ФАКУЛЬТЕТ АВТОМАТИКИ, ТЕЛЕМЕХАНІКИ ТА ЗВ'ЯЗКУ

Кафедра «Транспортний зв'язок»

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАВАДОСТІЙКОГО КОДУВАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт
з дисципліни

«ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗВ`ЯЗКУ»

Частина 1

Харків 2009

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри "Транспортний зв'язок" 11 грудня 2008 р., протокол № 5.

Рекомендуються для студентів факультету АТЗ спеціальності «Телекомунікаційні системи та мережі» та спеціалізації «Автоматизовані системи технологічного зв’язку на залізничному транспорті» всіх форм навчання.

Укладачі:

доц. О.П. Батаєв,

асп. Д.О. Бойко

Рецензент

доц. С.В. Кошевий

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАВАДОСТІЙКОГО КОДУВАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт
з дисципліни

«ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗВ`ЯЗКУ»

Частина 1

Відповідальний за випуск Батаєв О.П.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 06.02.09 р.

Формат паперу 60x84 1/16 . Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,75. Обл.-вид.арк. 2,0.

Замовлення № Тираж 150. Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК № 2874 від. 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7

ВСТУП

У зв`язку з різким зростанням числа радіозасобів, що використовуються в різних галузях народного господарства, необхідністю якісно та оперативно організувати зв`язок між багатьма абонентами виникає потреба в забезпеченні надійного й ефективного зв`язку. Актуальність цього питання виявляється, наприклад, на залізничному транспорті, оскільки в даному випадку канали радіозв'язку піддаються впливу різного роду завад і у той же час зв'язок повинен забезпечувати стабільну роботу всіх служб, відповідальних за перевізні процеси.

Тому досить важливою є проблема забезпечення високої завадостійкості цифрової системи передачі інформації, основним засобом якої є введення високої надлишковості, необхідної для виявлення і виправлення помилок, що виникають при роботі системи та її елементів. Теоретичною базою ефективного використання надлишковості, що вводиться в інформацію, є теорія завадостійкого кодування.

У цих методичних вказівках наведені рекомендації щодо виконання лабораторних робіт за темами «Дослідження основних характеристик і параметрів завадостійких кодів» і «Дослідження лінійних кодів Хеммінга», метою яких є закріплення теоретичних знань, отриманих з лекційного курсу та відповідної рекомендованої літератури.

1 Лабораторна робота 1
ДОСЛІДЖЕННЯ ОСНОВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК І ПАРАМЕТРІВ ЗАВАДОСТІЙКИХ КОДІВ

1.1 Мета роботи

1.1.1 Вивчення основних принципів завадостійкого кодування

1.1.2 Розрахунок та дослідження основних характеристик і параметрів завадостійких кодів

1.2 Програма роботи

1.2.1 Ознайомлення з поняттями завадостійких кодів та їх характеристиками

1.2.2 Аналітичне дослідження основних характеристик і параметрів завадостійких кодів.

1.3 Підготовка до роботи

1.3.1 За рекомендованою літературою [1, 2, 3, 4, 5] та конспектом лекцій у позааудиторний час засвоїти:

- мету, програму і вказівки щодо виконання роботи;
- теоретичні положення за темою роботи: поняття завадостійких кодів та їх параметрів і характеристик.

1.3.2 Виконати аналітичне дослідження у вигляді розрахунку характеристик і параметрів завадостійких кодів. Результати оформити у вигляді виконання домашнього завдання, виданого викладачем.

1.3.3 Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.

1.3.4 Підготувати відповіді на контрольні запитання.

1.4 Короткі відомості з теорії

Завадостійкими (надлишковими) називають коди, що дозволяють виправляти помилки. Вони ж (залежно від методу декодування) дозволяють також виявляти й локалізувати помилки, виправляти стирання й т.д.

На рисунку А.1 додатка А наведена класифікація двійкових кодів.

Всі надлишкові коди розділяються на два класи: безперервні й блокові.

У безперервних кодах процес кодування й декодування має безперервний характер. Цей клас кодів, яскравим прикладом яких є згорткові коди, останнім часом застосовується в каналах зв'язку з високою ймовірністю появи пакетів помилок (помилок, що групуються, утворюючи послідовності значної довжини). У блокових кодах кожному повідомленню відповідає кодова комбінація (блок) з n символів. Блоки кодуються й декодуються окремо один від одного.

Надлишкові коди, у яких певні розряди кодових комбінацій відводяться на інформаційні та перевірочні символи, називаються роздільними. Роздільні блокові коди позначаються звичайно (n, k)-кодами, де n – довжина коду, число розрядів (символів), що складають кодову комбінацію, k – число розрядів, що відводять для інформаційних символів. Нероздільні коди не мають чіткого поділу кодової комбінації на інформаційні й перевірочні символи. Роздільні блокові коди у свою чергу поділяються на несистематичні й систематичні. У несистематичних кодах перевірочні символи являють собою суми підблоків з l розрядами, на які розділена послідовність інформаційних символів.

Найбільший клас роздільних блокових кодів становлять систематичні коди, у яких перевірочні символи визначаються в результаті проведення лінійних операцій над певними інформаційними символами. Для двійкових кодів ці операції зводяться до вибору кожного перевірочного символу таким чином, щоб його сума по модулю два з певними інформаційними символами була рівна нулю.

Оцінення кодів звичайно проводиться за їх основними характеристиками, що виражають різні кількісні і якісні показники. Дані характеристики використовуються при виборі кодів, призначених для передачі, зберігання й обробки інформації: довжина коду; основа коду; потужність коду; повне число кодової комбінації; число інформаційних символів; число перевірочних символів; надлишковість коду; швидкість передачі;

вага кодової комбінації; кодова відстань; вагова характеристика коду; імовірність невиявленої помилки; оптимальність коду; коефіцієнт помилкових переходів.

Основа коду m – кількість значень імпульсних ознак, що відрізняються одна від одної, які використовуються у кодових комбінаціях. Для випадку двійкових кодів $m = 2$. У функції значення імпульсних ознак використовуються цифри 0 й 1.

Повне число кодових комбінацій N — число всіх можливих комбінацій, рівне m^n (для двійкових кодів $N = 2^n$).

Потужність коду N_p — число кодових комбінацій (робочих кодових слів), які використовуються для передачі повідомлень, що називається також підмножиною дозволених кодових комбінацій. Комбінації підмножини, що залишилася, $N_з = N - N_p$ для передачі інформації не використовують і називають недозволеними (забороненими).

В простих кодах всі комбінації є дозволеними й помилки будь-якої кратності викликають перехід однієї комбінації в іншу, також дозволену, тобто використовувану для передачі інформації. Тому помилки в простому коді завжди приводять до неправильного прийому інформації. У коригувальних кодах внаслідок того, що для передачі інформації застосовують тільки дозволені комбінації $N_p < N$, можна виявляти й виправляти помилки.

Число інформаційних символів k – кількість символів (розрядів) кодової комбінації, призначених для передачі власне повідомлення. Очевидно, що

$$N_p = 2^k \quad . \tag{1.1}$$

Число перевірочних символів r – кількість символів (розрядів) кодової комбінації, необхідних для корекції помилок. Це число характеризує абсолютну надлишковість коду.

