ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Частина 2

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

Конспект лекцій

Харків – 2015

Дискретна математика. Ч. 2. Елементи теорії графів. Елементи комбінаторного аналізу: Конспект лекцій / О.І. Удодова, Ю.С. Шувалова, Н.С. Юрчак. – Харків: УкрДУЗТ, 2015. – 50 с.

Конспект призначено для вивчення (у тому числі і самостійного) розділів графи і комбінаторика дисципліни «Дискретна математика». Теоретичний матеріал проілюстровано багатьма цікавими прикладами, що допоможе студентам у самостійній роботі над конспектом та при виконанні домашніх завдань. Для більш глибокого опрацювання матеріалу можна використати наведену літературу. Конспект також може бути використаний студентами інших напрямів підготовки як допоміжний матеріал при вивченні таких дисциплін, як "Дослідження операцій", "Оптимізаційні методи і моделі", "Теорія ймовірностей і математична статистика".

Рекомендовано для напрямків підготовки бакалаврів «Комп'ютерна інженерія» та «Телекомунікації» денної та заочної форм навчання.

Іл. 35, табл. 3, бібліогр.: 11 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 26 березня 2014 р., протокол № 8.

Рецензент

доц. Ю.О. Акімова

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Частина 2

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ.
ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

Конспект лекцій

Відповідальний за випуск Удодова О.І.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 24.04.15 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,25. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

О.І. Удодова, Ю.С. Шувалова, Н.С. Юрчак

Дискретна математика
Частина 2. Елементи теорії графів. Елементи комбінаторного аналізу

Конспект лекцій з дисципліни «Дискретна математика» для бакалаврів напрямку підготовки “Комп'ютерна інженерія”

Харків 2015

Удодова О.І., Шувалова Ю.С., Юрчак Н.С. Дискретна математика. Ч. 2. Елементи теорії графів. Елементи комбінаторного аналізу: Конспект лекцій. – Харків: УкрДУЗТ, 2015. – 44 с.

Конспект призначено для вивчення (у тому числі і самостійного) розділів графи і комбінаторика дисципліни «Дискретна математика». Теоретичний матеріал проілюстровано багатьма цікавими прикладами, що допоможе студентам у самостійній роботі над конспектом та при виконанні домашніх завдань. Для більш глибокого опрацювання матеріалу можна використати наведену літературу. Конспект також може бути використаний студентами інших напрямів підготовки як допоміжний матеріал при вивченні таких дисциплін, як "Дослідження операцій", "Оптимізаційні методи і моделі", "Теорія ймовірностей і математична статистика".

Рекомендовано для напрямків підготовки бакалаврів «Комп'ютерна інженерія» та «Телекомунікації» денної та заочної форм навчання.

Іл. 35, табл. 3, бібліогр.: 11 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 26 березня 2014 р., протокол № 8.

1.

Рецензент

доц. Ю.О. Акімова

Зміст

Вступ..4

1 Графи..4

1.1 Виникнення теорії графів...4

1.2 Основні поняття теорії графів..6

1.3 Матричні характеристики графів....................................17

1.4 Операції над графами...22

1.5 Задачі про максимальний потік на сітках......................25

1.6 Поняття про сітки Петрі, які використовуються для проектування складних обчислюваних систем..................30

2 Комбінаторика..36

2.1 Правила суми та добутку..36

2.2 З'єднання без повторень..41

2.3 З'єднання з повтореннями...47

Список літератури...50

ВСТУП

У конспекті лекцій розглянуто основні визначення і поняття теорії графів і комбінаторики, необхідні для розв'язання деяких прикладних задач дискретної математики. Конспект містить теоретичні відомості, які ілюструються рисунками. Наведено приклади розв'язання типових задач. На доступному рівні викладено основоположні питання, що входять до навчальної програми з дисципліни "Дискретна математика".

1 ГРАФИ

Теорія графів – це розділ математики, який дозволяє моделювати сучасні задачі, які пов'язані з дискретними об'єктами. Велику роль відіграють алгоритми на графах. Теорія графів являє собою дуже зручну мову для опису програмних і багатьох інших моделей. Струнка система спеціальних термінів і визначень теорії графів дозволяє просто описувати складні та тонкі речі. Особливо важливим є наявність наглядної графічної інтерпретації поняття графа. Зображення дозволяють відразу розгледіти суть питання на інтуїтивному рівні.

Теорія графів є корисною в дуже різноманітних сферах людської діяльності: фізика, хімія, Інтернет, теорія зв'язку, проектування обчислювальних машин, електротехніка, машинобудування, архітектура, дослідження операцій, генетика, психологія, соціологія, економіка, антропологія, лінгвістика тощо.

1.1 Виникнення теорії графів

Історично склалося так, що теорія графів зародилася двісті років тому під час розв'язання головоломок. Перша робота з теорії графів, що належить відомому математику Леонарду Ейлеру, з'явилася в 1736 р. А як окрема математична дисципліна теорія графів була вперше представлена в роботі угорського математика Денеша Кьоніга в 30-ті рр. XX ст.

Задача про кенігсберзькі мости

Місто Кенігсберг (зараз Калінінград) розташовано на берегах річки Прегель і двох островах (рисунок 1.1).

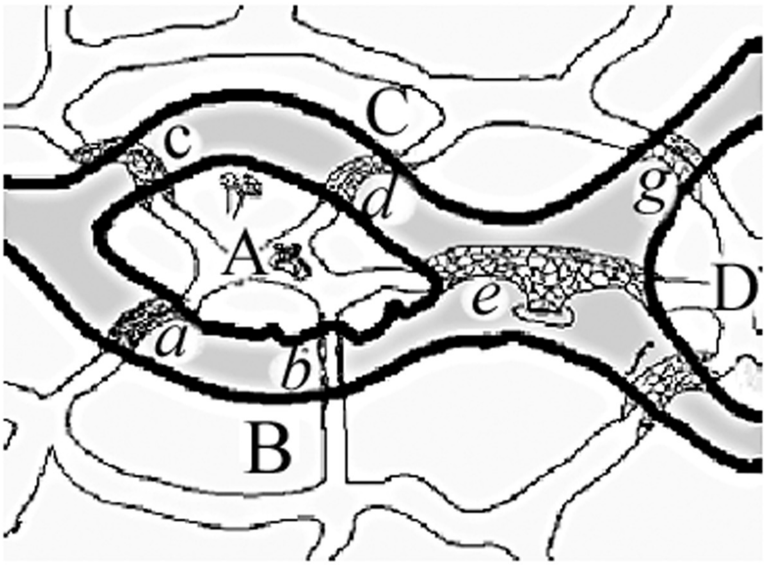
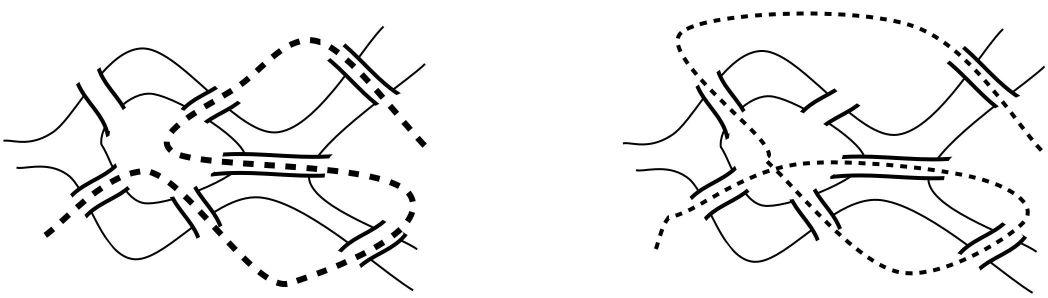


Рисунок 1.1 – Кенігсберг

Частини суші з'єднані сімома мостами. У неділю мешканці міста полюбляють гуляти. Чи можна вийти з будинку та повернутися назад, при цьому пройти по кожному мосту, але тільки один раз?

