ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра „Вища математика”

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РЯДИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до виконання контрольних робіт з дисципліни

„*ВИЩА МАТЕМАТИКА*”

Харків – 2009

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри „Вища математика” 28 січня 2008 р.,

протокол № 8.

Методичні вказівки містять визначення, формули і рекомендації, за допомогою яких студент може опанувати дві теми "Диференціальні рівняння" і "Ряди" та виконати контрольну роботу з цих тем, а також достатню кількість варіантів завдань для контрольної роботи.

Методичні вказівки призначені для організації самостійної роботи студентів економічних спеціальностей заочної та денної форми навчання, але, при певних зауваженнях викладача, їх можна застосовувати і студентам інших спеціальностей заочної форми навчання.

Укладачі:

доценти Ю.О. Акімова,
А.О. Дрогаченко, О.А. Осмаєв

Рецензент

доц. М.Є. Резуненко

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РЯДИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до виконання контрольних робіт
з дисципліни

„*ВИЩА МАТЕМАТИКА*"

Відповідальний за випуск Акімова Ю.О.

Редактор Буранова Н.В.

Підписано до друку 31.03.08 р.
Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 3,0. Обл.-вид.арк.3,25.
Замовлення № Тираж 300 Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7

В С Т У П

Методичні вказівки призначені для вивчення двох важливих розділів курсу вищої математики, а саме: "Диференціальні рівняння" (завдання № 1 – 5) і "Ряди" (завдання № 6 – 9).

Методичні вказівки складаються з трьох частин:

перша містить достатню кількість визначень, понять і формул за цими темами;

друга – зразок виконання контрольної роботи;

третя – варіанти завдань для контрольної роботи.

Зауважимо, що поряд з кожним параграфом у дужках позначені номери завдань, для розв'язання яких застосовуються визначення і формули саме цього параграфа, але деякі задачі за вказівкою викладача можна не виконувати.

Вважаємо, що дані вказівки допоможуть студентам заочної форми навчання опанувати матеріал цих розділів.

Ч А С Т И Н А П Е Р Ш А

РОЗДІЛ І ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

§ 1 Основні поняття

Визначення 1 Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, яке містить у собі незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ і похідні невідомої функції y різних порядків і позначається так:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$ – загальна форма запису,

або

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$$ – нормальна форма.

Визначення 2 Найвищий порядок похідної, яка присутня у рівнянні, називається *порядком* диференціального рівняння.

Наприклад, $y'' - 5y' + 6y = 0$ – диференціальне рівняння другого порядку.

Визначення 3 Функція $y = y(x)$, яка при підстановці в диференціальне рівняння перетворює його у тотожність, називається *розв'язком* диференціального рівняння.

§ 2 Диференціальні рівняння першого порядку

(завдання № 1, 2)

Рівняння першого порядку можна записати у трьох формах:

I. $F(x, y, y') = 0$ – загальна форма.

II. $y' = f(x, y)$ – нормальна форма.

III. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ – диференціальне рівняння, записане за допомогою диференціалів аргументу dx і невідомої функції $dy = y'dx$.

Форми запису диференціального рівняння еквівалентні між собою.

Диференціальне рівняння першого порядку має нескінченну множину розв'язків, які залежать від x і довільної сталої величини C

$$y = y(x, C).$$

Таку множину розв'язків називають *загальним розв'язком* диференціального рівняння першого порядку.

Якщо довільна стала C набуває деякого конкретного значення $C = C_0$, тоді розв'язок $y = y(x, C_0)$ називається *частинним розв'язком* диференціального рівняння першого порядку.

Для отримання частинного розв'язку із загального потрібно задати так звану початкову умову, тобто задати значення шуканої функції при відомому значенні аргументу

$$y\big|_{x = x_0} = y_0.$$

Задача відшукання частинного розв'язку диференціального рівняння першого порядку при заданій початковій умові називається *задачею Коші* для диференціального рівняння першого порядку

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}.$$

2.1 Деякі типи диференціальних рівнянь першого порядку

І Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

Визначення Диференціальне рівняння у формі ІІІ називається рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо коефіцієнти при dx і dy, тобто функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ можна записати у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить лише від x, а друга – тільки від y

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0;$$

$$M(x, y) = X_1(x)\, Y_1(y)\ ;\ N(x, y) = X_2(x)\, Y_2(y).$$

Якщо поділити обидві частини рівняння

$$X_1(x)\, Y_1(y)dx + X_2(x)\, Y_2(y)dy = 0$$

на добуток $Y_1(y)\, X_2(x)$, рівняння перетворюється в диференціальне рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx + \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy = 0.$$

Останнє рівняння можна проінтегрувати, і в результаті отримаємо розв'язок

$$\int \frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx + \int \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy = C$$

Зауваження Диференціальне рівняння, записане у нормальній формі $y' = f(x, y)$, буде рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо його праву частину можна записати у вигляді добутку $f(x, y) = X(x)\, Y(y)$.

ІІ Однорідне диференціальне рівняння першого порядку

Визначення 1 Функція $f(x, y)$ називається *однорідною **k**-го порядку*, якщо для неї справедлива тотожність

$$f(tx, ty) \equiv t^k \ f(x, y).$$

Наприклад, $f(x, y) = x^2 + xy$ – однорідна функція другого порядку.

Якщо тотожність має вигляд

$$f(tx, ty) \equiv t^0 \ f(x, y) = f(x, y),$$

тоді функція $f(x, y)$ виявляється однорідною функцією нульового порядку.

Визначення 2 Диференціальне рівняння першого порядку, записане в нормальній формі $y' = f(x, y)$, називається *однорідним*, якщо його права частина $f(x, y)$ виявляється однорідною функцією *нульового* порядку

$$y' = f(x, y) \ \left(f(tx, ty) \equiv f(x, y) \right).$$

Якщо увести нову невідому функцію U за допомогою заміни

$$U = \frac{y}{x}, \ (y = Ux \,;\, y' = U'x + U),$$

тоді диференціальне рівняння відносно нової невідомої функції U буде рівнянням з відокремлюваними змінними.

III Лінійне диференціальне рівняння першого порядку

Визначення Диференціальне рівняння називається *лінійним*, якщо воно має вигляд

$$y' + p(x)\, y = f(x).$$

Розв'язок лінійного рівняння відшукують у вигляді добутку двох невідомих функцій

$$y = U\,V \quad (y' = U'\,V + U\,V').$$

Якщо підставити ці вирази у рівняння

$$U'\,V + U\,V' + p(x)\,U\,V = f(x);$$

$$U'\,V + U\left[V' + p(x)\,V\right] = f(x)$$

і підібрати невідому функцію $V(x)$ так, щоб вираз в квадратних дужках дорівнював нулю, розв'язання лінійного рівняння зведеться до розв'язання системи двох диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними

$$\begin{aligned} &U\left[V' + p(x)\,V\right] = 0 \\ &U'\,V = f(x) \end{aligned}.$$

§ 3 Диференціальні рівняння другого порядку

(завдання № 3, 4)

3.1 Задача Коші

Диференціальне рівняння другого порядку можна записати у двох формах

$F(x, y, y', y'') = 0$ – загальна форма,

$y'' = f(x, y, y')$ – нормальна форма.

Загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку залежить від двох довільних сталих величин

$$y = y(x, C_1, C_2),$$

і тому для отримання частинного розв'язку потрібно задати дві початкові умови

$$\begin{aligned} &y\big|_{x = x_0} = \alpha \\ &y'\big|_{x = x_0} = \beta \end{aligned}.$$

Задача Коші для диференціального рівняння другого порядку формулюється так:

знайти частинний розв'язок диференціального рівняння при заданих початкових умовах

$$\begin{aligned} & F(x, y, y', y'') = 0 \\ & y\big|_{x = x_0} = \alpha \\ & y'\big|_{x = x_0} = \beta \end{aligned}.$$

3.2 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Визначення Диференціальне рівняння другого порядку називається *лінійним*, якщо має вигляд

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x),$$

де $p(x), q(x), f(x)$ – задані функції.

Якщо $f(x) = 0$, диференціальне рівняння має вигляд

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

і називається *лінійним* ***однорідним*** *диференціальним рівнянням* (ЛОДР).

Якщо $f(x) \neq 0$*,* диференціальне рівняння

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x)$$

називається *лінійним* ***неоднорідним*** *диференціальним рівнянням* (ЛНДР).

Теореми про загальний розв'язок ЛОДР і ЛНДР

Теорема 1

Якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – два непропорційних частинних розв'язки ЛОДР $\left(\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq const \right)$

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \tag{1.1}$$

і якщо C_1 і C_2 – дві довільні сталі величини, тоді функція

$$y_{ЗО} = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) \tag{1.2}$$

виявляється загальним розв'язком ЛОДР (1.1).

Теорема 2

Якщо $y_{ЗО}(x)$ – загальний розв'язок ЛОДР

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

і якщо $\widetilde{y}_{ЧН}(x)$ – деякий частинний розв'язок ЛНДР

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x), \tag{1.3}$$

тоді функція

$$y_{ЗН}(x) = y_{ЗО}(x) + \widetilde{y}_{ЧН}(x) \tag{1.4}$$

виявляється загальним розв'язком ЛНДР (1.3).

3.3 ЛОДР другого порядку із сталими коефіцієнтами

$$y'' + p\, y' + q\, y = 0, \tag{1.5}$$

де p, q – сталі.

Загальний розв'язок таких рівнянь має вигляд формули (1.2) і його можна побудувати за правилом:

складаємо для ЛОДР (1.5) квадратне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0, \tag{1.6}$$

яке називається *характеристичним рівнянням* диференціального рівняння (1.5), і розв'язуємо його.

Відомо, що розв'язок квадратного рівняння залежить від дискримінанта: $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$.

Тому розглядаємо три випадки.

1 $D > 0$. Характеристичне рівняння (1.6) має два дійсних кореня $k_1 \neq k_2$.

В цьому випадку необхідні для формули (1.2) (теорема 1) частинні розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ будуть такими:

$$y_1(x) = e^{k_1 x}, \quad y_2(x) = e^{k_2 x}$$

і загальний розв'язок рівняння (1.5) має вигляд

$$y_{ЗО} = C_1\, e^{k_1 x} + C_2\, e^{k_2 x}. \tag{1.7}$$

2 $D = 0$. Характеристичне рівняння (1.6) має два дійсних, але рівних кореня $k_1 = k_2 = k = -\frac{p}{2}$.

В цьому випадку $y_1(x)$ і $y_2(x)$ будуються так:

$$y_1(x) = e^{k x}, \qquad y_2(x) = x\, e^{k x}$$

і загальний розв'язок ЛОДР (1.5) має вигляд

$$y_{ЗО} = C_1\, e^{k x} + C_2\, x\, e^{k x}. \tag{1.8}$$

3 $D < 0$. Характеристичне рівняння (1.6) не має дійсних коренів, $y_1(x)$ і $y_2(x)$ будуються за таким правилом:
вводимо позначення

$$-\frac{p}{2} = a; \quad \sqrt{-D} = b,$$

тоді

$$y_1(x) = e^{ax} \cos bx, \qquad y_2(x) = e^{ax} \sin bx$$

і загальний розв'язок ЛОДР (1.5) записується так:

$$y_{ЗО} = C_1\, e^{ax} \cos bx + C_2\, e^{ax} \sin bx. \tag{1.9}$$

3.4 ЛНДР із сталими коефіцієнтами

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x)\,, \qquad (1.10)$$

де p, q – сталі.

За теоремою 2 загальний розв'язок (1.10) має вигляд виразу (1.4)

$$y_{ЗН}(x) = y_{ЗО}(x) + \widetilde{y}_{ЧН}(x)\,,$$

де $y_{ЗО}(x)$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР (1.5) і його можна відшукати за правилами попереднього § 3.3, тобто потрібно відшукати фактично лише деякий частинний розв'язок $\widetilde{y}_{ЧН}(x)$ ЛНДР (1.10).

Якщо права частина рівняння (1.10) має один із виглядів

$$f(x) = \begin{cases} e^{\alpha x}, \ \ \alpha \neq k_1, k_2, \\ P(x) \ - \ многочлен, \\ A_0 \sin \beta x + B_0 \cos \beta x, \ \ \beta \neq b, \end{cases}$$

тоді $\widetilde{y}_{ЧН}(x)$ можна відшукати в такому ж вигляді, але з невизначеними поки що коефіцієнтами

$$y_{ЧН}(x) = \begin{cases} A e^{\alpha x}, \ A - невизначено; \\ Q(x) - многочлен, того \\ що і \ P(x), \ але \ з \ невідомими \\ коефіцієнтами \\ A \sin \beta x + B \cos \beta x, \ \ A, B - \end{cases}$$

.

Підставляючи цей вираз $\widetilde{y}_{ЧН}(x)$ в ліву частину рівняння (1.10) замість y і дорівнюючи тотожно правій частині, знаходимо необхідні коефіцієнти.

§ 4 Системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами (завдання 5)

Визначення 1 Система диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} x' = a_{11}\ x + a_{12}\ y + b_1(t) \\ y' = a_{21}\ x + a_{22}\ y + b_2(t) \end{cases} \qquad (1.11)$$

відносно невідомих функцій $x = x(t)$, $y = y(t)$ називається лінійною.

В системі (1.11) коефіцієнти $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – сталі величини, $b_1(t), b_2(t)$ - задані функції.

Метод розв'язання системи (1.11) полягає у тому, що шляхом диференціювання одного з рівнянь і підстановки можна виключити із рівняння одну із невідомих функцій. В результаті ми отримуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами відносно однієї невідомої функції.

Розв'язок цього рівняння підставляємо в одне з рівнянь системи (1.11) і знаходимо другу невідому функцію.

РОЗДІЛ 2 РЯДИ

Тема 1 Числові ряди

§ 1 Основні поняття

Визначення 1 Нехай є послідовність чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Числовим рядом називають вираз:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i .$$

Визначення 2 За даним рядом побудуємо нову послідовність

$$\begin{aligned} &S_1 = u_1, \\ &S_2 = u_1 + u_2, \\ &S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

яку називають *послідовністю часткових сум*.

Визначення 3 Якщо послідовність часткових сум $\{S_n\}$ даного ряду має скінченну границю $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, тоді ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

називають *збіжним*, а число S називають *сумою* ряду

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Якщо ж послідовність часткових сум $\{S_n\}$ не має границі

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \begin{cases} \text{не існує} \\ \infty \end{cases},$$

тоді ряд називають *розбіжним*. У цьому випадку вираз

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

не має суми.