Однією з основних кількісних характеристик коригувального коду є коефіцієнт надлишковості, що характеризує «ціну» виявлення або виправлення помилок. У теорії кодування під надлишковістю коду R розуміють відносну надлишковість, що дорівнює відношенню числа перевірочних символів до довжини коду

$$R = 1 - \frac{k}{n} = \frac{r}{n}. \tag{1.2}$$

У більш загальному випадку ця формула може бути приведена до вигляду

$$R = 1 - \frac{\log_m N_p}{\log_m N}. \tag{1.3}$$

Надлишковість у коригувальних кодах знижує швидкість передачі інформації, що є істотним недоліком цих кодів. Однак їхнє застосування дозволяє значно підвищити правильність передачі.

Відносна швидкість передачі кодових комбінацій - відношення числа інформаційних символів до довжини коду

$$R' = \frac{k}{n}. \tag{1.4}$$

Вага кодової комбінації (коду) ω – кількість одиниць у кодовій комбінації. Наприклад, кодова комбінація 101100110 характеризується довжиною коду $n = 9$ і вагою $\omega = 5$.

Мірою відмінності між двома кодовими комбінаціями є кодова відстань Хеммінга d – число однойменних розрядів з різними символами. Практично кодова відстань виражається як вага суми по модулю два кодових комбінацій. Наприклад, для визначення кодової відстані між комбінаціями 10010111 й 00100110 необхідно просумувати їх по модулю два:

$$\begin{array}{r} 10010111 \\ +\,\underline{00100110} \\ 10110001 \end{array}.$$

Отримана в результаті підсумовування нова кодова комбінація характеризується вагою $\omega = 4$. Отже, кодова відстань між вихідними комбінаціями $d = 4$.

Коригувальний код як підмножина всіх дозволених комбінацій, можливих при даному правилі кодування, характеризується мінімальною кодовою відстанню d_{min}. У простому коді $d_{min} = 1$ і помилки будь-якої кратності викликають перехід однієї дозволеної комбінації в іншу, також дозволену. Тому помилки виявити неможливо.

Якщо в коді $d_{mln} = 2$, то однократні помилки будуть виявлятися, тому що будь-яка дозволена комбінація буде переходити в заборонену. При двократних помилках дозволені комбінації знову переходять у дозволені й помилки виявити неможливо. У загальному випадку для коригувального коду, що виявляє всі варіанти помилок кратності до $l_{\text{âèÿâë}}$ включно, необхідно й достатньо, щоб

$$d_{mln} \geq l_{\text{âèÿâë}} + 1. \qquad (1.5)$$

Найбільш загальна ідея виправлення помилок полягає в ототожненні прийнятої комбінації з найближчою від неї (у значенні кодової відстані Хеммінга) дозволеною комбінацією. Для виправлення всіх варіантів помилок кратності до $l_{\text{âèïð}}$ включно необхідно й достатньо, щоб

$$d_{mln} = 2\,l_{\text{âèïð}} + 1. \qquad (1.6)$$

У багатьох випадках коди забезпечують також виявлення й виправлення деякої частини помилок і більш високої кратності. Більш точна оцінка варіантів, які виявляють, і помилок, що виправляють, може бути отримана тільки побудовою коду і його аналізом. Варто помітити, що виправлення $l_{\text{âèïð}}$-кратних помилок може бути замінено виявленням помилок кратності $2\,l_{\text{âèÿâë}}$. Для виправлення всіх помилок кратності $l_{\text{âèïð}}$ і виявлення всіх варіантів помилок кратності $l_{\text{âèÿâë}}$ мінімальна кодова відстань повинна задовольняти співвідношення

$$d_{mln} \geq l_{\text{âèÿâë}} + l_{\text{âèïð}} + 1. \; (l_{\text{âèïð}} \leq l_{\text{âèÿâë}}). \qquad (1.7)$$

Коригувальні коди великої надлишковості мають звичайно й високу коригувальну здатність. Однак збільшення надлишковості коду приводить до зменшення швидкості передачі інформації, ускладнення пристроїв кодування і декодування й ін. Тому на практиці прагнуть використовувати коди з необхідною коригувальною здатністю при мінімальній надлишковості. Але точних формул, що встановлюють зв'язок між числом надлишкових символів r і кодовою відстанню d_{min}, дотепер не отримано. Відомі лише деякі окремі результати.

Вагова характеристика коду $W(\omega)$ – число кодових комбінацій ваги ω. Наприклад, для коду, що містить кодові комбінації 00000, 01110, 10101 й 11011, вагова характеристика $W(0) = 1$, $W(3) = 2$, $W(4) = 1$, тобто даний код складається з одного кодового слова ваги 0, двох слів ваги 3 й одного слова ваги 4.

Коефіцієнт помилкових переходів визначається як

$$K_{ё}(d) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N} \frac{N_{pi}(d)}{C_n^d}, \tag{1.8}$$

де $N_{pi}(d)$ — число робочих кодових комбінацій, що відстоять від i-ї кодової комбінації на відстань d;

C_n^d — число сполучень із n по d, $C_n^d = \frac{n!}{(n-d)\cdot d!}$.

Даний коефіцієнт показує, яка частка помилок кратності d не виявляється.

Для систематичних кодів всі кодові слова мають однаковий розподіл кодових відстаней до інших слів, тому розподіл кодових відстаней для будь-якого слова можна визначити, використовуючи вагову характеристику систематичного коду. Коефіцієнт помилкових переходів у цьому випадку

$$K_{ё}(\omega) = \frac{W(\omega)}{C_n^{\omega}}, \tag{1.9}$$

Імовірність невиявленої помилки $P_{і.ї.}$ — це ймовірність такої події, при якій прийнята кодова комбінація відрізняється від переданої, а властивості даного коду не дозволяють визначити факту наявності помилки:

$$P_{\text{í.ï.}} \leq \sum_{q=d}^{n} C_n^q p^q (1-p)^{n-q}, \tag{1.10}$$

де p і q – ймовірності відповідно неправильного і правильного прийому символів кодової комбінації, $q = 1 - p$.

Оцінимо також ймовірність помилкового декодування:

$$P_{\text{ï.ä.}} \leq \sum_{q=[d/2]}^{n} C_n^q p^q (1-p)^{n-q}. \tag{1.11}$$

Для характеристики повноти використання коригувальних можливостей коду застосовують поняття оптимальності коду. Оптимальність коду – така властивість коду, що забезпечує найменшу ймовірність невиявлення помилки серед всіх кодів тієї ж довжини n і надлишковості r, отже, оптимальним вважається код, що повністю реалізує можливості щодо виправлення (виявлення) помилок при мінімально можливій надлишковості. Оптимальність коригувального коду можна оцінити в такий спосіб.

За допомогою r перевірочних символів можна описати 2^r події. Звідси n-символьний код буде оптимальним, якщо він виправляє всі 2^r помилки, які в загальному випадку можуть мати неоднакову кратність.