Інтуїтивно зрозуміло, що це неможливо (рисунок 1.2 а, б).



а) б)

Рисунок 1.1.2

Л. Ейлер побудував математичну абстракцію, яка називається графом та ілюструє задачу про мости (рисунок 1.3). У цьому графі ділянки суші зображені точками, які називають вершинами, а мости – дугами, які називаються ребрами. У цій інтерпретації задача має таке формулювання: чи можна накреслити всі ребра графа на рисунку 1.3, не відриваючи олівець від паперу та не проходячи жодне ребро більше одного разу?

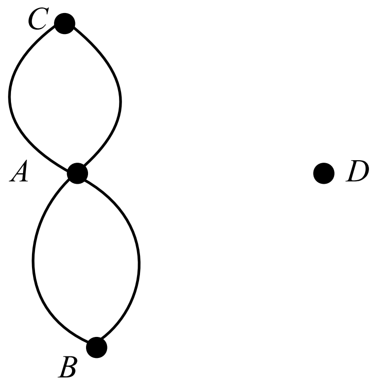


Рисунок 1.3 – Графічне зображення задачі про кенігсберзькі мости

Як виявилось, ця задача не має розв’язків. Це була перша класична задача про графи.

1.2 Основні поняття теорії графів

З поняттям графа зазвичай пов’язують його графічне подання, при якому він зображується як множина точок, деякі з яких з’єднані лініями. Але граф відрізняється від геометричних конфігурацій (скажімо, фігур, які також складаються з точок і ліній) тим, що в графі несуттєві відстані між точками, форма з’єднувальних ліній і кути між ними. Важливо лише те, чи з’єднана дана пара точок лінією, чи ні. Тому граф іноді називають топологічним об’єктом, тобто об’єктом, властивості якого не змінюються при розтягуванні, стисненні та викривленні. З цієї ж причини (важливим є тільки наявність або відсутність з’єднань) граф – об’єкт дискретний і може бути заданий двома дискретними множинами: множиною точок, які будемо називати вершинами, і множиною ліній, які з’єднують деякі вершини. Лінії будемо називати ребрами.

При зображенні графів на рисунках або схемах відрізки можуть бути прямолінійними або криволінійними; довжини відрізків і розташування точок довільними.

Наприклад, всі три фігури на рисунку 1.4 зображують один і той самий граф.

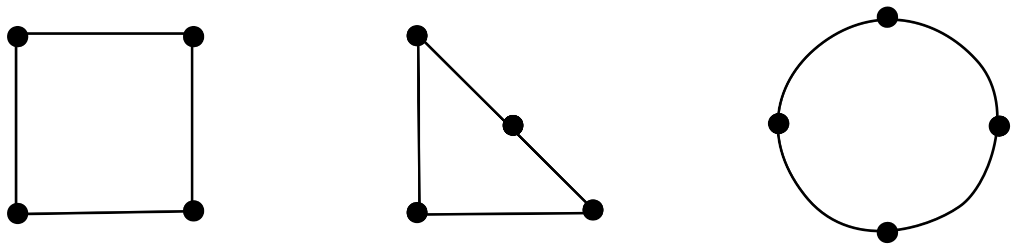
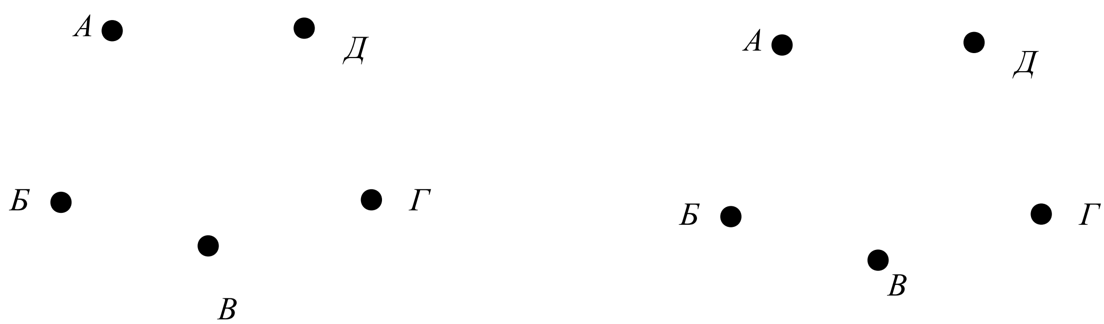


Рисунок 1.4

Ознайомимося з основними поняттями теорії графів при розв’язанні нескладного завдання.

Приклад. Аркадій, Борис, Володимир, Григорій і Дмитро при зустрічі обмінялися рукостисканнями (один потиснув руку одному по одному разу). Скільки всього рукостискань було зроблено?

Нехай кожному з п'яти молодих людей відповідає певна точка на площині, названа першою літерою його імені (рисунок 1.5, а), а зробленому рукостисканню – відрізок або частина кривої, що з'єднує конкретні точки – імена (рисунок 1.5, б).



а) б)

а) нуль-граф; б) неповний граф
Рисунок 1.5

Точки *А, Б, В, Г, Д* – *вершини* графа, а відрізки ліній, що з'єднують ці точки, – *ребра* графа.

Розглянемо процес з'єднання точок *А, Б, В, Г, Д* ребрами на рисунку 1.5, а.

1 Ситуація в момент, коли рукостискання ще не здійснювалися, складається з “ізольованих” вершин і називається нульовим графом (рисунок 1.5, а).

2 Ситуація, коли скоєні ще не всі рукостискання, може схематично бути зображена, наприклад, за допомогою рисунка 1.5, б: потиснули руки *А* і *Б*, *А* і *Г*, *Д* і *Г*, *В* і *Д*. Граф, у якому не побудовано всі можливі ребра, називається неповним графом.

3 На рисунку 1.6 зображено граф, що відповідає всім рукостисканням. Цей граф є повним графом. Граф, який не є повним, можна доповнити, додавши відсутні ребра. Так, наприклад, на рисунку 1.5, б зображено неповний граф з п'ятьма вершинами. На рисунку 1.6 ребра, які перетворюють граф з рисунка 1.5, б в повний граф, зображені більш жирними лініями. Сукупність вершин графа з цими ребрами називається доповненням графа.

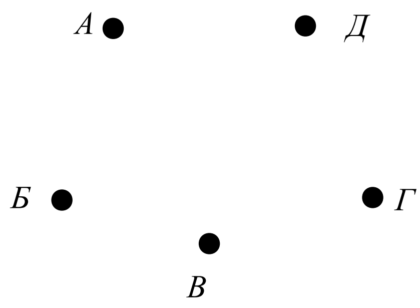


Рисунок 1.6 – Повний граф

Якщо підрахувати кількість ребер графа, зображеного на рисунку 1.6, то це число і буде дорівнювати кількості скоєних рукостискань між п'ятьма молодими людьми. Їх десять.

Приклад. Ще один наочний приклад графа можна навести, якщо розглянути групу студентів, які пишуть контрольну роботу. Позначимо вершинами графа студентів, а ребра проведемо між тими, хто списує. Тоді для групи з 6 студентів може виникнути граф, як на рисунку 1.7.

