^* - (\lambda+3\mu) q_3^* + 4\mu q_4^* = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda q_{m-1}^* - (\lambda+m\mu) q_m^* + m\mu q_{m+1}^* = 0, \\ \lambda q_m^* - (\lambda+m\mu) q_{m+1}^* + m\mu q_{m+2}^* = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Ця система розв’язується послідовно. З першого рівняння цієї системи виразимо $q_1^* = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot q_0^*$. Отримане значення $q_1^*$ підставляємо у друге рівняння системи, у результаті чого знайдемо $q_2^* = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot q_0^*$.

Якщо значення $q_1^*$ та $q_2^*$ підставимо у третє рівняння системи, то отримаємо $q_3^* = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot q_0^* = \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot q_0^*$.

Продовжуючи цей процес далі та позначаючи через $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (коефіцієнт завантаження системи), отримаємо формули для ймовірностей станів

$$q_k^* = \frac{\rho^k}{k!} \cdot q_0^*, k = 0,1,\ldots,m; \tag{10.34}$$

$$q_{m+r}^* = \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right)^r \cdot q_0^*,\ r = 1,2,\ldots. \tag{10.35}$$

Імовірність $q_0^*$ знайдемо з умови нормування

$$q_0^* + q_1^* + q_2^* + \ldots + q_m^* + q_{m+1}^* + q_{m+2}^* + \ldots = 1.$$

За формулами (10.34) і (10.35) отримаємо

$$q_0^* + \frac{\rho}{1!} \cdot q_0^* + \frac{\rho^2}{2!} \cdot q_0^* + \ldots + \frac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^* + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right) \cdot q_0^* + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right)^2 \cdot q_0^* + \ldots = 1;$$
$$q_0^* \cdot \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{\rho}{m}\right) + \left(\frac{\rho}{m}\right)^2 + \ldots\right)\right] = 1.$$

Ряд $1 + \left(\frac{\rho}{m}\right) + \left(\frac{\rho}{m}\right)^2 + \ldots$ − це сума геометричної прогресії зі знаменником $\frac{\rho}{m}$, яка при $\frac{\rho}{m} < 1$ дорівнює

$$1+\left(\frac{\rho}{m}\right)+\left(\frac{\rho}{m}\right)^2+\ldots=\frac{1}{1-\frac{\rho}{m}}=\frac{m}{m-\rho}.$$

Тому

$$q_0^*\cdot\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^m}{m!}+\frac{\rho^m}{m!}\cdot\left(\frac{\rho}{m}\right)\cdot\frac{m}{m-\rho}\right]=1,$$

$$q_0^*\cdot\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^m}{m!}+\frac{\rho^{m+1}}{(m-\rho)\cdot m!}\right]=1.$$

Звідси отримаємо

$$q_0^*=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^m}{m!}+\frac{\rho^{m+1}}{(m-\rho)\cdot m!}\right]^{-1}. \qquad (10.36)$$

Якщо знаменник геометричної прогресії $\frac{\rho}{m}\geq 1$, то фінального розподілу ймовірностей станів у даної СМО взагалі немає.

***Зауваження.*** Оскільки $\frac{\rho}{m}=\frac{\lambda}{m\mu}$, то умова $\frac{\rho}{m}<1$ означає, що $\lambda<m\mu$, тобто інтенсивність $m\mu$ обслуговування всіх $m$ каналів вища за інтенсивність $\lambda$ вхідного потоку.

Якщо умова $\frac{\rho}{m}<1$ не виконується, то черга заявок у системі буде необмежено зростати з часом і така СМО є неефективною.

### 10.9.2. Показники ефективності багатоканальної СМО з необмеженою чергою

Нехай СМО має $m, m\geq 2$ каналів обслуговування. Якщо заявка надходить до СМО в момент, коли всі канали зайняті, то вона стає в необмежену чергу. Тому кожна заявка врешті-решт буде обслугована, тобто

$$P_{відм} = 0\,. \qquad (10.37)$$

Як наслідок, за формулою (10.7) відносна пропускна спроможність

$$Q = 1 - P_{відм} = 1 \qquad (10.38)$$

і за формулою (10.6) абсолютна пропускна спроможність

$$A = Q \cdot \lambda = \lambda\,. \qquad (10.39)$$

Знайдемо середню довжину черги $\bar{r}$ багатоканальної СМО з необмеженою чергою. Як і раніше (п. 10.6.2), позначимо через дискретну випадкову величину $Y$ довжину черги. Складемо закон розподілу ДВВ $Y$ в табличному вигляді (табл. 10.8)

Таблиця 10.8

Розподіл ДВВ $Y$

| $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $q_m^*$ | $q_{m+1}^*$ | $q_{m+2}^*$ | $q_{m+3}^*$ | … |

та знайдемо математичне сподівання $M(Y)$:

$$M(Y) = 0 \cdot q_m^* + 1 \cdot q_{m+1}^* + 2 \cdot q_{m+2}^* + 3 \cdot q_{m+3}^* + \ldots =$$

$$= 1 \cdot \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right) \cdot q_0^* + 2 \cdot \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right)^2 \cdot q_0^* + 3 \cdot \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right)^3 \cdot q_0^* + \ldots =$$

$$= \frac{\rho^{m+1}}{m! \cdot m} \cdot q_0^* \cdot \left(1 + 2 \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right) + 3 \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right)^3 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{\rho^{m+1}}{m! \cdot m} \cdot q_0^* \cdot m \cdot \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{m} + \left(\frac{\rho}{m}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{m}\right)^3 + \ldots\right) = \frac{\rho^{m+1}}{m! \cdot m} \cdot q_0^* \cdot m \cdot \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\frac{\rho}{m}}{1 - \frac{\rho}{m}}\right) =$$

$$= \frac{\rho^{m+1}}{m!} \cdot q_0^* \cdot \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{m - \rho}\right) = \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!} \cdot \frac{1}{(m-\rho)^2} \cdot q_0^*, \ \frac{\rho}{m} < 1.$$

Таким чином, середня довжина черги обчислюється за формулою

$$\bar{r} = \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!} \cdot \frac{1}{(m-\rho)^2} \cdot q_0^*, \tag{10.40}$$

де $\frac{\rho}{m} < 1$.

Знайдемо середню кількість зайнятих каналів $\overline{K}$ $m$-канальної СМО. Позначимо через ДВВ $K$ кількість працюючих каналів, розподіл якої наведений в табл. 10.9 і обчислюємо її математичне сподівання $M(K)$, використовуючи формули (10.34) і (10.35):

Таблиця 10.9

Розподіл ДВВ $K$

| $K$ | 0 | 1 | 2 | … | $m-1$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $q_0^*$ | $q_1^*$ | $q_2^*$ | … | $q_{m-1}^*$ | $q_m^* + q_{m+1}^* + q_{m+2}^* + \ldots$ |

$$M(K) = 0 \cdot q_0^* + 1 \cdot q_1^* + 2 \cdot q_2^* + \ldots + (m-1) \cdot q_{m-1}^* + m \cdot \left(q_m^* + q_{m+1}^* + q_{m+2}^* + \ldots\right) =$$

$$= 1 \cdot \frac{\rho}{1!} \cdot q_0^* + 2 \cdot \frac{\rho^2}{2!} \cdot q_0^* + \ldots + (m-1) \cdot \frac{\rho^{m-1}}{(m-1)!} \cdot q_0^* +$$

$$+ m \cdot \left( \frac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^* + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right) \cdot q_0^* + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right)^2 \cdot q_0^* + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right)^3 \cdot q_0^* + \ldots \right) =$$

$$= \rho \cdot \left( q_0^* + \frac{\rho}{1!} \cdot q_0^* + \frac{\rho^2}{2!} \cdot q_0^* + \ldots + \frac{\rho^{m-2}}{(m-2)!} \cdot q_0^* + \frac{\rho^{m-1}}{(m-1)!} \cdot q_0^* + \frac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^* + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho^{m+1}}{m! \cdot m} \cdot q_0^* + \frac{\rho^{m+2}}{m! \cdot m^2} \cdot q_0^* + \frac{\rho^{m+3}}{m! \cdot m^3} \cdot q_0^* + \ldots \right), m \ge 2.$$

Оскільки вираз у дужках дорівнює 1 (умова нормування), то середня кількість зайнятих каналів обчислюється за формулою

$$\overline{K} = \rho. \tag{10.41}$$

Середня кількість заявок, які знаходяться в системі $\overline{Z}_{сист}$, являє собою суму середньої довжини черги $\bar{r}$ і кількості заявок $\overline{K}$, що обслуговуються:

$$\overline{Z}_{сист} = \bar{r} + \overline{K} = \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)! \cdot (m-\rho)^2} \cdot q_0^* + \rho, \ \frac{\rho}{m} < 1. \quad (10.42)$$

Для знаходження середнього часу $\bar{t}_{сист}$ перебування заявки в системі використовують наслідок з формули Літтла (10.17):

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\overline{Z}_{сист}}{\lambda} = \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(m-\rho)^2 \cdot \lambda} \cdot q_0^* + \frac{\rho}{\lambda}. \quad (10.43)$$

Знайдемо середній час очікування заявки в черзі за формулою (10.17):

$$\bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(m-\rho)^2 \cdot \lambda} \cdot q_0^*. \quad (10.44)$$

Формули для обчислення показників ефективності багатоканальної СМО з необмеженою чергою наведено в табл. 10.10.

Таблиця 10.10

Показники ефективності багатоканальної СМО з необмеженою чергою

| Показник | Формула |
|---|---|
| 1 | 2 |
| Коефіцієнт завантаження системи | $\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \rho < m, m \ge 2$, де $m$ − кількість каналів |
| Фінальні ймовірності станів | $q_0^* = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^{m+1}}{(m-\rho) \cdot m!}\right]^{-1}$, <br> $q_k^* = \frac{\rho^k}{k!} \cdot q_0^*, k = 0,1,...,m$, <br> $q_{m+k}^* = \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right)^k \cdot q_0^*, k = 1,2,....$ |

Продовження табл. 10.10

| 1 | 2 |
|---|---|
| Імовірність відмови | $P_{відм} = 0$ |
| Відносна пропускна спроможність | $Q = 1 - P_{відм} = 1$ |
| Абсолютна пропускна спроможність | $A = Q \cdot \lambda = \lambda$ |
| Імовірність утворення черги | $P_{черг} = \dfrac{\rho^{m+1}}{m!(m-\rho)} \cdot q_0^*$ |
| Середня кількість заявок у черзі | $\bar{r} = \dfrac{\rho^{m+1}}{(m-1)!} \cdot \dfrac{1}{(m-\rho)^2} \cdot q_0^*$ |
| Середня кількість зайнятих каналів | $\overline{K} = \rho$ |
| Середня кількість заявок у системі | $\overline{Z}_{сист} = \bar{r} + \overline{K} = \dfrac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(m-\rho)^2} \cdot q_0^* + \rho$ |
| Середній час перебування заявки в черзі | $\bar{t}_{черг} = \dfrac{\bar{r}}{\lambda} = \dfrac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(m-\rho)^2 \cdot \lambda} \cdot q_0^*$ |
| Середній час перебування заявки в системі | $\bar{t}_{сист} = \dfrac{\overline{Z}_{сист}}{\lambda} = \dfrac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(m-\rho)^2 \cdot \lambda} \cdot q_0^* + \dfrac{\rho}{\lambda}$ |

**Приклад 7.** У касі залізничного вокзалу розташовано декілька вікон з продажу квитків. Якщо пасажир надійшов до каси в момент, коли хоча б одне вікно вільне, то він одразу починає обслуговуватись. Якщо в момент його приходу всі касири зайняті обслуговуванням, то він встає в загальну чергу. Потік пасажирів є найпростішим з інтенсивністю $\lambda = 84$ *пас/год*. Середня тривалість обслуговування касиром одного покупця складає 2 *хв*. Час обслуговування одного пасажира розподілено за показниковим законом. Визначити:

а) мінімальну кількість касирів $m_{\min}$, при якій черга не буде зростати до нескінченності;

б) показники ефективності системи при $m_{\min}$.

**Розв'язання.** а) маємо багатоканальну СМО з необмеженою чергою. За умовою задачі інтенсивність потоку заявок

$\lambda = 84\ пас/год$ і інтенсивність обслуговування $\mu = \dfrac{1}{M(T_{обсл})} = \dfrac{1}{2}\ пас/хв = 30\ пас/год$. Коефіцієнт завантаження системи $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{84}{30} = 2{,}8$.

Черга не буде зростати до нескінченності, якщо $\dfrac{\rho}{m} < 1$, де $m$ – кількість каналів обслуговування. Отримаємо: $m > \rho,\ m > 2{,}8,\ m_{\min} = 3$. Таким чином, мінімальна кількість касирів $m_{\min} = 3$;

б) знаходимо показники ефективності системи при $m_{\min} = 3$:

$$q_0^* = \left(1 + \frac{2{,}8}{1!} + \frac{(2{,}8)^2}{2!} + \frac{(2{,}8)^3}{3!} + \frac{(2{,}8)^4}{(3 - 2{,}8)\cdot 3!}\right)^{-1} \approx 0{,}016,$$

тобто, в середньому, 1,6 % часу касири будуть марнувати час.

За формулою (10.40) обчислюємо середню кількість пасажирів у черзі:

$$\bar{r} = \frac{(2{,}8)^4}{2!\cdot(3 - 2{,}8)^2}\cdot 0{,}016 \approx 12{,}3\ пас.$$

За формулою (10.44) середній час очікування в черзі складає

$$\bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \approx \frac{12{,}3}{84} \approx 0{,}15\ год = 9\ хв.$$

За формулою (10.41) середня кількість касирів, зайнятих обслуговуванням пасажирів, $\overline{K} = \rho = 2{,}8$.

