УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

РЯДИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ
з дисципліни

“ВИЩА МАТЕМАТИКА”

для студентів всіх форм навчання

Харків 2009

Завдання і методичні вказівки розглянуті і рекомендовані до друку на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 2 від 6 жовтня 2003 р.

Рекомендуються для студентів загальнотехнічних спеціальностей всіх форми навчання.

Укладачі:
доц. Науменко В.В.,
доц. Осмаєв О.А.
доц. Стрельнікова О.О.

Рецензент
проф. Куліш Ю.В.

ВСТУП

Завдання і методичні вказівки призначені для активного вивчення студентами механічного та будівельного факультетів УкрДАЗТ денної форми навчання таких розділів курсу вищої математики: числові та степеневі ряди, ряди Тейлора та ряди Фур'є. Вони містять стислий виклад необхідних теоретичних питань та забезпечені прикладами, що пояснюють теоретичні положення та дозволяють самостійно розв'язувати задачі з даної теми. В завданнях і методичних вказівках міститься 8 завдань (по 30 варіантів у кожному), розв'язання яких дозволить опанувати матеріал з даної теми.

Числові ряди

Розглянемо нескінчену числову послідовність $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n, \ldots$.Це означає, що ми маємо закон (формулу), за якою можна знайти довільний член послідовності a_n, задаючи його номер n, тобто a_n є заданою функцією від n.

Приклад. $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{2n+1}, \ldots$ Звідси можемо знайти, при необхідності:

$a_5 = \frac{1}{11}$, $a_{100} = \frac{1}{201}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2n+3}$ та ін.

Назвемо частковою (N-ою) сумою послідовності число

$$S_N = a_0 + a_1 + \ldots + a_N = \sum_{n=0}^{N} a_n .$$

Розглянемо границю $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$. Якщо існує таке скінчене число S, що $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = S$, то воно називається сумою ряду, при цьому кажуть, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ збігається до S і цей факт записують у вигляді

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \qquad (1)$$

Якщо виявиться, що $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = \infty$, або $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$ не існує, то кажуть, що ряд розбігається. В цьому випадку його сума не існує.

Приклад . Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$ розбігається, тому що $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} n = \infty$.

Приклад . Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ розбігається. Дійсно, маємо

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + \ldots\ . = \begin{cases} 1, & \textit{якщо}\ \ N\ \ \textit{парне} \\ 0, & \textit{якщо}\ \ N\ \ \textit{непарне} \end{cases}.$$

Тому $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$ не існує, і ряд розбігається.

Приклад. Розглянемо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, де q – довільне число. Неважко бачити, що послідовність 1, q, q^2, … q^n… є геометричною прогресією із знаменником q. Відомо, що $S_N = \dfrac{1-q^N}{1-q}$, отже

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1-q^N}{1-q} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & якщо \quad |q|<1 \\ \infty, & якщо \quad |q|\geq 1 \end{cases}.$$

Висновок. Цей ряд збігається до числа $\dfrac{1}{1-q}$ для всіх q, що $|q|$<1, і розбігається для всіх інших q.

Приклад. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots$ збігається, оскільки він є окремим випадком попереднього ряду при q=0.5, при цьому S =2.

Зауважимо, що знайти точне значення S вдається не часто, у більшості випадків задовольняються його наближеним значенням, або просто обмежуються відповіддю на запитання: збігається ряд чи ні?

Загальні властивості рядів

1. Ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n$ $(\lambda \in R, \quad \lambda \neq 0)$ або обидва збігаються, або обидва розбігаються. Іншими словами, домноження кожного члену ряду на одне і теж число не впливає на факт збіжності ряду (але сума, якщо вона існує, змінюється ,звичайно, в λ разів), тобто якщо $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$, тоді $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lambda S$. Таким чином сталий множник для збіжних рядів можна виносити за знак суми.
2. Ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ (k>0-довільне число) також обидва збігаються або обидва розбігаються, тобто, якщо з ряду видалити декілька перших членів (a_0, a_1, a_2, a_3, $\ldots a_{k-1}$), то це не вплине на факт існування суми ряду (хоча, звичайно, скінчену суму - змінить). Іншими словами, збіжність ряду не залежить від того, які в нього перші декілька членів. Вона залежить від того, як швидко спадають члени ряду на нескінченності. З урахуванням цієї властивості інколи поведінку членів ряду починають вивчати не з a_0, а з $a_k (k \geq 1)$.
3. Якщо ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S_1$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = S_2$ збігаються, тоді ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ також збігається, (його сума $S = S_1 \pm S_2$). Якщо один з перших двох рядів збігається,

а другий – ні, тоді ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \pm b_n\right)$– розбігається; якщо обидва розбігаються – результат невизначений (оскільки нескінченності можуть “погаситися”).

Ці властивості застосовуються як допоміжні при дослідженні рядів.

Для з’ясування збіжності рядів існує декілька ознак. Кожна з них може відповісти на запитання про збіжність ряду або не відповісти на нього. У останньому випадку треба застосовувати іншу ознаку.

Необхідна умова розбіжності ряду.

Можна довести, що для збіжного ряду $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ є необхідною умовою збіжності). З цього факту випливає, що, коли ця умова не виконується, ряд не може збігатися, тобто має місце така ознака розбіжності ряду **:**

якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (або ця границя не існує), тоді ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ розбігається. (2)

Приклад. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\dfrac{n}{2n+1}}$ розбігається, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{n}{2n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{n}{2n}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} \neq 0$.

Зауваження: У випадку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ питання про поведінку ряду цією ознакою не з’ясовується, тобто ряд може як збігатися так і розбігатися. Наприклад, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ розбігається (цей факт буде доведено далі).

Ознаки збіжності рядів з додатними членами

Нехай ми маємо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, у якому $a_n>0,\ \forall n$.

Ознака Даламбера : Якщо границя l відношення двох сусідніх членів ряду менша за 1, тоді ряд збігається, якщо ця границя більша за 1, тоді цей ряд розбігається. Якщо l =1, тоді питання про збіжність ряду не може бути з’ясовано за допомогою цієї ознаки. Ознака Даламбера може бути схематично записана у вигляді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad \begin{cases} <1 & \textit{збігається} \\ =1? & \\ >1 & \textit{розбігається} \end{cases} \tag{3}$$

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+4}{2^{2n}}$. Тут

$$a_n = \frac{n^2+4}{2^{2n}};\ a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+4}{2^{2(n+1)}}; \quad l = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+5)2^{2n}}{(n^2+4)2^{2n+2}} = \frac{1}{4} < 1.$$

Одже, ряд збігається.

Радикальна ознака Коші має такий схематичний вигляд:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l \quad \begin{cases} <1 & \text{збігається} \\ =1 & ? \\ >1 & \text{розбігається} \end{cases} \qquad (4)$$

Зміст позначень у цій ознаці такий же, як у ознаці Даламбера.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+3}\right)^n$. Знаходимо $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=\frac{1}{2}<1$, тобто цей ряд збігається.

Зауважимо, що застосовуючи достатню ознаку розбіжності у цьому прикладі, ми одержимо $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, тобто питання не з'ясовується; застосування ж ознаки Даламбера приводить до досить складних обчислень.

Інтегральна ознака Коші. Нехай $a_n = f(n) > 0$, і $f(x)$ монотонно спадає для $x \geq 1$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ та невласний інтеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ збігаються та розбігаються одночасно**.**

Геометричний зміст інтегральної ознаки Коші полягає у такому. На рис. 1 зображено графік функції $f(x)$. За геометричним змістом $\int_1^{\infty}f(x)dx$ є площею фігури, що обмежена лінією $f(x)$. На цьому ж рисунку бачимо, що $\Sigma_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ – сума площ описаних прямокутників, а $\Sigma_2=\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ – сума площ вписаних прямокутників.

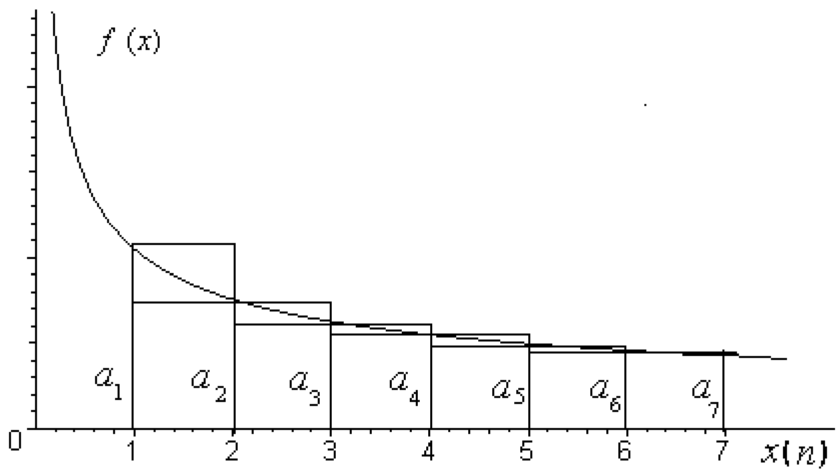

Рис. 1

Неважко бачити, що

$$\Sigma_2<\int_1^{\infty}f(x)dx<\Sigma_1.$$

Звідси отримаємо висновок: якщо $\int_1^{\infty}f(x)dx$ збігається, то збігається і ряд

$\Sigma_2 = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$. Якщо $\int_1^{\infty} f(x)dx$ розбігається, то розбігається і ряд $\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Звідси легко одержати і остаточний висновок: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ збігаються та розбігаються одночасно.

Приклад. Дослідити на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (ряд Діріхлє $p>0$). Маємо $f(x) = \frac{1}{x^p}$, і виконані умови інтегральної ознаки Коші. Обчислимо відповідний інтеграл та отримаємо при $p\neq 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} x^{-p}dx = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} x^{-p}dx = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_1^A = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[A^{1-p} - 1\right] = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p>1 \\ \infty, & p<1 \end{cases}$$

Окремо розглянемо випадок $p=1$. Маємо $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty} \ln A = \infty$.