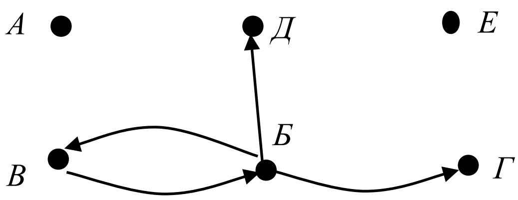


Рисунок 1.7

Напрям стрілочки показує, хто в кого списує. Такі графи називають орієнтованими. Отже, з рисунка 1.7 бачимо, що студенти Б та В списують один в одного, при цьому студент Б ще списує у студентів Д і Г, студенти А та Е виконують роботу самостійно, і в них ніхто не списує.

Приклад. Ще одним з важливих прикладів застосування графів є Інтернет. Нехай сайти Інтернету – це вершини графа, а посилання між сайтами – ребра. Тоді, якщо розглянути кілька сайтів, може виникнути досить складний граф (рисунок 1.8). У такому графі одна сторінка сайта може посилатися на іншу сторінку цього самого сайта, у результаті виникає петля, або навіть кілька петель, як це зображено для вершини Г. Один сайт може давати посилання на різні сторінки іншого сайта, і виникають кратні ребра, як між вершинами Е та Г. Або може виникнути новий сайт, який ще ні на кого не посилається і на нього теж немає посилань, – вершина А.

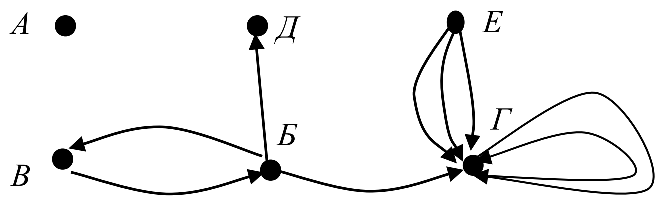


Рисунок 1.8

Тепер дамо більш формалізоване визначення графа.

Визначення. Нехай дана множина $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ і визначено на V сімейство $U=\{u_1,u_2,...,u_m\}$ пар елементів $u_k=\{v_i,v_j\}$ $(k=1,...,m)$ довільної кратності і впорядкування. Пара $\{V,U\}$ називається *графом*. Графи позначають, наприклад, G, H.

Елементи $v_1,v_2,...,v_n$ називаються *вершинами* графа, а пари $u_k=\{v_i,v_j\}$ $(k=1,...,m)$ – *ребрами* графа.

Визначення. Ребро u_j називається *інцидентним* вершині v_i, якщо воно виходить або входить у цю вершину.

Визначення. Ребро називається *петлею* (рисунок 1.9), якщо його початок і кінець збігаються.

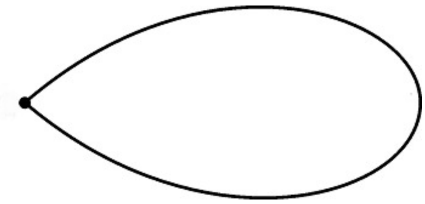


Рисунок 1.9

Деякі види графів

Визначення. Граф називається *простим*, якщо він не містить кратні ребра, петлі та не має орієнтації.

Прості графи були зображені на рисунках 1.4-1.6.

Визначення. Граф, що містить кратні ребра, називається *мультиграфом*.

Мультиграф ілюстрував задачу про кенігсберзькі мости (рисунок 1.3).

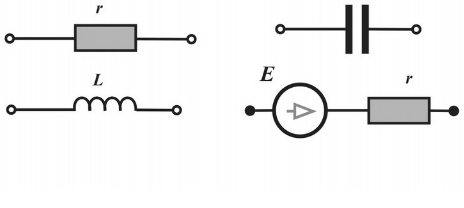
Визначення. Граф, що містить петлі, називається *псевдографом*.

Визначення. Граф, у якому є орієнтація, називається *орієнтованим*, або *орграфом*.

Зауважимо, що орграф, зображений на рисунку 1.7 не є мультиграфом. Ребра між двома вершинами, які мають протилежний напрямок, вважаються різними.

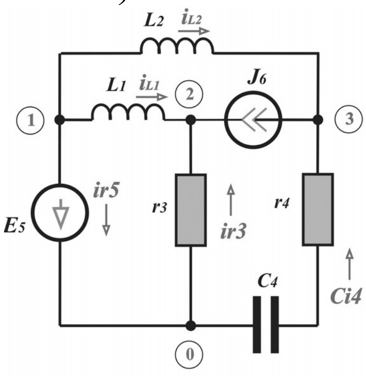
Всі ці терміни можна комбінувати. Найскладніший з наведених вище граф Інтернету, зображений на рисунку 1.8, є *мульти-псевдо-орграфом*.

Наведемо ще кілька класичних задач на графи. Німецький вчений Густав Роберт Кірхгоф застосовував теорію графів до вивчення електричних ланцюгів. Приклад зображення електричного кола у вигляді графа наведено на рисунку 1.10.

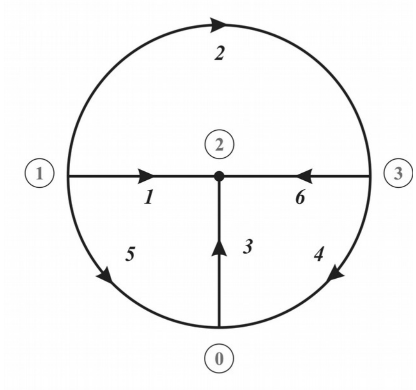


б)

а)



в)



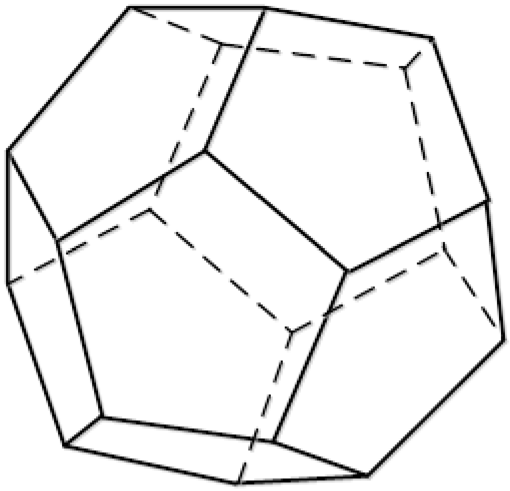
г)

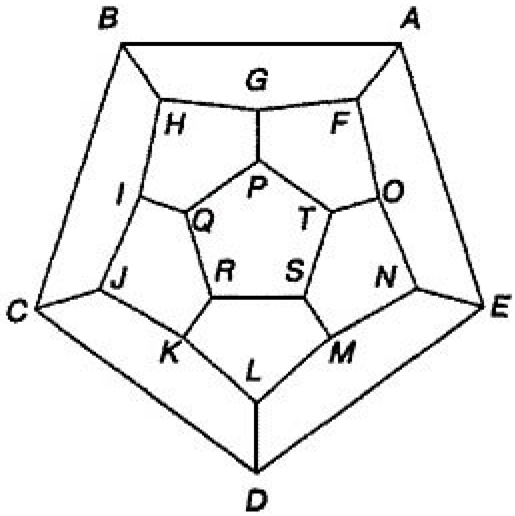
а) елементи, що є складовими електричного кола; б) зображення елементів з рисунка а) ребром графа; в) зображення схеми електричного кола; г) зображення схеми з рисунка в) за допомогою графа

Рисунок 1.10

Ще одна класична задача теорії графів – це *задача Гамільтона*.

У XIX ст. Гамільтон придумав гру, многогранник-додекаедр (рисунок 1.11, а).