Визначення 4

$$\underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_m} + \underbrace{u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+k} + \ldots} \qquad (2.1)$$

Залишком ряду називають ряд, який утворюється з ряду (2.1), якщо відкинути перші m його членів, тобто ряд

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+k} + \ldots \qquad (2.2)$$

Має місце така *властивість* рядів: ряд (2.1) і його залишок (2.2) або обидва збігаються, або обидва розбігаються (*рівнозбіжні*).

§ 2 Необхідна умова збіжності ряду

Теорема Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, тоді загальний член ряду u_n прямує до нуля, тобто

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

Зауваження Умова $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ще не достатня для збіжності ряду, бо існують як збіжні, так і розбіжні ряди, для яких виконується ця умова.

Наприклад, ряд Діріхле (узагальнений гармонічний ряд)

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}.$$

Відомо, що ряд Діріхле *збігається*, якщо $\alpha > 1$ і *розбігається*, якщо $0 < \alpha \le 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\begin{cases}\text{збігається, якщо } \alpha > 1,\\ \text{розбігається, якщо } 0<\alpha\le 1,\end{cases}$$

хоча для будь-якого $\alpha > 0$ загальний член $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Достатня умова розбіжності ряду (завдання № 6)

Якщо загальний член ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ u_n не прямує до нуля при умові $n\to\infty \left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n \ne 0\right)$, тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається.

§ 3 Геометричний ряд

Визначення Розглянемо нескінченну геометричну прогресію

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3, \ldots, q^n, \ldots$$

із знаменником q і побудуємо з неї ряд

$$1+q+q^2+\ q^3+\ldots+q^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} q^n,$$

який називають *геометричним*.

Збіжність або розбіжність геометричного ряду залежить від величини знаменника q.

Теорема Геометричний ряд $1+q+q^2+\ q^3+\ldots+q^n+\ldots$ є збіжним рядом тоді і тільки тоді, коли його знаменник $|q|<1$.

§ 4 Числові ряди з додатними членами

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \qquad (u_n > 0)$$

Відомі такі достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами.

1 Теорема про порівняння двох рядів (завдання № 7,а).

Нехай

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \qquad (u_n > 0); \tag{2.3}$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \qquad (v_n > 0) \tag{2.4}$$

два ряди з додатними членами і нехай відповідні члени рядів (2.3) і (2.4) задовольняють умову

$$u_n \le v_n,$$

хоча б починаючи з деякого "n".

Тоді, якщо збігається ряд (2.4), буде збігатися і ряд (2.3); якщо розбігається ряд (2.3) , буде розбігатися і ряд (2.4).

Зауваження Теорема про порівняння рядів дуже зручна у застосуванні, але сфера її можливостей обмежена, тому що ряд, який досліджується на збіжність, можна порівнювати лише з відомим рядом.

В нашому розпорядженні існують тільки два таких ряди:

ряд Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ і геометричний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.

В деяких випадках можна застосовувати *граничну ознаку порівняння рядів.*

Теорема

Якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \,; \tag{2.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{2.6}$$

два ряди з додатними членами і якщо існує скінченна границя відношення загальних членів

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A \quad (A-const,\ 0<A<+\infty),$$

тоді ряди (2.5) і (2.6) *рівнозбіжні*.

2 Ознака Даламбера (завдання № 7, б).

Якщо ряд з додатними членами

$$u_1+u_2+...+u_n+... \quad (u_n>0)$$

такий, що існує скінченна границя відношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l \quad (l-const),$$

тоді:

a) якщо $l<1$, ряд збігається;

b) якщо $l>1$, ряд розбігається;

c) якщо $l=1$, ситуація невизначена, тому що існують як збіжні, так і розбіжні ряди з таким значенням l.

3 Радикальна ознака Коші (завдання № 7, в).

Якщо ряд з додатними членами

$$u_1+u_2+...+u_n+... \quad (u_n>0)$$

такий, що існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l \quad (l-const),$$

тоді:

a) якщо $l<1$, ряд збігається;

b) якщо $l>1$, ряд розбігається;

c) якщо $l=1$, радикальна ознака Коші на запитання про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ відповіді не дає.

4 Інтегральна ознака Коші

Нехай є ряд з додатними членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (u_n > 0) \tag{2.7}$$

і функція $f(x)$ така, що неперервна, монотонна, додатна на проміжку $(1, +\infty)$, нехай також члени ряду дорівнюють значенням функції так що $f(1) = u_1,\quad f(2) = u_2, \ldots, f(n) = u_n, \ldots$

Тоді ряд (2.7) і невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *рівнозбіжні*.

§ 5 Знакозмінні та знакопереміжні ряди (завдання № 8)

5.1 Знакопереміжні ряди

Визначення. Якщо в ряді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ усі члени виявляються дійсними числами, але серед них є нескінченно багато і додатних і від'ємних чисел, тоді ряд називають *знакозмінним*.

Якщо в ряді будь-які два сусідні члени мають різні знаки, тоді ряд називається *знакопереміжним*.

Знакопереміжний ряд можна записати у вигляді

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots \qquad (u_n > 0)$$

Теорема Лейбніца

Якщо модулі членів знакопереміжного ряду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots \qquad (u_n > 0)$$

монотонно спадають і загальний член ряду прямує до нуля при $n \to \infty$

$$\begin{array}{l} u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ge \ldots \ge u_n \ge u_{n+1} \ge \ldots \\ u_n \to 0 \; при \;\; n \to \infty \end{array},$$

тоді такий ряд збігається і його сума S менша за перший член ряду $S < u_1$.

5.2 Абсолютна та умовна збіжність рядів

Розглянемо числовий ряд з довільними членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (2.8)$$

і побудуємо для ряду (2.8) новий ряд із абсолютних величин його членів

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \quad , \qquad (2.9)$$

який буде рядом з додатними членами.

Визначення. Якщо ряд (2.9) збігається, тоді кажуть, що ряд (2.8) *збігається абсолютно*.

Якщо ряд (2.9) розбігається, а ряд (2.8) при цьому виявляється збіжним, тоді кажуть, що ряд (2.8) *збігається умовно*.

Теорема. Якщо ряд (2.8) збігається абсолютно, тоді він збігається і у звичайному розумінні цього слова, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ – збіжний ряд} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ – збіжний ряд.}$$

Обернене твердження не правильне.

5.3 Узагальнені ознаки Даламбера і Коші

Нехай ряд з довільними членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

такий, що існує границя

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l \quad (l - const) \text{ – ознака Даламбера;}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l \quad (l - const) \text{ – ознака Коші;}$$

тоді:

a) якщо $l < 1$, ряд збігається (навіть абсолютно);
b) якщо $l > 1$, ряд розбігається;
c) якщо $l = 1$, ситуація невизначена.

Тема 2 Функціональні ряди

§ 1 Основні поняття

Визначення 1. Якщо $u_1(x), u_2(x), \ \dots, \ u_n(x), \dots$ – послідовність функцій з загальною областю визначення D , тоді *функціональним рядом* називають вираз

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \qquad (2.10)$$

Визначення 2. Сукупність таких $x_0 \in D$, для яких відповідний числовий ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \qquad (2.11)$$

збігається, називають *областю збіжності* функціонального ряду.

Визначення 3. Функціональний ряд

$$c_0 + c_1 \ (x - x_0) + c_2 \ (x - x_0)^2 + \dots + c_n \ (x - x_0)^n + \dots \qquad (2.12)$$

називають *степеневим рядом.*

§ 2 Степеневі ряди (завдання № 9)

Для степеневих рядів область збіжності можна визначити за допомогою теореми Коші – Адамара.