Остаточно одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} \textit{збігається}, \ \textit{якщо}\ p>1 \\ \textit{розбігається}, \textit{якщо}\ \ p\leq 1 \end{cases} \tag{5}$$

Приклад. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ збігається ($p=1.5$), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ розбігається ($p=1/3$).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ називається також гармонічним. Він розбігається ($p=1$).

Ознака порівняння I (мажорантна). Припустимо, ми маємо два ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Припустимо також, що $0\leq a_n \leq b_n \ \forall n$. Тоді:

1) Якщо $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ розбігається, тоді і $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ розбігається, тобто розбіжність ряду з менших членів веде до розбіжності ряду з більших членів, що є природним.
2) Якщо $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ збігається, тоді й $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ збігається. Цей факт також є зрозумілим: якщо сума більших членів є скінченою, тоді і сума менших членів буде мати скінчену границю.

Ознака порівняння II (гранична).

Знову розглянемо два ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ($a_n>0;\ b_n>0, \forall n$). Припустимо, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \quad (\lambda \neq 0; \quad \lambda \neq \infty). \tag{6}$$

Тоді обидва ряди поводяться однаково, тобто: або обидва збігаються, або обидва розбігаються.

Пояснення. Наявність властивості (6) фактично означає, що a_n відрізняється від b_n (принаймні для великих n) приблизно в λ разів. Тому згідно загальної властивості (ЗВ) 1 (стор.2) обидва ряди повинні збігатися або розбігатися одночасно. При застосуванні ознак порівняння один з рядів – той, збіжність якого необхідно з'ясувати, другий (він називається рядом порівняння) – ми повинні вибрати самі і мати відомість про його збіжність або розбіжність.

У якості рядів порівняння часто застосовуються ряди Діріхлє (5).

Приклад. Дослідимо на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$. Зрозуміло, що $\ln n > 1$, якщо $n>2$, а цього згідно з ЗВ2 достатньо для подальших висновків. Маємо нерівність $\frac{1}{n} < \frac{\ln n}{n}$,. але ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається. Тому на основі мажорантної ознаки порівняння робимо висновок про розбіжність початкового ряду.

Приклад. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$. Спробуємо застосувати ідею попереднього прикладу. Маємо $\frac{1}{n^2} < \frac{\ln n}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається як ряд Діріхлє ($p=2$), але це не дозволяє з'ясувати поведінку даного ряду, оскільки тут збігається менший з рядів, а це не дає можливості зробити будь-якій висновок відносно більшого ряду.

Дослідження цього ряду можна провести, застосовуючи ознаку порівняння таким чином. Доведемо, спочатку що $\ln n < \sqrt{n}$. Дійсно, розглянемо функцію $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$. Маємо $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$. Звідси маємо, що для $\sqrt{x} > 2$ похідна $f'(x) < 0$, тобто функція $f(x)$ спадає для $x > 4$. При цьому маємо $f(7) \approx -0.62 < 0$. Внаслідок спадання ця функція буде від'ємною і для $x > 4$, тобто $\ln x < \sqrt{x}$, і $\ln n < \sqrt{n}$. Звідси маємо

$$a_n = \frac{\ln n}{n^2} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = b_n \qquad (n > 4).$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається (ряд Діріхлє з p=3/2), то згідно з граничною ознакою порівняння збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приклад. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-8}$. Маємо $a_n = \frac{1}{3n^2-8}$. Візьмемо $b_n = \frac{1}{n^2}$.

Неважко довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2-8} = \frac{1}{3} (\neq 0; \quad \neq \infty)$.

Застосовуючи граничну ознаку порівняння, дістанемо висновку: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

збігається, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається (це ряд Діріхлє з p=2).

Зауваження: У останніх трьох прикладах умови відповідних теорем виконуються не для усіх членів ряду, а починаючи з деякого $k \geq 1$. Власне кажучи, ми довели збіжність рядів $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, але з урахуванням ЗВ2, ті ж висновки дійсні і для заданих рядів.

Зауваження: З урахуванням ЗВ1 при λ = –1 в (6) наведені властивості придатні і для дослідження рядів, усі члени яких є від'ємними.

Знакозмінні ряди.

Відкинемо тепер припущення про додатність (знакосталість) членів ряду (1), тобто будемо вважати, що серед його членів є як додатні так і від'ємні числа. В такому випадку усі наведені вище ознаки, окрім достатньої ознаки розбіжності, безпосередньо не можуть бути застосовані (вони справедливі тільки для знакопостійних рядів!), але вони будуть корисними завдяки наступній *теоремі про абсолютну збіжність :*

Теорема: Якщо ряд, побудований з абсолютних величин членів ряду (1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \tag{7}$$

збігається, то збігається і ряд (1).

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$. Очевидно, серед чисел $\sin n$ зустрічаються як додатні, так і від'ємні. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$. Маємо $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається (p=2), то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$. За теоремою про абсолютну збіжність збігається і початковий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Зауважимо, що ми не маємо ніякої інформації про збіжність ряду (1), якщо ряд (7) розбігається.

Застосовується така термінологія:

Якщо ряд (7) збігається, то кажуть, що ряд (1) збігається абсолютно.

Якщо ряд (7) розбігається, а ряд (1) – збігається то кажуть, що ряд (1) збігається умовно.

Мають місце узагальнені ознаки Даламбера:

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \quad \begin{cases} <1 & \textit{збігається абсолютно} \\ =1 & ? \\ >1 & \textit{розбігається} \end{cases}$$

та Коші:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \quad \begin{cases} <1 & \textit{збігається абсолютно} \\ =1 & ? \\ >1 & \textit{розбігається} \end{cases}$$

Ці ознаки можна використовувати для аналізу збіжності знакозмінних рядів.

Приклад: Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n!}$. Застосовуючи узагальнену ознаку Даламбера, маємо $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0 < 1$. Тому ряд збігається абсолютно, а, значить, збігається у звичайному розумінні.

Знакопереміжні ряди

Це такі знакозмінні ряди, в яких сусідні члени обов'язково мають протилежні знаки. Такі ряди можуть бути записані у вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 \ldots, \qquad a_n > 0 .$$

Для рядів такої структури справджується така теорема.
Теорема Лейбніца: Знакопереміжний ряд збігається, якщо:
1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;
2) його члени монотонно спадають, тобто $a_n > a_{n+1} \quad \forall n$.

Приклад: Дослідити на збіжність знакопереміжний гармонічній ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.
Неважко бачити, що обидві умови теореми Лейбніца виконані, тому цей ряд збігається. Зауважимо, що збіжність – умовна, оскільки ряд з модулів (гармонічний ряд) розбігається.

Особливість знакопереміжних рядів полягає в тому, що для них виконується нерівність

$$|S - S_n| < a_{n+1}. \tag{8}$$

якій можна надати такий зміст. Обчислення точної суми ряду S у загальному випадку є складною задачею. (Нами було наведено лише один випадок, коли її досить просто обчислити – геометрична прогресія). Обчислення суми S_n, напроти, задача, яка не містить, з точки зору математики, труднощів. На практиці часто обчислюють (для достатньо великих n) часткову суму ряду S_n і вважають, що $S \approx S_n$. У випадку знакопереміжного ряду нерівність (8) дозволяє оцінити похибку, з якою ця наближена рівність виконується, а саме: похибка менша за перший із неврахованих членів.

Розв'язуючи (8), можна одержати, що невідома сума ряду S знаходиться в таких межах:

$$S_n - a_{n+1} < S < S_n + a_{n+1}. \tag{9}$$

Приклад. Обчислити наближено суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(n+1)}$, взявши чотири його члени, та оцінити похибку.

Виконуючи обчислення, отримаємо

$$a_0 = 1; \quad a_1 = \frac{1}{8}; \quad a_2 = \frac{1}{48}; \quad a_3 = \frac{1}{256}; \quad a_4 = 7.8125 \cdot 10^{-4},$$

Таким чином, $S_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3$=0.89192703,
а нерівність (8) набуває вигляду

$$|\,S-0.891927083\,|<7.8125\cdot 10^{-4},$$

Застосовуючи (9) її можна записати як

$$0.891145833<S<0.892707071,$$

Звичайно останню нерівність огрублюють, після чого вона дістає вигляду

$$0.891<S<0.893,$$

що інколи записують так $S\approx 0.892\pm 0.001$.

Можна також поставити задачу про знаходження суми S знакопереміжного ряду з заданою точністю ε. Припустимо, що ε=2·10^{-4}. Знайдемо такий член ряду a_{n+1}, для якого a_{n+1}<$2\cdot10^{-4}$. Усі обчислені вище більші ніж ε, але $a_5 = 1.6\cdot10^{-4} <$ ε. На основі (8) маємо $|S-S_4| <1.6\cdot10^4 < 2\cdot10^4$, тобто S_4 задовольняє поставлену вимогу. Обчислюючи, одержимо

$|S–0.891145833\ |<1.6\cdot10^{-4}$, або, виконуючи дії, аналогічні наведеним вище, отримаємо $0.8910<S<0.8914$ або $S\approx0.8912\pm2\cdot10^{-4}$.

Функціональні ряди

Розглянемо нескінчену послідовність функцій $u_0(x),u_1(x)\ldots$, які мають спільну область визначення $D_{\text{в}}$.

Ряд з функцій (він називається функціональним рядом) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ є числовим рядом, якщо x – фіксоване число з $D_{\text{в}}$. Для деяких x він збігається, для інших – розбігається. Сукупність тих x , для яких ряд збігається, утворює так звану область збіжності ряду D.