а) б)

а) додекаедр; б) граф додекаедра

Рисунок 1.11

Питання було таке: чи можна, проходячи по ребрах, обійти всі вершини та повернутися в початкову. Цю задачу теж можна зобразити графом (рисунок 1.11, б)). І задача Гамільтона зводиться до пошуку так званих гамільтонових циклів: гравець має позначити шнуром замкнене коло, що з’єднує послідовно одну вершину з іншою, відвідавши при цьому всі вершини, і кожну тільки один раз. Прикладом іншої задачі, яку можна промоделювати на основі теорії графів, є задача про три будинки і три колодязі.

Задача про три будинки і три колодязі

На одній ділянці землі було побудовано три будинки і вирито три колодязі для його мешканців. Природа країни і її клімат такі, що колодязі часто пересихають, тому важливо, щоб від кожного з будинків був доступ до кожного з колодязів (рисунок 1.12).

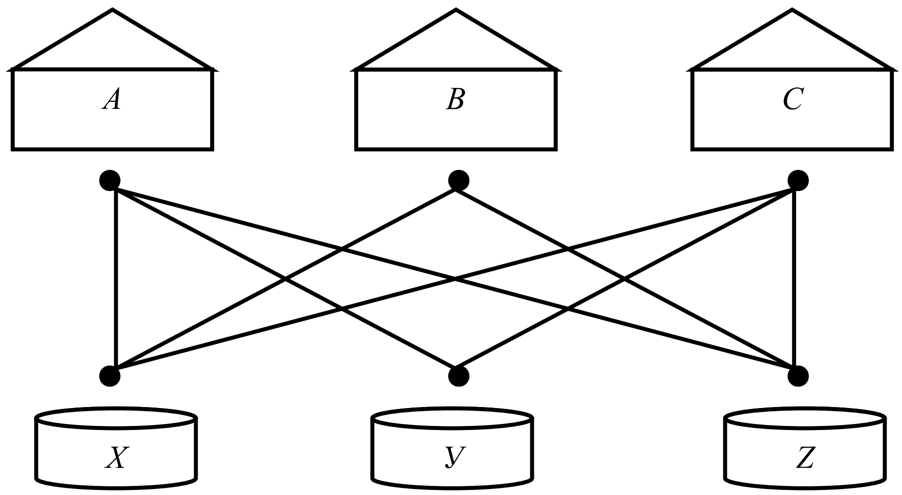
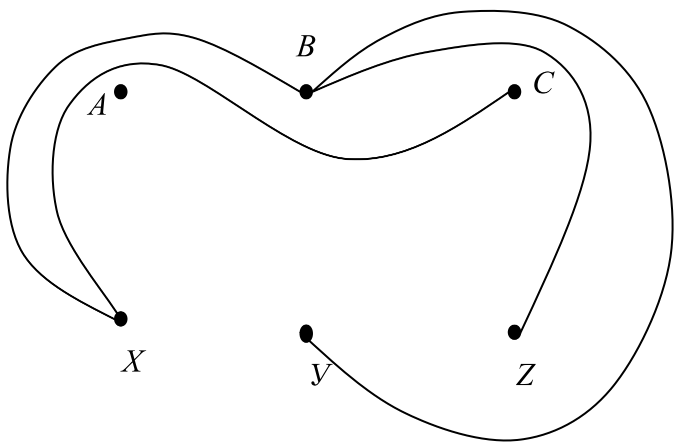


Рисунок 1.12 – Задача про три будинки та три колодязі

Через деякий час мешканці будинків *A*, *B* і *C* посварилися один з одним і вирішили прокласти доріжки до трьох колодязів *X, Y, Z* так, щоб по дорозі їм не доводилося зустрічати один одного. Чи можна взагалі провести доріжки так, щоб вони не перетиналися ніде, крім вершин графа *A, B, C, X, Y, Z*?

Існує багато способів зображення графа для цієї задачі, наприклад рисунки 1.13, 1.14.



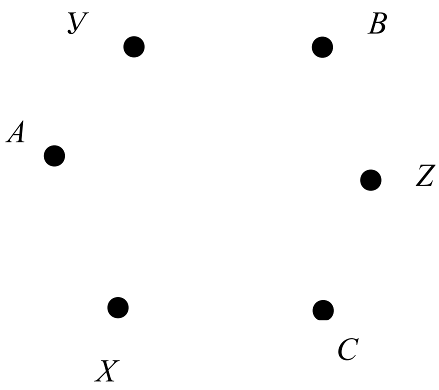


Рисунок 1.13 – Кількість «зайвих» точок перетину можна звести до однієї

Рисунок 1.14

Зауважимо, що на рисунках 1.12-1.14 зображено один і той самий граф. І всі спроби показують, що якісь ребра будуть перетинатися. Доведення того, що доріжок, які не перетинаються, у цій задачі не існує, ґрунтується на теоремі

Теорема Жордана про криві. Нехай К – неперервна замкнена лінія на площині. Лінія К ділить площину на зовнішню і внутрішню області так, що будь-яка неперервна крива *L*, яка з'єднує довільну точку Р внутрішньої області з деякою точкою Q зовнішньої області, перетинає К (рисунок 1.15).

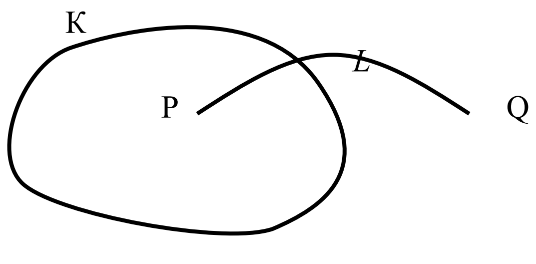
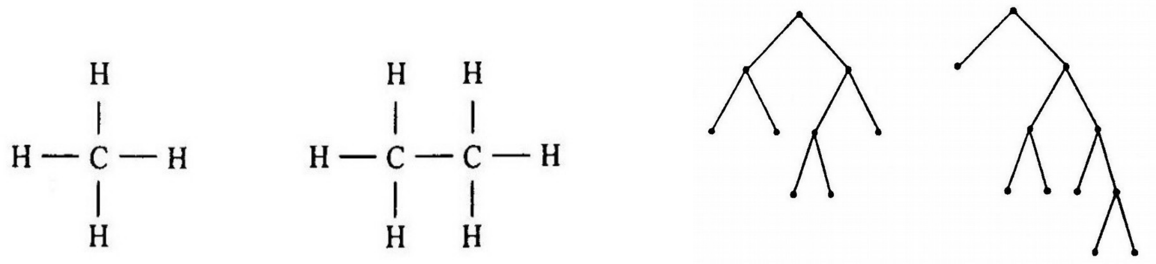


Рисунок 1.15

Доведення цієї теореми досить складне (наприклад, див. роботу [9]). Теорема Жордана є однією з фундаментальних теорем топології і застосовується при розв’язанні багатьох важливих завдань.

Ще одне класичне застосування теорії графів започаткував англійський математик Артур Кєлі. У 1875 р. він опублікував працю, у якій застосував теорію графів до хімії, Кєлі цікавила структура молекул хімічних полімерів (рисунок 1.16).



(метан) (етан)

Рисунок 1.16

У 1875 році Кєлі опублікував роботу, яка була визнана першою роботою з застосування теорії графів у хімії. Кєлі запропонував зображати структури молекул графами (рисунок 1.16). Такі графи називаються *деревами* (визначення *дерев* буде наведено нижче). Кєлі цікавило, скільки таких дерев взагалі можливе, тобто скільки у хімії може бути елементів з такими структурами.

Наприкінці підрозділу наведемо ще декілька важливих понять, які пов’язані з графами.

Визначення. *Ланцюгом* називають деяку послідовність ребер. Граф називається *зв'язним*, якщо будь-які його дві вершини можна з'єднати ланцюгом.