Середня кількість пасажирів, які знаходяться в системі, за формулою (10.42)

$$\overline{Z}_{сист} = \bar{r} + \overline{K} \approx 12{,}3 + 2{,}8 = 15{,}1.$$

За формулою (10.43) отримаємо середній час перебування пасажирів у квитковій касі:

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{Z}_{сист}}{\lambda} \approx \frac{15{,}1}{84} \approx 0{,}18\ год \approx 11\ хв.$$

**Відповідь**: а) оптимальна кількість касирів $m_{\min} = 3$;

б) $q_0^* \approx 0{,}016$; $\bar{r} \approx 12{,}3$; $\bar{t}_{черг} \approx 9\ хв$; $\bar{K} = 2{,}8$; $\bar{Z}_{сист} \approx 15{,}1$; $\bar{t}_{сист} \approx 11\ хв$.

**Приклад 8.** Залізнична станція має чотири колії для обслуговування потягів, що надходять до станції. Середній час обробки одного потяга дорівнює 30 *хв*. Припустимо, що черга потягів, що очікують обслуговування, може бути необмеженою. Вважаючи, що потік потягів, що прибувають на станцію, пуассонівський з інтенсивністю $\lambda = 1{,}5\ потяг/год$, а час обслуговування розподілено за показниковим законом, визначити:

а) імовірність того, що всі чотири колії зайняті;

б) середній час очікування в черзі; середню довжину черги;

в) середній час перебування потяга в системі; середню кількість потягів у системі.

**Розв'язання**. а) маємо багатоканальну СМО (кількість каналів обслуговування дорівнює $m = 4$) з необмеженою чергою. Інтенсивність обслуговування $\mu = \frac{1}{30}\ потяг/хв = 2\ потяг/год$. Коефіцієнт завантаження системи $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$. За формулою (10.36) обчислюємо:

$$q_0^* = \left(1 + \frac{0{,}75}{1!} + \frac{(0{,}75)^2}{2!} + \frac{(0{,}75)^3}{3!} + \frac{(0{,}75)^4}{4!} + \frac{(0{,}75)^5}{(4-0{,}75)\cdot 4!}\right)^{-1} \approx 0{,}47$$

і за формулою (10.34) обчислюємо ймовірність того, що зайняті всі чотири колії:

$$q_4^* \approx \frac{(0{,}75)^4}{4!} \cdot 0{,}47 \approx 0{,}006;$$

б) з урахуванням формули (10.40) середня довжина черги дорівнює

$$\bar{r} \approx \frac{(0{,}75)^5}{3!\cdot(4-0{,}75)^2} \cdot 0{,}47 \approx 0{,}002 .$$

Середній час очікування в черзі за формулою (10.44)

$$\bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \approx \frac{0{,}002}{1{,}5} \approx 0{,}0013 \ год ;$$

в) за формулами (10.42) і (10.43) знайдемо середню кількість потягів у системі та середній час знаходження потяга в системі:

$$\bar{Z}_{сист} = \bar{r} + \bar{K} = \bar{r} + \rho \approx 0{,}002 + 0{,}75 \approx 0{,}752 ,$$

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{Z}_{сист}}{\lambda} \approx \frac{0{,}752}{1{,}5} \approx 0{,}5 \ год .$$

**Відповідь**: а) $q_4^* \approx 0{,}006$; б) $\bar{r} \approx 0{,}002$; $\bar{t}_{черг} \approx 0{,}0013 \ год$;
в) $\bar{Z}_{сист} \approx 0{,}752$; $\bar{t}_{сист} \approx 0{,}5 \ год$.

**Приклад 9.** Автозаправка обладнана трьома колонками. Машини прибувають на станцію з інтенсивністю $\lambda = 0{,}5 \ машина/хв$. Середній час обслуговування однієї машини складає $\bar{T}_{обсл} = 5 \ хв$. Вважається, що потік машин, які під'їжджають до автозаправки, і потік обслуговування найпростіші. Обчислити показники ефективності АЗС, якщо розглядати її як СМО з необмеженою чергою.

**Розв'язання.** Дана АЗС являє собою триканальну СМО з необмеженою чергою.

Інтенсивність вхідного потоку $\lambda = 0{,}5 \ машина/хв$ та інтенсивність обслуговування $\mu = \frac{1}{M(T_{обсл})} = \frac{1}{\bar{T}_{обсл}} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \ машина/хв$. Коефіцієнт завантаження системи $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}5}{0{,}2} = 2{,}5$. За умовою задачі АЗС обладнана трьома колонками, тобто дана СМО з необмеженою чергою має три канали обслуговування ($m=3$). Обчислюємо $\frac{\rho}{m}=\frac{2{,}5}{3}\approx 0{,}83<1$. Як наслідок, система має фінальний розподіл імовірностей, який обчислюємо за формулами (10.36), (10.34), (10.35):

$$q_0^*=\left(1+\frac{2{,}5}{1!}+\frac{(2{,}5)^2}{2!}+\frac{(2{,}5)^3}{3!}+\frac{(2{,}5)^4}{(3-2{,}5)\cdot 3!}\right)^{-1}\approx 0{,}04;$$

$$q_1^*\approx\frac{2{,}5}{1!}\cdot 0{,}04\approx 0{,}1;$$

$$q_2^*\approx\frac{(2{,}5)^2}{2!}\cdot 0{,}04\approx 0{,}125;$$

$$q_3^*\approx\frac{(2{,}5)^3}{3!}\cdot 0{,}04\approx 0{,}1;$$

$$q_4^*\approx\frac{(2{,}5)^3}{3!}\cdot\left(\frac{2{,}5}{3}\right)\cdot 0{,}04\approx 0{,}09;\ldots.$$

За формулою (10.6) абсолютна пропускна спроможність

$$A=Q\cdot\lambda=1\cdot 0{,}5=0{,}5\ \textit{машина/хв}.$$

Середня довжина черги за формулою (10.40) складає

$$\bar{r}=\frac{(2{,}5)^4}{2!(3-2{,}5)^2}\cdot 0{,}04\approx 3{,}125\ \textit{машини}.$$

Середня кількість зайнятих колонок за формулою (10.41)

$$\overline{K}=\rho=2{,}5.$$

Середня кількість машин, які знаходяться на АЗС, за формулою (10.42)

$$\overline{Z}_{сист}=\bar{r}+\overline{K}\approx 3{,}125+2{,}5=5{,}625\ (\textit{маш}).$$

Середній час перебування машини на АЗС обчислюємо за формулою (10.43):

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{Z}_{сист}}{\lambda} \approx \frac{5{,}625}{0{,}5} = 11{,}25\ хв.$$

Середній час очікування заявки в черзі за формулою (10.44)

$$\bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \approx \frac{3{,}125}{0{,}5} = 6{,}25\ хв.$$

**Відповідь**: $q_0^* \approx 0{,}04$; $q_1^* \approx 0{,}1$; $q_2^* \approx 0{,}125$; $q_3^* \approx 0{,}1$; $q_4^* \approx 0{,}09$;…; $A = 0{,}5$ *машина/хв*; $\bar{r} \approx 3{,}125$ *машини*; $\bar{K} = 2{,}5$; $\bar{Z}_{сист} \approx 5{,}625$ *машини*; $\bar{t}_{сист} \approx 11{,}25$ *хв*; $\bar{t}_{черг} \approx 6{,}25$ *хв*.

## 10.10. Багатоканальна СМО з обмеженою чергою

### 10.10.1. Загальні поняття багатоканальної СМО з обмеженою чергою

Розглянемо СМО з $m$ каналами $(m \geq 2)$, до якої надходить найпростіший потік вимог з інтенсивністю $\lambda$. Припустимо, що потік обслуговування однієї заявки також є найпростішим з інтенсивністю $\mu$, тобто неперервно зайнятий канал обслуговує в середньому $\mu$ заявок за одиницю часу. Заявка, яка надійшла в СМО в момент часу, коли всі $m$ каналів зайняті, стає в чергу і очікує обслуговування. Припустимо, що в системі є обмеження на довжину черги, як і у випадку одноканальної СМО з обмеженою чергою (п. 10.7.1).

Під довжиною черги $n$ розуміють максимальну кількість місць у черзі, тобто в черзі можуть знаходитися максимум $n, n = 1,2,3,...$ заявок.

Якщо заявка надійшла в СМО в момент часу, коли в черзі вже стоять $n$ заявок, то вона залишає систему без обслуговування.

Розмічений граф станів, який відповідає цій системі, наведено на рис. 10.10.

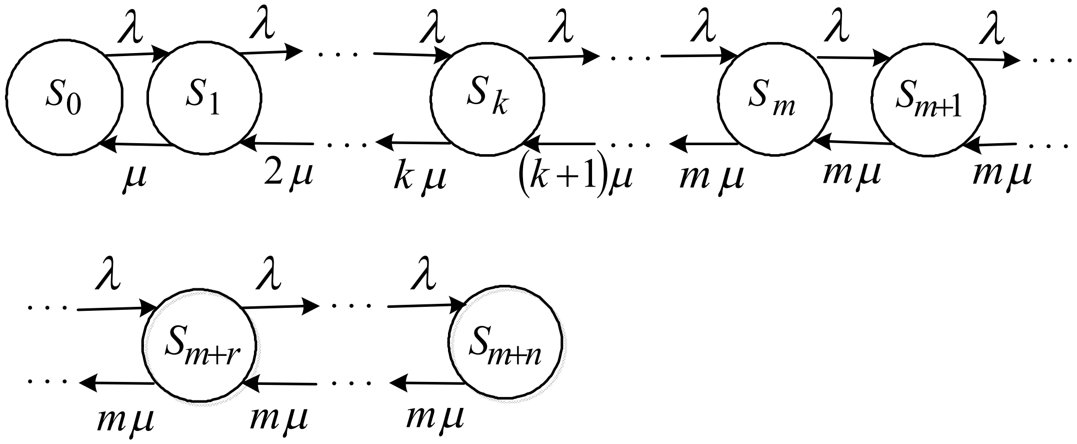



Рис. 10.10. Розмічений граф станів багатоканальної СМО з обмеженою чергою

У деякий момент часу система може знаходитися в одному зі станів:

$S_0$ – всі канали вільні (у СМО немає заявок);

$S_1$ – у системі одна заявка, яка обслуговується одним каналом, решта $(m-1)$ каналів вільні;

……………………..;

$S_k$ – у системі $k$, $k<m$ заявок і вони обслуговуються $k$ каналами, решта $(m-k)$ каналів вільні;

…………………….;

$S_m$ – у системі $m$ заявок, тобто всі $m$ каналів зайняті обслуговуванням, черги немає;

$S_{m+1}$ – у системі $(m+1)$ заявка, тобто $m$ заявок обслуговуються $m$ каналами, одна заявка в черзі;

……………………..;

$S_{m+r}$ – у системі $(m+r)$, $r<n$, заявок, тобто $m$ заявок обслуговуються $m$ каналами, $r$ заявок у черзі;

……………………..;

$S_{m+n}$ – у системі $m+n$ заявок, тобто $m$ каналів зайняті обслуговуванням, $n$ заявок у черзі.

Таким чином, дана система може знаходитись в одному з $m+n+1$ станів. У станах $S_0, S_1, ..., S_m$ черги немає, а в станах $S_{m+r}$, $r=\overline{1,n}$ – черга довжиною $r$.

Переходи системи зі стану в стан праворуч відбуваються під впливом одного і того самого вхідного потоку з інтенсивністю $\lambda$.

Якщо система знаходиться в стані $S_k, k=\overline{1,m}$ ($k$ каналів зайнято обслуговуванням), то перехід системи в лівий сусідній стан $S_{k-1}$ зумовлюється потоком, який є сумою потоків $k$ каналів, тобто дорівнює $k \cdot \mu$.

Коли всі $m$ каналів зайняті, то, очевидно, інтенсивність переходів системи зі стану $S_{m+r}$ в стан $S_{m+r-1}$, $r=\overline{1,n}$ дорівнює $m \cdot \mu$.

З розміченого графа станів (рис. 10.10) видно, що процес, який протікає в системі, є процесом загибелі та розмноження зі скінченною кількістю станів. Тому існує фінальний розподіл імовірностей станів (9.70):

$$q_1^* = \frac{\lambda_0}{\mu_1} q_0^*; \quad q_2^* = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} q_0^*;$$

$$q_3^* = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} q_0^*; \quad \ldots;$$

$$q_m^* = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{m-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_m} \cdot q_0^*;$$

$$q_{m+1}^* = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_m}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{m+1}} \cdot q_0^*; \ldots;$$

$$q_{m+n}^* = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{m+n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{m+n}} \cdot q_0^*.$$

Підставляючи в ці формули

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = \ldots = \lambda_{m+n-1} = \lambda; \mu_1 = \mu; \mu_2 = 2\mu; \mu_3 = 3\mu; \ldots;$$

$$\mu_m = \mu_{m+1} = \mu_{m+2} = \ldots = \mu_{m+n} = m\mu,$$

отримаємо

$$q_1^* = \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot q_0^*; \quad q_2^* = \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot q_0^*; \quad q_3^* = \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot q_0^*;$$

……………………;

$$q_m^* = \frac{1}{m!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \cdot q_0^*; \; q_{m+1}^* = \frac{1}{m \cdot m!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} \cdot q_0^*;$$

$$q_{m+2}^* = \frac{1}{m^2 \cdot m!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+2} \cdot q_0^*;$$

……………………;

$$q_{m+n}^* = \frac{1}{m^n \cdot m!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+n} \cdot q_0^*.$$

Позначивши через $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ коефіцієнт завантаження системи, отримаємо

$$q_1^* = \frac{\rho}{1!} \cdot q_0^*; \; q_2^* = \frac{\rho^2}{2!} \cdot q_0^*; \; q_3^* = \frac{\rho^3}{3!} \cdot q_0^*;$$

…………;

$$q_m^* = \frac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^*; \; q_{m+1}^* = \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot q_0^*; \; q_{m+2}^* = \frac{\rho^{m+2}}{m^2 \cdot m!} \cdot q_0^*; \tag{10.45}$$