Очевидно, якщо $x\in D$, сума ряду S існує і залежить від x, тобто є функцією від x, і для функціональних рядів можна записати

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=S(x) \qquad \forall\ x\in D.$$

Основні задачі при вивченні функціональних рядів полягають у тому,щоб визначити область збіжності D та знайти $S(x)$.

Одними з простіших типів функціональних рядів, що часто застосовуються, є так звані степеневі ряди.

Степеневі ряди

Степеневі ряди – це функціональні ряди, що мають вигляд

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\ ,$$

де x_0, a_n $(n=0,1,2,\ldots)$ – задані фіксовані дійсні числа, x – змінна. Можна розглядати випадок, коли усі ці числа комплексні, але ми цього робити.не будемо .

Для степеневих рядів область збіжності має просту структуру, а саме, існує таке число R $(0\le R\le\infty)$, що:

- ряд збігається (причому абсолютно), коли $|\ x-x_0|<R$, тобто $x\in(x_0-R;\ x_0+R)$
- ряд розбігається коли $|x-x_0|>R$, тобто $x\notin[x_0-R\ ;\ x_0+R]$

(10)

Число R називається радіусом збіжності, а інтервал $(x_0 - R; x_0 + R)$– інтервалом збіжності. Якщо $|x - x_0|=R$, (тобто $x=x_0 \pm R$), ряд може збігатися, а може розбігатися. Ці два значення називаються граничними точками інтервалу збіжності, вони відокремлюють область збіжності від області розбіжності степеневого ряду.

Графічна інтерпретація цих фактів подана на рис.2.

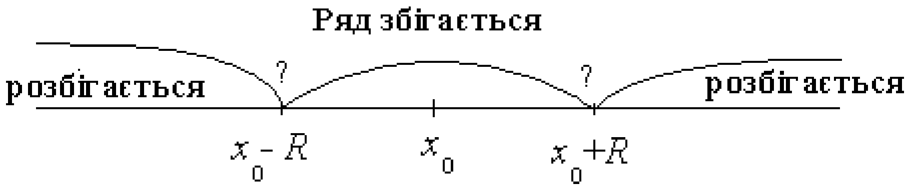

Рис.2

Для знаходження радіусу збіжності можна застосовувати узагальнені ознаки Даламбера або Коші.

Приклад: Визначити область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2n+3}(x+2)^n$. Знайдемо $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = 5|x+2|$. Узагальнена ознака Даламбера дозволяє зробити висновок, що ряд збігається, якщо $5|x+2| < 1$. Розв'язуючи цю нерівність, одержимо $|x+2| < 0.2$, тобто R=0.2.

Це є співвідношення типу (10). Геометрична інтерпретація має вигляд

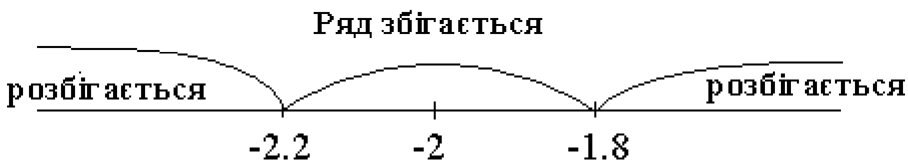

Рис. 3

Інтервал збіжності $I = (x_0 - R\,; x_0 + R) = (-2.2; -1.8)$

Зауважимо, що для знаходження *R* можна застосовувати також наступні формули:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \text{або } R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,, \tag{11}$$

які є наслідками згаданих вище узагальнених ознак Даламбера або Коші. У наведеному вище прикладі одержимо $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5^n(2n+5)}{(2n+3)5^{n+1}} \right| = \frac{1}{5} = 0.2$.

З'ясуємо поведінку ряду у граничних точках області збіжності $x_1 = -2.2; \quad x_2 = -1.8$.

Розглянемо спочатку точку $x_2 = -1.8$. З початкового ряду одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\left(\frac{1}{5}\right)^n}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}.$$

Для дослідження цього ряду на збіжність застосуємо граничну ознаку порівняння. Як ряд порівняння візьмемо гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Оскільки $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=\frac{1}{2}(\neq 0,\neq\infty)$, ряди поводять себе однаково, і початковий ряд розбігається, тому що розбігається гармонічний ряд.

Підставимо тепер у початковий ряд $x_1=-2.2$. Одержимо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}.$$

Це знакопереміжний ряд. Перевіримо виконання умов теореми Лейбніца:

1) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ виконано, оскільки $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}=0$.

2) $a_n>a_{n+1}$ виконано, оскільки $\frac{1}{2n+3}>\frac{1}{2(n+1)+3}$. (Знаменник першого дробу завжди менший за знаменник другого, тому – перший більше другого). Таким чином, умови теореми Лейбніца виконані, значить, цей числовий ряд збігається, тобто точка $x_1=-2.2$ належить області збіжності. Зауважимо, що ця збіжність носить умовний характер, бо ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}$,як доведено вище, є розбіжним.

Таким чином, областю збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2n+3}(x+2)^n$$

є напіввідкритий інтервал $-2.2\le x<-1.8$. Цей результат можна записати також у вигляді

$$x\in[-2.2;-1.8).$$

Диференціювання та інтегрування степеневих рядів

Мають місце такі властивості. Якщо $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ і $x\in(x_0-R,x_0+R)$, тоді

$$\frac{dS(x)}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{d}{dx}\left[(x-x_0)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n n(x-x_0)^n, \tag{12}$$

$$\int S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int(x-x_0)^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}, \tag{13}$$

тобто степеневі ряди можна почленно диференціювати та інтегрувати на інтервалах збіжності, причому ці інтервали для отриманих рядів такі ж, як і у початкового ряду.

За допомогою цих властивостей можна одержати важливі результати, наприклад, знайти суми деяких рядів.

Приклад: Розглянемо геометричну прогресію

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,. \quad (14)$$

Область збіжності цього ряду – інтервал (–1,1). Продиференцюємо ліву і праву частину рівності (14). Одержимо

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n-1)x^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1};\quad x\in(-1;1).$$

Проінтегруємо степеневий ряд (14) у межах області збіжності. Будемо мати

$$\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\int_0^x\frac{dt}{t-1}=-\ln|t-1|\Big|_0^x=-\ln|x-1|=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\,.$$

Тобто для $\forall x\in(-1,1)$

$$\ln|1-x|=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots\,. \quad (15)$$

Застосовуючи заміну $x=-t$, (а потім знову змінивши t на x), одержимо ще один ряд

$$\ln|1+x|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \quad (16)$$

У такий спосіб можна одержати значення суми $S(x)$ різноманітних рядів

Зауваження. Збіжність рядів (12)-(13) у граничних точках з'ясовується окремо, як це було зроблено у прикладі зі степеневим рядом. Застосовуючи теорему Лейбніца, можна довести, наприклад, що ряд (16) збігається і при $x=+1$. Тобто маємо

$$\ln 2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\,.$$

Таким чином, знайдена сума знакозмінного гармонічного ряду.

Якщо в (14) покласти $x=z^2$, то отримаємо

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-+\ldots(-1)^n z^{2n}+\ldots$$

Проінтегруємо цю рівність в межах області збіжності, застосовуючи (13). Будемо мати

$$\int_0^x\frac{1}{1+z^2}dz=\int_0^x dz-\int_0^x z^2dz+\int_0^x z^4dz-\ldots(-1)^n\int_0^x z^{2n}dz+\ldots$$

або

$$\mathrm{arctg}z\,\Big|_0^x=z\,\Big|_0^x-\frac{z^3}{3}\Big|_0^x+\frac{z^5}{5}\Big|_0^x-+\ldots(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x+\ldots\,.$$

Оскільки $\mathrm{arctg}\,0=0$, звідси одержимо

$$\operatorname{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - +\ldots(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots ,$$

якщо $x\in(-1;+1)$. Можна довести, що отриманий ряд збігається і при $x=\pm1$. Так, для $x=1$ маємо

$$\operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - +\ldots(-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots .$$

Таким чином, можна з довільною точністю знайти число π без геометричних побудов та вимірювань довжини кола та його радіуса.

Ряди Тейлора

Розглянемо функцію $f(x)$, яка сама існує і має нескінчену кількість неперервних похідних $f(x), f'(x), f''(x)\ldots$ у околі деякої точки x_0.

Кожна така функція (разом з точкою x_0) породжує степеневий ряд

$$f(x) \leftrightarrow \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n; \quad \text{де} \quad f^{(0)}(x_0) = f(x_0), \quad 0! = 1, \quad n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n \quad . \tag{17}$$

Нехай D – область збіжності цього ряду. Можна довести при деяких додаткових припущеннях (які виконані у наступних прикладах), що ряд (17) збігається до $f(x)$, якщо $x\in D$, тобто

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \forall x\in D. \quad . \tag{18}$$

Рівність (18) називається розкладом функції $f(x)$ в ряд Тейлора у околі точки x_0. Якщо $x_0 = 0$, то ряд Тейлора (18) називається також рядом Маклорена.

Всі елементарні функції розкладаються в ряди Тейлора (18) в околі будь-якої внутрішньої точки x_0 області визначення.

Приклад. Розкласти $f(x)=e^x$ у ряд Тейлора в околі точки $x_0.=0$. Знайти область збіжності.

Маємо $f^{(n)}(x)= e^x$; $f^{(n)}(0)= e^0=1$ $\forall n\geq 0$. Ряд (18) буде мати вигляд

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Дослідимо його збіжність за допомогою узагальненої ознаки Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Звідси виходить, що областю збіжності цього ряду є вся вісь $-\infty<x<\infty$, тобто радіус збіжності $R=\infty$.