Коригувальний n-символьний код, що виправляє всі варіанти помилок кратності до $l_{\text{âèïð}}$ включно, буде оптимальним, якщо $2^r = \sum_{i=0}^{l_{\text{âèïð}}} C_n^i$. Тільки при непарних n виконується ця рівність. Тому частіше ставиться завдання побудови коду, близького до оптимального, тобто

$$2^r \geq \sum_{i=0}^{l_{\text{âèïð}}} C_n^i. \tag{1.12}$$

Нерівність (1.12) дозволяє встановити для кожної довжини n верхню границю кодової відстані d_{min} при заданому числі перевірочних символів або нижню границю r при заданому d_{min}. Ці границі були знайдені Р. Хеммінгом. Відомі й інші верхні й нижні границі (Р.Р. Варшамова й Л. Гільберта, І. Плоткіна, П. Елайєса).

Границя Плоткіна дає верхню границю кодової відстані d_{min} при заданій основі коду m, числі розрядів у кодовій комбінації n і числі інформаційних розрядів k, тобто $d_{\min(\hat{a}\grave{a}\eth\tilde{o})}(m^k-1) \le n(m-1)m^{k-1}$; для двійкових кодів [6]

$$d_{\min} < \frac{2^{k-1}n}{2^{k-1}-1}. \tag{1.13}$$

Границя Варшамова—Гільберта визначає нижню границю для числа перевірочних розрядів, необхідного для забезпечення заданої кодової відстані d_{min} ,

$$2^{r_{\min}} > 1 + \sum_{i=1}^{d_{\min}-2} C_{n-1}^{i}, \tag{1.14}$$

де C_{n-1}^{i} — число сполучень із n — 1 елементів по i елементах.

Для вибору найбільш ефективного коду треба, крім мінімальної надлишковості при необхідній коригувальній здатності, забезпечити також узгодження коригувальної здатності коду з характером розподілу помилок у реальному каналі зв'язку. Тому спочатку визначають розподіл помилок у каналі й за узагальненими параметрами підбирають клас кодів, а потім із цього класу з використанням більш точної моделі потоку помилок знаходять код, що узгодиться з нею щонайкраще.

1.5 Порядок виконання роботи

Робоче завдання, яке виконується в лабораторії, полягає в закріпленні матеріалу, викладеного в пункті 1.4, а точніше в розрахунку основних характеристик і параметрів завадостійких кодів.

Таким чином, роботу слід виконувати в такій послідовності:

1 Розрахуйте повне число кодових комбінацій, кількість дозволених і заборонених кодових комбінацій, якщо відома кількість інформаційних символів k і довжина кодової комбінації n.

2 Розрахуйте надлишковість коду R та відносну швидкість передачі кодових комбінацій R', використовуючи вихідні дані першого завдання.

3 Визначте кодову відстань між двома заданими кодовими комбінаціями довільного коду, а також вагу кожної з них.

4 Визначте мінімальну кодову відстань довільного коду, здатного виявляти і виправляти помилки кратністю $l_{\text{âèÿâë}}$ і $l_{\text{âèïð}}$, якщо останні задані.

5 Визначте вагову характеристику коду, а також коефіцієнт помилкових переходів, якщо відомо кодові комбінації коду, а також те, що код систематичний.

6 Розрахуйте ймовірність невиявленої помилки $P_{\text{í.ï.}}$, якщо відома ймовірність неправильного прийому q, а також довжина кодової комбінації n.

7 Розрахуйте ймовірність помилкового декодування $P_{\text{ï.ä.}}$, якщо відома ймовірність неправильного прийому q, а також довжина кодової комбінації n.

8 Перейти до оформлення звіту з даної лабораторної роботи.

1.6 Зміст звіту

1.6.1 Назва і мета роботи.

1.6.2 Хід та результати виконання робочого завдання в лабораторії у вигляді розрахунків основних характеристик і параметрів завадостійких кодів.

1.6.3 Хід та результати виконання домашнього завдання у вигляді розрахунків основних характеристик і параметрів завадостійких кодів.

1.6.4 Висновки з роботи.

Контрольні питання

1 Поясніть різницю між завадостійкими кодами та примітивними (простими).

2 Що таке вектор коду та його вага, як вони визначаються ?

3 Як визначаються число дозволених та заборонених кодових комбінацій ?

4 Як визначається кодова відстань в коді ?

5 Поясніть зв'язок між здатністю виявлення помилок коду з його мінімальною кодовою відстанню.

6 Поясніть зв'язок між здатністю виправлення помилок коду з його мінімальною кодовою відстанню.

7 Як пов’язана мінімальна кодова відстань коду з його здатністю виявляти та виправляти помилки ?

8 Що таке збитковість і відносна швидкість коду ?

9 Наведіть приклади кодів, що здатні виявляти помилки.

10 Наведіть приклади кодів, що здатні виправляти помилки.

11 Що таке систематичні, блокові, роздільні, рівномірні коди? Наведіть приклади.

12 Що таке несистематичні, безперервні, нероздільні, нерівномірні коди ? Наведіть приклади.

13 Що таке двійкові, недвійкові, лінійні, нелінійні коди? Наведіть приклади.

14 Як визначається ймовірність невиявлення помилки в систематичному лінійному рівномірному коді ?

15 Як визначається ймовірність помилкового декодування в систематичному лінійному рівномірному коді?

2 Лабораторна робота 2
ДОСЛІДЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ КОДІВ ХЕММІНГА

2.1 Мета роботи

2.1.1 Засвоїти алгоритми процесів кодування та декодування лінійних кодів.

2.1.2 На основі цих алгоритмів синтезувати структурні схеми кодера та декодера.

2.1.3 Розрахунковим і експериментальним шляхом дослідити процеси кодування та декодування лінійних кодів Хеммінга.

2.1.4 Виконати оцінювання імовірності помилки в коді Хеммінга.

2.2 Програма роботи

2.2.1 Аналітичне дослідження процесів кодування та декодування лінійних кодів.

2.2.2 Експериментальне дослідження процесів кодування та декодування лінійних кодів.

2.2.3.Розрахунок імовірності помилки в коді Хеммінга.

2.3 Підготовка до роботи

2.3.1 За рекомендованою літературою [1, 2, 3, 5, 6] та конспектом лекцій у позааудиторний час засвоїти:

- мету, програму і вказівки щодо виконання роботи;
- теоретичні положення за темою роботи: поняття та алгоритми побудови кодових комбінацій лінійних кодів, виправлення помилок за їх допомогою, принципи синтезу кодеків лінійних кодів.

2.3.2 Виконати аналітичне дослідження процесів кодування та декодування лінійних кодів Хеммінга, в результаті чого синтезувати кодер та декодер, використовуючи теоретичні відомості даних методичних вказівок (п. 1.4). Результати оформити у вигляді виконання домашнього завдання, виданого викладачем.

2.3.3 Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.
2.3.4 Підготувати відповіді на контрольні запитання.

2.4 Короткі відомості з теорії

Лінійними називають рівномірні коди, перевірочні символи яких утворюються в результаті лінійних операцій над інформаційними символами. У двійкових кодах у функції лінійної операції використовують додавання по модулю 2.

Коди Хеммінга є лінійними кодами, що виправляють всі однократні помилки (d_{mln} = 3), а також виправляють всі одиночні й усі подвійні помилки (з відстанню d_{mln} = 4). Число необхідних перевірочних символів при заданому числі інформаційних для випадку $l_{\text{âèï ð}}$ = 1 розраховується таким чином:

$$2^r \geq n+1 = k+r+1, \text{ або } 2^k \leq \frac{2^n}{n+1}, \qquad (2.1)$$

де k й n можуть набувати тільки цілих значень.