Визначення. Граф називається *скінченним*, якщо він представлений скінченною кількістю ребер, у протилежному випадку - нескінченним.

Визначення. *Зважений* граф – граф, кожному ребру якого поставлено у відповідність деяке числове значення (вага ребра).

Визначення. *Цикл* – це скінченний ланцюг, у якого початкова та остання вершина збігаються.

Приклади циклів наведено на рисунку 1.17.

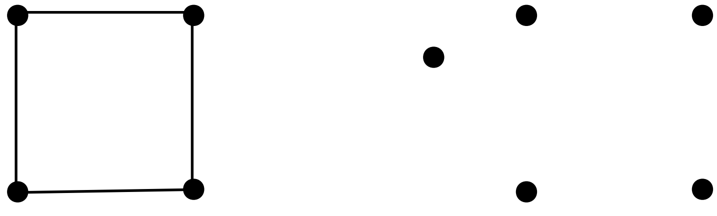


Рисунок 1.17

Визначення. *Дерево* – це скінченний, зв'язний, неорієнтований граф, який не має циклів.

Приклади дерев було наведено на рисунку 1.16, ще одно дерево зображено на рисунку 1.18.

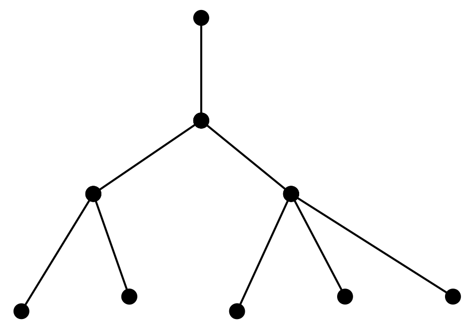


Рисунок 1.18 – Дерево

Дерева особливо часто виникають на практиці при зображенні різних ієрархій. Дерева – дуже зручний інструмент подання інформації різного вигляду. Дерева відрізняються від простих графів тим, що при обході дерева неможливі цикли. Це робить такі графи дуже зручною формою організації даних для різних алгоритмів. Отже, окрім хімічних молекул, поняття дерева активно використовується в інформатиці та програмуванні.

Властивості дерев:

а) будь-які дві вершини дерева з'єднані єдиним ланцюгом;

б) дерево з n вершинами містить $n-1$ ребро;

в) на n вершинах можна побудувати n^{n-2} різних дерев.

Дерево є мінімальним зв'язним графом у тому розумінні, що видалення хоча б одного ребра призводить до того, що граф виявляється незв'язним.

Визначення. *Повний* граф – граф без петель і кратних ребер, кожна пара вершин якого з'єднана ребром.

Загальні властивості повних графів:

1 Степені вершин повного графа однакові, і кожен з них на одиницю менший за кількість вершин цього графа.

Доведення. Кожна вершина з'єднана ребром з кожною вершиною, крім самої себе, тобто з кожної вершини графа, що має n вершин, виходить n-1 ребро.

Якщо степені усіх вершин графа рівні, то граф називається однорідним. Таким чином, будь-який повний граф – однорідний. △

2 Кількість непарних вершин повного графа парна.

Наслідки:

а) неможливо накреслити не відриваючи олівець від паперу (“одним розчерком”) граф з непарною кількістю непарних вершин;

б) якщо всі вершини графа парні, то можна накреслити цей граф не відриваючи олівець від паперу, проводячи по кожному ребру тільки один раз. Рух можна почати з будь-якої вершини і закінчити його в тій самій вершині;

в) граф з рівно двома непарними вершинами можна накреслити, не відриваючи олівець від паперу, при цьому рух потрібно почати з однієї з цих непарних вершин і закінчити в іншій;

г) граф, що має більше двох непарних вершин, неможливо накреслити “одним розчерком”.

Визначення. Дві вершини називаються *суміжними*, якщо існує ребро, яке з’єднує їх.

Визначення. *Степінь вершини* – це кількість ребер графа, що виходять з цієї вершини.

На рисунку 1.19 зображений граф з п'ятьма вершинами. Степінь вершини А позначимо *deg*А.

На рисунку 1.19: *deg*А = 1, *deg*Б = 2, *deg*В = 3, *deg*Г= 2, *deg*Д=0.

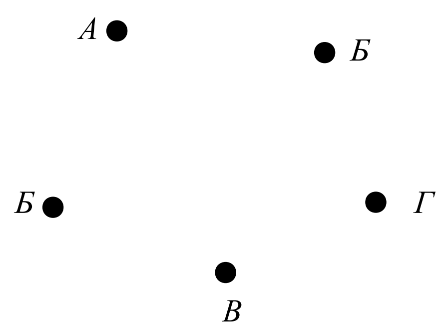


Рисунок 1.19

Визначення. Вершина називається *непарною*, якщо степінь цієї вершини непарний, *парною* – якщо степінь цієї вершини парний.

Теорема Ейлера**.** Сума степенів вершин графа завжди парна:

$$\sum_{v \in G} \deg v = 2m,$$

де m - кількість ребер графа.

Доведення. Дійсно, кожне ребро графа з'єднує дві вершини. Отже, якщо будемо складати кількість степенів усіх вершин графа, то отримаємо подвоєну кількість ребер $2R$ (R – кількість ребер графа), оскільки кожне ребро було підраховано двічі. △

Наслідок. У будь-якому графі кількість вершин непарного степеня парна.

Доведення. Доведемо від оберненого. Припустимо, є непарна кількість вершин непарного степеня. Сума вершин парного степеня – парна. Сума степенів всіх вершин графа є сумою вершин непарного і парного степенів. Така сума завжди є числом непарним. Тобто сума степенів всіх вершин графа буде непарною. Це суперечить умові попередньої теореми. Прийшли до протиріччя. Отже, кількість вершин непарного степеня в будь-якому графі парна. △

1.3 Матричні характеристики графів

Найбільш простий і зрозумілий спосіб представлення графа – зображення графа на площині у вигляді точок і ліній, які з’єднують ці точки. Цей спосіб представлення графа буде некорисним, якщо потрібно буде розглядати задачі, пов’язані з графами на ЕОМ. Але існує ще декілька інших способів представлення графа. Дамо матричні визначення графа.

Визначення. *Матриця суміжності* графа G зі скінченною кількістю вершин n – це квадратна матриця S розміру n, у якій значення елемента s_{ij} дорівнює кількості ребер, які виходять з *i-ї* вершини графа в *j-ту* вершину.

Іноді, особливо у випадку неорієнтованого графа, петля (ребро з *i-ї* вершини в саму себе) вважається за два ребра, тобто значення діагонального елемента s_{ii} в цьому випадку дорівнює подвоєній кількості петель навколо *i-ї* вершини.

Матриця суміжності простого графа, який не містить петель і кратних ребер, є бінарною матрицею (всі елементи її дорівнюють 0 або 1) і містить нулі на головній діагоналі.

Матриця суміжності повного графа містить одиниці у всіх своїх елементах, крім головної діагоналі, на якій розташовані нулі.

***Приклад**: а) записати матрицю суміжності для графа (рисунок 1.20).*

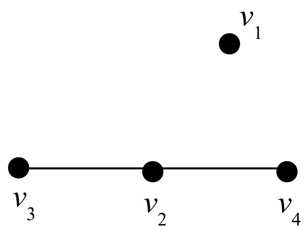


Рисунок 1.20

На рисунку 1.20 зображено неорієнтований граф, напрямок ребер неважливий. Матриця суміжності симетрична відносно головної діагоналі, одиниці в матриці суміжності стоять навпроти відповідних вершин, між якими є ребра.

$$S = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array};$$

б) записати матрицю суміжності для графа (рисунок 1.21).