Таким чином, можна знайти розклад у степеневі ряди інших елементарних функцій. Деякі з них наведено у наступній таблиці ($x_0=0$)

Таблиця.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\qquad -\infty<x<\infty$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\qquad -\infty<x<\infty$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\qquad -\infty<x<\infty$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\qquad -1<x\le 1$$

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-+\ldots(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\qquad |x|\le 1$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots\qquad |x|<1$$

Зауважимо, що для тригонометричних функцій x необхідно вимірювати в радіанах.

Останній ряд таблиці називається біноміальним, при деяких α він збігається також, якщо $x=1$, або $x=-1$. Як окремі випадки $\left(\alpha=-1;\quad \alpha=\frac{1}{2};\quad \alpha=\frac{1}{3};\quad \alpha=-\frac{1}{2}\right)$ з нього можна одержати

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\ldots(-1)^n x^n+\ldots$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots$$

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4+\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\ldots$$

За допомогою цих розкладів можна отримати розклади більш складних функцій.

Приклад. Розкласти у ряд Маклорена функцію $f(x)=(1-x^2)\,e^{-x^2}$, знайти область збіжності.

Знайти безпосередньо $f^{(n)}(x)$ для довільного n досить важко, тому для розв'язання задачі застосуємо стандартний ряд з наведеної таблиці та виконаємо наступну послідовність дій:

1) $\quad e^t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\qquad -\infty<t<\infty$

2) $t=-x^2; \quad e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$

3) $x^2e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n!}$

4) $(1-x^2)e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n!}$

Цим розкладом можна користуватися, але його доцільно перетворити до стандартного вигляду $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. Зробимо це

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{n!}=\begin{vmatrix}n+1=k\\ n=k-1\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{(k-1)!}=\begin{vmatrix}k=n\\ \end{vmatrix}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(n-1)!}$$

Таким чином, маємо

$$(1-x^2)e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(n-1)!}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\left[\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}\right]=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n!}x^{2n}=1-2x^2+\frac{3}{2}x^4-\ldots$$

Аналізуючи область збіжності отриманого ряду, зауважимо, що ряди 1) та 2) збігаються для $-\infty<x<\infty$. Таку ж область збіжності має ряд 4). Останню можна визначити також і за допомогою узагальненої ознаки Даламбера.

Застосування рядів Тейлора до наближених обчислень

Нагадаємо, що збіжність ряду означає, що його часткова сума S_N прямує до S коли $N\to\infty$, а, значить, $S\approx S_N$ для великих N. Ця рівність тим точніша, чим більше N.

Для ряду Тейлора це буде означати що

$$f(x)\approx\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad x\in D, \tag{19}$$

тобто функція $f(x)$ може бути наближена многочленом N –го степеня, що стоїть у правій частині (19). Він називається многочленом Тейлора.

Приклад. Спростити функцію $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{1+\cos x}}$ в околі точки $x_0=0$, взявши 3 члени розкладу в ряд Тейлора. Одержимо

$$f(x)=(1+\cos x)^{-\frac{1}{3}}; \quad f(0)=2^{-\frac{1}{3}}\approx 0.794;$$

$$f'(x)=-\frac{1}{3}(1+\cos x)^{-\frac{4}{3}}\sin x; \quad f'(0)=0;$$

$$f''(x)=-\frac{1}{3}\left[-\frac{4}{3}(1+\cos x)^{-\frac{7}{3}}\sin x+(1+\cos x)^{-\frac{4}{3}}\cos x\right]; \quad f''(0)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{16}}\approx -0.1324.$$

Таким чином, маємо $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+\cos x}}\approx 0.794-0.1324x^2$ в околі точки $x_0=0$.

Приклад. Для функції $y = \sin x$ можна за таблицею одержати такі многочлени Тейлора:

$$N=1;\quad \sin x\approx S_1=x;$$

$$N=2;\quad \sin x\approx S_2=x-\frac{x^3}{6};$$

$$N=3;\quad \sin x\approx S_3=x-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{120}x^5.$$

Побудуємо графіки цих многочленів:

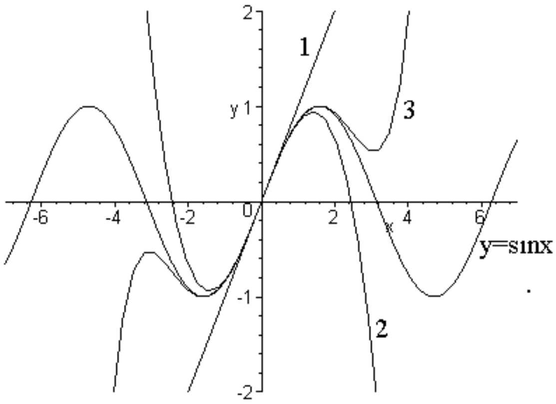

Рис.4

З графіків видно (і це – загальний факт), що чим більше степінь многочлена, тим для більших значень *x* можна скористатися рівністю $\sin x\approx S_N(x)$.

Внаслідок того, що з многочленами значно простіше працювати, ніж з іншими функціями, многочлени Тейлора широко застосовуються в практиці наближених обчислень.Вони застосовуються, наприклад, в ПК (ЕОМ) для обчислення основних елементарних функцій ($\sin x, \cos x, \ln x, a^x$ та інших) з заданою кількістю вірних знаків.

Приклад. Обчислити $\sin 10^{\circ}$ з точністю $\varepsilon=10^{-5}$. За таблицею маємо

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots;$$

$$\sin 10^{\circ}=\sin\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{18}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7+\ldots;$$

Взявши декілька перших членів, знайдемо наближене значення $\sin 10^{\circ}$. У цьому випадку ми маємо справу із знакопереміжним рядом, який задовольняє умовам теореми Лейбніца. Отже можна оцінити похибку за нерівністю

$|S-S_N|<a_{N+1}$. Звідси маємо, наприклад,

$$|S-S_1|<a_3=\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3\approx 9\cdot 10^{-4};\quad |S-S_3|<a_5=\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7\approx 10^{-6};$$

$$|S-S_5|<a_7=\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7\approx 10^{-9}.$$

Видно, що для досягнення точності $\varepsilon=10^{-4}$ достатньо обчислити S_3.$=\frac{\pi}{18}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3$=0.173646. Отже $\sin 10^{o}\approx 0.173646$. У цій наближеній рівності ми ручаємося за перші 4 знаки. Для порівняння обчислимо і "точне" значення $\sin 10^{o}=0.173648$. Отже реальна похибка виявилась ще менш за ту, на яку ми сподівались.

Зауважимо, що коли числовий ряд, який одержано таким чином, не є знакопереміжним, застосовують інші оцінки точності. Ми їх наводити не будемо.

Приклад. Обчислити $I=\int\limits_0^{0.9}\frac{1-\cos x^3}{x^4}dx$ з похибкою, меншою ніж 10^{-6}.

Зауваження. Цей інтеграл не може бути обчислений точно, бо не існує первісна в елементарних функціях.

Застосуємо розклад у ряд Тейлора. За таблицею будемо мати

1) $$\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!};\quad -\infty<t<\infty;\quad t=x^2;$$

2) $$\cos x^2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!};\quad -\infty<x<\infty;$$

3) $$-\cos x^2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n}}{(2n)!}=-1+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^8}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{4n}}{(2n)!}+\ldots;$$

4) $$1-\cos x^2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n}}{(2n)!};$$

5) $$\frac{1-\cos x^2}{x^4}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n-4}}{(2n)!};$$

6) $$\int\limits_0^{0.9}\frac{1-\cos x^2}{x^4}dx=\int\limits_0^{0.9}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n-4}}{(2n)!}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\quad\frac{x^{4n-3}}{4n-3}\Bigg|_0^{0.9}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\quad\frac{(0.9)^{4n-3}}{4n-3}.$$

Було здійснено почленне інтегрування ряду в інтервалі збіжності.

Не важко бачити, що отриманий ряд знакозмінний і задовольняє умовам теореми Лейбніца, тому $|I-S_n|<a_{n+1}$. Послідовно маємо

$$n=1:\quad a_1=\frac{0.9}{2}=0.45;\quad n=2:\quad a_2=\frac{(0.9)^5}{4!5}=4.93\cdot 10^{-3};$$

$$n=3:\quad a_3=\frac{(0.9)^9}{6!9}=5.9\cdot 10^{-5};\quad n=4:\quad a_4=\frac{(0.9)^{13}}{8!13}=4.8\cdot 10^{-7}.$$

Отже $I\approx a_1 – a_2 + a_3 = 0.45 – 4.93\cdot 10^{-3} + 5.9\cdot 10^{-5} = 0.445159$ з похибкою меншою ніж $4.8\cdot 10^{-7}$.

Приклад Знайти наближено розв'язок задачі Коші за допомогою степеневого ряду, взявши чотири члени розкладу його у ряд Тейлора:

$$y' = -2\ln y - y^2;\qquad y(1)=1.$$

Припустимо що для $y(x)$ існує розклад у ряд Тейлора :

$$y(x)=y_0+y_0'(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+,$$

де позначено $y_0=y(x_0);\quad y_0'=y'(x_0);\quad y_0''=y''(x_0)\ldots$. З початкової умови маємо $x_0=1;\quad y_0=y(1)=1$. Коефіцієнт y_0' визначимо з диференціального рівняння при $x=x_0=1$

$$y_0'=-2\ln y_0-y_0^2=-1.$$

Продиференцюємо задане рівняння з урахуванням того, що $y= y(x)$ і отримаємо

$$y''=-2\frac{y'}{y}-2y'y. \tag{20}$$

Обчислимо y'' в точці $x_0=1$. Оскільки $y_0=y(1)=1;\quad y_0'=-1$, будемо мати

$$y_0''=-2\frac{y_0'}{y_0}-2y_0'y_0=-2\frac{-1}{1}-2(-1)\cdot 1=4.$$

Продиференцюємо тепер рівняння (20) та одержимо

$$y'''=-2\frac{y''y-(y')^2}{y^2}-2(y')^2-2y''y,$$

звідки

$$y_0'''=-2\frac{y_0''y_0-(y_0')^2}{y_0^2}-2(y_0')^2-2y_0''y_0=-2\left[\frac{4\cdot 1-1}{1}+1+4\cdot 1\right]=-16.$$

Остаточно $y(x)\approx 1-(x-1)+\dfrac{4}{2!}(x-1)^2-\dfrac{16}{3!}(x-1)^3=\dfrac{4}{3}+3x-6x^2+\dfrac{8}{3}x^3$.