Вираз (2.1) дозволяє обчислити також необхідне значення n при заданому k.

У кодах Хеммінга з комбінаціями однократних помилок E_i зіставляються зростаючі r-символьні комбінації синдромів S_i, що є особливістю цих кодів.

У таблиці Б.1 наведені параметри деяких кодів Хеммінга.

Двійковий код Хеммінга зручніше за все задавати за допомогою його перевірочної матриці. Перевірочна матриця кодів Хеммінга складається з n стовпців й r рядків, причому стовпцями є двійкові числа синдромів, розставлені в порядку зростання, тобто

$$H=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & h_{1n} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & h_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & h_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{r1} & h_{r2} & h_{r3} & h_{r4} & h_{r5} & h_{r6} & h_{r7} & \dots & h_{rn} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & n \end{Vmatrix}. \qquad (2.2)$$

З рядків перевірочної матриці випливають номери символів кодових комбінацій, що беруть участь у кожній з r перевірок. Як перевірочні символи зручно взяти такі, які входять тільки один раз у кожну перевірку, тобто $a_1, a_2, a_4, a_8, a_{16}$ й т.д. Номери символів, що беруть участь у перших чотирьох перевірках, наведені в таблиці Б.2.

Побудову коду Хеммінга розглянемо на прикладі використання для кодування комбінації 1100101. З нерівності (2.1) видно, що при $k = 7$, $n = 11$, а $r = 4$. Причому символи a_1, a_2, a_4, a_8 будуть перевірочними, а $a_3, a_5, a_6, a_7, a_9, a_{10}, a_{11}$ — інформаційними. Перевірочна матриця коду має вигляд:

$$H = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{2.3}$$

Далі, вважаючи, що число одиниць у групі символів, які беруть участь у кожній перевірці, парне, отримаємо систему перевірочних рівнянь

$$\begin{aligned} &a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_9 \oplus a_{11} = 0 \\ &a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} = 0 \\ &a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0 \\ &a_8 \oplus a_9 \oplus a_{10} \oplus a_{11} = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Отже, значення перевірочних розрядів знаходяться в такий спосіб:

$$\begin{aligned} &a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_9 \oplus a_{11} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \\ &a_2 = a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \\ &a_4 = a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1 \\ &a_8 = a_9 \oplus a_{10} \oplus a_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Таким чином, комбінація коду Хеммінга буде мати вигляд 00111000101.

Припустимо, що при проходженні комбінації по каналу зв'язку відбулася помилка в дев'ятому символі, тобто була прийнята комбінація 00111000001. Для знаходження номера позиції помилкового символу знову перевіримо на парність число одиниць у кожній групі символів кодових комбінацій й обчислимо символи синдрому відповідно до перевірочних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_9 \oplus a_{11} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1\\
&a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0\\
&a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0\\
&a_8 \oplus a_9 \oplus a_{10} \oplus a_{11} = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1.
\end{aligned} \qquad (2.6)$$

Отримана комбінація синдрому 1001 відповідає десятковому числу 9 і вказує номер помилкового символу. Варто помітити, що синдром вказує на помилково прийнятий символ кодової комбінації в стовпцях перевірочної матриці. Таким чином, перевірочна матриця є сукупністю всіх можливих синдромів у її стовпцях. Для виправлення помилкового символу необхідно його значення замінити на протилежне, тобто 1 на 0 або, навпаки, 0 на 1. У цьому випадку необхідно замінити 0 на 1 для виправлення помилкового дев'ятого символу.

Структурна схема кодера (11, 7)-коду Хеммінга наведена в додатку Б (рисунок Б.1). Інформаційні символи $a_3, a_5, a_6, a_7, a_9, a_{10}, a_{11}$ паралельно надходять в 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11-й елементи регістра й одночасно на входи суматорів по модулю 2, які відповідно до алгоритму кодування формують перевірочні символи. Значення перевірочних символів a_1, a_2, a_4, a_8 записуються в 1, 2, 4, 8-й елементи регістра. Далі всі символи комбінації коду Хеммінга під впливом тактових імпульсів зчитуються в канал передачі.

Схема декодера (11, 7)-коду Хеммінга (рисунок Б.2 додатка Б) містить регістр зсуву (РЗ), схему виявлення помилок 1 (СВП 1) на суматорах по модулю 2: М2-1 - М2-4, дешифратор і СВП-2: М2-5 - М2-11. Розглянемо роботу схеми при виявленні помилок. Комбінація коду Хеммінга, що виходить з каналу, записується в 1 - 11-й елементи РЗ. Після прийому всіх символів на виходах суматорів М2-1 — М2-4 утворюються символи синдрому.

При відсутності помилок у прийнятій комбінації на виходах суматорів М2-1 — М2-4 і на виході елемента 1 (логічне «АБО») буде двійковий символ 0. Якщо комбінація прийнята з виявленими помилками, то на виходах деяких суматорів з'явиться символ 1, а на виході елемента 1 — сигнал «Помилка», що забороняє зчитування з РЗ інформаційних символів $a_3, a_5, a_6, a_7, a_9, a_{10}, a_{11}$.

Для виправлення однократних помилок декодер доповнюють дешифратором синдрому (ДС) й СВП-2.

ДС призначений для перетворення *r*-символьної комбінації синдрому $S_i = S_1, S_2, S_3, S_4$, що формується суматорами М2-1 — М2-4, в *k*-символьну комбінацію помилки E_i із символом 1 на позиції помилкового інформаційного символу.

Пристрій виправлення помилок складається з *k* суматорів по модулю 2, на виходи яких надходять інформаційні символи з РЗ й символи з ДС. В результаті їхнього підсумовування з виходів суматорів М2-5 – М2-11 зчитується кодова комбінація без помилки (за умови, що в прийнятій комбінації була тільки однократна помилка). Розглянемо виправлення помилки, вважаючи, що вона відбулася в дев'ятому символі комбінації 00111000101. На виходах суматорів М2-1 – М2-4 буде сформована комбінація синдрому 1001, що подається на вхід ДС. На його виході отримаємо комбінацію 0000100. В результаті значення помилкового двійкового символу при проходженні через суматор М2-7 буде замінено протилежним, і на вихід декодера надійде кодова комбінація 1100101 з виправленою помилкою.

Якщо комбінація коду Хеммінга прийнята без помилок або помилки відбулися в перевірочних символах, то на виході дешифратора буде комбінація синдрому 0000000, що не впливає на символи комбінації, що надходить із виходу декодера.

У розглянутому коді Хеммінга перевірочні символи розташовані між інформаційними. Така побудова коду трохи ускладнює кодер і декодер. Тому часто застосовують кодери, в яких спочатку в канал зв'язку посилають інформаційні, а потім перевірочні символи. При цьому коригувальна здатність коду не змінюється, так як обидва коди еквівалентні.