Теорема Коші – Адамара

Нехай

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{1}{R}, \qquad (2.13)$$

тоді степеневий ряд $c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+...+c_n(x-x_0)^n+...$ збігається абсолютно для всіх x, які задовольняють нерівності

$$|x-x_0|<R,$$

і розбігається для всіх x, які задовольняють нерівності

$$|x-x_0|>R.$$

Зауваження 1 Із теореми Коші – Адамара випливає, що областю збіжності степеневого ряду

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+...+c_n(x-x_0)^n+...$$

буде інтервал довжиною $2R$ з центром у точці x_0 (і можливо точки $x_0-R,\ x_0+R$ – границі інтервалу).

Тому число R називають *радіусом збіжності* степеневого ряду (2.12), а інтервал $(x_0-R,\ x_0+R)$ – його *інтервалом збіжності* (див. рисунок 1).

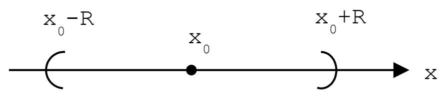


Рисунок 1

Зауваження 2 Радіус збіжності степеневого ряду (2.12) можна знайти за формулою Даламбера

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}. \qquad (2.14)$$

Зауваження 3 При знаходженні області збіжності степеневого ряду потрібно, по-перше, знайти радіус збіжності за формулами (2.13), (2.14); по-друге, інтервал збіжності; по-третє, перевірити поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності і, якщо принаймні в одній з цих точок степеневий ряд збігається, додати її до області збіжності.

Зауваження 4 $R=0$ означає, що степеневий ряд (2.12) збігається лише в точці x_0; $R=+\infty$ означає, що степеневий ряд (2.12) збігається на всій числовій осі.

§ 3 Властивості степеневих рядів

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n; \qquad x\in(x_0-R,\,x_0+R).$$

1 Сума степеневого ряду $S(x)$ виявляється функцією неперервною в інтервалі збіжності $x\in(x_0-R,\,x_0+R)$.

2 Степеневий ряд можна почленно інтегрувати по будь-якому сегменту $[a,b]$, розташованому в інтервалі збіжності (див. рисунок 2).

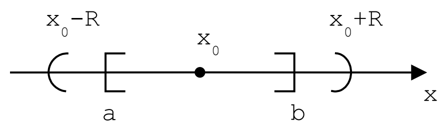


Рисунок 2

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n \Rightarrow \int_a^b S(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b (x-x_0)^n\,dx.$$

3 Степеневий ряд можна почленно диференціювати в інтервалі збіжності скільки завгодно разів

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n; \qquad x\in(x_0-R,\,x_0+R);$$

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,n\,(x-x_0)^{n-1}; \qquad x\in(x_0-R,\,x_0+R);$$

$$S''(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,n\,(n-1)(x-x_0)^{n-2}; \qquad x\in(x_0-R,\,x_0+R)$$

і так далі.

§ 4 Формула Тейлора

Якщо в околі точки „x_0” функція $f(x)$ має неперервні похідні до $n-$ го порядку включно, тоді має місце рівність

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{2.15}$$

яку називають *формулою Тейлора*.

Останній доданок правої частини (2.15), який за своєю структурою відрізняється від інших доданків, називають *залишковим членом* формули Тейлора і позначають так:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n)!}(x - x_0)^n.$$

Точка c завжди розташована між точками x_0 і x (див. рисунки 3 і 4).

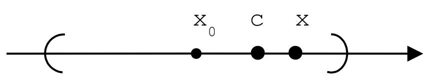


Рисунок 3

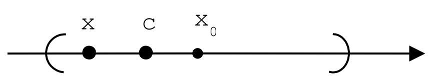


Рисунок 4

§ 5 Ряд Тейлора

Ряд

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x - x_0)^n + \ldots$$

називають *рядом Тейлора* для функції $f(x)$ в околі точки x_0, а процес будування ряду називають *розкладанням* функції $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0.

Основна теорема (про розкладання функції в ряд Тейлора)

Для того, щоб функція $f(x)$ в околі точки x_0 розкладалася у ряд Тейлора, необхідно і достатньо, щоб вона мала в околі точки

x_0 похідні будь-якого порядку і щоб залишковий член $R_n(x)$ формули Тейлора прямував до нуля при умові, що $n \to \infty$.

Зауваження. Ряд Тейлора функції $f(x)$ в околі точки $x_0 = 0$ має вигляд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{(n)!}x^n + \ldots$$

і називається *рядом Маклорена*.

§ 6 Розклади деяких функцій у степеневі ряди

За допомогою основної теореми та властивостей степеневих рядів можна визначити розклади деяких конкретних функцій у степеневі ряди і області збіжності цих рядів

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad x \in (-\infty, +\infty);$$
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in (-\infty, +\infty)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad x \in (-1, +1]$$
$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x \in [-1, +1]$$
$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\ldots(2n-1)}{\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad x \in [-1, +1]$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \qquad x \in (-1, +1);$$

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu\cdot x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad x \in (-1, +1).$$

$$sh\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$ch\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

Ч А С Т И Н А   Д Р У Г А

Для виконання контрольної роботи треба переписати умови всіх завдань даного варіанта, а потім навести розв'язання кожного завдання у такій послідовності:

1) переписати номер і умову даного завдання (можна замість повної умови задачі записати лише її номер);

2) в першій частині методичних вказівок відшукати необхідні для розв'язання формули і визначення;

3) застосувати необхідні формули і розв'язати задачу.

Зразок виконання і оформлення контрольної роботи.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Завдання № 1 Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$$

Завдання № 2 Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння:

$$\begin{cases} y' + 2y = x + 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Завдання № 3 Знайти залежність ціни від часу в моделі рівноважного ринку з прогнозованими цінами (знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку):

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}.$$

Завдання № 4 Визначити загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$y'' - 3y' + 2y = 10e^{3x}.$$

Завдання № 5 Визначити загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}.$$

Завдання № 6 Довести розбіжність ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-2}$.

Завдання № 7 Перевірити, збігаються чи розбігаються такі ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$.

Завдання № 8 Перевірити, чи буде ряд абсолютно або умовно збіжним:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3n!}.$$

Завдання № 9 Визначити радіус та інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ

Завдання № 1 Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$$

Розв'язання. Рівняння $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$ записане у загальній формі, але якщо використати формулу $dy=y'dx$ та помножити обидві частини рівняння на dx, тоді будемо мати

$$x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0\,.$$

Можна побачити, що це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними (§ 2.1.1). Щоб відокремити змінні, поділимо обидві частини рівняння на добуток коренів $\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}$, в результаті отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=0\,,$$

яке можна інтегрувати

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=C\,.$$

Обчислимо перший з інтегралів, застосовуючи заміну змінної

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left|\begin{matrix}t=1+x^2\\ dt=\left(1+x^2\right)'dx=2xdx\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}2xdx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{t}=\sqrt{1+x^2}+C_1\,.$$

Очевидно, що другий інтеграл обчислюється аналогічно і

$$\int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=\sqrt{1+y^2}+C_2\,.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння в уявній формі має вигляд:

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C\,,$$

де $C=-(C_1+C_2)$.

Завдання № 2 Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння:

$$\begin{cases} y' + 2y = x + 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Розв'язання Задача Коші полягає у тому, щоб визначити частинний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи для цього початкову умову.

З цією метою спочатку знаходимо загальний розв'язок диференціального рівняння, а потім використовуємо початкову умову і із загального розв'язку відбираємо частинний.