Ряди Фур'є

Розглянемо кусково-диференційовну функцію $f(x)$, яка є періодичною з періодом $T=2l$, тобто для неї виконується тотожність $f(x+T)= f(x)$, для довільного x (рис 5).

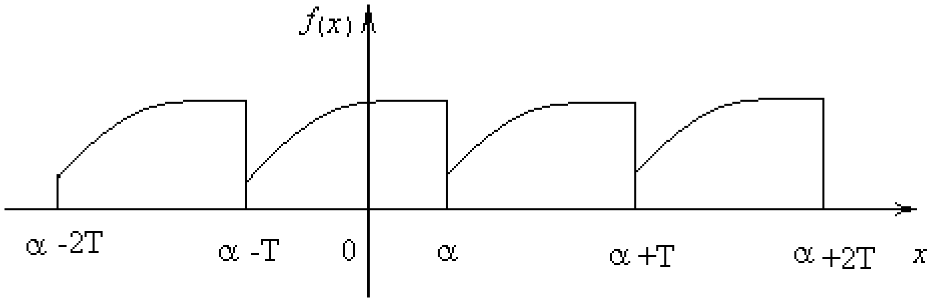

Рис. 5.

Функціям такого типу відповідають різні періодичні процеси (механічні коливання, коливання напруги, тощо)

За допомогою функції $f(x)$, одержимо нескінчену послідовність чисел

$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 0,1,2\ldots$;зокрема, $\quad a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1,2\ldots \tag{21}$$

На їх основі побудуємо функціональний (він називається тригонометричним) ряд,що має вигляд:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{22}$$

За умов, сформульованих вище, має місце наступна теорема Ліпшіца про збіжність цього ряду:

- якщо x є точкою неперервності $f(x)$, тоді ряд (22) збігається до $f(x)$,
- якщо x_0 є точкою розриву першого роду $f(x)$ (x_0-скінчений стрибок), тоді ряд (22) збігається до півсуми значень $f(x)$ "ліворуч" та "праворуч" точки x_0:

$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$.

У цьому сенсі пишуть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{23}$$

Скінченний стрибок у точці x_0 проілюстровано на рис.6 .

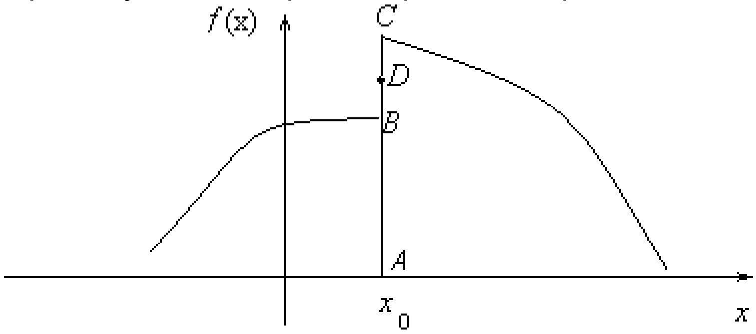

Рис. 6

Маємо: $f(x_0 - 0) = AB; \quad f(x_0 + 0) = AC; \quad S(x_0) = \frac{AB + AC}{2} = AD$.

У такому ж сенсі ряд (23) збігається при виконанні умов Діріхле, які полягають у наступному : $f(x)$ повинна мати на періоді $T= 2\,l$ скінчене число точок $-l = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = l$ таких, що на кожному інтервалі $\left(x_j, x_{j+1}\right)$ функція $f(x)$ обмежена, неперервна та монотонна.

Рівність (23) називають розкладом функції $f(x)$ у ряд Фур'є, а коефіцієнти, що обчислені за (17), - коефіцієнтами Фур'є.

При практичному застосуванні рядів Фур'є слід мати на увазі їх властивості, що допомагають у деяких випадках спростити обчислення коефіцієнтів a_n, b_n:

1) Інтеграли в (21) можна брати по довільному інтервалу довжини T (якщо це приводить до спрощення обчислень), тобто

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 0,1,2\ldots;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 1,2\ldots,$$

де α– довільне число.

2) Якщо $f(x)$ - парна функція (тобто $f(x)=f(-x)$), тоді можна застосовувати формули

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 0,1,2\ldots; \qquad b_n = 0 \tag{24}$$

3)Якщо $f(x)$ – непарна функція (тобто $f(x)=-f(-x)$), тоді можна застосовувати формули

$$a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 1,2\ldots; \tag{25}$$

Застосовуються ряди Фур'є у такий спосіб. Рівність (23) має своїм наслідком наближення

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

тобто функцію $f(x)$ можна наблизити (як завгодно точно вибором достатньо великого N) тригонометричним многочленом. Привабливість цього наближення полягає у тому, що наступні дії з тригонометричним многочленом (наприклад, розв'язок дифрівняння з правою частиною у вигляді такого многочлена) можуть бути значно простішими, ніж з початковою функцією $f(x)$

Застосування цього наближення означає заміну періодичної функції $f(x)$.сумою гармонічних типу $u_n = a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$

Приклад. Періодичний з періодом T=2l=20 прямокутний імпульс $f(x)$ на півперіоді (0,10) є заданим формулою

$$f_0(x) = \begin{cases} 6 & \text{якщо} \quad x \in (6, 9) \\ 0 & \text{якщо} \quad x \notin (6, 9) \end{cases}$$

Потрібно побудувати графік цього імпульсу $f(x)$на інтервалі $(-2l,\ 2l)$, вважаючи що $f(x)$:

1) парна функція

2) непарна функція

1)Розглянемо випадок парної функції. Побудуємо спочатку згідно з поданою формулою $f_0(x)$ (рис. 6а). Парність означає симетрію (дзеркальне відображення) графіка відносно вісі OY. Це дає можливість продовжити графік на інтервал (–10,10) (рис.6б)

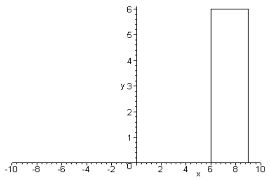

Рис. 6а

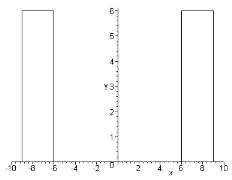

Рис. 6б

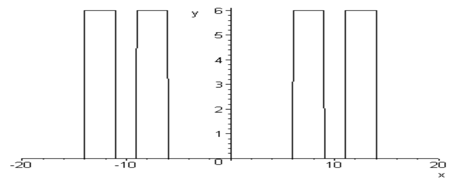

Рис.6в

Далі продовжуємо його за умовою періодичності на інтервал (–20, 20). Результат подано на рис 6в.

2) Розглянемо непарне продовження за межі (0, 10). Рівність $f(x)=-f(-x)$ призводить до необхідності подвійного дзеркального відображення: спочатку відносно вісі О*Y* (одержимо графік парної функції), а потім – ліву половину попереднього графіка ще раз віддзеркалюємо відносно вісі О*X*, що і дає графік $f(x)$ на інтервалі (-10,10). Ця послідовність зображена на рис.7а,б.

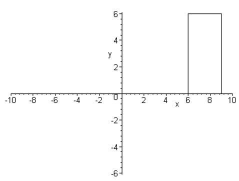

Рис. 7а

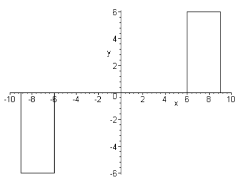

Рис. 7б

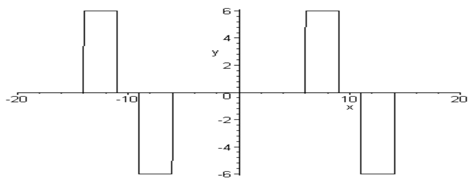

Рис. 7в.

Остаточний графік на інтервалі (-20,20) має вигляд, зображений на рис 7в.

Приклад. Надана функція $f(x)$, що є непарним продовженням $f_0(x)$ (див. попередній приклад). Необхідно

1) Розкласти функцію у ряд Фур'є .
2) Записати тригонометричні многочлени $S_1(x), S_2(x), S_3(x)$, що наближують $f(x)$
3) Знайти значення цих многочленів у точці x_0, що є серединою інтервалу (6,9) тобто x_0=7.5.