У загальному випадку ймовірність прийому *n*-символьної кодової комбінації з помилкою $P_{ïîì} = 1 - q^n$. Так як код Хеммінга з d_{mln} = 3 виправляє всі однократні помилки, то ймовірність невиправленої помилки буде менше, ніж ймовірність появи однократної помилки $C_n pq^{n-1}$. Отже, імовірність помилки в коді Хеммінга

$$P_{\text{í.ï.}} = C_n^2 p^2 q^{n-2} + C_n^3 p^3 q^{n-3} + \dots \qquad (2.7)$$

Коди Хеммінга з d_{mln} = 3 можуть бути використані також для виявлення всіх одно- і двократних помилок і деяких варіантів помилок більш високої кратності. Для виявлення помилок виконують r перевірок на парність числа одиниць, і якщо хоча б в одній перевірці сума значень символів, що перевіряють, виявиться рівною одиниці, то це буде свідчити про наявність помилки в комбінації. Імовірність невиявленої трикратної помилки

$$P_{\text{í.ï.}} \approx C_n^3 p^3 q^{n-3}. \qquad (2.8)$$

Для одержання коду Хеммінга з d_{mln} = 4 необхідно до кодових комбінацій з d_{mln} = 3 додати один перевірочний символ й ввести одну перевірку на парність для всіх символів. При цьому код дозволить виправляти всі однократні й виявляти двократні помилки.

2.5 Вказівки щодо виконання роботи

2.5.1 Опис лабораторного макета

Лабораторний макет на тему «Коди Хеммінга» виконаний за допомогою пакета програм Simulink програмного середовища Matlab. Слід зазначити, що даний макет реалізує процес кодування і декодування (11,7)- коду Хеммінга, приклад якого детально проілюстрований в п. 1.4.

Розглянемо детально кожний з елементів макета, який складається з:

1) генератора інформаційної послідовності, виконаного у двох варіантах:

а) блок ЗМІННИЙ ГЕНЕРАТОР ІНФОРМАЦІЙНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ, який дає змогу ввести десяткове число I від 1 до 127. Цей спектр значень обумовлений тим, що максимальна кількість інформаційних комбінацій (11,7)- коду Хеммінга складає, як відомо, $2^k = 2^7 = 128$, однак через те, що нульова комбінація не використовується, то в макеті використовується лише 127 комбінацій. Вигляд меню ЗМІННОГО ГЕНЕРАТОРА ІНФОРМАЦІЙНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ подано на рисунку 2.1.

б) блок ГЕНЕРАТОР ІНФОРМАЦІЙНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ 1100101, яка відповідає десятковому числу 101. Цей генератор демонструє приклад, який наведений в п. 1.4;

2) ключів 1-3, які мають два положення (1 і 2);

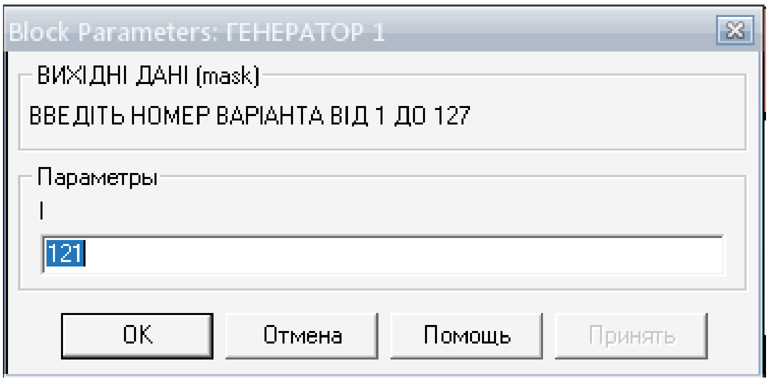

Рисунок 2.1 - Меню блока ЗМІННИЙ ГЕНЕРАТОР ІНФОРМАЦІЙНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

3) блоку КОДЕР ХЕММІНГА (11,7) – код, схема якого наведена в додатку Б (рисунок Б.1) і який складається з:

а) блоку РЕГІСТР ЗСУВУ;

б) блоків СУМАТОР ПО МОДУЛЮ 2;

в) блоку ФОРМУВАННЯ КОДОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ, що також являє собою регістр зсуву з елементами затримки;

4) генератора помилки, виконаного в трьох варіантах:

а) блок ВЕКТОР ОДНОКРАТНОЇ ПОМИЛКИ, який дозволяє обрати помилку у будь-якому розряді кодової комбінації шляхом введення десяткового числа К від 1 до 11 (цей спектр значень обумовлений тим, що довжина кодової комбінації (11,7)- коду Хеммінга складає 11 елементів). Слід зазначити, що при введенні цифри 0 вектор помилки не генерується, тобто кодова комбінація не спотворюється при передачі по каналу зв’язку. Меню блока вектора однократної помилки подано на рисунку 2.2.

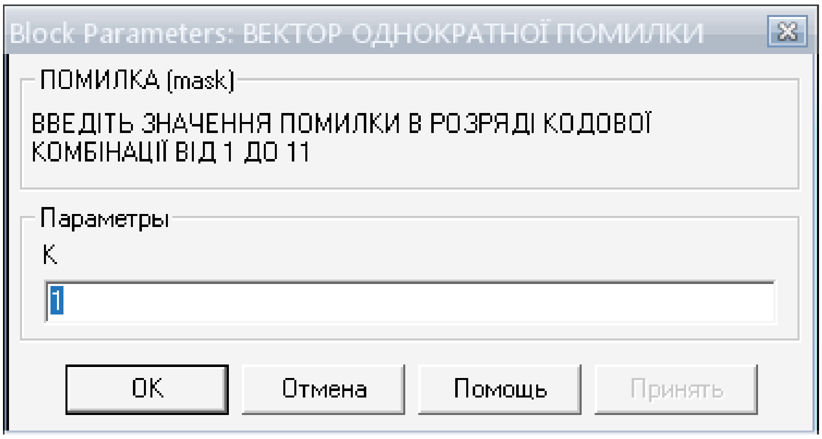

Рисунок 2.2 - Меню блока ВЕКТОР ОДНОКРАТНОЇ ПОМИЛКИ

б) блок ВИПАДКОВА ОДНОКРАТНА ПОМИЛКА, що являє собою генератор випадкової величини, в ролі якої виступає помилка в певному розряді кодової послідовності від 1 до 11;

в) блок ДВОКРАТНА ПОМИЛКА, яка приводить до неправильного декодування кодової комбінації на прийомі через те, що одна дозволена кодова комбінація в результаті спотворення переходить в іншу дозволену кодову комбінацію, так як даний код Хеммінга може виправляти лише одну помилку;

6) блоку ДЕКОДЕР ХЕММІНГА, який у свою чергу складається з:

а) блоку РЕГІСТР ЗСУВУ;

б) блоків СУМАТОР ПО МОДУЛЮ 2;

в) блоку ФОРМУВАЧ СИНДРОМУ, який формує синдром з виходів суматорів по модулю 2 (фактично це регістр зсуву);

г) блок ДЕШИФРАТОР, який виконує операцію порівняння синдрому, отриманого на виході формувача синдрому з синдромами 1-11, записаними в стовпцях перевірочної матриці. В результаті порівняння синдромів генерується виправляючий вектор 1-11, який має виправити спотворений символ кодової комбінації;

д) блоку ВИПРАВЛЕННЯ КОДОВОЇ КОМБІНАЦІЇ, що являє собою суматор по модулю 2;

7) двох блоків ВИДІЛЕННЯ ІНФОРМАЦІЙНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ, які з виправленої і невиправленої кодової комбінації (11,7) - коду Хеммінга виділяють інформаційну послідовність. Це дає змогу оцінити, як саме помилка в каналі зв’язку впливає на правильність прийому інформації.