Таким чином, по-перше, будемо шукати загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' + 2y = x + 2.$$

Це лінійне рівняння і тому застосуємо відповідне правило (§ 2.1.III), а саме, вважаємо, що невідома функція $\boldsymbol{y}$ є добутком двох інших невідомих функцій u і v:

$$y = u \cdot v \ (y' = u'v + uv')$$

і підставимо в рівняння

$$u'v + uv' + 2uv = x + 2;$$
$$u'v + u[v' + 2v] = x + 2.$$

Підбираємо $\boldsymbol{v}$ так, щоб вираз у квадратних дужках дорівнював нулю, і отримуємо систему двох рівнянь з відокремлюваними змінними для невідомих функцій u і v:

$$\begin{cases} v' + 2v = 0, \\ u'v = x + 2. \end{cases}$$

Розв'язуємо перше з цих рівнянь:

$$v' + 2v = 0 \Rightarrow v' = -2v \ \Big| \cdot dx \Rightarrow v'\,dx = -2v\,dx \Rightarrow dv = -2v\,dx \ \Big| :v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v}dv = -2dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{v}dv = \int (-2)dx \quad \Rightarrow \quad ln|v| = -2x \quad \Rightarrow \quad v = e^{-2x}.$$

Тобто

$$v = e^{-2x}. \qquad \text{(I)}$$

Підставляємо отримане значення функції $\boldsymbol{v}$ в друге рівняння системи і розв’язуємо його:

$$u'e^{-2x} = x + 2 \Rightarrow u' = (x + 2)e^{2x} \;\Big|\; \cdot dx \Rightarrow u'\,dx = (x + 2)e^{2x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow du = (x + 2)e^{2x}dx \Rightarrow \int du = \int (x+2)e^{2x}dx \quad \Rightarrow \quad u = \int (x+2)e^{2x}dx.$$

Отже,

$$u = \int (x+2)e^{2x}dx \qquad \text{(II)}$$

Застосовуємо до інтеграла в правій частині формулу інтегрування частинами $\int u_1 dv_1 = u_1 v_1 - \int v_1 du_1$, позначаючи через $\boldsymbol{u_1}$ степеневий множник підінтегральної функції

$$\int (x+2)e^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u_1 = x+2; & du_1 = dx \\ dv_1 = e^{2x}dx; & v_1 = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}(x+2)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x+2)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^{2x} + C.$$

Повертаючись до формули (II), отримуємо вираз для невідомої функції

$$u = \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^{2x} + C.$$

Тепер записуємо загальний розв’язок диференціального рівняння:

$$y = uv = \left[\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^{2x} + C\right] \cdot e^{-2x},$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + C \cdot e^{-2x}.$$

Далі для розв'язання задачі Коші застосуємо початкову умову і знайдемо конкретне значення сталої $\boldsymbol{C}$, для чого підставимо в загальний розв'язок $x = 0$ та $y = 1$:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{4} + C \cdot e^{-2 \cdot 0} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{3}{4} + C \quad \Rightarrow \quad C = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Таким чином, частинний розв'язок y^* диференціального рівняння має вигляд:

$$y^* = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-2x}.$$

Завдання № 3 Знайти залежність ціни від часу в моделі рівноважного ринку з прогнозованими цінами (знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку):

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}.$$

Розв'язання. По-перше, знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$. Це рівняння виявляється лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) другого порядку зі сталими коефіцієнтами, яке розв'язується за допомогою характеристичних рівнянь (§ 3.3, формула (1.6)). Побудуємо характеристичне рівняння: квадратне рівняння з коефіцієнтами, які збігаються з коефіцієнтами диференціального рівняння:

$$y'' - 6y' + 9y = 0;$$
$$k^2 - 6k + 9 = 0,$$

і знайдемо його корені:

$$k_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3,$$

тобто $k_1 = k_2 = 3$.

За формулою (1.8) § 3.3 загальний розв'язок ЛОДР такий:

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}. \qquad \text{(III)}$$

Для знаходження частинного розв'язку, а саме конкретних значень сталих C_1 і C_2, застосуємо початкові умови:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Знайдемо похідну від y із виразу (III):

$$y' = C_1e^{3x} \cdot 3 + C_2\left(e^{3x} + xe^{3x} \cdot 3\right) \qquad \text{(IV)}$$

і підставимо в рівності (III) і (IV) початкові умови

$$\begin{cases} 1 = C_1e^{3\cdot 0} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{3\cdot 0} \\ 2 = 3C_1e^{3\cdot 0} + C_2\left(e^{3\cdot 0} + 3 \cdot 0 \cdot e^{3\cdot 0}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = C_1 \\ 2 = 3C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 - 3C_1 = 2 - 3 = -1. \end{cases}$$

Таким чином, частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$y^* = e^{3x} - xe^{3x}.$$

Завдання № 4 Визначити загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$y'' - 3y' + 2y = 10e^{3x}.$$

Розв'язання. За теоремою 2 (§ 3.2) загальний розв'язок ЛНДР складається із загального розв'язку $y_{ЗО}(x)$ відповідного однорідного рівняння і деякого частинного розв'язку ЛНДР – $\widetilde{y}_{ЧН}(x)$:

$$y_{ЗН}(x) = y_{ЗО}(x) + \widetilde{y}_{ЧН}(x).$$

Знайдемо окремо ці доданки.

Оскільки $y_{ЗО}(x)$ є загальним розв'язком ЛОДР

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

і визначаємо його корені

$$k_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2; \quad k_2 = 1 .$$

За формулою (1.7) § 3.3 загальний розв'язок ЛОДР має вигляд:

$$y_{ЗО} = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{x} .$$

Далі визначаємо $\widetilde{y}_{ЧН}(x)$ за правилами § 3.4.

В нашому випадку права частина диференціального рівняння має вигляд:

$$f(x) = 10\,e^{3x} \quad (\alpha = 3 \neq k_1, k_2)$$

і тому частинний розв'язок ЛНДР будемо шукати у вигляді

$$\widetilde{y}_{ЧН} = Ae^{3x},$$

де A – поки що невідомий нам сталий коефіцієнт, який можна визначити, якщо вищевказане $\widetilde{y}_{ЧН}(x)$ підставити в ліву частину ЛНДР і потім тотожно дорівняти правій частині:

$$\begin{array}{c|l} 2 & \widetilde{y}_{ЧН} = Ae^{3x} \\ -3 & \widetilde{y}'_{ЧН} = Ae^{3x} \cdot 3 \\ 1 & \widetilde{y}''_{ЧН} = Ae^{3x} \cdot 3 \cdot 3 . \end{array}$$

Таким чином:

$$\widetilde{y}''_{ЧН} - \widetilde{y}'_{ЧН} + 2\,\widetilde{y}_{ЧН} = 9Ae^{3x} - 3Ae^{3x} \cdot 3 + 2Ae^{3x} \equiv 10e^{3x}$$

$$\Downarrow$$

$$2Ae^{3x} \equiv 10e^{3x},$$

$$2A = 10 \Rightarrow A = 5.$$

Отже, шуканий загальний розв'язок $y_{ЗН}(x)$ ЛНДР має вигляд:

$$y(x) = y_{ЗН}(x) = y_{ЗО}(x) + \widetilde{y}_{ЧН}(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{x} + 5e^{3x}.$$