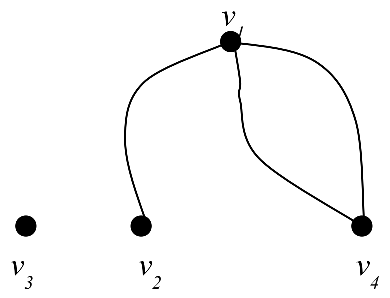


Рисунок 1.21

Між v_2 та v_1 два ребра, а між v_4 та v_1 – три. Відповідна цьому графу матриця суміжності буде мати вигляд

$$S = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array};$$

в) записати матрицю суміжності для графа (рисунок 1.22).

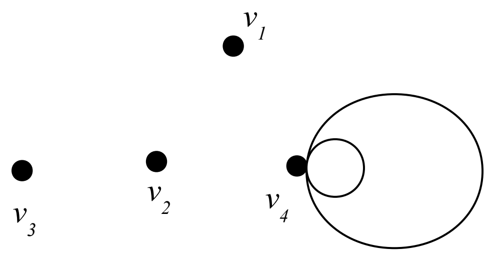


Рисунок 1.22

Є дві петлі при вершині v_4. Відповідна цьому графу матриця суміжності буде мати вигляд

$$S = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array};$$

г) записати матрицю суміжності для графа (рисунок 1.23).

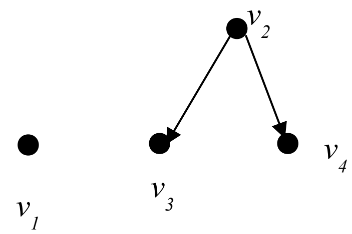


Рисунок 1.23

Для орієнтованого графа матриця суміжності буде мати вигляд

$$S = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матриця інцидентності – одна з форм представлення графа, у якій вказується на зв'язок між інцидентними елементами графа (ребро і вершина). Стовпці матриці відповідають ребрам, рядки - вершинам. Ненульове значення елемента матриці вказує на зв'язок між вершиною і ребром (їх інцидентність).

Визначення. *Матрицею інцидентності T* розміру $m \times n$ для *неорієнтованого графа* називається матриця, що складається з чисел

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ якщо } i - \textit{я вершина інцидентна } j - \textit{му ребру}, \\ 0, \textit{ в протилежному випадку} \end{cases}$$

Матриця інцидентності T розміру $m \times n$ для *орієнтованого графа* складається з чисел

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, \ \textit{якщо} \ \ i-\textit{та} \ \ \textit{вершина} \ \ \textit{є} \ \ \textit{початком} \ \ j-\textit{го} \ \ \textit{ребра} \\ -1, \ \textit{якщо} \ \ i-\textit{та} \ \ \textit{вершина} \ \ \textit{є} \ \ \textit{кінцем} \ \ j-\textit{го} \ \ \textit{ребра}, \\ 0, \ \textit{коли} \ \ \textit{ребра} \ \ \textit{немає} \end{cases}$$

***Приклад**. Записати матрицю інцидентності для графа (рисунок 1.24).*

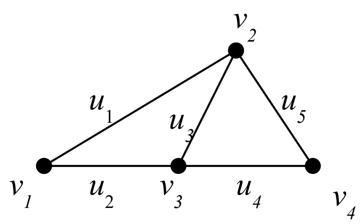


Рисунок 1.24

Матриця інцидентності для цього неорієнтованого графа має вигляд

$$\begin{array}{cc} & \textit{ребра} \\ & \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\ T = \begin{array}{cc} \textit{ве} & v_1 \\ \textit{р} & v_2 \\ \textit{ши} & v_3 \\ \textit{ни} & v_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Сума чисел у кожному стовпчику матриці T для неорієнтованого графа дорівнює 2.

Приклад. Побудувати матрицю інцидентності для графа (рисунок 1.25).

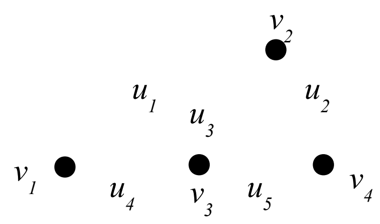


Рисунок 1.25

Матриця інцидентності для орграфа має вигляд

$$T = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Сума чисел у кожному стовпчику матриці Т для орієнтованого графа дорівнює 0.

Отже, граф можна задати різними способами. Він може бути зображений на рисунку, заданий матрицею інцидентності або матрицею суміжності. Вигляд рисунка залежить від форми ліній і взаємного розташування вершин. Іноді не так легко зрозуміти, чи однакові графи, зображені різними рисунками. Вигляд матриць залежить від нумерації вершин і ребер графа. Строго кажучи, граф вважається повністю заданим, якщо нумерацію його вершин зафіксовано.

1.4 Операції над графами

За допомогою різних операцій можна будувати графи з більш простих, переходити від графа до більш простого, розбивати графи на більш прості тощо.

Серед одномісних операцій найбільш розповсюджені: видалення і додавання ребра чи вершини, стягування ребра (ототожнення пари суміжних вершин), підрозбиття ребра (тобто заміна ребра (v, u) на пари (v, w), (w, u), де w - нова вершина) тощо.

Відомі двомісні операції: з’єднання, додавання, різні види множень графів тощо. Такі операції використовуються для аналізу і синтезу графів із заданими властивостями.

На практиці часто зустрічаються графи, які будуються з деякого початкового графа за допомогою вилучення однієї з його вершин або одного з його ребер. Існують і інші можливі перетворення графів, які розглядаються як операції над графами.

1 Видалення вершини v з графа G_1 (V_1, U_1) (позначається G_1 (V_1, U_1)-v за умови $v \in V_1$) дає граф G_2 (V_2, U_2), де

$$V_2 = V_1 \setminus \{v\} \text{ та } U_2 = U_1 \setminus \{u = \{v_1, v_2\} : v_1 = v \text{ або } v_2 = v\}.$$

2 Видалення ребра u з графа G_1 (V_1, U_1) (позначається G_1 (V_1, U_1)-u за умови $u \in U_1$) дає граф G_2 (V_2, U_2), де

$$V_2 = V_1 \text{ та } U_2 = U_1 \setminus \{u\}.$$

3 Додавання вершини v в граф G_1 (V_1, U_1) (позначається G_1(V_1, U_1)+v за умови $v \notin V_1$) дає граф G_2 (V_2, U_2), де

$$V_2 = V_1 \cup \{v\} \text{ та } U_2 = U_1.$$

4 Додавання ребра u в граф G_1 (V_1, U_1) (позначається G_1 (V_1, U_1)+u за умови $u \notin U_1$) дає граф G_2 (V_2, U_2), де

$$V_2 = V_1 \text{ та } U_2 = U_1 \cup \{u\}.$$

5 Доповненням графа G_1 (V_1, U_1) називається граф G_2 (V_2, U_2) (позначається $\overline{G}$ (V_2, U_2)), де

$$V_2 = V_1 \text{ та } U_2 = \overline{U}_1 = \{u \in V_1 \times V_1 : u \notin U_1\}.$$