Для розв'язку задачі необхідно спочатку знайти коефіцієнти ряду Фур'є. Оскільки функція $f(x)$ є непарною, обчислимо коефіцієнти a_n, b_n за формулою (25). Одержимо: $a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2\cdot 6}{10}\int_6^9 \sin\frac{n\pi x}{10}dx = \frac{12}{n\pi}\int_6^9 \sin\frac{n\pi x}{10}d\left(\frac{n\pi x}{10}\right) =$$

$$= -\frac{12}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{10}\bigg|_6^9 = -\frac{12}{n\pi}\left[\cos\frac{9n\pi}{10} - \cos\frac{6n\pi}{10}\right] = -\frac{12}{n\pi}\left[\cos\frac{9n\pi}{10} - \cos\frac{3n\pi}{5}\right]$$

Таким чином ряд Фур'є (23) буде мати вигляд

$$f(x) = -\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\cos\frac{9n\pi}{10} - \cos\frac{3n\pi}{5}\right]\sin\frac{n\pi x}{10} \qquad (26)$$

Обчислимо три перших коефіцієнти ряду

$$b_1 = \frac{-12}{\pi}\left[\cos\frac{9\pi}{10} - \cos\frac{3\pi}{5}\right] = \frac{-12}{\pi}[-0.95 + 0.309] = 2.44$$

$$b_2 = \frac{-6}{\pi}\left[\cos\frac{9\pi}{5} - \cos\frac{6\pi}{5}\right] = \frac{-6}{\pi}[0.809 + 0.809] = -3.09$$

$$b_3 = \frac{-4}{\pi}\left[\cos\frac{27\pi}{10} - \cos\frac{9\pi}{5}\right] = \frac{-4}{\pi}[-0.587 - 0.809] = 1.77$$

Таким чином, одержимо

$$S_1(x) = b_1\sin\frac{\pi x}{10} = 2.44\sin\frac{\pi x}{10}$$

$$S_2(x) = b_1\sin\frac{\pi x}{10} + b_2\sin\frac{2\pi x}{10} = 2.44\sin\frac{\pi x}{10} - 3.09\sin\frac{2\pi x}{10}$$

$$S_3(x) = b_1\sin\frac{\pi x}{10} + b_2\sin\frac{2\pi x}{10} + b_3\sin\frac{3\pi x}{10} = 2.44\sin\frac{\pi x}{10} - 3.09\sin\frac{\pi x}{5} + 1.77\sin\frac{3\pi x}{10}$$

Обчислюючи значення цих тригонометричних многочленів при $x_0 = 7.5$, одержимо

$$S_1(7.5) = 1.83; \quad S_2(7.5) = 4.92; \quad S_3(7.5) = 6.17$$

Зауваження 1. Останні обчислення демонструють збіжність часткових сум $S_1(7.5), S_2(7.5), S_3(7.5)$ до точного значення *f*(7.5)=6. Слід мати на увазі, що збіжність рядів Фур'є може бути досить повільною, тому не обов'язково сума перших трьох членів дасть малу похибку. У деяких варіантах вона може сягати 20-30%

Зауваження 2. У цьому завданні, розрахованому на застосування калькулятора, задача побудови графіків $S_1(x), S_2(x), S_3(x)$ (внаслідок трудомісткості) не ставиться. Але, якщо їх все ж таки побудувати (застосовуючи комп'ютер) то можна побачити характер збіжності часткових сум ряду Фур'є до прямокутного імпульсу. Результати такого дослідження для цього прикладу наведені на рис 8.

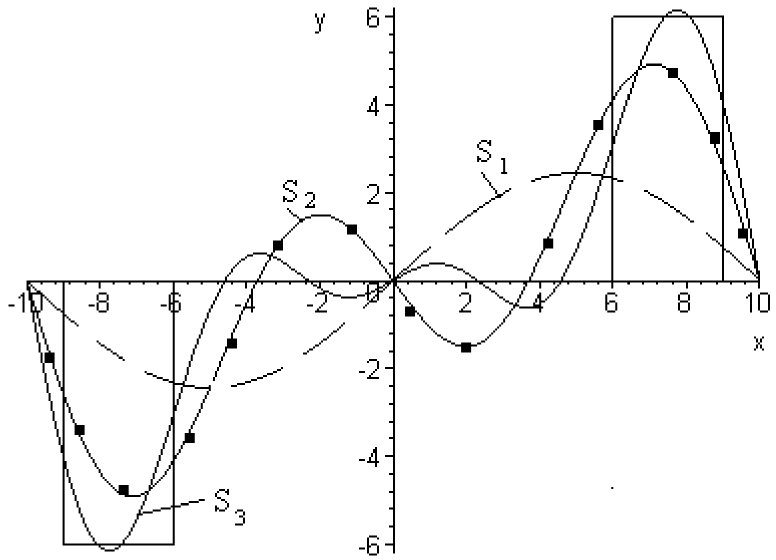

Рис.8

3)З теореми про збіжність рядів Фур'є, що наведено вище, випливає, що ряд (26) у точці $x_0 = 7.5$ збігається до значення $f(7.5)=6$ (бо це точка неперервності), а при, наприклад, $x_0 = 6$, його сума дорівнює 3, бо $x_0 = 6$ – це точка скінченного стрибка($f(6–0)=0$; $f(6+0)=6$).

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

Завдання 1.

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, якщо загальний член ряду a_n має вигляд

1. а) $\dfrac{n^2-4}{2n^2+100n}$ б) $\dfrac{n^2+4}{2^n(n+1)}$ в) $\left(\dfrac{4\pi n^2}{9n^2+4n}\right)^{-n}$

   г) $\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{n}}{n}$ д) $\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}\ln\dfrac{n+2}{n+3}$

2. а) $\sqrt{\dfrac{2n}{100n-6}}$ б) $\dfrac{3^{n+2}}{(n+1)!}$ в) $\left(\arccos\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$

   г) $\dfrac{2n\sqrt{n}+3}{3n^2+4}$ д) $\dfrac{e^{n^2}}{n!}$

3. а) $(1.001)^{\sqrt{n}}$ б) $\dfrac{2n-4}{5^{n+1}}$ в) $\left(\arccos\left(\dfrac{0.5}{n}\right)\right)^{-n}$

   г) $\dfrac{\sqrt{3n-1}}{\sqrt{4n^3-2n+4}}$ д) $\dfrac{1}{\ln n-n^2}$

4. а) $\arcsin\dfrac{2n-1}{3n+5}$ б) $\dfrac{e^n}{3^{n+1}(n+3)}$ в) $\left(\dfrac{4n+5}{3n+2}\right)^{\frac{n}{3}}$

   г) $\dfrac{\sqrt{2n^5+4}}{(n^2+2)^2}$ д) $\dfrac{(\cos n)^{2n}}{n\sqrt{n}+4n}$

5. а) $\dfrac{5^n+2^n}{3^n}$ б) $\operatorname{tg}\dfrac{3}{4^n}$ в) $(\ln\sqrt{n+1})^{-n}$

   г) $\dfrac{\cos\frac{1}{n}}{n}$ д) $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$

6. а) $\left(\dfrac{5n^2+2}{7n^2-4}\right)^2$ б) $\dfrac{100^n}{n!}$ в) $\left(\cos\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n$

   г) $\dfrac{2n^3+1}{3n^4-5n}$ д) $\dfrac{(\operatorname{arctg} n)^n}{2^{n+4}(n^2+2)}$

7. а) $\dfrac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt[4]{5n^2+1}}$ б) $\dfrac{(n^2+1)}{2^n(3n^3+1)}$ в) $(\arccos\ 0.2)^n$

   г) $\dfrac{5\sqrt{n}-2n}{3n^3+4}$ д) $\dfrac{\ln(n^2+1)}{2n-3}$

8. а) $\sin\dfrac{n+1}{n+3}$ б) $\dfrac{n!}{100^n}$ в) $\left(\dfrac{n+1}{2n-3}\right)^{3n}$

   г) $\dfrac{\operatorname{arctg}(2n^2+1)}{n}$ д) $\dfrac{\ln(n^2+n)}{n\sqrt{n}}$

9. а) $\cos\dfrac{n+1}{n^2+3}$ б) $\dfrac{(1.1)^n}{n^3}$ в) $\left(\ln\left(n^2+2\right)\right)^{-n}$

г) $\dfrac{1}{\sqrt{n+2}\left(\sqrt{n}+3\right)}$ д) $\dfrac{2+\sin n^2}{\sqrt{n^3+1}-1}$

10. а) $\dfrac{n^2-5n+2}{100n^2+400}$ б) $\sin\dfrac{5}{3^n}$ в) $\left(\dfrac{4n-3}{2n+1}\right)^{-n}$

г) $\dfrac{n\,\mathrm{arctg}(2n+3)}{n^3+1}$ д) $\dfrac{(\arcsin 0.9)^n}{n^2+4}$

11. а) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ б) $\dfrac{5^{2n}}{7^n\cdot n!}$ в) $(\arccos\ 0.8)^n$

г) $\dfrac{n^3+7n-4n^{-1}}{n^5+2n^4+2}$ д) $\dfrac{e^n+3}{e^{2n}+3n}$

12. а) $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^n$ б) $\left(n^2-3\right)\ e^{-n}$ в) $\left(\sin\dfrac{\pi n}{4n-1}\right)^{-n}$

г) $\dfrac{\arcsin\left(\dfrac{n+1}{2n-3}\right)}{n}$ д) $\dfrac{\left(2-\cos n^2\right)\sqrt[3]{n^2+1}}{n^2+3}$

13. а) $\mathrm{tg}\dfrac{2n+5}{3n-4}$ б) $\dfrac{n^3+3}{(n+1)!}$ в) $\left(\dfrac{3n^2+4}{2n^2-1}\right)^n$

г) $\dfrac{1}{n+4}\sin\dfrac{3}{3n-2}$ д) $\dfrac{\sqrt{\ln(2n+3)}}{n+2}$

14. $\dfrac{5^n+3n^2}{4^n}$ б) $\dfrac{\sin\dfrac{1}{2^n}}{\sin\dfrac{1}{n^2}}$ в) $\left(\dfrac{2}{\ln\left(n^2+3\right)}\right)^n$

г) $(n+1)\sin\dfrac{1}{n^2+6}$ д) $\dfrac{1}{(n+1)\ln(2n+3)}$

15. а) $\mathrm{tg}\dfrac{\pi n}{4}$ б) $\dfrac{n!}{n^5+4n^3}$ в) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{n^2+4}{2n^3-3}\right)^n}$