……………;

$$q_{m+n}^* = \frac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q_0^*.$$

Використовуючи формули (10.45), маємо

$$q_0^* = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \ldots + \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} + \frac{\rho^{m+2}}{m^2 \cdot m!} + \ldots + \frac{\rho^{m+m}}{m^n \cdot m!}\right)^{-1}.$$

Вираз

$$\frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} + \frac{\rho^{m+2}}{m^2 \cdot m!} + \ldots + \frac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} = \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot \left(1 + \frac{\rho}{m} + \ldots + \frac{\rho^{n-1}}{m^{n-1}}\right)$$

є геометричною прогресією зі знаменником $\frac{\rho}{m}, \left(\frac{\rho}{m} \neq 1\right)$, тому

$$\frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot \left(1 + \frac{\rho}{m} + \ldots + \frac{\rho^{n-1}}{m^{n-1}}\right) = \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)^{n}}{1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)} = \frac{\rho^{m}}{m!} \cdot \frac{\left(\frac{\rho}{m}\right) - \left(\frac{\rho}{m}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)}.$$

Таким чином, отримаємо

$$q_0^* = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \frac{\left(\frac{\rho}{m}\right) - \left(\frac{\rho}{m}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)}\right)^{-1}, \frac{\rho}{m} \neq 1. \quad (10.46)$$

Якщо $\frac{\rho}{m} = 1$, то

$$\frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot \left(1 + \frac{\rho}{m} + \ldots + \frac{\rho^{n-1}}{m^{n-1}}\right) = \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!}\left(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n}\right) =$$

$$= \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot n = \left(\frac{\rho}{m}\right) \cdot \frac{\rho^m}{m!} \cdot n = \frac{\rho^m \cdot n}{m!}.$$

Тоді

$$q_0^* = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^m \cdot n}{m!}\right)^{-1}, \quad \frac{\rho}{m} = 1. \qquad (10.47)$$

### 10.10.2. Показники ефективності багатоканальної СМО з обмеженою чергою

Заявка, яка надходить, коли система знаходиться в стані $S_{m+n}$ (зайняті всі $m$ каналів і всі $n$ місць у черзі), отримує відмову в обслуговуванні, тобто ймовірність відмови дорівнює ймовірності перебування системи в стані $S_{m+n}$, а саме

$$P_{відм} = q^*_{m+n} = \frac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q^*_0. \tag{10.48}$$

Відносна пропускна спроможність згідно з формулою (10.10) дорівнює

$$Q = 1 - P_{відм} = 1 - \frac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q^*_0, \tag{10.49}$$

а абсолютна пропускна спроможність за формулою (10.11)

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q^*_0\right). \tag{10.50}$$

Очевидно, що середня кількість $\overline{K}$ зайнятих каналів дорівнює числу заявок, які обслуговуються:

$$\overline{K} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left(1 - \frac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q^*_0\right)$$

або

$$\overline{K} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q^*_0\right). \tag{10.51}$$

Для визначення середньої кількості $\bar{r}$ заявок у черзі розглянемо ДВВ $X$ − кількість заявок, що знаходяться в черзі в даний момент часу. Запишемо закон розподілу ДВВ $X$ (табл. 10.11) і обчислимо математичне сподівання:

Таблиця 10.11

Закон розподілу ДВВ $X$

| $X$ | 1 | 2 | … | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $q^*_{m+1}$ | $q^*_{m+2}$ | … | $q^*_{m+n}$ |

$$M(X)=1\cdot q_{m+1}^{*}+2\cdot q_{m+2}^{*}+...+n\cdot q_{m+n}^{*}=$$
$$=1\cdot\frac{\rho^{m+1}}{m\cdot m!}\cdot q_0^{*}+2\cdot\frac{\rho^{m+2}}{m^2\cdot m!}\cdot q_0^{*}+...+n\cdot\frac{\rho^{m+n}}{m^n\cdot m!}\cdot q_0^{*}=$$
$$=\frac{\rho^{m+1}}{m\cdot m!}\cdot q_0^{*}\cdot\left(1+2\cdot\left(\frac{\rho}{m}\right)+3\cdot\left(\frac{\rho}{m}\right)^2+...+n\cdot\left(\frac{\rho}{m}\right)^{n-1}\right).$$

Перепишемо цей вираз, ввівши заміну $t=\frac{\rho}{m}$:

$$M(X)=\frac{\rho^{m+1}}{m\cdot m!}\cdot q_0^{*}\cdot\left(1+2t+3t^2+...+nt^{n-1}\right)=$$
$$=\frac{\rho^{m+1}}{m\cdot m!}\cdot q_0^{*}\cdot\frac{d}{dt}\left(t+t^2+...+t^n\right)=\frac{\rho^{m+1}}{m\cdot m!}\cdot q_0^{*}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{t-t^{n+1}}{1-t}\right)=$$
$$=\frac{\rho^{m+1}}{m\cdot m!}\cdot q_0^{*}\cdot\frac{1-(n+1)\cdot t^n+n\cdot t^{n+1}}{(1-t)^2}=\frac{\rho^{m+1}}{m\cdot m!}\cdot q_0^{*}\cdot\frac{1-t^n\cdot(n+1-nt)}{(1-t)^2},$$

тоді середня кількість заявок у черзі при $\frac{\rho}{m}\neq 1$

$$\bar{r}=\frac{\rho^{m+1}}{m\cdot m!}\cdot q_0^{*}\cdot\frac{1-t^n\cdot(n+1-nt)}{(1-t)^2},\ t=\frac{\rho}{m}.$$

Якщо $\frac{\rho}{m}=1$, то

$$M(X)=\frac{\rho^{m+1}}{m\cdot m!}\cdot q_0^{*}\cdot(1+2+3+...+n)=\frac{\rho^{m+1}\cdot n}{m\cdot m!}\cdot\left(\frac{1+n}{2}\right)\cdot q_0^{*}.$$

Таким чином, формула для знаходження середньої кількості заявок у черзі набуває вигляду

$$\bar{r}=\begin{cases}\frac{\rho^{m+1}}{m\cdot m!}\cdot\frac{1-t^n\cdot(n+1-nt)}{(1-t)^2}\cdot q_0^{*},\ t=\frac{\rho}{m}\neq 1;\\ \frac{\rho^{m+1}\cdot n}{m\cdot m!}\cdot\left(\frac{1+n}{2}\right)\cdot q_0^{*},\ \frac{\rho}{m}=1.\end{cases}\tag{10.52}$$

Знаючи середню кількість заявок $\overline{K}$, які обслуговуються, і середню кількість заявок $\overline{r}$, що перебувають у черзі, можна знайти середню кількість заявок $\overline{Z}_{сист}$, присутніх у системі:

$$\overline{Z}_{сист} = \overline{K} + \overline{r}. \qquad (10.53)$$

Середній час $\overline{t}_{черг}$ перебування заявки в черзі обчислюємо за формулою

$$\overline{t}_{черг} = \frac{\overline{r}}{\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot \frac{1 - t^n \cdot (n + 1 - nt)}{(1-t)^2} \cdot q_0^*, \ t = \frac{\rho}{m} \neq 1; \\ \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho^{m+1} \cdot n}{m \cdot m!} \cdot \left(\frac{1+n}{2}\right) \cdot q_0^*, \ \frac{\rho}{m} = 1, \end{cases} \qquad (10.54)$$

а середній час $\overline{t}_{сист}$ перебування заявки в системі (як у черзі, так і під обслуговуванням)

$$\overline{t}_{сист} = \frac{\overline{Z}_{сист}}{\lambda}. \qquad (10.55)$$

Формули для обчислення показників ефективності багатоканальної СМО з обмеженою чергою довжиною $n$ наведено в табл. 10.12.

Таблиця 10.12

Показники ефективності багатоканальної СМО з обмеженою чергою довжиною $n$

| Показник | Формула |
|---|---|
| 1 | 2 |
| Коефіцієнт завантаження системи | $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ |
| Фінальні ймовірності станів | $q_0^* = \begin{cases} \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \frac{\left(\frac{\rho}{m}\right) - \left(\frac{\rho}{m}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)}\right)^{-1}, \frac{\rho}{m} \neq 1; \\ \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^m \cdot n}{m!}\right)^{-1}, \frac{\rho}{m} = 1; \end{cases}$ |

Продовження табл.10.12

| 1 | 2 |
|---|---|
| | $q_1^* = \frac{\rho}{1!} \cdot q_0^*; \quad q_2^* = \frac{\rho^2}{2!} \cdot q_0^*; \quad q_3^* = \frac{\rho^3}{3!} \cdot q_0^*;$ $\ldots;$ $q_m^* = \frac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^*; \quad q_{m+1}^* = \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot q_0^*; \quad q_{m+2}^* = \frac{\rho^{m+2}}{m^2 \cdot m!} \cdot q_0^*;$ $\ldots;$ $q_{m+n}^* = \frac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q_0^*$ |
| Імовірність відмови | $P_{відм} = q_{m+n}^* = \frac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q_0^*$ |
| Відносна пропускна спроможність | $Q = 1 - P_{відм} = 1 - \frac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q_0^*$ |
| Імовірність утворення черги | $P_{черг} = \frac{\rho^m}{m!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)^n}{1 - \frac{\rho}{m}} \cdot q_0^*$ |
| Абсолютна пропускна спроможність | $A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q_0^*\right)$ |
| Середня кількість заявок у черзі | $\bar{r} = \begin{cases} \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot \frac{1 - t^n \cdot (n + 1 - nt)}{(1-t)^2} \cdot q_0^*, \; t = \frac{\rho}{m} \neq 1; \\ \frac{\rho^{m+1} \cdot n}{m \cdot m!} \cdot \left(\frac{1+n}{2}\right) \cdot q_0^*, \; \frac{\rho}{m} = 1 \end{cases}$ |
| Середня кількість зайнятих каналів | $\overline{K} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left(1 - \frac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q_0^*\right)$ |
| Середня кількість заявок у системі | $\overline{Z}_{сист} = \overline{K} + \bar{r}$ |

Продовження табл. 10.12

| 1 | 2 |
|---|---|
| Середній час перебування заявки в черзі | $\bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot \frac{1 - t^n \cdot (n+1-nt)}{(1-t)^2} \cdot q_0^*, \; t = \frac{\rho}{m} \neq 1; \\ \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho^{m+1} \cdot n}{m \cdot m!} \cdot \left(\frac{1+n}{2}\right) \cdot q_0^*, \; \frac{\rho}{m} = 1 \end{cases}$ |
| Середній час перебування заявки в системі | $\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{Z}_{сист}}{\lambda}$ |

**Приклад 10.** Автозаправка обладнана двома колонками, а майданчик біля неї вміщує не більше трьох машин одночасно. Якщо під час прибуття чергової машини на станцію майданчик зайнятий, то машина направляється до іншої заправки. Машини прибувають на станцію з інтенсивністю 20 *машин/год*. Середній час обслуговування однієї машини 5 *хв*. Вважаючи, що вхідний потік є найпростішим, а час обслуговування однієї машини розподілено за показниковим законом, визначити:

а) імовірність того, що обидві колонки вільні;

б) імовірність відмови $P_{відм}$ в обслуговуванні;

в) відносну $Q$ та абсолютну $A$ пропускні спроможності;

г) середню кількість машин, які обслуговуються;

д) середню кількість машин у черзі та середню кількість машин на станції;

е) середній час очікування машини в черзі та середній час перебування машини на автозаправці.

**Розв'язання.** а) дана АЗС – це двоканальна СМО $(m=2)$ з обмеженою чергою довжиною $n=3$. Інтенсивність вхідного потоку $\lambda = \frac{1}{3}$ *машина/хв*, а інтенсивність обслуговування $\mu = \frac{1}{M(T_{обсл})} = \frac{1}{\bar{T}_{обсл}} = \frac{1}{5}$ *машина/хв*. Коефіцієнт завантаження системи $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{3}$, показник завантаження на один канал $\frac{\rho}{m} = \frac{5}{6}$.

За формулою (10.46) обчислюємо:

$$q_0^* = \left(1 + \frac{\left(\frac{5}{3}\right)}{1!} + \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2}{2!} \cdot \frac{\frac{5}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^4}{1 - \frac{5}{6}}\right)^{-1} = \frac{3888}{27143} \approx 0{,}143 \cdot$$

Тобто ймовірність того, що обидві колонки вільні, $q_0^* \approx 0{,}143$;

б) за формулою (10.48): $P_{відм} = q_5^* \approx \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^5}{2^3 \cdot 2!} \cdot 0{,}143 \approx 0{,}115$;

в) за формулою (10.49) відносна пропускна спроможність $Q = 1 - P_{відм} \approx 0{,}885$ і за формулою (10.50) абсолютна пропускна спроможність $A = \lambda \cdot Q = \frac{1}{3} \cdot 0{,}885 = 0{,}295$;

г) за формулою (10.51) середня кількість машин, які знаходяться під обслуговуванням:

$$\overline{K} = \frac{5}{3} \cdot \left(1 - \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^5}{2^3 \cdot 2!} \cdot 0{,}143\right) \approx 1{,}475 \ \textit{машини};$$

д) за формулою (10.52) отримаємо середню кількість машин у черзі

$$\bar{r} = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^3}{2 \cdot 2!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(4 - 3 \cdot \frac{5}{6}\right)}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2} \cdot 0{,}143 \approx 0{,}787 \ \textit{машини} \cdot$$

За формулою (10.53) середня кількість машин на станції $\overline{Z}_{сист} \approx 1{,}475 + 0{,}787 = 2{,}262$ *машини*;

е) за формулами (10.54) і (10.55) середній час очікування в черзі $\bar{t}_{черг} \approx \frac{0{,}787}{\frac{1}{3}} = 2{,}361$ *хв* і середній час перебування на АЗС $\bar{t}_{сист} \approx \frac{2{,}361}{\frac{1}{3}} = 7{,}083$ *хв*.