8) блоків ОСЦИЛОГРАФ 1-10 для спостереження процесів кодування і декодування послідовностей. Ці блоки – Scope (Simulink\Sinks\Scope).

Передбачається, що студент перед виконанням даної лабораторної роботи отримує домашнє завдання у вигляді семирозрядної інформаційної послідовності, яку він повинен закодувати і декодувати кодом Хеммінга з однократною помилкою в заданому розряді при передачі по каналу зв’язку, а також без помилки. Виконавши домашнє завдання у вигляді перетворень, процедура побудови яких докладно наведена в п. 1.4 та відповідній рекомендованій літературі, а також структурних схем кодерів та декодерів кодів Хеммінга, студенти мають можливість закріпити теоретичні знання з даної теми, а також перевірити правильність виконання домашнього завдання.

Лабораторний макет передбачає виконання роботи в чотирьох режимах:

1) режим роботи кодера та декодера без спотворення переданих інформаційних послідовностей і відповідно без помилок;

2) режим роботи кодера та декодера зі спотворенням переданих інформаційних послідовностей в заданому (фіксованому) дослідником розряді, що призводить до однократних помилок;

3) режим роботи кодера та декодера зі спотворенням переданих інформаційних послідовностей в певному розряді, що визначається випадковим чином і призводить до однократних помилок;

4) режим роботи кодера та декодера зі спотворенням переданих інформаційних послідовностей у двох фіксованих розрядах, що призводить до двократних помилок і неправильного декодування на прийомі.

Таким чином, розглянемо порядок виконання роботи в кожному з зазначених вище режимів.

2.5.2 Порядок виконання роботи

Порядок виконання роботи в режимі 1 і 2:

1) відкрити файл Hemming_code;

2) встановити КЛЮЧ 1 в положення 1;

3) натиснути два рази на блок ЗМІННИЙ ГЕНЕРАТОР ІНФОРМАЦІЙНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ і відповідно до певного варіанта ввести значення І від 1 до 127 в десятковій формі, в результаті чого блок автоматично перетворює це число в двійкову форму і генерує сигнал у вигляді послідовності логічних одиниці (1) і нуля (0);

4) встановити КЛЮЧ 3 в положення 2;

5) натиснути два рази на блок ВЕКТОР ОДНОКРАТНОЇ ПОМИЛКИ і відповідно до певного варіанта ввести значення К = 0 для режиму 1 та значення К від 1 до 11 в десятковій формі для режиму 2, в результаті чого блок автоматично генерує сигнал завади у вигляді послідовності логічних одиниці (1) і нуля (0), який в залежності від введеного числа спотворює кодову послідовність у відповідному розряді;

6) послідовно натиснути: два рази на блок СКИДАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ, один раз на значок Start Simulation (він знаходиться у верхній частині поля Simulink на панелі інструментів і має вигляд чорного трикутника), два рази на блок ГЕНЕРАТОР ПОМИЛКИ, один раз на значок Start Simulation, 2 рази на блок ДЕШИФРАЦІЯ, один раз на значок Start Simulation, в результаті чого виконується запуск макета;

7) натиснути два рази на блок ОСЦИЛОГРАФ 1, де на новому вікні можна спостерігати сформовану інформаційну послідовність згідно з заданим варіантом (вона знаходиться в межах часу від 0 до 7 секунд, тобто перші 7 тактів);

8) натиснути два рази на блок КОДЕР ХЕММІНГА, блок ФОРМУВАННЯ КОДОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ і на блок ОСЦИЛОГРАФ 5, де можна спостерігати процес формування кодової послідовності у вигляді стану кожного з елементів регістра зсуву;

9) закрити вікна блоків КОДЕР ХЕММІНГА та ФОРМУВАННЯ КОДОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ і натиснути два рази на блок СЦИЛОГРАФ 2, де можна спостерігати процес спотворення кодової послідовності завадою у вигляді однократної помилки (для режиму 2), або без помилок (режим 1). Слід зазначити, що через додавання по модулю 2 першого та сьомого елемента інформаційної послідовності (див. п. 2.4) при кодуванні необхідно затримати перший символ на 6 тактів. Таким чином, кодова комбінація коду Хеммінга також затримана на 6 тактів (її слід спостерігати в проміжку часу з 6 по 17 секунди);

10) натиснути два рази на блок ДЕКОДЕР ХЕММІНГА і два рази на блок ОСЦИЛОГРАФ 6, де можна спостерігати сформований синдром, який слід спостерігати з 16 по 20 секунди (всього чотири символи);

11) натиснути два рази на блок ДЕШИФРАТОР і два рази на блоки ОСЦИЛОГРАФ 8-9, де можна спостерігати процес порівняння отриманого синдрому з можливими СИНДРОМАМИ 1-11, натиснути два рази на блок ОСЦИЛОГРАФ 10 і побачити, який саме виправляючий вектор генерується в результаті порівняння синдромів;

12) послідовно закрити вікна блоків ДЕШИФРАТОР і ДЕКОДЕР ХЕММІНГА і натиснути два рази на блоки ОСЦИЛОГРАФ 3 і 4, де можна спостерігати відповідно виправлену і невиправлену кодові комбінації та ефект від виправлення кодом Хеммінга, а також без нього.

Порядок виконання роботи в режимі 3:

1) виконати пп. 1-3 для режимів 1-2;

2) встановити КЛЮЧ 3 в положення 1, а КЛЮЧ 2 в положення 2;

3) виконати пп. 6-12 для режимів 1-2;

Порядок виконання роботи в режимі 4:

1) виконати пп. 1.1-1.3 для режимів 1-2;

2) встановити КЛЮЧ 3 в положення 1, а КЛЮЧ 2 в положення 1;

3) виконати пп. 1.6-1.12 для режимів 1-2.

4) перейти до оформлення звіту з даної лабораторної роботи.

2.6 Зміст звіту

2.6.1 Назва і мета роботи.

2.6.2 Схема лабораторного макета

2.6.3 Хід та результати виконання домашнього завдання у вигляді алгебраїчних виразів лінійних кодів Хеммінга, а також схем кодерів та декодерів.

2.6.4 Результати виконання експериментального дослідження лінійних кодів Хеммінга в чотирьох режимах за допомогою лабораторного макета в пакеті Simulink.

2.6.5.Висновки з роботи.

Контрольні питання

1 Поясніть принципи побудови лінійних кодів.

2 Як виявляються помилки лінійними кодами ?

3 Як виправляються помилки лінійними кодами ?

4 Як пов'язана кількість контрольних розрядів із загальною кількістю символів кодової комбінації в лінійному коді Хеммінга при $d_{mln} = 3$?

5 Як визначається ймовірність появи помилок, що не виправляються, в лінійному коді ?

6 Як визначається ймовірність появи помилок, що не виявляються, в лінійному коді?

7 Як будується перевірочна матриця для лінійного коду ?

8 Як визначаються синдроми помилки в лінійних кодах ?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Кудряшов В.А., Семенюта Н.Ф. Передача дискретной информации на железнодорожном транспорте: Учеб. для вузов ж.-д. трансп. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Транспорт, 1986. – 295 с.