г) $\dfrac{7n^2+2+\sin(n+1)}{3n^4-1}$ д) $\dfrac{n^n}{(n+2)^{n+1}}$

16. а) $(-1)^n \dfrac{n-1}{2n+4}$ б) $\dfrac{5n^3-1}{(1.001)^n}$ в) $\left(\sin\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^n$

г) $\dfrac{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)}{\sqrt{n}}$ д) $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

17. а) $\mathrm{arctg}\dfrac{n^2+4}{n+1}$ б) $\sqrt{\dfrac{2n-4}{n!}}$ в) $\dfrac{\sin\dfrac{1}{2^n}}{\sin\dfrac{1}{3^n}}$

г) $\dfrac{2\sqrt{n+3}}{n^2-3}$ д) $2\sqrt{n+1}-\sqrt{4n+1}$

18. а) $\dfrac{n}{2}\sin\dfrac{2}{n}$ б) $\dfrac{5^{2n}}{7^n(n^2+1)}$ в) $\left(\mathrm{arctg}\dfrac{\pi}{2n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

г) $\dfrac{\sqrt[3]{n+1}}{n^2-5}$ д) $2^n\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n$

19. а) $\cos\pi\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$ б) $\dfrac{3^{n+1}}{n^2 5^n}\left(n^3+5\right)$ в) $\left(\dfrac{5n^2+1}{8n^2+4}\right)^{\frac{n}{4}}$

г) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{2}{n}+2\right)}{n^2}$ д) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}\right)$

20. а) $\sqrt[3]{\dfrac{2n^2-1}{3n^2+5}}$ б) $\dfrac{e^{n-1}}{n^2+3}$ в) $\left(\cos\dfrac{2n}{3n+1}\right)^{-n}$

г) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4n+1}\sqrt{2n+3}}$ д) $\ln\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}+3}$

21. а) $\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{\frac{n^2+4}{5n^2-1}}$ б) $\dfrac{(n^3+1)7^n}{8^{n-1}}$ в) $\left(\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi n}{5n+3}\right)\right)^{3n}$

г) $\dfrac{1}{\sqrt{n^3+5}\sqrt{n+1}}$ д) $\dfrac{1}{2\ln(n^2+4)+3n}$

22. а) $\arccos\dfrac{1}{n}$ б) $\dfrac{3^n(n^2-4)}{2^{2n}}$ в) $\left(\dfrac{\pi n}{4n+1}\right)^{n+1}$

г) $\dfrac{3}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+4}}$ д) $(n+1)\sin\dfrac{1}{2^n+1}$

23. а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n\right)$ б) $\dfrac{n^3+3}{n!}$ в) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n}+3}\right)^n$

г) $\dfrac{n^2+5}{(n\sqrt[3]{n})^2}$ д) $\sqrt{n^3+3}-\sqrt{n^3+2n}$

24. а) $\ln\left(\dfrac{n^2+2n}{2n^2+n}\right)$ б) $\dfrac{3n^2-4}{(0.99)^n}$ в) $\left(\sin\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n$

г) $\dfrac{\operatorname{arctg} n^2}{n^2+4}$ д) $\dfrac{3^{n^2+1}}{8^{n+2}(n^2+4)}$

25. а) $(-1)^n\dfrac{2n+5}{100n-4}$ б) $\dfrac{0.3^n(n^2+4)}{n^4+1}$ в) $\left(\sqrt{\dfrac{1}{\ln(n^2+1)}}\right)^{n/2}$

г) $\left(\dfrac{3n}{2n^2+4}\right)^2$ д) $\left(\dfrac{n^2+3n}{n^2-5}\right)^{\frac{n^2}{4}}$

26. а) $n\operatorname{tg}\dfrac{5n}{3n^2+4}$ б) $\dfrac{2^n}{(1.3)^{2n}}(n^2-4n)$ в) $\left(\cos\dfrac{2n+3}{7n-2}\right)^{n-1}$

г) $\dfrac{\sqrt{2n^3+3}}{\sqrt[3]{3n^2+2}}$ д) $\dfrac{\ln(n^2+8)}{n+1}$

27. а) $\operatorname{arctg}\dfrac{2n-3}{3n+2}$ б) $(0.9)^n n^{30}$ в) $\left(\ln\left(\pi+\dfrac{1}{n}\right)\right)^{-n}$

г) $\dfrac{5n^2-1}{7n^4+2n}$ д) $\left(\dfrac{2n+1}{3n+5}\right)^{4n-1}$

28. а) $\left(\dfrac{7}{6}\right)^{\sqrt{n}}$ б) $n^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n$ в) $\left(\sin\dfrac{n+1}{2n+5}\right)^{-n}$

г) $\dfrac{\sqrt{n}+1}{n^2+3}$ д) $\dfrac{\ln n-\ln(n-1)}{n}$

29. а) $3\lg\left(\dfrac{\pi}{100}+\dfrac{1}{n}\right)$ б) $\dfrac{100^n}{\sqrt{n!}}$ в) $\left(\cos\dfrac{2n-3}{3n+1}\right)^{-n}$

г) $\dfrac{\sqrt{3n}+2}{2n^2+4}$ д) $\dfrac{1+3n}{2n^2\ln n}$

30. а) $\ln\left(0.0001+\dfrac{1}{n^4}\right)$ б) $\dfrac{(3n^2+8)\sqrt{n}}{7^n}$ в) $\left(\dfrac{2n^2+4}{3n^2+2}\right)^{2n}$

г) $\dfrac{5n}{\sqrt{n^3}+\sqrt{4n}}$ д) $\dfrac{5^n}{6^n+2n^2}$

Завдання 2.

Записати три перші члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ й дослідити його на абсолютну та умовну збіжність, якщо a_n має вигляд

1) $\dfrac{n+1}{2n^2+3}$ 2) $\dfrac{3}{2n^2-4}$ 3) $\dfrac{n^2}{5^n}$

4) $\dfrac{1}{\ln(n+4)}$ 5) $\dfrac{5n^2+1}{n!}$ 6) $\dfrac{2^{n+1}}{n^2+4}$

7) $\dfrac{1}{2n+3}$ 8) $\dfrac{1}{5n^2-7}$ 9) $\dfrac{n^2+6}{4^n}$

10) $\dfrac{2n+3}{4n^2+1}$ 11) $\dfrac{3n+2}{6n-1}$ 12) $\dfrac{2\sqrt{n^2+4}}{n+1}$

13) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+6}}$ 14) $\dfrac{1}{\sqrt{n^3+8n}}$ 15) $\dfrac{2n+3}{3n^2-1}$

16) $\dfrac{3n-2}{(n+1)(n+3)}$ 17) $\dfrac{n+2}{n^2-7n}$ 18) $\dfrac{5n-3}{n^2-2n+4}$

19) $\dfrac{1}{5n^2+2\sqrt{n}}$ 20) $\dfrac{7n-2}{2n^2-4n+3}$ 21) $\dfrac{1}{\sqrt{7n^2+n}}$

22) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3n+1}+\sqrt{2n}+3}$ 23) $\sqrt{\dfrac{n}{n^2+1}}$ 24) $\dfrac{1}{\sqrt{3n-1}+2\sqrt{n+1}}$

25) $\dfrac{1}{2n^2+\sqrt{n+1}}$ 26) $\dfrac{n}{\sqrt{n^3+n^2}}$ 27) $\dfrac{2n^3+3n}{n!}$

28) $\dfrac{1}{(2n^2+1)\sqrt{n+4}}$ 29) $\dfrac{1}{5n\sqrt{4n+1}}$ 30) $\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}\sqrt{5n+4}}$

Завдання 3.

Задано загальний член $u_n(x)=a_n(x-x_0)^n$ степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$. Записати явно часткову суму $S_2(x)=\sum_{n=0}^{2}u_n(x)$. Знайти область збіжності ряду.

1) $\dfrac{n+3}{2n^3+4}(x-3)^n$ 2) $\dfrac{3^n}{n-2}(x-2)^n$ 3) $\dfrac{2n\sqrt{n+1}}{3n^3-5}(x-4)^n$

4) $\dfrac{2n^2+1}{3n^2-4}(x+5)^n$ 5) $\dfrac{2^n}{n^2+8}(x+1)^n$ 6) $\dfrac{(x-4)^n}{2^n(n+3)}$

7) $\dfrac{n^2-1}{5^{n-1}}(x+5)^n$ 8) $\dfrac{2n-8}{n^2+4}(x+4)^n$ 9) $\dfrac{2^n}{n+4}(x+3)^n$

10) $\dfrac{n+4}{n^3-2}(x+1)^n$ 11) $\dfrac{\sqrt{n}}{3^n(n^2-8)}(x+2)^n$ 12) $\dfrac{n+4}{2n^2-1}(x+3)^n$

13) $\frac{2n-4}{n^3+1}(x+2)^n$	14) $\frac{2\sqrt{n}}{3^n}(x-1)^n$	15) $\frac{3^n}{n+3}(x-3)^n$
16) $\frac{(x+7)^n}{5^{n-1}(2n-3)}$	17) $\frac{(x+3)^n}{(n+1)(n+2)}$	18) $\frac{3n-2}{2n^3-3}(x-4)^n$
19) $\frac{(x+2)^n}{4^{n-2}(n+1)}$	20) $\frac{x^n}{(3n-8)(2n+1)}$	21) $\frac{n-2}{n^3+1}(x-3)^n$
22) $\frac{(x+5)^n}{2^{n-3}(n+1)}$	23) $\frac{2n^2+1}{3n^2-4}(x-3)^n$	24) $\frac{2^n}{(n+3)(n+1)}(x+1)^n$
25) $\frac{3^{n-2}}{n+1}(x+3)^n$	26) $\frac{\sqrt{n}\,2^{n+1}}{n^{2+2}}(x+4)^n$	27) $\frac{n-1}{2n^2+1}(x+2)^n$
28) $\frac{n-3}{3n+1}(x+3)^n$	29) $\frac{(x+3)^n}{3^n(n+1)}$	30) $\frac{5^{n-1}}{n^2+3}(x-3)^n$

Завдання 4.