**Відповідь**:

а) $q_0^* \approx 0{,}143$; б) $P_{відм} \approx 0{,}115$; в) $Q \approx 0{,}885$, $A \approx 0{,}295$;
г) $\overline{K} \approx 1{,}475$ *машини*; д) $\overline{r} \approx 0{,}787$ *машини*, $\overline{Z}_{сист} \approx 2{,}262$ *машини*;
е) $\overline{t}_{черг} \approx 2{,}361$ *хв*, $\overline{t}_{сист} \approx 7{,}083$ *хв*.

## 10.11. Багатоканальна СМО з відмовами

### 10.11.1. Загальні поняття багатоканальної СМО з відмовами

Розглянемо $m$-канальну $(m > 1)$ СМО з відмовами. Вхідний потік заявок вважаємо найпростішим з інтенсивністю $\lambda$. Заявці, яка надійшла в СМО в момент, коли всі $m$ каналів зайняті обслуговуванням, відмовляють в обслуговуванні і вона залишає систему. Час обслуговування однієї заявки розподілено за показниковим законом з параметром $\mu$, $\mu = \dfrac{1}{M(T_{обсл})}$, де $M(T_{обсл})$ − середній час обслуговування однієї заявки.

Стани СМО нумеруємо за кількістю зайнятих каналів. Для багатоканальної СМО з відмовами це означає, що нумерація станів проводиться за кількістю заявок, які знаходяться в системі, тобто обслуговуються (через відсутність черги ця кількість співпадає з кількістю зайнятих каналів). Таким чином, СМО може знаходитися в одному з таких $(m+1)$ станів:

$S_0$ − СМО вільна;
$S_1$ − зайнятий один канал, інші $(m-1)$ вільні;
$S_2$ − зайнято два канали, інші $(m-2)$ вільні;
…………………………………………..;
$S_k$ − $k$ каналів зайняті, інші $(m-k)$ вільні;
……………………………………………;
$S_m$ − всі $m$ каналів зайняті.

Розмічений граф станів такої системи має вигляд рис. 10.11.

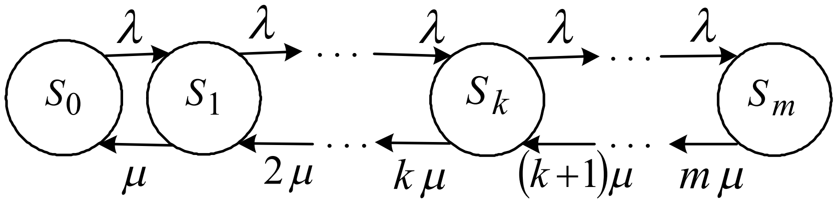



Рис. 10.11. Розмічений граф станів багатоканальної СМО з відмовами

Якщо система знаходиться в стані $S_k, k=\overline{0,m-1}$ (система обслуговує $k$ заявок, решта $(m-k)$ каналів вільні), то перехід її в стан $S_{k+1}$ відбувається при надходженні нової заявки. Таким чином, за стрілками зліва направо з будь-якого стану $S_k, k=\overline{0,m-1}$ в сусідній стан праворуч систему переводить один і той самий вхідний потік з інтенсивністю $\lambda$.

Переходи системи справа наліво відбуваються під впливом найпростішого потоку з інтенсивністю $\mu$. Таким чином, перехід системи зі стану $S_k$ в стан $S_{k-1}, k=m,m-1,...,1$ відбувається під впливом сумарного потоку обслуговування, який дорівнює сумі інтенсивностей складових потоків, тобто $\sum_{i=1}^{k}\mu = k\cdot\mu, k=m,m-1,...,1$.

З розміченого графа станів (рис. 10.11) видно, що процес, який протікає в системі, є процесом загибелі та розмноження зі скінченою кількістю станів. Тому існує фінальний розподіл імовірностей, який знаходимо за формулами (9.80) і (9.81):

$$q_0^* = \left(1 + \frac{1}{1!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + ... + \frac{1}{m!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\right)^{-1}.$$

Позначивши через $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ коефіцієнт завантаження системи, отримаємо фінальні ймовірностей станів СМО:

$$q_0^* = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + ... + \frac{\rho^m}{m!}\right)^{-1}, \qquad (10.56)$$

$$q_1^* = \frac{\rho}{1!} \cdot q_0^*,$$

$$q_2^* = \frac{\rho^2}{2!} \cdot q_0^*,$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$q_k^* = \frac{\rho^k}{k!} \cdot q_0^*, \; k = \overline{1,m}. \qquad (10.57)$$

Формули (10.56) , (10.57) називають *формулами Ерланга*.

### 10.11.2. Показники ефективності багатоканальної СМО з відмовами

За визначенням багатоканальної СМО з відмовами, заявка отримує відмову, якщо вона надходить у той момент, коли всі канали зайняті, тобто коли система знаходиться в стані $S_m$. Тому ймовірність відмови $P_{відм}$ дорівнює ймовірності $q_m^*$ того, що система знаходиться в стані $S_m$, тобто

$$P_{відм} = q_m^* = \frac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^*. \qquad (10.58)$$

Тоді відносна пропускна спроможність дорівнює

$$Q = 1 - P_{відм} = 1 - \frac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^*. \qquad (10.59)$$

Оскільки абсолютна пропускна спроможність СМО являє собою середню кількість вимог, які може обслужити система за одиницю часу, то

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^*\right). \qquad (10.60)$$

Одним з важливих показників ефективності є середня кількість зайнятих каналів $\overline{K}$, яка дорівнює середній кількості заявок під обслуговуванням (або середній кількості заявок у системі):

$$\overline{K} = \overline{Z}_{сист} = \frac{A}{\mu},$$

$$\overline{K} = \overline{Z}_{сист} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^*\right). \qquad (10.61)$$

Формули для обчислення показників ефективності багатоканальної СМО з відмовами наведено в табл. 10.13.

Таблиця 10.13

Показники ефективності багатоканальної СМО з відмовами

| Показник | Формула |
|---|---|
| Коефіцієнт завантаження системи | $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ |
| Фінальні ймовірності станів | $q_0^* = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \ldots + \frac{\rho^m}{m!}\right)^{-1}$, $q_k^* = \frac{\rho^k}{k!} \cdot q_0^*,\ k = \overline{1,m}$ |
| Імовірність відмови | $P_{відм} = q_m^* = \frac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^*$ |
| Відносна пропускна спроможність | $Q = 1 - P_{відм} = 1 - \frac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q_0^*$ |
| Абсолютна пропускна спроможність | $A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^*\right)$ |
| Середня кількість зайнятих каналів | $\overline{K} = \overline{Z}_{сист} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^*\right)$ |

**Приклад 11.** У приміщенні чергового по станції є три лінії зв'язку. Потік викликів є найпростіший з інтенсивністю $\lambda = 0{,}1\ виклик/хв$. Середній час розмови з черговим складає 4 *хв*. Час переговорів розподілено за показниковим законом. Знайти:

а) імовірність відмови;

б) відносну пропускну спроможність, абсолютну пропускну спроможність;

в) середню кількість зайнятих каналів;

г) визначити, скільки ліній зв'язку повинен мати черговий по станції, щоб імовірність відмови не перевищувала 0,005.

**Розв'язання**. а) Маємо 3-канальну СМО з відмовами. За умовою середній час переговорів дорівнює 4 *хв.*, тому інтенсивність обслуговування $\mu = \dfrac{1}{M(T_{обсл})} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$ *розмова/хв*. Як наслідок, коефіцієнт завантаження системи $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4$.

За формулами (10.56) і (10.57) при $m = 3$ отримаємо:

$$q_0^* = \left(1 + \frac{0{,}4}{1!} + \frac{(0{,}4)^2}{2!} + \frac{(0{,}4)^3}{3!}\right)^{-1} \approx 0{,}67,$$

$$q_3^* \approx \frac{(0{,}4)^3}{3!} \cdot 0{,}67 \approx 0{,}007.$$

За формулою (10.58) обчислюємо ймовірність відмови: $P_{відм} \approx 0{,}007$;

б) відносна пропускна спроможність за формулою (10.59) дорівнює $Q = 1 - P_{відм} \approx 0{,}993$, абсолютна пропускна спроможність $A = \lambda \cdot Q \approx 0{,}1 \cdot 0{,}993 = 0{,}0993$;

в) середня кількість зайнятих каналів обчислюємо за допомогою формули (10.61): $\overline{K} = \overline{Z}_{сист} = \dfrac{A}{\mu} \approx \dfrac{0{,}0993}{0{,}25} \approx 0{,}4$;

г) за умовою задачі на станції працює 3 лінії зв'язку і ймовірність відмови в обслуговуванні становить $P_{відм} \approx 0{,}007$. Для того щоб ця ймовірність не перевищувала заданої $, P = 0{,}005$ необхідно, очевидно, додати ще лінії зв'язку. Будемо додавати по одній лінії, обчислюючи при цьому ймовірність відмови доти, доки не буде виконана умова $P_{відм} < 0{,}005$.

При $m = 4$

$$q_0^* = \left(1 + \frac{0{,}4}{1!} + \frac{(0{,}4)^2}{2!} + \frac{(0{,}4)^3}{3!} + \frac{(0{,}4)^4}{4!}\right)^{-1} \approx 0{,}67,$$

$$P_{відм} = q_4^* \approx \frac{(0{,}4)^4}{4!} \cdot 0{,}67 \approx 0{,}0007,$$

тобто ймовірність відмови $P_{відм} \approx 0{,}0007$ не перевищує $0{,}005$. Отже, для забезпечення потрібної ймовірності відмов кількість ліній зв'язку достатньо збільшити до 4.

**Відповідь**: а) $P_{відм} \approx 0{,}007$; б) $Q \approx 0{,}993$, $A \approx 0{,}0993$; в) $\overline{K} \approx 0{,}4$; г) $m = 4$.

## 10.12. Замкнені СМО

Особливістю розглянутих раніше СМО була незалежність вхідного потоку заявок від стану самої системи.

СМО називаються *замкненими*, якщо інтенсивність вхідного потоку заявок залежить від стану системи.

Розглянемо деяку скінченну сукупність елементів, кожний з яких у будь-який момент часу може вимагати обслуговування. Сукупність цих елементів утворює джерело, виходячи з якого елемент одразу потрапляє в систему обслуговування. Після завершення обслуговування елемент повертається в це джерело, звідки він знов може вийти і потрапити в СМО, і так далі.

**Приклад 12.** На пероні три турнікети. При виході з ладу вони одразу починають ремонтуватися черговим працівником. Час безаварійної роботи кожного турнікета, як і час ремонту, розподілено за показниковим законом з параметрами $\lambda$ та $\mu$ відповідно.

У цьому прикладі елементами системи є турнікети, а система обслуговування – черговий працівник. Розмічений граф станів такої системи зображено на рис. 10.12.

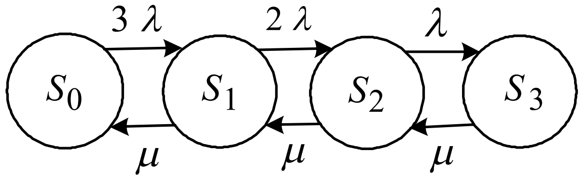



Рис. 10.12. Розмічений граф станів прикладу 12

Стани СМО нумеруються за кількістю несправних турнікетів, тобто в стані $S_k \left(k=\overline{0,3}\right) -\ k$ турнікетів у ремонті.

Таким чином, процес, який протікає в системі, є процесом загибелі та розмноження зі скінченною кількістю станів. Тому існує фінальний розподіл імовірностей. За графом (рис. 10.12) матриця інтенсивностей має вигляд

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -3\lambda & 3\lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(2\lambda+\mu) & 2\lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

За формулою (9.62) складаємо систему рівнянь для знаходження фінальних імовірностей $q_k^*$ станів $S_k, k=\overline{0,3}$:

$$\begin{cases} -3\lambda q_0^* + \mu q_1^* = 0, \\ 3\lambda q_0^* - (2\lambda+\mu) q_1^* + \mu q_2^* = 0, \\ 2\lambda q_1^* - (\lambda+\mu) q_2^* + \mu q_3^* = 0, \\ \lambda q_2^* - \mu q_3^* = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння цієї системи одержимо $q_1^* = \dfrac{3\lambda}{\mu} q_0^*$. З другого рівняння, з урахуванням попередньо знайденої ймовірності $q_1^*$, виразимо $q_2^*$:

$$3\lambda q_0^* - (2\lambda+\mu)\cdot\left(\frac{3\lambda}{\mu}\right) q_0^* + \mu q_2^* = 0,$$

$$q_2^* = \frac{6\lambda^2}{\mu^2} q_0^*.$$

З останнього рівняння системи отримаємо $q_3^*$:

$$q_3^* = \frac{\lambda}{\mu} q_2^*,$$

$$q_3^* = \frac{6\lambda^3}{\mu^3} q_0^*.$$

Таким чином,

$$q_1^* = 3\rho q_0^*, q_2^* = 6\rho^2 q_0^*, q_3^* = 6\rho^3 q_0^*, \text{ де } \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Значення фінальних імовірностей знайдемо, використовуючи умову нормування

$$q_0^* + q_1^* + q_2^* + q_3^* = q_0^* + 3\rho q_0^* + 6\rho^2 q_0^* + 6\rho^3 q_0^* = 1,$$
$$q_0^*\left(1 + 3\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3\right) = 1.$$

Звідси маємо

$$q_0^* = \frac{1}{1 + 3\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3},\ q_1^* = \frac{3\rho}{1 + 3\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3},$$
$$q_2^* = \frac{6\rho^2}{1 + 3\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3},\ q_3^* = \frac{6\rho^3}{1 + 3\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3}.$$

**Приклад 13.** Майстер локомотивного депо обслуговує чотири верстати, які час від часу вимагають налагодження. Зупинка верстата наступає в середньому через 2,5 *год* неперервної роботи. Якщо в момент зупинки майстер вільний, то він негайно приступає до налагодження устаткування, якщо ні, то верстат стає в чергу для налагодження. У середньому для налагодження одного верстата необхідно 25 *хв*. Усі потоки (відмов і ремонтів) вважати найпростішими. Знайти:

а) фінальний розподіл імовірностей;

б) абсолютну пропускну спроможність;

в) середній відносний час простою майстра;

г) середню кількість несправних верстатів;

д) середню кількість верстатів у черзі.