6 Об’єднанням двох графів G_1 (V_1, U_1) і G_2 (V_2, U_2) називається граф G (V, U) (позначається $G = G_1 \cup G_2$), де

$$V = V_1 \cup V_2;\ U = U_1 \cup U_2 \text{ (рисунок 1.26).}$$

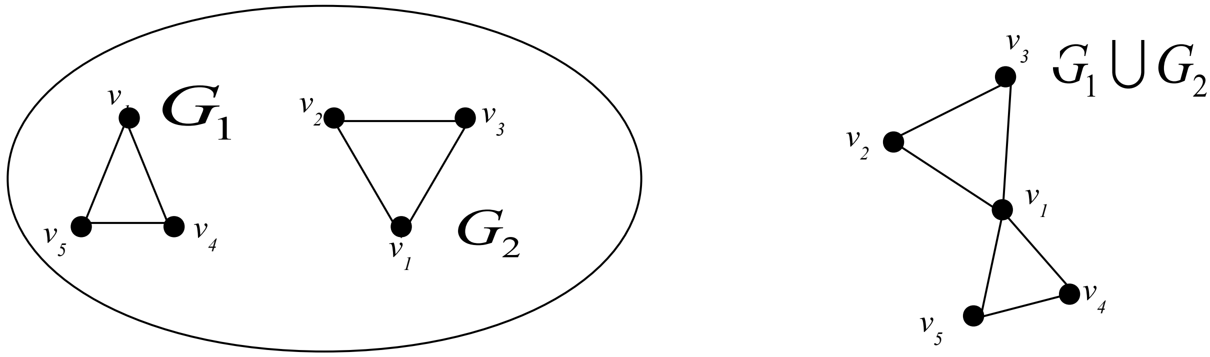


Рисунок 1.26

7 Граф G (V, U) називається *перетином* графів G_1 (V_1, U_1) і G_2 (V_2, U_2) (позначається $G = G_1 \cap G_2$), якщо

$$V = V_1 \cap V_2;\ U = U_1 \cap U_2.$$

8 Граф G (V, U) називається *декартовим*, або прямим *добутком* графів G_1 (V_1, U_1) і $G_2(V_2, U_2)$, якщо

$$V = V_1 \times V_2;\ U = U_1 \times U_2.$$

Для побудови нового графа, що є об'єднанням, перетином або декартовим добутком вихідних графів, необхідно вивчити визначення основних операцій і застосувати їх до конкретних графів.

Приклад 1 Знайти граф $G(V, U)$, що є об'єднанням графів $G_1(V_1, U_1)$ і $G_2(V_2, U_2)$ (рисунок 1.27).

G_1 (V_1, U_1) G_2 (V_2, U_2)

Рисунок 1.27 – Вихідні графи

$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$; $\quad$ $V_2 = \{v_1, v_2\}$;

$U(v_1) = \{v_2\}$; $\quad$ $U_2(v_1) = \{v_1\}$;

$U(v_2) = U(v_3) = \{v_1, v_2\}$; $\quad$ $U_2(v_2) = \{v_1, v_2\}$.

Знаходимо, що

$$V = V_1 \cup V_2 = \{v_1, v_2, v_3\};\ U = U_1 \cup U_2;\ U(v_1) = U(v_2) = U(v_3) = \{v_1, v_2\}.$$

На рисунку 1.28 наведено геометричне зображення графа $G\ (V, U)$.

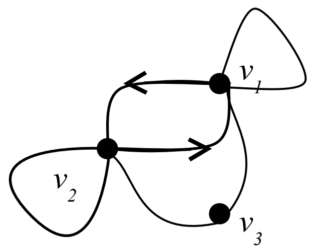


Рисунок 1.28 – Об’єднання графів G_1 і G_2.

2 Знайти граф $G(V, U)$, що є перетином графів $G_1\ (V_1, U_1)$ і $G_2\ (V_2, U_2)$, розглянутих вище.

Маємо $V = V_1 \cap V_2 = \{v_1, v_2\}$; $U = U_1 \cap U_2$; $U(v_1) = \varnothing$; $U(v_2) = \{v_1, v_2\}$.

На рисунку 1.29 наведено геометричне зображення графа G.

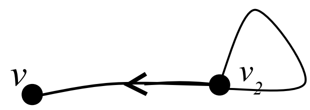


Рисунок 1.29 – Перетин графів $G_1\ (V_1, U_1)$ і $G_2\ (V_2, U_2)$

1.5 Задачі про максимальний потік на сітках

Розрізняють два типи графів: граф станів або географічний. У першому випадку вузол або вершина може означати стан системи або якусь умову, у другому – пункт призначення. І тоді в першому випадку граф станів являє собою зображення процесу зміни станів об’єкта, у другому – граф будується подібним до “географії” об’єкта, що моделюється.

Задачі знаходження максимального потоку на сітці можна віднести до важливих математичних моделей обробки інформації. *Сітка* – це зважений граф без жодної петлі та циклу, орієнтований в одному загальному напрямку від вершини v_1, яка розглядається як *вхід* (*джерело, виток*) графа, до вершини v_n, яка є *виходом* (*стоком*) графа.

Припустимо, що по ребру можна пропустити деяку кількість інформації (аналогічно може бути поставлена задача про кількість вантажу, ресурсу тощо).

У **теорії сіток у задачах на максимальний потік вершини географічного графа частіше за все позначаються кругами.**

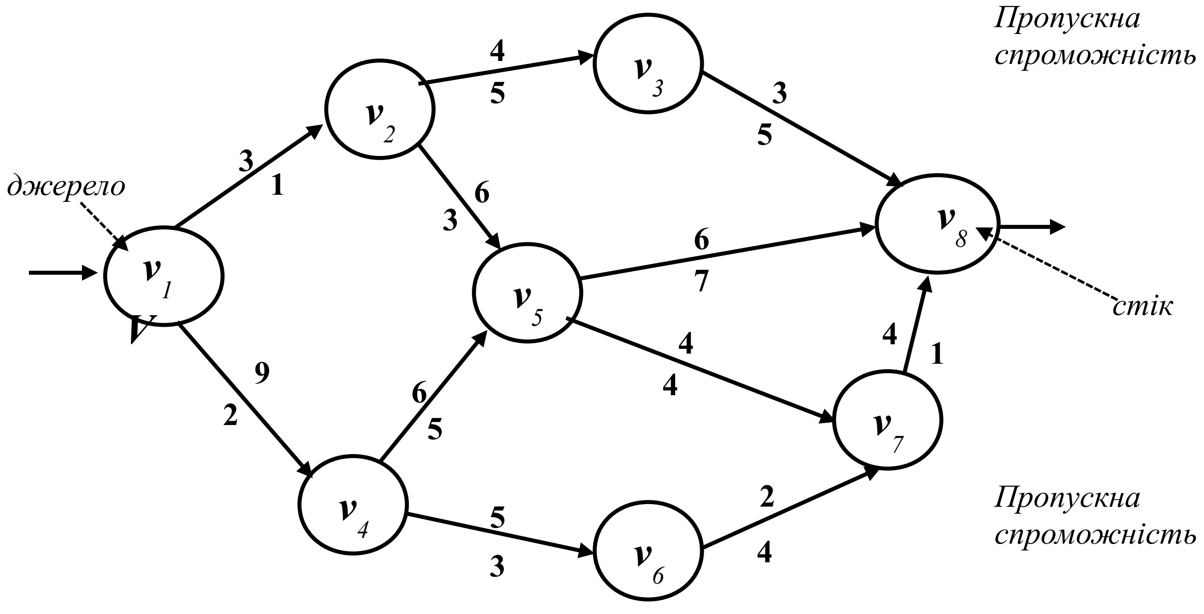


Рисунок 1.30

Максимальна кількість інформації, яку може пропустити за одиницю часу ребро $u_k = \{v_i, v_j\}$, називається його *пропускною спроможністю* і позначається r_{ij}. Пропускна спроможність у зворотному напрямку позначається r_{ji} (див. рисунок 1.30).

У загальному випадку $r_{ij} \neq r_{ji}$. Якщо вершини v_l та v_k не з’єднані ребром, то будемо вважати $r_{lk} = r_{kl} = 0$. Наприклад, для сітки на рисунку 1.30 пропускна спроможність $r_{15} = r_{51} = 0$.