2 Кларк Дж., мл., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи / Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.

3 Золотарёв В.В., Овечкин Г.В. Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы: Справочник / Под ред. чл.-кор. РАН Ю.Б. Зубарева. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 126 с.

4 Теория электрической связи: Учеб. для вузов / А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, В.И. Коржик, М.В. Назаров; Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 1999. – 432 с.

5 Емельянов Г.А., Шварцман В.О. Передача дискретной информации: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1982. – 240 с.

6 Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки / Пер. с англ. Под ред. Р.Л. Добрушина и С.И. Самойленко. – М.: Мир, 1976. – 594 с.

Додаток Б

Таблиця Б.1 - Параметри кодів Хеммінга

k	*R*	*n*	*R=r/n*	*d*	*k*	*r*	*n*	*R=r/n*	*d*
4	3	7	0,429	3	4	4	8	0,5	4
11	4	15	0,267	3	11	5	16	0,312	4
26	5	31	0,161	3	26	6	32	0,188	4
57	6	63	0,095	3	57	7	64	0,109	4
120	7	127	0,055	3	120	8	128	0,063	4
247	8	255	0,031	3	247	9	256	0,035	4
502	9	511	0,0177	3	502	10	512	0,0195	4
1013	10	1023	0,0098	3	1013	11	1024	0,0107	4

Таблиця Б.2 - Номери символів, що беруть участь у перших чотирьох перевірках

Номер перевірки	Символи, що перевіряють	Номер перевірочного символу
1	1, 3, 5 , 7 , 9, 11, 13, 15 ,17, 19, …	1
2	2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, …	2
3	4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, …	4
4	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, …	8

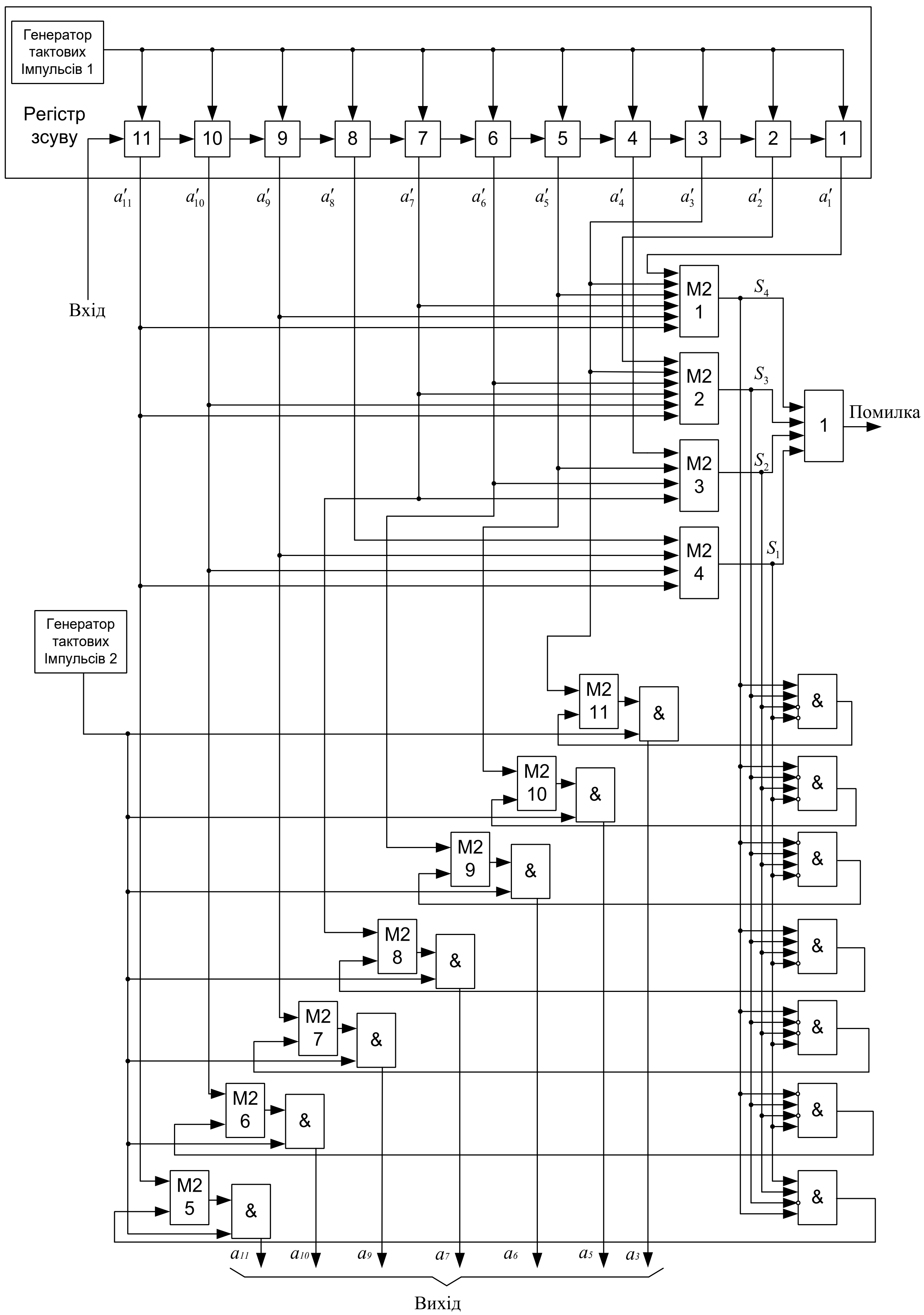
Генератор тактових Імпульсів 1
Регістр зсуву
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
a'_{11} a'_{10} a'_9 a'_8 a'_7 a'_6 a'_5 a'_4 a'_3 a'_2 a'_1
Вхід
M2 1
M2 2
M2 3
M2 4
S_4 S_3 S_2 S_1
1
Помилка
Генератор тактових Імпульсів 2
M2 11
M2 10
M2 9
M2 8
M2 7
M2 6
M2 5
&
a_{11} a_{10} a_9 a_7 a_6 a_5 a_3
Вихід

Рисунок Б.2 – Структурна схема декодера (11, 7)-коду Хеммінга

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт з дисципліни

«Теорія електричного зв'язку»

Відповідальний за випуск Батаєв О.П.

Редактор

Підписано до друку 15.12.08 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 3,0 Обл.-вид.арк. 3,25.

Замовлення №   Тираж   Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК № 112 від 06.07.2000 р.