**Розв'язання**. а) Як і в прикладі 12, позначивши через $S_k, k=\overline{0,4}$ стан системи, у якому $k$ верстатів потребують ремонту, отримаємо розмічений граф станів (рис. 10.13).

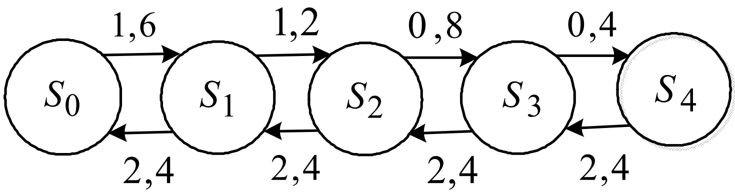



Рис. 10.13. Розмічений граф станів прикладу 13

За умовою зупинка верстата наступає через 2,5 *год*, тому $\lambda=\frac{1}{2,5}=0,4\ \textit{відмова/год}$, а середній час налагодження одного верстата складає 25 *хв* або $\frac{25}{60}=\frac{5}{12}\ \textit{год}$, тому $\mu=\frac{1}{\frac{5}{12}}=\frac{12}{5}=2,4\ \textit{віднов/год}$.

Як відомо (п. 9.4.7), даний марковський ланцюг є регулярним, тому він має стаціонарний розподіл імовірностей, який співпадає з фінальним. Матриця інтенсивностей для прикладу 13 набуває вигляду

$$\Lambda=\begin{pmatrix} -1,6 & 1,6 & 0 & 0 & 0 \\ 2,4 & -3,6 & 1,2 & 0 & 0 \\ 0 & 2,4 & -3,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 2,4 & -2,8 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 2,4 & -2,4 \end{pmatrix}.$$

За формулою (9.62) складемо систему рівнянь для знаходження фінальних імовірностей станів $S_k, k=\overline{0,4}$:

$$\begin{cases} -1{,}6q_0^* + 2{,}4q_1^* = 0, \\ 1{,}6q_0^* - 3{,}6q_1^* + 2{,}4q_2^* = 0, \\ 1{,}2q_1^* - 3{,}2q_2^* + 2{,}4q_3^* = 0, \\ 0{,}8q_2^* - 2{,}8q_3^* + 2{,}4q_4^* = 0, \\ 0{,}4q_3^* - 2{,}4q_4^* = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи отриману систему послідовно, аналогічно прикладу 12, отримаємо

$$q_1^* = \frac{2}{3}q_0^*,\ q_2^* = \frac{1}{3}q_0^*,\ q_3^* = \frac{1}{9}q_0^*,\ q_4^* = \frac{1}{54}q_0^*.$$

Для визначення $q_0^*$ використовуємо нормуючу умову

$$q_0^* + q_1^* + q_2^* + q_3^* + q_4^* = 1,$$
$$q_0^* + \frac{2}{3}q_0^* + \frac{1}{3}q_0^* + \frac{1}{9}q_0^* + \frac{1}{54}q_0^* = 1,$$
$$q_0^*\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{54}\right) = 1,$$
$$q_0^* = \frac{54}{115}.$$

Обчислюємо фінальний розподіл імовірностей:

$$q_1^* = \frac{2}{3} \cdot \frac{54}{115} = \frac{36}{115},\ q_2^* = \frac{1}{3} \cdot \frac{54}{115} = \frac{18}{115},$$
$$q_3^* = \frac{1}{9} \cdot \frac{54}{115} = \frac{6}{115},\ q_4^* = \frac{1}{54} \cdot \frac{54}{115} = \frac{1}{115}.$$

Контроль: $\frac{54}{115} + \frac{36}{115} + \frac{18}{115} + \frac{6}{115} + \frac{1}{115} = 1$.

Таким чином, фінальний розподіл імовірностей $\overrightarrow{Q^*} = \left(\frac{54}{115}; \frac{36}{115}; \frac{18}{115}; \frac{6}{115}; \frac{1}{115}\right)$;

б) для знаходження абсолютної пропускної спроможності $A$ попередньо визначимо ймовірність того, що майстер зайнятий (хоча б один верстат у ремонті):

$$P_{зайн} = 1 - q_0^* = 1 - \frac{54}{115} = \frac{61}{115} \approx 0{,}54.$$

Якщо майстер зайнятий, то він налагоджує $\mu$ верстатів за годину. Таким чином, $A = P_{зайн} \cdot \mu \approx 0{,}54 \cdot 2{,}4 = 1{,}296$ верстатів за годину;

в) середній час простою $q_0^* = \frac{54}{115} \approx 0{,}46$ (46 % часу майстер вільний);

г) позначимо через ДВВ $X$ кількість несправних верстатів і запишемо закон розподілу ДВВ $X$ в табличному вигляді (табл. 10.14).

Таблиця.10.14

Закон розподілу ДВВ $X$

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{54}{115}$ | $\frac{36}{115}$ | $\frac{18}{115}$ | $\frac{6}{115}$ | $\frac{1}{115}$ |

Тоді

$$M(X) = 0 \cdot \frac{54}{115} + 1 \cdot \frac{36}{115} + 2 \cdot \frac{18}{115} + 3 \cdot \frac{6}{115} + 4 \cdot \frac{1}{115} = \frac{94}{115} \approx 0{,}82;$$

д) позначимо через ДВВ $K$ кількість верстатів, що обслуговуються. Очевидно, математичне сподівання $M(K) = 0 \cdot q_0^* + 1 \cdot \left(1 - q_0^*\right) = 1 - q_0^* = 1 - \frac{54}{115} = \frac{61}{115} \approx 0{,}54$.

Розглянемо ДВВ $R$ − середню кількість верстатів у черзі на налагодження. Очевидно, $R = X - K$, де $X$ і $K$ − дискретні випадкові величини.

Тоді середня кількість верстатів у черзі дорівнює $M(R) = M(X) - M(K) \approx 0{,}82 - 0{,}54 = 0{,}28$.

**Відповідь**:

а) $\overrightarrow{Q^*} = \left(\frac{54}{115}; \frac{36}{115}; \frac{18}{115}; \frac{6}{115}; \frac{1}{115}\right)$;

б) $A \approx 1{,}296$ *верстат /год*; в) 46 %; г) $\approx 0{,}82$; д) $\approx 0{,}28$.

## Питання до розділу

1. Що таке система масового обслуговування?
2. Предмет ТМО.
3. Основні поняття теорії масового обслуговування (ТМО).
4. Основні задачі теорії масового обслуговування.
5. Класифікація систем масового обслуговування.
6. Основні елементи систем масового обслуговування.
7. Вхідний потік заявок.
8. Математична модель СМО.
9. Коефіцієнт завантаження СМО.
10. Які показники характеризують ефективність обслуговуючої системи?
11. Поняття одноканальної СМО з необмеженою чергою.
12. Поняття одноканальної СМО з обмеженою чергою.
13. Поняття одноканальної СМО з відмовами.
14. Поняття багатоканальної СМО з необмеженою чергою.
15. Поняття багатоканальної СМО з обмеженою чергою.
16. Поняття багатоканальної СМО з відмовами.
17. Поняття замкненої СМО.

## Завдання

### *Одноканальна СМО з необмеженою чергою*

**1**. До приймально-відправного парку станції надходить найпростіший потік потягів із інтенсивністю 2 потяги за *годину*. Одна бригада оглядачів обробляє рухомий склад у середньому 15 *хв*. Вважаючи, що час обробки розподілено за показниковим законом, визначити:

а) фінальний розподіл імовірностей станів парку;

б) середню кількість потягів, які очікують обслуговування.

**Відповідь**: а) $q_k^* = (0{,}5)^{k+1},\ k = 0{,}1{,}2{,}...$; б) $\bar{r} = 0{,}5\,\textit{потяга}$.

**2.** Автомат з продажу квитків на вокзалі видає квиток через 15 *с*. Встановлено, що потік пасажирів, які звертаються до автоматичної квиткової каси, є найпростішим з параметром $\lambda = 180\ \textit{пас/год}$, а час обслуговування одного пасажира розподілено за показниковим законом. Знайти:

а) час простою автомата;

б) середню кількість пасажирів у черзі;

в) середній час перебування пасажира в черзі.

**Відповідь**: а) час простою $15\ \textit{хв}$; б) $\bar{r} = 2{,}25\ \textit{пас}$;

в) $\bar{t}_{\textit{черг}} = 0{,}75\ \textit{хв}$.

**3.** Встановлено, що потік пасажирів, які звертаються до залізничної каси, є найпростішим з параметром $\lambda = 15\ \textit{пас/год}$, а час обслуговування розподілено за показниковим законом з параметром $\mu = 20\ \textit{пас/год}$. Визначити основні показники ефективності СМО. Проаналізувати роботу одного касира залізничної каси.

**Відповідь**: $\rho = 0{,}75;\ q_k^* = (0{,}75)^k \cdot 0{,}25,\ k = 0{,}1{,}2{,}...$;

$A = 15\ \textit{ïàñ /ãîä}$; $\bar{Z}_{\textit{ñèñò}} = 3\ \textit{ïàñ}$; $\bar{r} = 2{,}25\ \textit{пас}$; $\bar{t}_{\textit{сист}} = 0{,}2\ \textit{год}$; $\bar{t}_{\textit{черг}} = 0{,}15\ \textit{год}$.

**4.** До залізничної сортувальної гірки надходять для розформування потяги з інтенсивністю $\lambda = 2{,}5\ \textit{потяг/год}$. Встановлено, що вхідний потік є найпростішим. Час обслуговування одного потяга на гірці розподілено за показниковим законом і дорівнює в середньому 20 *хв*. Вважаючи залізничну сортувальну гірку СМО з необмеженою чергою, знайти:

а) середню кількість потягів у черзі;

б) середній час перебування потяга в черзі;

в) середній час перебування потяга на гірці.

**Відповідь**: а) $\bar{r} \approx 4{,}2\,\textit{потяга}$; б) $\bar{t}_{\textit{черг}} = 1{,}7\ \textit{год}$;

в) $\bar{t}_{\textit{сист}} = 2\ \textit{год}$.

**5.** До бази даних сервера залізниці надходить 40 заявок за годину, а середній час обробки кожної заявки складає 1 *хв*. Якщо заявка надходить до бази даних у момент, коли система зайнята обробкою попередньої заявки, то вона стає в чергу. Встановлено, що вхідний потік заявок є найпростішим, час обслуговування однієї заявки розподілено за показниковим законом. Визначити:

а) імовірність наявності черги;

б) сумарний час, який проведе заявка в системі.

**Відповідь**: а) $\frac{2}{3}$; б) $3\,хв\,3$.

*Примітка.* Основні формули для знаходження показників ефективності одноканальної СМО з необмеженою чергою подані у Додатку 2.

### *Одноканальна СМО з обмеженою чергою*

**6.** На АЗС працює одна колонка. Середній час обслуговування однієї автомашини складає 2 *хв*. Біля АЗС знаходиться майданчик для очікування, розрахований на 5 автомобілів. Якщо колонка й всі місця на майданчику зайняті, то машина, що під'їхала для заправки, покидає АЗС. У середньому на заправку прибуває 2 машини за 5 *хв.* Вважаючи, що вхідний потік автомашин є найпростішим, а час обслуговування одного автомобіля розподілено за показниковим законом, знайти основні показники ефективності роботи АЗС.

**Відповідь**: $\mu = 0{,}5$; $\rho = 0{,}8$; $q_0^* \approx 0{,}25$; $Q \approx 0{,}93$; $A \approx 0{,}37$; $\bar{r} \approx 1{,}4$; $\bar{t}_{черг} \approx 3{,}5\,хв$; $\overline{Z}_{сист} \approx 2{,}14$; $\bar{t}_{сист} \approx 5{,}36\,хв.$

**7.** До пункту, розрахованого на миття одного автомобіля, прибуває в середньому 5 машин впродовж години. Процес миття однієї машини займає в середньому 15 *хв*. Поруч з пунктом мийки знаходиться майданчик для очікування, який вміщує 3 автомобіля. У разі заповнення майданчика очікування всі транспортні засоби, що під'їжджають, покидають автомийку необслуженими. Вважаючи, що вхідний потік машин найпростіший, а час обслуговування однієї машини розподілено за показниковим законом, знайти основні показники ефективності роботи автомийки.

**Відповідь**: $\lambda = 5$ *машин/год*; $\mu = 4$ *машина/год*; $\rho = 1{,}25$; $q_k^* = (1{,}25)^k \cdot (0{,}12), k = \overline{0{,}4}$; $P_{відм} \approx 0{,}3$; $Q \approx 0{,}7$; $A \approx 3{,}5$; $\bar{r} \approx 1{,}56$; $\bar{t}_{черг} \approx 0{,}3$ *год*; $\overline{Z}_{сист} \approx 2{,}4$; $\bar{t}_{сист} \approx 0{,}5$ *год*.

*Примітка.* Основні формули для знаходження показників ефективності одноканальної СМО з обмеженою чергою подані у Додатку 2.

### *Одноканальна СМО з відмовами*

**8.** У систему обробки інформації протягом 5 *с* надходить $c$ пакетів. Потік повідомлень − найпростіший. Система може обробити одночасно лише один пакет. Час обробки пакета розподілено за показниковим законом і складає в середньому $d, c$. Визначити абсолютну пропускну спроможність системи, якщо:

а) $c = 30, d = 3$;

б) $c = 25, d = 2{,}5$;

в) $c = 20, d = 2$.