Наближено обчислити наступні значення, використовуючи 3 члени розкладу функцій у ряд Маклорена. Оцінити похибку. Вважати, що $\pi = 3.1416$.

1) $\sin 15°$	2) $e^{-1.2}$	3) $\mathrm{arctg}\ 0.3$
4) $\ln 1.3$	5) $\mathrm{arctg}\, 0.5$	6) $\cos 9°$
7) $\ln 1.1$	8) $e^{-0.5}$	9) $\sqrt[3]{1.2}$
10) $\sin 10°$	11) $\mathrm{arctg}\, 0.1$	12) $e^{-0.7}$
13) $\sqrt{1.4}$	14) $\cos 15°$	15) $\ln 1.2$
16) $\sqrt[3]{1.5}$	17) $e^{-0.9}$	18) $\sqrt[3]{1.1}$
19) $e^{-0.4}$	20) $\sin 15°$	21) $\sqrt{1.3}$
22) $e^{-0.6}$	23) $\mathrm{arctg}\, 0.2$	24) $\sqrt[3]{1.4}$
25) $\ln 1.4$	26) $\cos 15°$	27) $e^{-0.3}$
28) $\sqrt{1.2}$	29) $\mathrm{arctg}\, 0.4$	30) $\sqrt{1.1}$

Завдання 5.

Наблизити функцію квадратним тричленом у околі точки $x_0 = 0$ за допомогою розкладу її у ряд Маклорена

1) $\frac{\sin x + 2\cos x}{1+2x}$	2) $\sqrt{\cos x}$	3) $e^{\sin 2x}$
4) 5^{2x^2+4x}	5) $\lg(x^2+1)$	6) $4^{\cos x}$
7) $\mathrm{tg}\, x \cdot \ln(x+1)$	8) $\sqrt{x^2+2}$	9) $\sqrt[3]{2x+1}$
10) $\ln(x+1)\cos x$	11) $\frac{2x+1}{x^2+4}$	12) $(x^2+7x+2)\,\mathrm{tg}\, x$
13) 3^{x^3+7x}	14) $\lg(x^2+2x+10)$	15) $\frac{\cos x}{x^2+1}$
16) $\sqrt[3]{3x+4}$	17) $(2x^2-x+1)^4$	18) $\frac{\sin x}{x^2+2}$
19) $\ln^2(x^2+4)$	20) $\mathrm{arctg}(x^2+1)$	21) $\sin x\, e^{x^2-x}$

22) $\dfrac{e^{x^2}}{x+1}$ 23) $\arcsin 2x$ 24) $\sin\left(x^2+3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

25) $\left(x^3+2x^2+4x+2\right)^3$ 26) $\dfrac{\sin x}{x^2-1}$ 27) $\dfrac{\cos 2x}{x+1}$

28) $\dfrac{-x+1}{2x^2+4}$ 29) $\ln(x+1)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 30) $\sqrt{e^x+3}$

Завдання 6.

Обчислити наближено інтеграл $\int\limits_0^a f(x)dx$, взявши 4 члени розкладу у степеневий ряд підінтегральної функції. Оцінити похибку.

№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a
1	$\sqrt{1+3x^3}$	0,7	**2**	$\dfrac{1-\mathbf{cos}\sqrt{x}}{x}$	0,1	**3**	$\dfrac{\mathbf{arctg}\,2x}{x}$	0,1	**4**	$\dfrac{\mathbf{ln}(1+2x)}{x}$	0,1
5	$\dfrac{x}{1+x^3}$	0,8	**6**	$\sqrt[3]{1+2x}$	0,4	**7**	$\dfrac{\mathbf{sin}2x^3}{x^2}$	0,5	**8**	$\dfrac{e^{0.5x}-1}{x}$	2
9	$\dfrac{\mathbf{ln}(1+x^2)}{x^2}$	0,6	**10**	$\dfrac{x}{1+2x^3}$	0,9	**11**	$\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$	0,2	**12**	$\mathbf{cos}\sqrt{x}$	0,3
13	$\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$	0,6	**14**	$\dfrac{1-\mathbf{cos}\,2x}{x^2}$	0,5	**15**	$x\sqrt{1+2x^3}$	0,5	**16**	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}$	0,7
17	$\dfrac{1-\mathbf{cos}\,x^2}{x^3}$	0,5	**18**	$\dfrac{\mathbf{arctg}\,x-x}{x^2}$	0,1	**19**	$\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^3}}$	0,6	**20**	$\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$	0,3
21	$\dfrac{\mathbf{sin}x-x}{x^2}$	0,4	**22**	$\dfrac{e^{-x^3}-1}{x^2}$	0,9	**23**	$\dfrac{1-\mathbf{cos}\,2x}{x^2}$	0,5	**24**	$\dfrac{1}{1+2x^3}$	0,8
25	$\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{x^3}$	0,5	**26**	$\dfrac{1}{1+x^4}$	0,8	**27**	$\dfrac{\mathbf{sin}2x^2}{x^2}$	1,0	**28**	$\dfrac{\mathbf{arctg}\,x^2}{x}$	0,2
29	$\dfrac{\mathbf{ln}(1+x^3)}{x}$	0,3	**30**	$\dfrac{\mathbf{arctg}\,x-x}{x}$	0,1						

Завдання 7.

Знайти наближений розв'язок задачі Коші $f(x,y,y')=0;\ y(x_0)=y_0$ за допомогою розкладу невідомої функції у ряд Тейлора обмежившись трьома членами розкладу

1) $y'y^2=\sqrt{x+y};\ y(0)=1$

2) $y'=(y^2-x)+\mathbf{ln}(x+1);\ y(0)=1$

3) $y'=(y^2+x+1)\mathbf{cos}(x+2y);\ y(0)=0$

4) $y'(x+1)=x^2y+xy^3;\ y(1)=1$

5) $y'=2e^{xy}+x;\ y(0)=1$

6) $y'=3x+2y^3+4xy;\ y(1)=1$

7) $y'=2x+\mathbf{cos}\,y;\ y(1)=0$

16) $y'=2xy^2+x+5y;\ y(1)=1$

17) $y'(x+2y)=y^2e^{x+y^2};\ y(-1)=1$

18) $y'=2\mathbf{sin}(x-y)+x;\ y(1)=1$

19) $y'=2\sqrt{y}-y+x^2;\ y(1)=1$

20) $y'=y\,\mathbf{cos}(xy);\ y(0)=1$

21) $y'e^y=x^2+\mathbf{ln}(x+y);\ y(1)=0$

22) $y'\mathbf{cos}(2x-y)=3x;\ y(1)=2$

8) $y' e^{2y} = 3\cos x;\ y(0)=0$

9) $y'(1+\sin x) = 2 + y^2 + \cos x;\ y(0)=1$

10) $y'\sqrt{y} = (x-2y^2)\sin x;\ y(0)=1$

11) $y' = \ln(x+y) + x;\ y(1)=1$

12) $y'(1+x^2 y) = xy^3;\ y(1)=1$

13) $y' = xe^y + ye^x;\ y(0)=1$

14) $y' = (5x+y^2)\cos x;\ y(0)=1$

15) $y' y^2 = \cos(xy);\ y(0)=1$

23) $y'(x+2y) = 3\sqrt{x} - 4y^2;\ y(1)=0$

24) $y'(x^2+y^2) = \sin(xy) + x;\ y(1)=0$

25) $y'(2x+3y) = 3y^2 - 4;\ y(1)=0$

26) $y'\cos x = 1 + xy;\ y(0)=1$

27) $y' e^{2y+3x} = 5\sin x + 1;\ y(0)=0$

28) $y'(2x-3y) = 3y^2 - 2x;\ y(1)=1$

29) $y' = \ln(x+y) + xy^2;\ y(0)=1$

30) $y'\cos x = (1+xy);\ y(0)=1$

Завдання 8.

Періодичний з періодом $2l$ прямокутний імпульс $f(x)$ є заданим на півперіоді (0, l) формулою

$$f_0(x) = \begin{cases} h & x \in (\alpha, \beta) \\ 0 & x \notin (\alpha, \beta) \end{cases}.$$

Побудувати графік $f(x)$ на інтервалі ($-2l$, $2l$), продовжуючи $f_0(x)$ як парну функцію для парних номерів завдання (№), і як непарну – для непарних номерів.

Розкласти $f(x)$ у ряд Фур'є.

Записати тригонометричні многочлени $S_1(x), S_2(x), S_3(x)$, що наближують $f(x)$.

Обчислити їх у точці x_0, що є серединою інтервалу (α, β).

Знайти значення $S(x)$ у точках x_0 та $x_1=\beta$.

№	l	α	β	h
1	4	1	2	-1
2	6	3	5	2
3	8	1	2	4
4	8	4	7	1
5	4	1	3	-2
6	6	2	3	5
7	6	3	4	3
8	4	1	4	-2
9	6	2	5	3
10	4	2	4	1
11	6	3	4	-1
12	4	1	3	-3
13	8	4	5	4
14	6	4	6	-3
15	8	1	4	2

№	l	α	β	h
16	6	1	4	6
17	4	2	5	-5
18	8	2	7	6
19	6	3	6	-2
20	4	3	7	1
21	6	2	4	-2
22	8	1	4	2
23	6	1	6	1
24	4	2	5	-1
25	8	3	4	2
26	6	1	5	-3
27	8	1	7	6
28	6	2	6	1
29	4	2	6	-1
30	8	4	7	-4