Друкарня УкрДАЗТу,

61050, Харків – 50, пл. Фейєрбаха, 7

Додаток А

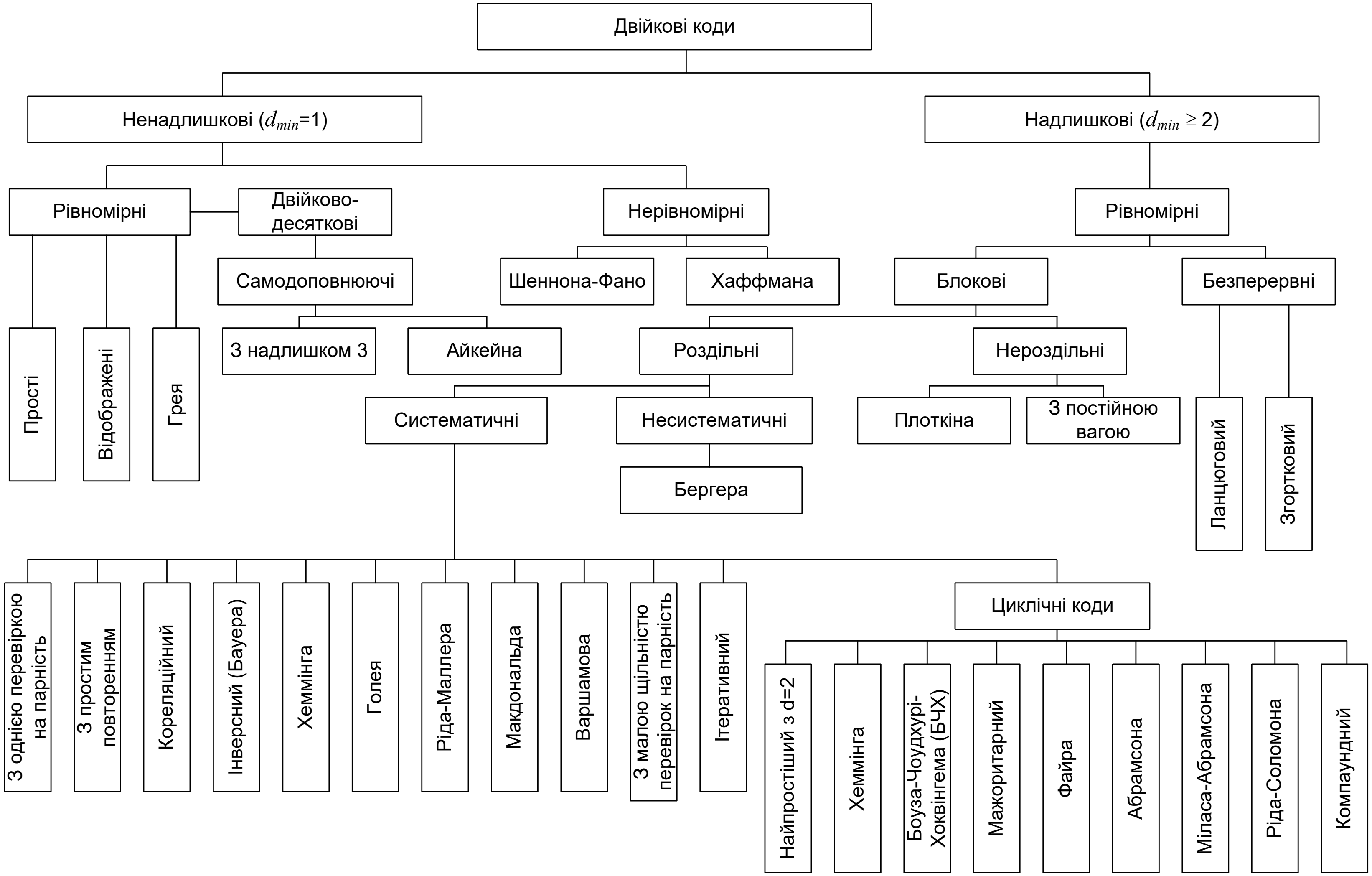

Рисунок А.1 – Класифікація двійкових кодів

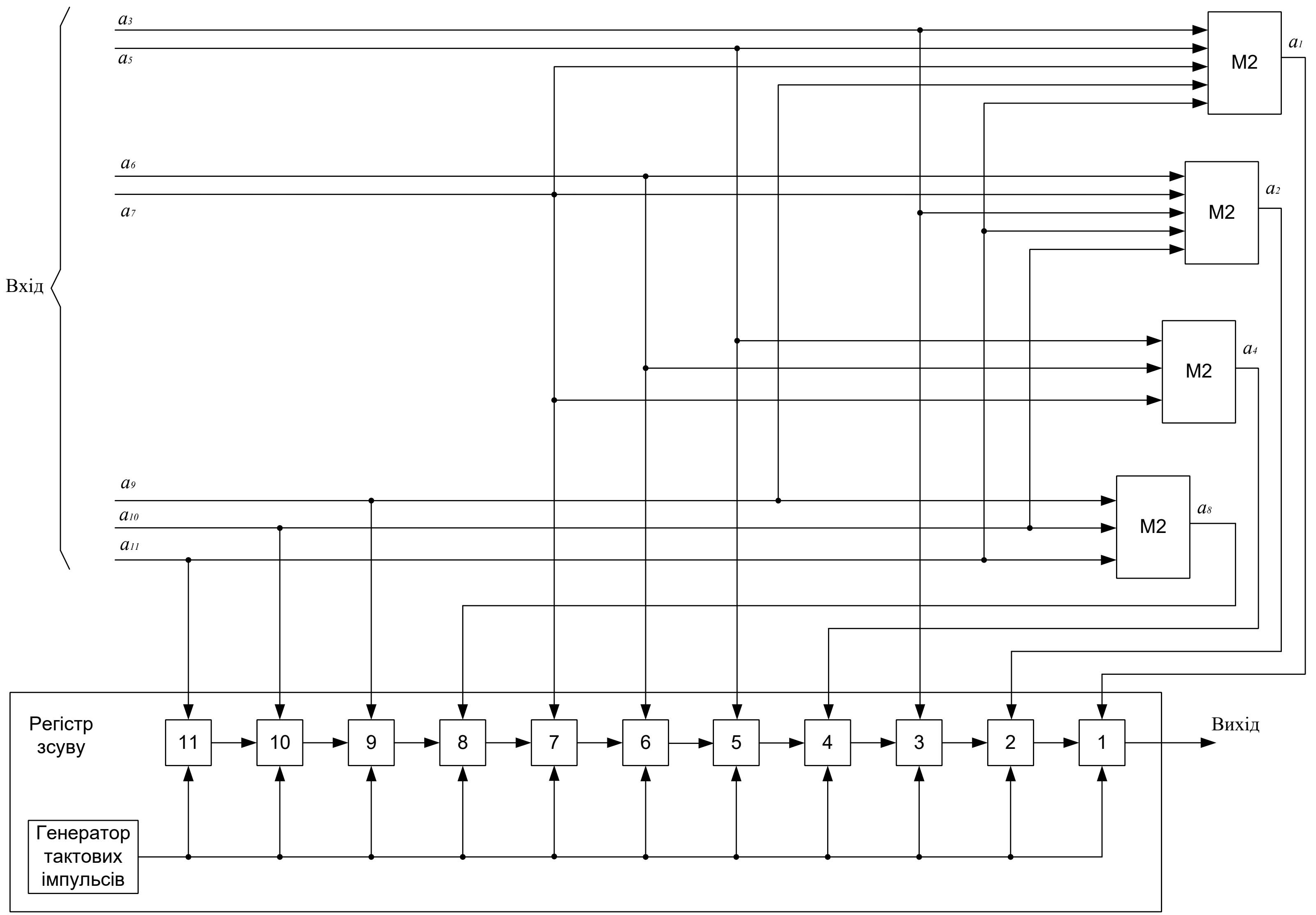

Рисунок Б.1 – Структурна схема кодера (11, 7)-коду Хеммінга