**Відповідь**: а) $A \approx 0{,}32$ *пакет/с*; б) $A \approx 0{,}37$ *пакет/с*; в) $A \approx 0{,}44$ *пакет/с*.

*Примітка.* Основні формули для знаходження показників ефективності одноканальної СМО з відмовами подані у Додатку 3.

### *Багатоканальна СМО з необмеженою чергою*

**9.** Сортувальна станція має дві сортувальні гірки. Вхідний потік потягів найпростіший. Середня кількість потягів, що прибувають щодоби до станції для обробки, дорівнює 50. Гірковий технологічний інтервал складає в середньому 0,4 *год*. Час обслуговування підкоряється показниковому закону розподілу. Знайти показники ефективності сортувальної станції.

**Відповідь**: $\mu = 2{,}5$; $\rho = \dfrac{5}{6}$; $q_0^* \approx 0{,}41$; $Q = 1$; $A \approx 2{,}08$; $\bar{r} \approx 0{,}175$; $\bar{t}_{черг} = 0{,}08$ *год*; $\overline{Z}_{сист} = 1{,}01$; $\bar{t}_{сист} = 0{,}48$ *год*.

**10.** Потік пасажирів, що звертаються до залізничної каси, є найпростішим з параметром $\lambda = 4$ *пас/хв*. Час обслуговування розподілений за показниковим законом з параметром $\mu = \frac{5}{3}$ *пас/хв*. Визначити основні показники ефективності СМО. Проаналізувати роботу залізничної каси з трьома касирами.

**Відповідь**: $q_0^* \approx 0{,}056$; $A = 4$ *пас/хв*; $\bar{r} \approx 2{,}6$ *пас*; $\bar{K} \approx 2{,}4$; $\bar{Z}_{сист} \approx 4{,}98$ *пас*; $\bar{t}_{сист} \approx 1{,}25$ *хв*; $\bar{t}_{черг} \approx 0{,}65$ *хв*.

**11.** Автозаправка обладнана 4 колонками. У середньому кожні 8 хвилин до АЗС під'їжджає 4 машини, кожна з яких обслуговується в середньому 5 *хв*. Знайти:

а) імовірність того, що черга буде складатися з однієї машини;

б) імовірність того, що черга буде складатися з двох машин;

в) середню кількість машин у черзі.

**Відповідь**: а) $q_5^* \approx 0{,}075$; б) $q_6^* \approx 0{,}047$; в) $\bar{r} \approx 0{,}53$.

**12.** У касі залізничного вокзалу розташовано декілька вікон з продажу квитків. Якщо пасажир надійшов до каси в момент, коли є хоча б одне вільне вікно, то він одразу починає обслуговуватись. Якщо в момент його приходу всі касири зайняті, то він встає в загальну чергу. Потік пасажирів найпростіший з інтенсивністю $\lambda = 1{,}7$ *пас/хв*. Тривалість обслуговування касиром одного покупця в середньому складає 2 *хв*. Час обслуговування одного пасажира розподілено за показниковим законом. Визначити мінімальну кількість касирів $m_{\min}$, при якій система буде ефективно працювати, і знайти її показники ефективності.

**Відповідь**: $m_{\min} = 4$; $q_0^* \approx 0{,}02$; $\bar{r} \approx 3{,}9$; $\bar{t}_{черг} \approx 2{,}3$ *хв*; $\bar{K} = 3{,}4$; $\bar{Z}_{сист} \approx 7{,}31$; $\bar{t}_{сист} \approx 4{,}3$ *хв*.

**13.** Залізничний митний пропускний пункт складається з трьох ліній огляда, для кожної з яких час перевірки одного вантажного потягу в середньому становить 2 *год*. Інтенсивність прибування потягів становить $\lambda = 1$ *потяг/год*. У випадку зайнятості всіх ліній огляду потяг, що прибув на митний пропускний пункт, очікує догляду. Вважаючи, що вхідний потік потягів є найпростішим, а час догляду одного вантажного потяга розподілено за показниковим законом, визначити абсолютну пропускну спроможність і середній час простою митного пропускного пункту.

**Відповідь**: $A = 1$ *потяг/год*, 7 *хв*.

**14.** Майстерня вагоноремонтного депо має три канали постачання на ремонт деякої техніки. Потік несправної техніки, яка прибуває в майстерню є найпростішим з інтенсивністю $\lambda = 2{,}5\ од/год$. Середній час ремонту однієї одиниці техніки має показниковий розподіл і дорівнює 45 *хв*. Припустимо, що іншої майстерні у вагоноремонтному депо нема, і, отже, черга перед майстернею може зростати практично необмежено. Знайти:

а) імовірність простою майстерні;

б) середню кількість заявок у черзі на обслуговування;

в) середню кількість заявок у системі;

г) середній час перебування заявки в черзі;

д) середній час перебування заявки в системі.

**Відповідь**: а) $q_0^* \approx 0{,}13$; б) $\bar{r} \approx 0{,}65$; в) $\bar{Z}_{сист} \approx 2{,}52$; г) $\bar{t}_{черг} \approx 0{,}26\ год$; д) $\bar{t}_{сист} \approx 1{,}01\ год$.

**15.** Локомотивне депо залізниці обслуговує 80 електровозів. За нормою міжремонтних періодів тягового рухомого складу електровоз потребує технічного обслуговування ТО-3 кожні 25 діб. Середня норма знаходження на технічному обслуговуванні ТО-3 дорівнює 12 *год*. Вважаючи вхідний потік локомотивів найпростішим, а час обслуговування одного локомотива розподіленим за показниковим законом, знайти:

а) таку мінімальну кількість $m_{\min}$ стійл депо, що ймовірність появи черги електровозів на технічне обслуговування ТО-3 буде менш ніж 0,2;

б) показники ефективності технічного обслуговування електровозів ТО-3 локомотивного депо для знайденого $m_{\min}$.

**Відповідь**: а) $m_{\min} = 3$; б) $q_0^* \approx 0{,}2$; $P_{черг} \approx 0{,}16$; $\bar{r} \approx 0{,}3$; $\bar{t}_{черг} \approx 2{,}4\ год$; $\bar{K} = 1{,}6$; $\bar{Z}_{сист} \approx 1{,}9$; $\bar{t}_{сист} \approx 14\ год$.

**16.** Локомотивне депо залізниці, що має 4 стійла, обслуговує 60 маневрових тепловозів ЧМЕ3. За нормою міжремонтних періодів тягового рухомого складу тепловоз ЧМЕ3 потребує технічного обслуговування ТО-3:

а) в експлуатації понад нормативний термін служби кожні 36 діб;

б) у межах нормативного терміну служби кожні 45 діб;

в) після виконання глибокої комплексної модернізації новим силовим обладнанням кожні 58 діб.

Середня норма знаходження на технічному обслуговуванні ТО-3 для маневрового тепловоза ЧМЕ3 дорівнює 1 добі. Вважаючи, що вхідний потік маневрових тепловозів є найпростішим, а час обслуговування одного тепловоза підкоряється показниковому закону розподілу, знайти показники ефективності технічного обслуговування ТО-3 маневрових тепловозів ЧМЕ3 локомотивного депо.

**Відповідь**: а) $q_0^* \approx 0{,}19$; імовірність черги $p_{черг} \approx 0{,}04$; $\bar{r} \approx 0{,}07$; $\bar{t}_{черг} \approx 1{,}1\ год$; $\overline{K} = 1{,}67$; $\overline{Z}_{сист} \approx 1{,}71$; $\bar{t}_{сист} \approx 25\ год$;

б) $q_0^* \approx 0{,}26$; імовірність черги $p_{черг} \approx 0{,}02$; $\bar{r} \approx 0{,}03$; $\bar{t}_{черг} \approx 0{,}5\ год$; $\overline{K} = 1{,}33$; $\overline{Z}_{сист} \approx 1{,}4$; $\bar{t}_{сист} \approx 24{,}2\ год$;

в) $q_0^* \approx 0{,}36$; імовірність черги $p_{черг} \approx 0{,}006$; $\bar{r} \approx 0{,}008$; $\bar{t}_{черг} \approx 0{,}19\ год$; $\overline{K} = 1{,}03$; $\overline{Z}_{сист} \approx 1{,}04$; $\bar{t}_{сист} \approx 24\ год$.

*Примітка.* Основні формули для знаходження показників ефективності багатоканальної СМО з необмеженою чергою подані у Додатку 4.

### *Багатоканальна СМО з обмеженою чергою*

**17.** Автозаправка залізниці обладнана двома колонками, а майданчик біля неї вміщує не більше чотирьох машин одночасно. Якщо він зайнятий, то чергова машина, яка прибула на станцію, направляється до іншої заправки. Потік машин, які прибувають на станцію, найпростіший з інтенсивністю $\lambda = 0{,}4\ машина/хв$. Час обслуговування однієї машини розподілено за показниковим законом і складає в середньому 4 *хв*. Знайти:

а) імовірність того, що обидві колонки вільні;

б) імовірність відмови $P_{відм}$;

в) відносну $Q$ та абсолютну $A$ пропускні спроможності;

г) середню кількість машин, які знаходяться під обслуговуванням;

д) середню кількість машин у черзі та середню кількість машин на станції;

е) середній час очікування машини в черзі та середній час перебування машини на автозаправці.

**Відповідь**: а) $q_0^* \approx 0{,}145$; б) $P_{відм} \approx 0{,}076$; в) $Q \approx 0{,}9$, $A \approx 0{,}4$;

г) $\overline{K} \approx 1{,}5$ *машини*; д) $\overline{r} \approx 0{,}97$ *машини*, $\overline{Z}_{сист} \approx 2{,}45$ *машии*; е) $\overline{t}_{черг} \approx 2{,}4$ *хв*, $\overline{t}_{сист} \approx 6{,}1$ *хв*.

**18.** Обслуговуванням пасажирів у буфеті залізничного вокзалу займаються два продавці. Інтенсивність обслуговування одним продавцем розподілено за показниковим законом і складає в середньому 3 пасажири за 5 *хв*. Потік пасажирів, що надходять у буфет, найпростіший з середнім інтервалом 1 *хв*. Якщо в момент приходу пасажира обидва продавці зайняті, то пасажир встає в чергу, яка не може перевищувати 5 покупців. Відвідувач, якому не вистачило місця в черзі, йде в інший буфет. Знайти:

а) імовірність відмови;

б) середній час очікування в черзі.

**Відповідь**: а) 0,07; б) 1,34 *хв*.

**19.** Загальна черга перед двома банкоматами, які стоять поруч, не перевищує трьох осіб («зайві» звертаються до інших банкоматів). Потік людей, які вирішили скористатися банкоматом, найпростіший з інтенсивністю $15$ *осіб/год*. Час обслуговування банкоматом однієї людини розподілено за показниковим законом і складає в середньому 3 *хв*. Знайти:

а) середній інтервал часу, коли один банкомат вільний;

б) імовірність того, що людині доведеться шукати інші банкомати.

**Відповідь**: а) $q_1 \approx 0{,}342$, $t \approx 21$ *хв*; б) 0,007.

**20.** Система обробки телеметричної інформації складається з однотипних спеціальних пристроїв обробки. Потік повідомлень, що надходить на вхід системи, є найпростішим з інтенсивністю $\lambda = 10$ *повідомл /хв*. Середній час обробки повідомлення одним пристроєм дорівнює 30 *с*. Система має блок пам'яті, у якому в очікуванні обробки може зберігатися до 7 повідомлень. Знайти мінімальну кількість спеціальних пристроїв обробки, що повинна мати система, щоб імовірність втрати повідомлення не перевищувала 0,01.

**Відповідь**: 6.

**21.** До обчислювального центру, що містить 2 однотипних обчислювальних модулі, надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю 40 заявок за *годину*. Час обробки однієї заявки одним модулем розподілено за показниковим законом і складає в середньому 1,2 *хв*. Зовнішній запам'ятовуючий пристрій може зберігати 3 заявки. Визначити:

а) імовірність виникнення черги;

б) імовірність відмови;

в) середню кількість зайнятих ліній зв'язку;

г) абсолютну пропускну спроможність;

д) середню кількість заявок у черзі на обслуговування; середню кількість заявок у системі;

е) середній час перебування заявки в черзі; середній час перебування заявки в системі.

**Відповідь**: а) $P_{черг} \approx 0{,}2$; б) $P_{відм} \approx 0{,}01$; в) $\overline{K} \approx 0{,}8$;

г) $A = 39{,}6$ *заявка/год*; д) $\bar{r} \approx 0{,}13$; $\overline{Z}_{сист} \approx 0{,}92$;

е) $\bar{t}_{черг} \approx 0{,}2$ *хв*; $\bar{t}_{сист} \approx 0{,}02$ *год* $= 1{,}38$ *хв*.

**22.** Вантажна станція має два вантажно-розвантажувальні фронти. Інтенсивність підходу потягів під розвантаження становить 0,4 потяга за добу. Середній час розвантаження одного потяга – 2 доби. Якщо в черзі під розвантаження знаходиться більше двох потягів, то потяг, що надходить до вантажної станції, переадресовується на інші станції залізничного вузла. Вважаючи потік потягів, що прибувають на станцію, найпростішим, а час обслуговування одного потяга розподіленим за показниковим законом, знайти:

а) імовірність того, що обидва вантажно-розвантажувальні фронти вільні;

б) середню кількість потягів у черзі під розвантаження;

в) середній час перебування потяга в черзі під розвантаження.

**Відповідь**: а) 0,43; б) $\bar{r} \approx 0,1$; в) $\bar{t}_{черг} \approx 6$ *год*.

*Примітка.* Основні формули для знаходження показників ефективності багатоканальної СМО з обмеженою чергою подані у Додатку 5.

### ***Багатоканальна СМО з відмовами***

**23.** Автозаправка обладнана 4 колонками. У середньому кожні 8 *хв* до АЗС під'їжджає 4 машини, середній час обслуговування кожної складає 5 *хв*. Знайти середню кількість зайнятих колонок, якщо розглядати дану АЗС як систему з відмовами.