Завдання № 5 Визначити загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

Розв'язання. Задана система є системою лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами. Спосіб її розв'язання полягає в тому, щоб шляхом диференціювання і підстановок виключити одну невідому функцію. З цією метою знайдемо похідну обох частин другого рівняння системи:

$$y'' = x' + 2y'.$$

Замість x' підставляємо його вираз із першого рівняння системи:

$$y'' = 2x + y + 2y'.$$

Замість x підставимо його вираз із другого рівняння системи:

$$x = y' - 2y,$$

після чого отримаємо рівняння

$$y'' = 2(y' - 2y) + y + 2y' \Rightarrow y'' = 4y' - 3y \Rightarrow y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Останнє рівняння $y'' - 4y' + 3y = 0$ виявляється ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно невідомої функції y. Розв'язуємо його, застосовуючи характеристичне рівняння:

$$k^2 - 4k + 3 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння дорівнюють:

$$k_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow k_1 = 3; \quad k_2 = 1.$$

За формулою (1.7) § 3.3 загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{3t} + C_2 e^t.$$

Для знаходження другої невідомої функції $x(t)$ можна використати її залежність від y, а саме із другого рівняння системи:

$$x = y' - 2y = \left(C_1 e^{3t} + C_2 e^t\right)' - 2\left(C_1 e^{3t} + C_2 e^t\right) =$$

$$= C_1 e^{3t} \cdot 3 + C_2 e^t - 2C_1 e^{3t} - 2C_2 e^t = C_1 e^{3t} - C_2 e^t.$$

Таким чином, загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь такий:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} - C_2 e^t, \\ y = C_1 e^{3t} + C_2 e^t. \end{cases}$$

Завдання № 6 Довести розбіжність ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-2}$.

Розв'язання. Для доведення використаємо достатню умову розбіжності ряду (розд. 2, тема 1, § 2), а саме обчислимо границю загального члена $u_n = \frac{n}{3n-2}$ при умові, що $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

тобто даний ряд дійсно розбігається.

Завдання № 7

а) перевірити, збігається чи розбігається ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Розв'язання. Застосуємо для визначення збіжності або розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ $\left(u_n = \frac{1}{n^2+1} > 0,\ \forall n \right)$ теорему про порівняння рядів (розд. 2, тема 1, § 4). З цією метою порівняємо цей ряд із рядом Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$u_n = \frac{1}{n^2+1}: \quad \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{3^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+1} + \ldots \tag{V}$$

$$v_n = \frac{1}{n^2}: \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \tag{VI}$$

Очевидно, що при будь-якому n члени ряду (VI) більше відповідних членів ряду (V):

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} < v_n = \frac{1}{n^2}.$$

Але ряд Діріхле (VI) збігається ($\alpha = 2 > 1$) і за теоремою порівняння рядів буде збіжним і ряд (V).

Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ збігається;

б) перевірити, збігається чи розбігається ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$.

Розв'язання. Для перевірки збіжності або розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$ застосуємо ознаку Даламбера (теорему порівняння рядів застосувати неможливо, тому що структура членів цього ряду відрізняється від структури членів відомих рядів – геометричного і Діріхле – розд. 2, тема 1, § 4). З цією метою визначаємо $u_n = \frac{n}{2^{n+1}}$ і $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+2}}$ та обчислюємо границю відношення:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+2}}}{\frac{n}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

Таким чином, за ознакою Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$ збігається.

в) перевірити, збігається чи розбігається ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$.

Розв'язання. До ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$ дуже зручно застосувати радикальну ознаку Коші, тобто обчислити

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

Таким чином, за радикальною ознакою Коші ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$ збігається.

Завдання № 8. Перевірити, чи буде ряд абсолютно або умовно збіжним:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3n!}.$$

Розв'язання. Для перевірки абсолютної збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3n!} \tag{VII}$$

побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного ряду (розд. 2, тема 1, § 5), тобто ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n^2}{3n!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n!}. \tag{VIII}$$

Але ряд (VIII) виявляється рядом з додатними членами і для визначення його збіжності або розбіжності можна застосувати ознаку Даламбера, для чого визначимо $u_n = \frac{n^2}{3n!}$ і $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{3(n+1)!}$ та обчислюємо границю відношення:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3(n+1)!}}{\frac{n^2}{3n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Таким чином, ряд (VIII) із абсолютних величин елементів ряду (VII) збігається, тоді, за визначенням, ряд (VII) збігається абсолютно, тобто збігається і у звичайному розумінні цього слова, а саме:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n^2}{3n!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n!} \text{ збігається} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3n!} \text{ абсолютно збігається} \Rightarrow \text{збігається.}$$

Завдання № 9. Визначити радіус і інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}$$

та з'ясувати, чи збігається ряд у точках:

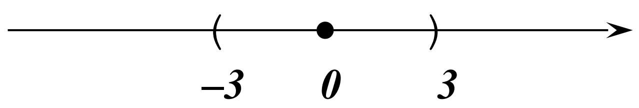
а) $\boldsymbol{x = 2}$, б) $\boldsymbol{x = -5}$, в) $\boldsymbol{x = -3}$.

Розв'язання. По-перше, обчислюємо радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}$ за формулою Даламбера: $c_n = \frac{(-1)^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}$; $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1} \cdot \sqrt{n+1}}$:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1} \cdot \sqrt{n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 3,$$

тобто радіус збіжності дорівнює $R = 3$.

$(-3,\ 3)$



Далі перевіряємо поведінку степеневого ряду в точках:

а) $x = 2$,

б) $x = -5$,

в) $x = -3$;

а) оскільки точка $x = 2$ *належить* інтервалу ***(–3, 3)***, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}$ в цій точці збігається;

б) оскільки точка $x = -5$ *не належить* інтервалу ***(–3, 3)***, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}$ в цій точці розбігається;

в) в точці $x = -3$ відповідний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(-3)^n}{3^n \cdot \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

виявляється рядом Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, для якого $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, тобто цей ряд розбігається, а це означає, що в точці $x = -3$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}$ в цій точці розбігається.

Ч А С Т И Н А   Т Р Е Т Я

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

Завдання № 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

№ п/п	Диференціальне рівняння	№ п/п	Диференціальне рівняння
1	$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$	**16**	$y'\sqrt{4y-1} \cdot \sqrt{3-2x} = 1$
2	$xy' + y = y^2$	**17**	$xy' \sin y + (\cos y)^6 x^{\frac{3}{2}} = 0$
3	$y' ctgx + y = 2$	**18**	$y'y^5 e^{-\cos x} + \sin x \cdot \sqrt[3]{y} = 0$
4	$y' - xy^2 = 2xy$	**19**	$y \cdot \sqrt[3]{x^3 - 8} = y' \frac{\sqrt[3]{y}}{x^2}$
5	$y' = e^{x + y}$	**20**	$y' + ytgx = 0$
6	$y'x^3 = 2y - 1$	**21**	$(2x - 5)y + (x^2 - 5x + 13)y' = = 0$
7	$(x^2 + x)y' + 2y = 1$	**22**	$xyy' = 1 - x^2$
8	$y'\sqrt{1 + x^2} = y$	**23**	$y' tgx - y \ln y = 0$

9	$(1+x^2)y' - y^2 = 1$	**24**	$yy' = \frac{1-2x}{y}$
10	$y' = 2\sqrt{y}\ln x$	**25**	$xy' + y = 1$
11	$\left(1+x^2\right)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$	**26**	$xy^2 + x + y'(y - x^2y) = = 0$
12	$y' = 2\sqrt[3]{y}\, e^x$	**27**	$y'\cdot siny\cdot cosx = cosy\cdot sinx$
13	$y'cosy + xe^x = 0$	**28**	$y - xy' = 1 + x^2y'$
14	$y'\cdot 5^{x+y} = 1$	**29**	$(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$
15	$\frac{y'\sin x}{y} + \ln y\cdot\cos x = 0$	**30**	$(5 + e^x)\ e^{-x}yy' = 1$

Завдання № 2 Знайти розв’язок задачі Коші для диференціального рівняння.