**Відповідь**: $\overline{K} \approx 2,13$.

**24.** Телефонна станція залізниці має п'ять ліній зв'язку. Виклик, що надходить до станції в момент, коли всі лінії зайняті, отримує відмову. Потік викликів є пуасонівським з інтенсивністю $\lambda = 0,5$ *виклик/хв*. Час обслуговування розподілено за показниковим законом, а середня тривалість розмови складає 3 *хв*. Знайти:

а) імовірність відмови;

б) відносну та абсолютну пропускні спроможності.

**Відповідь**: а) $P_{відм} \approx 0,01$;

б) $Q = 0,99$ *виклик/хв*, $A = 0,5$ *виклик/хв*.

**25.** Сервіс-центр займається посередницькою діяльністю з продажу квитків, що здійснюється за трьома телефонними лініями зв'язку. До сервіс-центру в середньому поступає 80 викликів за годину. Середній час обслуговування кожного виклику складає 2 *хв*. Вважаючи, що вхідний потік заявок є найпростішим, а час обслуговування однієї заявки розподілено за показниковим законом, знайти:

а) імовірність того, що всі канали вільні;

б) імовірність відмови.

**Відповідь**: а) $\approx 0{,}1$; б) $\approx 0{,}3$.

**26.** АТС має 4 лінії зв'язку. Потік викликів є найпростішим з інтенсивністю $\lambda = 0{,}9$ *виклик/хв*. Середній час переговорів розподілений за показниковим законом і складає в середньому $t = 2{,}1$ *хв*. Знайти:

а) абсолютну та відносну пропускні спроможності АТС;

б) імовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті;

в) середню кількість зайнятих ліній зв'язку;

г) скільки ліній зв'язку повинна мати АТС, щоб імовірність відмови не перевищувала 0,01.

**Відповідь**: а) $A = 0{,}8$ *виклик/хв*, $Q = 0{,}9$ *виклик/хв*;

б) 0,08; в) 1,7; г) 6 ліній зв'язку.

**27.** АТС має 3 лінії зв'язку. Виклик, що надходить, коли всі лінії зайняті, отримує відмову. Потік викликів є найпростішим з інтенсивністю $\lambda = 0{,}5$ *виклик/хв*. Середній час переговорів розподілений за показниковим законом і складає в середньому $t = 3$ *хв*. Знайти:

а) абсолютну та відносну пропускні спроможності АТС;

б) імовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті;

в) середню кількість зайнятих ліній зв'язку;

г) при якій найменшій кількості ліній АТС відсоток вимог, що отримує відмову, менш ніж 5 %?

**Відповідь**: а) $Q \approx 0{,}87$ *виклик/хв*, $A \approx 0{,}43$ *виклик/хв*;

б) $q_3^* \approx 0{,}13$, $P_{відм} \approx 0{,}13$; в) $\overline{K} \approx 1{,}3$; г) $m_{\min} = 4$.

**28.** До ВЦ, що складається з декількох однотипних обчислювальних модулів, надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю 40 *заявка/год*. Час розв'язку розподілено за показниковим законом і дорівнює в середньому 45 *с*. Скільки обчислювальних модулів повинно бути, щоб імовірність відмови не перевищувала 0,01?

**Відповідь**: 4 модулі.

**29.** До ремонтної майстерні надходить найпростіший потік несправних приладів з інтенсивністю 4 прилади за годину. Час ремонту одного приладу розподілено за показниковим законом і дорівнює в середньому 30 *хв*. Одночасно майстерня може налагоджувати 5 несправних приладів. Визначити, скільки приладів одночасно повинна налагоджувати майстерня, щоб імовірність відмови в ремонті приладу не перевищувала 0,01?

**Відповідь**: 7 приладів.

**30.** Пасажири, що звертаються до довідкового бюро, утворюють найпростіший потік з параметром $\lambda$ *пас/год*. Кожний пасажир обслуговується одним інформатором протягом випадкового часу, що має показниковий розподіл з параметром $\mu$ *пас/год*. Якщо в момент появи пасажира в довідковому бюро немає вільного інформатора, то пасажир покидає довідкове бюро. Визначити, скільки необхідно мати інформаторів у довідковому бюро, щоб імовірність відмови пасажиру в обслуговуванні була менш ніж 0,02, якщо $\lambda = \mu$.

**Відповідь**: $m_{\min} = 4$.

**31.** Майстерня з гарантійного ремонту обладнання локомотивного депо приймає замовлення на ремонт по одному з телефонних номерів. Середня кількість замовлень, що надходять протягом години, дорівнює 25, а середній час оформлення замовлення − 4 *хв*. Вважаючи вхідний потік замовлень на ремонт обладнання найпростішим, а час оформлення одного замовлення розподілено за показниковим законом, визначити показники ефективності СМО. Як вони зміняться, якщо підключити додатково ще один телефонний номер?

**Відповідь**:

кількість каналів $m = 1$: $p_{відм} = 0{,}63; q_0^* = 0{,}37$;

кількість каналів $m = 2$: $p_{відм} = 0{,}34; q_0^* = 0{,}25; \overline{K} = 1{,}1$.

**32.** Скільки необхідно мати місць на станції технічного обслуговування автомобілів, щоб із імовірністю не менш ніж 0,9 автомобіля, який потребує ремонту, забезпечувався місцем для ремонту? Потік заявок вважати найпростішим, а час обслуговування однієї машини розподіленим за показниковим законом. Середній час ремонту одного автомобіля складає добу. Протягом доби на станцію поступають у середньому 4 машини.

**Відповідь**: не менш ніж 7 місць.

**33.** Локомотивне депо залізниці обслуговує електровози ЧС2 та ЧС4. Скільки необхідно мати стійл у локомотивному депо, щоб із імовірністю не менш ніж 0,9 електровоза, незалежно від виду та серії, який потребує технічного огляду ТО-3, забезпечувався стійлом для ремонту, якщо вхідний потік заявок є найпростішим з інтенсивністю $\lambda = 3\ електровоз/доб$, а час обслуговування одного електровоза розподілено за показниковим законом і складає в середньому 12 *год*?

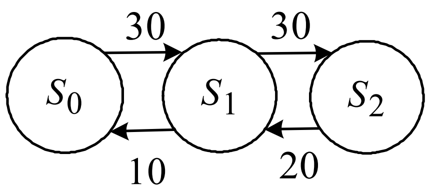
**Відповідь**: не менше за 4.

*Примітка.* Основні формули для знаходження показників ефективності багатоканальної СМО з ВІДМОВАМИ подані у Додатку 6.

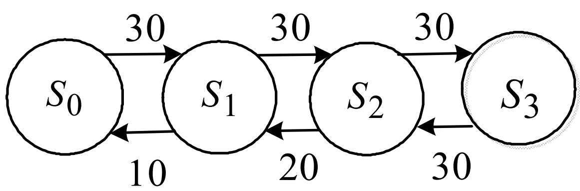
### *Замкнені СМО*

**34.** За даними розміченими графами знайти фінальні ймовірності станів системи:

а)




б)




**Відповідь**: а) $\vec{Q}^* = \left(\frac{2}{17};\frac{6}{17};\frac{9}{17}\right)$; б) $\vec{Q}^* = \left(\frac{1}{13};\frac{3}{13};\frac{9}{26};\frac{9}{26}\right)$.

**35**. Майстер обслуговує чотири прилади, які час від часу вимагають налагодження. Кожний прилад відмовляє з інтенсивністю $\lambda = 0{,}5\ \textit{відмова}/\textit{год}$. Якщо в момент відмови майстер вільний, то він негайно приступає до налагодження, якщо ні, то прилад стає в чергу для налагодження. Середній час налагодження складає 0,8 *год*. Усі потоки (відмов і ремонтів) вважаються найпростішими. Знайти:

а) фінальні ймовірності станів;

б) абсолютну пропускну спроможність;

в) середній відносний час простою майстра;

г) середню кількість несправних приладів;

д) середню кількість приладів у черзі.

**Відповідь**: а) $\vec{Q}^* = \dfrac{1}{4169}(625;\, 1000;\, 1200;\, 960;\, 384)$;

б) $A \approx 1{,}062$; в) $P_{прост} \approx q_0^* \approx 0{,}15$; г) $\approx 1{,}87$; д) $\bar{r} \approx 1{,}02$.

**36.** Два майстри обслуговують чотири верстати, які час від часу вимагають налагодження. Кожний верстат зупиняється з інтенсивністю $\lambda = 0{,}5\ \textit{відмова}/\textit{год}$. Середній час налагодження складає 15 *хв*. Усі потоки (зупинок і відновлень) вважаються найпростішими. Знайти:

а) фінальний розподіл імовірностей станів;

б) середній час простою;

в) середню кількість верстатів, що обслуговуються,

якщо:

1) кожен верстат може обслуговуватись тільки одним майстром;

2) кожен верстат обов'язково обслуговується двома майстрами, причому інтенсивність обслуговування подвоюється.

**Відповідь**:

1) а) $q_0^* = \dfrac{512}{891}, q_1^* = \dfrac{256}{891}, q_2^* = \dfrac{32}{297}, q_3^* = \dfrac{8}{297}, q_4^* = \dfrac{1}{297}$;

б) $P_{прост} = q_0^* \approx 0{,}57$, 57 % часу; в) $\approx 0{,}43$;

2) а) $q_0^* = \dfrac{8192}{10675}, q_1^* = \dfrac{2048}{10675}, q_2^* = \dfrac{384}{10675}, q_3^* = \dfrac{48}{10675}, q_4^* = \dfrac{3}{10675}$;

б) $P_{прост} = q_0^* \approx 0{,}77$, 77 % часу; в) $\approx 0{,}23$.

## Бібліографічний список

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Текст] / И.Л. Акулич. – М.: Лань, 2011. – 352 с.

2. Барвінський, А.Ф. Математичне програмування [Текст]: навч. посібник / А.Ф. Барвінський, І.Я. Олексів, З.І. Крупка [та ін.]. – Львів: Національний університет «Львівська політехніка» (Інформаційно-видавничий центр «ІНТЕЛЕКТ+» Інституту післядипломної освіти); «Інтелект-Захід», 2004. – 448 с.

3. Вагнер, З.Г. Основы исследования операций [Текст] / З.Г. Вагнер. – М.: Мир, 1972. – Т.1. – 336 с.

4. Вагнер, З.Г. Основы исследования операций [Текст]. – М.: Мир, 1972. – Т.2. – 488 с.

5. Вагнер, З.Г. Основы исследования операций [Текст]. – М.: Мир, 1973. – Т.3. – 503 с.

6. Васильев, Ф.П. Линейное программирование [Текст] / Ф.П. Васильев, А.Ю. Иваницкий. – М.: Изд-во «Факториал», 1998. – 176 с.

7. Вентцель, Е.С. Исследование операций [Текст] / Е.С. Вентцель. – М.: Советское радио, 1972. – 552 с.

8. Вентцель, Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология [Текст] / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1988. – 208 с.

9. Васильев, Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач [Текст] / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

10. Вітлінський, В.В. Математичне програмування [Текст] / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко. – К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.

11. Глушик М.М., Математичне програмування [Текст]: навч. посібник / М.М. Глушик, І.М. Копич, О.С. Пенцак, В.М. Сороківський. – Львів: Вид-во ЛКА, 2004. – 240 с.

12. Ермольев, Ю.М. Методы стохастического программирования [Текст] / Ю.М. Ермольев. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976.

13. Зуховицкий, С.И. Линейное и выпуклое программирование [Текст] / С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М.: Наука, 1967. – 460 с.

14. Калихман, И.Л. Динамическое программирование в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие / И.Л. Калихман, М.А. Войтенко. – М.: Высш. школа, 1979. – 125 с.

15. Конюховский, П.В. Математические методы исследования операций в экономике [Текст] / П.В. Конюховский. – СПб.: Питер, 2000. – 208 с.

16. Косоруков, О.А. Исследование операций [Текст]: учебник / О.А. Косоруков, А.В. Мищенко; под общ. ред. д.э.н., проф. Н.П. Тихомирова. – М: Издательство «Экзамен», 2003. – 448 с.

17. Костевич, Л.С. Математическое программирование: информационные технологии оптимальных решений [Текст]: учеб. пособие / Л.С. Костевич. – Мн.: Новое знание, 2003. – 424 с.

18. Кремер, Н.Ш. Исследование операций в экономике [Текст]: учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2005. – 407 с.

19. Кузнецов, Ю.Н. Математическое программирование [Текст] / Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко. – М.: Высшая школа, 1980. – 300 с.

20. Кузнецов, Ю.Н. Руководство к решению задач по математическому программированию [Текст] / Ю.Н. Кузнецов, Н.И. Холод, Л.С. Костевич. – Мн.: Вышэйшая школа, 1978. – 256 с.

21. Кутковецький, В.Я. Дослідження операцій [Текст]: підручник / В.Я. Кутковецький. – Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. Петра Могили, 2007. – Т.2. – 272 с.

22. Лавренчук, В.П. Моделі та методи дослідження операцій [Текст]: навч. посібник / В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан, Г.С. Пасічник, М.І. Букатар. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2012. – 412 с.

23. Ляшенко, И.Н. Линейное и нелинейное программирование [Текст] / И.Н. Ляшенко, Е.А. Карагодова, Н.В. Черникова, Н З. Шор. – М.: Высшая школа, 1975. – 372 с.

24. Маркова, Н.А. Математическое программирование [Текст]: учебно-метод. пособие / Н.А. Маркова, А.Ю. Чириков. – Донецк: «Юго-Восток, Лтд», 2006. – 268 с.

25. Палий, И.А. Линейное программирование [Текст]: учеб. пособие / И.А. Палий. – М.: Эксмо, 2008. – 256 с.

26. Роман, Л.Л. Дослідження операцій [Текст]: курс лекцій / Л.Л. Роман. – Львів: Видавництво Тараса Сороки, 2008. – 272 с.

27. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций [Текст]: пер. с англ.; 7-е изд. / Хемди А. Таха. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. – 912 с.

# Додаток 1

Таблиця значень функції $P(k,\lambda)=\dfrac{\lambda^{k}}{k!}\cdot e^{-\lambda}$

| $k$ | $\lambda$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
| 0 | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670320 | 0,65310 | 0,548812 | 0,496585 | 0,449329 | 0,406570 |
| 1 | 090484 | 163746 | 222245 | 268128 | 303265 | 329287 | 347610 | 359463 | 365913 |
| 2 | 004524 | 016375 | 033337 | 353626 | 065816 | 098786 | 121663 | 143785 | 164661 |
| 3 | 000151 | 001092 | 003334 | 007150 | 012636 | 019757 | 028388 | 038343 | 049398 |
| 4 | 000004 | 000055 | 000250 | 000715 | 001580 | 002764 | 004968 | 007669 | 011115 |
| 5 | | 000002 | 000015 | 000057 | 000158 | 000356 | 000696 | 001227 | 002001 |
| 6 | | | 000001 | 000004 | 000013 | 000036 | 000081 | 000164 | 000300 |
| 7 | | | | | 000001 | 000003 | 000008 | 000019 | 000039 |
| 8 | | | | | | | 000001 | 000002 | 000004 |

| $k$ | $\lambda$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 0,367879 | 0,135335 | 0,049787 | 0,018316 | 0,006738 | 0,002479 | 0,000912 | 0,000335 | 0,000123 |
| 1 | 367879 | 270671 | 149361 | 073263 | 033690 | 014873 | 006383 | 002684 | 001111 |
| 2 | 183940 | 270671 | 224042 | 146525 | 084224 | 044618 | 022341 | 010735 | 004998 |
| 3 | 061313 | 180447 | 224042 | 195367 | 140374 | 089235 | 052129 | 028626 | 014994 |
| 4 | 015328 | 090224 | 168031 | 195367 | 175467 | 133853 | 091226 | 057252 | 033737 |
| 5 | 003066 | 036089 | 100819 | 156293 | 175467 | 160623 | 127717 | 091604 | 060727 |
| 6 | 000511 | 012030 | 050409 | 104196 | 146223 | 160623 | 149003 | 122138 | 091090 |
| 7 | 000073 | 003437 | 021604 | 059540 | 104445 | 137677 | 149003 | 139587 | 117126 |
| 8 | 000009 | 000859 | 008102 | 029770 | 065278 | 103258 | 130377 | 138587 | 131756 |
| 9 | 000001 | 000191 | 002701 | 013231 | 036266 | 068838 | 101405 | 124077 | 131756 |
| 10 | | 000038 | 000810 | 005292 | 018138 | 041303 | 070983 | 099262 | 118580 |
| 11 | | 000007 | 000221 | 001295 | 008242 | 022529 | 045171 | 072190 | 097020 |
| 12 | | 000001 | 000055 | 000642 | 003434 | 011264 | 026350 | 048127 | 072765 |
| 13 | | | 000013 | 000197 | 001321 | 005199 | 014188 | 029616 | 050376 |
| 14 | | | 000003 | 000056 | 000472 | 002228 | 007094 | 016924 | 032384 |
| 15 | | | 000001 | 000015 | 000157 | 000891 | 003311 | 009026 | 019431 |
| 16 | | | | 000004 | 000049 | 000334 | 001448 | 004513 | 010930 |
| 17 | | | | 000001 | 000014 | 000118 | 000596 | 002124 | 005786 |
| 18 | | | | | 000004 | 000039 | 000232 | 000944 | 002893 |
| 19 | | | | | 000001 | 000012 | 000085 | 000397 | 001370 |
| 20 | | | | | | 000004 | 000030 | 000159 | 000617 |
| 21 | | | | | | 000001 | 000010 | 000061 | 000264 |
| 22 | | | | | | | 000003 | 000022 | 000108 |
| 23 | | | | | | | 000001 | 000008 | 000042 |
| 24 | | | | | | | | 000003 | 000016 |
| 25 | | | | | | | | 000001 | 000006 |
| 26 | | | | | | | | | 000002 |
| 27 | | | | | | | | | 000001 |

# Додаток 2

Показники ефективності одноканальної СМО

<table>
<tr><th rowspan="2">Показник</th><th colspan="2">Формула</th></tr>
<tr><th>Одноканальна СМО з необмеженою чергою</th><th>Одноканальна СМО з обмеженою чергою довжиною $n$</th></tr>
<tr><td>Коефіцієнт завантаження системи</td><td>$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$</td><td>$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \neq 1$</td></tr>
<tr><td>Фінальні ймовірності станів</td><td>$q_0^* = 1 - \rho,$<br>$q_k^* = \rho^k \cdot q_0^* =$<br>$= \rho^k \cdot (1 - \rho),$<br>$k = 1,2,3,\ldots$</td><td>$q_k^* = \rho^k \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}},$<br>$k = \overline{0, n+1}$</td></tr>
<tr><td>Відносна пропускна спроможність</td><td>$Q = 1$</td><td>$Q = 1 - \rho^{n+1} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}}$</td></tr>
<tr><td>Абсолютна пропускна спроможність</td><td>$A = \lambda \cdot Q = \lambda$</td><td>$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \rho^{n+1} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}}\right)$</td></tr>
<tr><td>Імовірність відмови</td><td>$P_{відм} = 1 - Q = 0$</td><td>$P_{відм} = \rho^{n+1} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}}$</td></tr>
<tr><td>Середня кількість заявок у системі</td><td>$\overline{Z}_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho}$</td><td>$\overline{Z}_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho} \times$<br>$\times \frac{1-(n+2)\cdot\rho^{n+1} + (n+1)\cdot\rho^{n+2}}{1-\rho^{n+2}}$</td></tr>
<tr><td>Середня кількість заявок у черзі</td><td>$\overline{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$</td><td>$\overline{r} = \frac{\rho^2 \cdot \left(1 - \rho^n \cdot (n+1-n\rho)\right)}{(1-\rho)\cdot\left(1-\rho^{n+2}\right)}$</td></tr>
<tr><td>Середній час перебування заявки в системі</td><td>$\overline{t}_{сист} = \frac{\overline{Z}_{сист}}{\lambda} =$<br>$= \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$</td><td>$\overline{t}_{сист} = \frac{\overline{r}}{\lambda} + \frac{Q}{\mu}$</td></tr>
</table>

Продовження дод. 2

<table>
<tr><td rowspan="2">Показник</td><td colspan="2">Формула</td></tr>
<tr><td>Одноканальна СМО з необмеженою чергою</td><td>Одноканальна СМО з обмеженою чергою довжиною $n$</td></tr>
<tr><td>Середній час перебування заявки в черзі</td><td>$\bar{t}_{черг} = \dfrac{\rho^2}{\lambda \cdot (1-\rho)}$</td><td>$\bar{t}_{черг} = \dfrac{\bar{r}}{\lambda}$</td></tr>
<tr><td>Середня кількість заявок, що обслуговуються</td><td>–</td><td>$\bar{l}_{обсл} = \bar{Z}_{сист} - \bar{r}$</td></tr>
</table>

**Додаток 3**

Показники ефективності одноканальної СМО з відмовами

| Показник | Формула |
|---|---|
| Фінальні ймовірності станів | $q_0^* = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$, $q_1^* = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ |
| Імовірність відмови | $P_{відм} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ |
| Відносна пропускна спроможність | $Q = q_0^* = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ |
| Абсолютна пропускна спроможність | $A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}$ |

**Додаток 4**

Показники ефективності багатоканальної СМО
з необмеженою чергою

| Показник | Формула |
|---|---|
| Коефіцієнт завантаження системи | $\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \rho < m, m \ge 2$, де $m$ – кількість каналів |
| Фінальні ймовірності станів | $q_0^* = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^{m+1}}{(m-\rho)\cdot m!}\right]^{-1}$, $q_k^* = \frac{\rho^k}{k!} \cdot q_0^*, k = 0,1,...,m$, $q_{m+k}^* = \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right)^k \cdot q_0^*, k = 1,2,...$ |
| Імовірність відмови | $P_{відм} = 0$ |
| Відносна пропускна спроможність | $Q = 1 - P_{відм} = 1$ |
| Абсолютна пропускна спроможність | $A = Q \cdot \lambda = \lambda$ |
| Імовірність утворення черги | $P_{черг} = \frac{\rho^{m+1}}{m!(m-\rho)} \cdot q_0^*$ |
| Середня кількість заявок у черзі | $\bar{r} = \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!} \cdot \frac{1}{(m-\rho)^2} \cdot q_0^*$ |
| Середня кількість зайнятих каналів | $\overline{K} = \rho$ |
| Середня кількість заявок у системі | $\overline{Z}_{сист} = \bar{r} + \overline{K} = \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(m-\rho)^2} \cdot q_0^* + \rho$ |
| Середній час перебування заявки в черзі | $\bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(m-\rho)^2 \cdot \lambda} \cdot q_0^*$ |
| Середній час перебування заявки в системі | $\bar{t}_{сист} = \frac{\overline{Z}_{сист}}{\lambda} = \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(m-\rho)^2 \cdot \lambda} \cdot q_0^* + \frac{\rho}{\lambda}$ |

**Додаток 5**

Показники ефективності багатоканальної СМО
з обмеженою чергою довжиною $n$

| Показник | Формула |
|---|---|
| Коефіцієнт завантаження системи | $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ |
| Фінальні ймовірності станів | $q_0^* = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{\rho}{1!} + \dfrac{\rho^2}{2!} + \ldots + \dfrac{\rho^m}{m!} + \dfrac{\rho^m}{m!} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{\rho}{m}\right) - \left(\dfrac{\rho}{m}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{\rho}{m}\right)}\right)^{-1}, & \dfrac{\rho}{m} \neq 1; \\ \left(1 + \dfrac{\rho}{1!} + \dfrac{\rho^2}{2!} + \ldots + \dfrac{\rho^m}{m!} + \dfrac{\rho^m \cdot n}{m!}\right)^{-1}, & \dfrac{\rho}{m} = 1; \end{cases}$<br>$q_1^* = \dfrac{\rho}{1!} \cdot q_0^*; \quad q_2^* = \dfrac{\rho^2}{2!} \cdot q_0^*; \quad q_3^* = \dfrac{\rho^3}{3!} \cdot q_0^*;$<br>…;<br>$q_m^* = \dfrac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^*; \quad q_{m+1}^* = \dfrac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot q_0^*; \quad q_{m+2}^* = \dfrac{\rho^{m+2}}{m^2 \cdot m!} \cdot q_0^*;$<br>...;<br>$q_{m+n}^* = \dfrac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q_0^*,$<br>$m \geq 2,$ де $m$ − кількість каналів |
| Імовірність відмови | $P_{відм} = q_{m+n}^* = \dfrac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q_0^*$ |
| Відносна пропускна спромож-ність | $Q = 1 - P_{відм} = 1 - \dfrac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q_0^*$ |

Продовження дод. 5

| Показник | Формула |
|---|---|
| Імовірність утворення черги | $P_{черг} = \frac{\rho^m}{m!} \cdot \frac{1-\left(\frac{\rho}{m}\right)^n}{1-\frac{\rho}{m}} \cdot q_0^*$ |
| Абсолютна пропускна спромож-ність | $A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q_0^*\right)$ |
| Середня кількість заявок у черзі | $\bar{r} = \begin{cases} \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot \frac{1-t^n \cdot (n+1-nt)}{(1-t)^2} \cdot q_0^*, t = \frac{\rho}{m} \neq 1; \\ \frac{\rho^{m+1} \cdot n}{m \cdot m!} \cdot \left(\frac{1+n}{2}\right) \cdot q_0^*, \frac{\rho}{m} = 1 \end{cases}$ |
| Середня кількість зайнятих каналів | $\overline{K} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left(1 - \frac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q_0^*\right)$ |
| Середня кількість заявок у системі | $\overline{Z}_{сист} = \overline{K} + \bar{r}$ |
| Середній час перебування заявки в черзі | $\bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot \frac{1-t^n \cdot (n+1-nt)}{(1-t)^2} \cdot q_0^*, t = \frac{\rho}{m} \neq 1; \\ \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho^{m+1} \cdot n}{m \cdot m!} \cdot \left(\frac{1+n}{2}\right) \cdot q_0^*, \frac{\rho}{m} = 1 \end{cases}$ |
| Середній час перебування заявки в системі | $\bar{t}_{сист} = \frac{\overline{Z}_{сист}}{\lambda}$ |

**Додаток 6**

Показники ефективності багатоканальної СМО з відмовами

| Показник | Формула |
|---|---|
| Коефіцієнт завантаження системи | $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ |
| Фінальні ймовірності станів | $q_0^* = \left(1 + \dfrac{\rho}{1!} + \dfrac{\rho^2}{2!} + \dfrac{\rho^3}{3!} + \ldots + \dfrac{\rho^m}{m!}\right)^{-1}$, $q_k^* = \dfrac{\rho^k}{k!} \cdot q_0^*, k = \overline{1,m}$ |
| Імовірність відмови | $P_{відм} = q_m^* = \dfrac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^*$ |
| Відносна пропускна спроможність | $Q = 1 - P_{відм} = 1 - \dfrac{\rho^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot q_0^*$ |
| Абсолютна пропускна спроможність | $A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \dfrac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^*\right)$ |
| Середня кількість зайнятих каналів | $\overline{K} = \overline{Z}_{сист} = \rho \cdot \left(1 - \dfrac{\rho^m}{m!} \cdot q_0^*\right)$ |

## Предметний покажчик

Підручник

**Панченко** Наталія Георгіївна,
**Резуненко** Марина Євгенівна

# ЕЛЕМЕНТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ В УПРАВЛІННІ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Частина II

Відповідальний за випуск Панченко Н.Г.

Редактор Ібрагімова Н.В.

---

Підписано до друку 11.11.14 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 9,5. Тираж 300. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.