Варіант 1	**Варіант 2**
$\begin{cases} y' - 4\frac{y}{x} = \frac{5}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
Варіант 3	**Варіант 4**
$\begin{cases} y' + \frac{4x}{4+x^2}y = \frac{4}{4+x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} y' - \frac{1}{2x}y = \frac{3}{2}x \\ y(1) = 1 \end{cases}$
Варіант 5	**Варіант 6**
$\begin{cases} y' + y = 3e^{-3x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} y' + 2y = 5e^{5x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$
Варіант 7	**Варіант 8**
$\begin{cases} y' - y = 2xe^{x+x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
Варіант 9	**Варіант 10**
$\begin{cases} y' + y\cos x = \sin 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = x^2 + 1 \\ y(1) = 4 \end{cases}$

Варіант 11	**Варіант 12**
$\begin{cases} 2xy' - y = 3x^2 \\ y(1) = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} xy' + y - 5x^2 = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$
Варіант 13	**Варіант 14**
$\begin{cases} y' - \dfrac{3y}{1+x} = e^x(1+x)^3 \\ y(0) = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} xy' - \dfrac{y}{x+1} = x \\ y(1) = 0 \end{cases}$
Варіант 15	**Варіант 16**
$\begin{cases} y' - 2\dfrac{y}{x} = x^3 + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} y' - \dfrac{2y}{5+x} = e^{2x}(5+x)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
Варіант 17	**Варіант 18**
$\begin{cases} y' - \dfrac{4y}{x} = e^{2x}x^4 \\ y(1) = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x} = \cos 2x \cdot x^2 \\ y(\pi) = \pi^2 \end{cases}$
Варіант 19	**Варіант 20**
$\begin{cases} y' + \dfrac{x}{4+x^2}y = \dfrac{4}{4+x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} xy' + y - 5e^{3x} = 0 \\ y(1) = e^3 \end{cases}$
Варіант 21	**Варіант 22**
$\begin{cases} y' + ytgx = \sin x \\ y(0) = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$
Варіант 23	**Варіант 24**
$\begin{cases} y' - y = 5xe^{x-x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} xy' - y = x + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$
Варіант 25	**Варіант 26**
$\begin{cases} xy' - y = x^2 + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x+3} = e^{2x}(x+3) \\ y(0) = 1 \end{cases}$
Варіант 27	**Варіант 28**
$\begin{cases} xy' - y = x\sin x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \end{cases}$	$\begin{cases} xy' - y = x\cos x \\ y(\pi) = 2\pi \end{cases}$
Варіант 29	**Варіант 30**
$\begin{cases} xy' - y = x\,tgx \\ y(2\pi) = \pi \end{cases}$	$\begin{cases} xy' - y = x\,ctgx \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

Завдання № 3. Знайти залежність ціни від часу в моделі рівноважного ринку з прогнозованими цінами (знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку).

Варіант 1	**Варіант 2**
$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$
Варіант 3	**Варіант 4**
$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$
Варіант 5	**Варіант 6**
$\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$
Варіант 7	**Варіант 8**
$\begin{cases} y'' - 6y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' - 6y' + 8y = 0 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$
Варіант 9	**Варіант 10**
$\begin{cases} y'' - 6y' - 7y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' - 7y' + 10y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$
Варіант 11	**Варіант 12**
$\begin{cases} y'' - 7y' + 6y = 0 \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' - 7y' + 12y = 0 \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$
Варіант 13	**Варіант 14**
$\begin{cases} y'' - 7y' + -8y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' - 7y' - 18y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$
Варіант 15	**Варіант 16**
$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \end{cases}$
Варіант 17	**Варіант 18**
$\begin{cases} y'' - 8y' + 16y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' + 8y' + 7y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -3 \end{cases}$
Варіант 19	**Варіант 20**
$\begin{cases} y'' - 9y' + 14y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' - 9y' + 18y = 0 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$

Варіант 21	Варіант 22
$\begin{cases} y'' - 9y' + 20y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' - 4y' - 21y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$
Варіант 23	**Варіант 24**
$\begin{cases} y'' - 10y' + 25y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' - 4y' - 12y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$
Варіант 25	**Варіант 26**
$\begin{cases} y'' - 5y' - 14y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' + 5y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$
Варіант 27	**Варіант 28**
$\begin{cases} y'' + 6y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$
Варіант 29	**Варіант 30**
$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' + 6y' + 5y = 0 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$

Завдання № 4 Визначити загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.

№ п/п	Диференціальне рівняння	№ п/п	Диференціальне рівняння
1	$y'' + 5y' + 4y = 1$	**2**	$y'' - 5y' + 4y = 4e^{5x}$
3	$y'' + 4y' + 3y = 2e^{-x}$	**4**	$y'' - 4y' + 3y = 3$
5	$y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$	**6**	$y'' - 3y' + 2y = 7e^{10x}$
7	$y'' + 6y' + 5y = 5e^{x}$	**8**	$y'' - 6y' + 5y = 6e^{x}$
9	$y'' + 7y' + 10y =$	**10**	$y'' - 7y' + 10y = 5$

	$3e^{-3x}$		
11	$y'' + 6y' + 8y = 2e^{3x}$	**12**	$y'' - 6y' + 8y = 8e^{-5x}$
13	$y'' + 17y' + 72y = 8e^{-9x}$	**14**	$y'' - 17y' + 72y = 9$
15	$y'' + 7y' + 12y = 4e^{4x}$	**16**	$y'' - 7y' + 12y = 3$
17	$y'' + 8y' + 12y = 6e^{2x}$	**18**	$y'' - 8y' + 12y = 2e^{6x}$
19	$y'' + 9y' + 18y = 9e^{x}$	**20**	$y'' - 9y' + 18y = 5e^{2x}$
21	$y'' - 7y' - 8y = 7e^{3x}$	**22**	$y'' + 7y' - 8y = 2e^{6x}$
23	$y'' - 8y' + 15y = e^{3x}$	**24**	$y'' + 8y' + 15y = 4e^{6x}$
25	$y'' - 9y' + 20y = 2e^{3x}$	**26**	$y'' + 9y' + 20y = 3e^{2x}$
27	$y'' - 9y' + 18y = -2e^{-x}$	**28**	$y'' + 9y' + 18y = 3e^{4x}$
29	$y'' - 11y' + 28y = 7e^{-4x}$	**30**	$y'' - 11y' + 28y = 7$

Завдання № 5 Визначити загальний розв'язок ***x = x(t), y = y(t)*** системи диференціальних рівнянь.

№ п/п	Система диференціальних рівнянь	№ п/п	Система диференціальних рівнянь
1	$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$	**2**	$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$
3	$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x + 4y \end{cases}$	**4**	$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$
5	$\begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = 2x + 5y \end{cases}$	**6**	$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$
7	$\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$	**8**	$\begin{cases} x' = 3x + 3y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$
№ п/п	Система диференціальних рівнянь	№ п/п	Система диференціальних рівнянь

9	$\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 2x + 5y \end{cases}$	**10**	$\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$
11	$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 3x + 5y \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} x' = 3x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$
13	$\begin{cases} x' = 5x + 3y \\ y' = x + 3y \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = 6x + 5y \end{cases}$
15	$\begin{cases} x' = 4x + 6y \\ y' = x + 5y \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 3x + 5y \end{cases}$
17	$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$
19	$\begin{cases} x' = 4x + 6y \\ y' = x + 5y \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = x + 5y \end{cases}$
21	$\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = 2x + 5y \end{cases}$	**22**	$\begin{cases} x' = 5x + y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$
23	$\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = 6x + 3y \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} x' = 4x + 6y \\ y' = x + 3y \end{cases}$
25	$\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = -x + 8y \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 5x + 8y \end{cases}$
27	$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -4x + 7y \end{cases}$	**28**	$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -2x + 7y \end{cases}$
29	$\begin{cases} x' = 7x + y \\ y' = -4x + 2y \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = -2x + 2y \end{cases}$

Завдання № 6 Довести розбіжність ряду.

№ п/п	Ряд	№ п/п	Ряд
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n+1}$	**2**	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{10n+3}}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n+1}$	**4**	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{101}{100}\right)^n$	**6**	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n}{2n+3}}$	**8**	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{3n+1}}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{100n-1}$	**10**	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4n-5}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{5n+3}$	**12**	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{2n+7}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{7n+9}$	**14**	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{1000n+1}$

15	$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{n+1}$	**16**	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5^n}{3^n}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}$	**18**	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3n+1}{5n^2+1}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{n}{3n+1}}$	**20**	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{\frac{n}{16n+3}}$
21	$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \sqrt{\frac{2n}{4n+1}}$	**22**	$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{2n-1}$
№ п/п	Ряд	№ п/п	Ряд
23	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{2n+1}$	**24**	$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n}{n^2+1}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{3n+1}$	**26**	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[6]{n^2+5}}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{4n+1}$	**28**	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3n^3+27}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5^n}{4^n}$	**30**	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$

Завдання № 7 Перевірити, збігаються чи розбігаються такі ряди.

Варіант 1	**Варіант 2**
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$	1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n}\right)^n$
Варіант 3	**Варіант 4**
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$	1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}$
Варіант 5	**Варіант 6**
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$;	1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(arctg \frac{1}{n} \right)^n$	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6n+1}{2^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n} \right)^n$
Варіант 7	**Варіант 8**
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+n^4}$ $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} \int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-2)^3}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n$	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+1}}$ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(arctgx)^3}{1+x^2} dx$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!} \int\limits_0^{\pi/2} ctgx\, dx$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n^2} \right)^n$
Варіант 9	**Варіант 10**
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{4^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^n}$	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^3+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln \sqrt{n})^n}$
Варіант 11	**Варіант 12**
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} \right)^{\frac{n}{3}}$	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)^n$
Варіант 13	**Варіант 14**
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n+2}{n^6+9}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n+4}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{\sqrt{n}} \right)^n$	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5+4n}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} \right)^n$
Варіант 15	**Варіант 16**
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{n^4+1}$;	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+16}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{7^n}$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n!}$;
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{1}{n}\right)^n$	3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$
Варіант 17	**Варіант 18**
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^5+1}}$;	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3+1}}$;
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{5^{n+1}}$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$;
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^n}$	3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n}$
Варіант 19	**Варіант 20**
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$;	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^3+1}$;
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(n+2)!}$;
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^n$	3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{n}{2}}$
Варіант 21	**Варіант 22**
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n}}{n^7+1}$;	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n}+1}$;
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+3)!}$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{3^n}$;
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{\pi}{4n}\right)^n$	3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2}}$
Варіант 23	**Варіант 24**
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2}$;	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n}+8}$;
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{n!}$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n+1)!}$;
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{n}{2}}$	3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{3}}$
Варіант 25	**Варіант 26**
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$;	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n}}{n^2+1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{3^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{n}{2}}$	2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\left(tg\frac{\pi}{n}\right)^n}$
Варіант 27	**Варіант 28**
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(n+2)!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n}$	1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^3+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{5^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\sin\frac{\pi}{3^n}\right)^n}$
Варіант 29	**Варіант 30**
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n^6+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2}{(n+1)!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+2n}\right)^n$	1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^6+3}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+4}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

Завдання № 8 Перевірити, чи буде ряд абсолютно або умовно збіжним.

1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$	**2**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$	**3**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$	**5**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^5+1}}$	**6**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+4}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{3^n}$	**8**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)!}$	**9**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$	**11**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+4}}$	**12**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-2}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$	**14**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+5}}$	**15**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$
16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$	**17**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}$	**18**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+2}}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^2+3}}$	**20**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+n^2-2}$	**21**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7n-1}$
22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}$	**23**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+6}$	**24**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$

25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+3}$	**26**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$	**27**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+3}$
28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^3+2}}$	**29**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6n+3}$	**30**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+7}}$

Завдання № 9 Визначити радіус і інтервал збіжності степеневого ряду та з’ясувати, чи збігається ряд в точці *x*.

Варіант 1	**Варіант 2**
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{3^n\cdot\sqrt{n}}$, $x = 2$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n\cdot n^2}$, $x = 3$
Варіант 3	**Варіант 4**
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}$, $x = 1$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 x^n}{3n^2+1}$, $x = -2$
Варіант 5	**Варіант 6**
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}\cdot x^n}{\sqrt{n}}$, $x = -3$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{3^n+1}$, $x = -3$
Варіант 7	**Варіант 8**
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n^2+1}$, $x = 4$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+1}$, $x = -4$
Варіант 9	**Варіант 10**
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n+4}$, $x = -5$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$, $x = 0$
Варіант 11	**Варіант 12**
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot x^n}{(n+1)^2}$, $x = 5$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}+5}$, $x = -5$
Варіант 13	**Варіант 14**
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{4^n+4}$, $x = 1$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n\cdot x^n}{n^3+1}$, $x = 0,5$
Варіант 15	**Варіант 16**
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2^n}x^n$, $x = 2,5$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$, $x = 17$

Варіант 17	Варіант 18
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}\, x^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$, $x = -0{,}8$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5n^2+4}$, $x = -1$
Варіант 19	**Варіант 20**
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{5^n-1}$, $x = 5$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n+4}$, $x = -2$
Варіант 21	**Варіант 22**
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^n}{(n+2)!}$, $x = 5{,}2$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\, x^n}{4^{n-1}}$, $x = -3$
Варіант 23	**Варіант 24**
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{2^n+2}$, $x = 2$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2-3n+1}$, $x = 7$
Варіант 25	**Варіант 26**
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{\sqrt{n+1}}$, $x = -0{,}2$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}+1}$, $x = -3$
Варіант 27	**Варіант 28**
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3(n+1)^2}$, $x = 0{,}7$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n^2+2\right) x^n}{n^3-1}$, $x = 4$
Варіант 29	**Варіант 30**
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{7^n-1}$, $x = -5$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{7n+6}$, $x = 6$

Список літератури

1 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1984. – 425 с.

2 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов. – М.: Наука, 1985. –475 с.

3 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1967. –582 с.

4 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1967. – 396 с.

5 Ковалішина І.В. Методичні вказівки і завдання до контрольної роботи з теми „Диференціальні рівняння і Ряди”. – Харків: УкрДАЗТ, 1998. – 56 с.