Кількість інформації φ_{ij}, яка протікає по ребру в одиницю часу, називається *потоком по ребру*. Потік з вершини v_i в вершину v_j позначимо φ_{ij}.

Теорема. Потік по ребру не перевищує його пропускної спроможності

$$0 \le \varphi_{ij} \le r_{ij}. \qquad (1.1)$$

Ребро називається *насиченим*, якщо потік по ньому дорівнює його пропускній спроможності, і *ненасиченим* у протилежному випадку.

Для будь-якої вершини, крім джерела і стоку, кількість інформації, яка надходить у цю вершину, дорівнює кількості інформації, що виходить з неї (*умова збереження потоку*) – у проміжних вершинах потоки не створюються і не зникають:

$$\sum_i \varphi_{ik} - \sum_j \varphi_{kj} = 0, \;\; k \ne 1, k \ne n. \qquad (1.2)$$

Звідси випливає, що загальна кількість інформації, яка виходить із джерела v_1, збігається з загальною кількістю інформації, яка надходить до стоку v_n, тобто

$$f = \sum_j \varphi_{1j} = \sum_i \varphi_{in}. \qquad (1.3)$$

Лінійну функцію f називають *величиною потоку на сітці.*

У теорії потоків припускається, що якщо від вершини *i* до вершини *j* направляється потік величиною f_{ij}, то величина потоку у зворотному напрямі дорівнює $-f_{ij}$, тобто

$$f_{ji} = -f_{ij}. \qquad (1.4)$$

Властивості (1.1), (1.3), (1.4) вважаються *основними обмеженнями* потоків по ребрах, які необхідно враховувати при формуванні потоку на сітці.

Алгоритм знаходження максимального потоку вимагає введення поняття *розрізу* сітки, що визначає множину ребер, при вилученні яких повністю припиняється потік від витоку до стоку, тобто фактично розріз складається з двох підмножин ребер, які не перетинаються: в одній підмножині *A* міститься витік, у другій *B* – стік.

Сукупність ребер, початкові вершини яких потрапили у множину *A*, а кінцеві – у множину *B*, називається *розрізом.*

Величина

$$R = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} r_{ij} \qquad (1.5)$$

називається *пропускною спроможністю розрізу*.

У наданому прикладі (див. рисунок 1.31) пропускна спроможність першого розрізу $R = 4 + 6 + 9 = 19$, пропускна спроможність другого розрізу $R = 3 + 6 + 4 + 2 = 15$. Бачимо, що другий розріз має меншу пропускну спроможність.

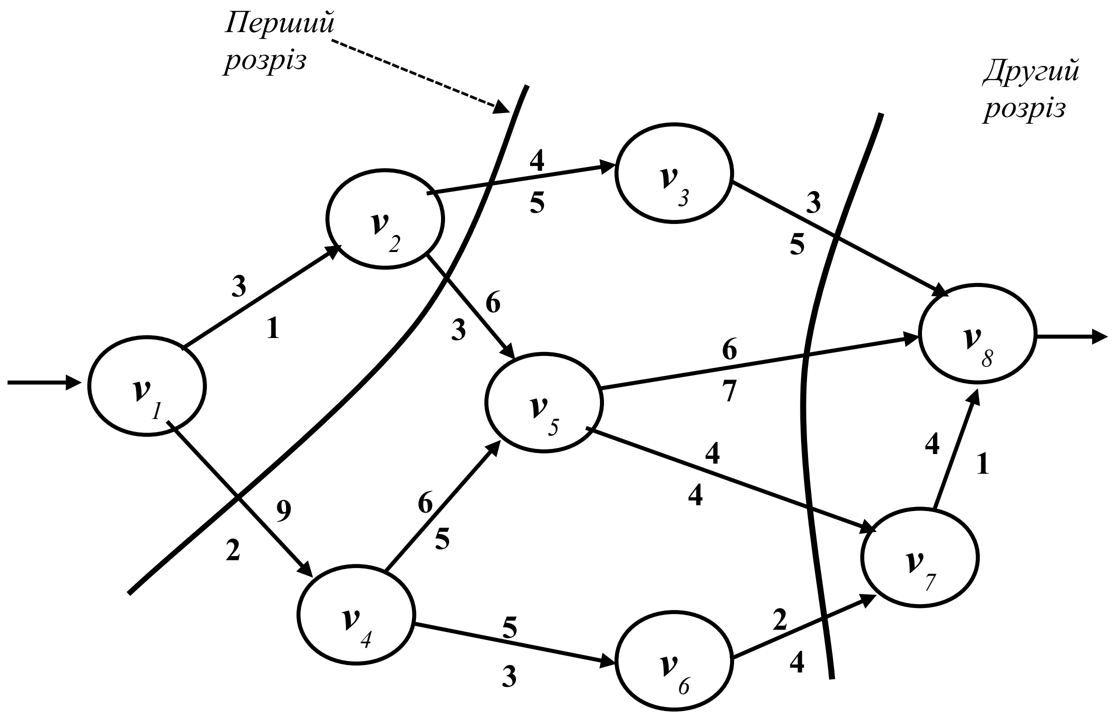


Рисунок 1.31

Розріз з найменшою пропускною спроможністю назвемо *мінімальним розрізом*.

Величина

$$X(A/B)=\sum_{i\in A}\sum_{j\in B} f_{ij}, \tag{1.6}$$

яка складає суму потоків f_{ij} по всіх ребрах розрізу, називається *потоком через розріз*.

Теорема Форда-Фалкерсона. *На будь-якій сітці максимальна величина потоку з джерела у стік дорівнює пропускній спроможності мінімального розрізу*.

Для розв’язання задачі відшукання мінімального розрізу треба перебрати всі можливі шляхи з джерела у стік, використовуючи повністю їхні пропускні спроможності. При цьому якщо ребро вже входило в деякий шлях, то воно може бути враховано і в наступних шляхах, але вже зі зміненою пропускною спроможністю.

Наведемо *алгоритм побудування максимального потоку*. Теоретична обґрунтованість цього алгоритму випливає з формул (1.1), (1.3), (1.4), що відображають основні обмеження задачі на максимальний потік.

1 Будуємо деякий початковий потік $X^0=\{f_{ij}^0\}$. У якості рекомендації можна взяти до уваги, що цей потік доцільно починати від витоку v_1 по ребру з більшою пропускною спроможністю. Потік ілюструється ланцюгом відповідних вершин, що поєднуються відрізками прямих, а саме ребер, над якими показують перенесені з сітки пропускні спроможності (r_{ij}, r_{ji}).

2 Фіксуємо мінімальну пропускну спроможність ланцюга першому значенню потоку f_0, який стане першим доданком сумарного потоку і одночасно значенням Δ, на яке коригується пропускні спроможності ланцюга, тобто $\Delta = f_0 = \min r_{ij}$.

3 Створюємо скоригований ланцюг пропускних спроможностей у виписаному ланцюзі під відрізками, що позначають ребра, віднімаючи Δ від пропускної спроможності в напрямі руху потоку і додаючи значення Δ (за формулою (1.4)) до пропускної спроможності у протилежному русі: $(r_{ij}-\Delta, r_{ji}+\Delta)$.

4 Якщо хоча б одне зі значень $r_{ij} - \Delta = 0$, то ребро стає насиченим, помічаємо його хрестиком і обираємо наступний потік в обхід насиченого ребра. Якщо жодна різниця не дорівнює нулю, наступний потік може завершити доведення одного з ребер початкового потоку до насиченого.

5 Процес створення потоків φ_1, $\varphi_2, \ldots,$ φ_n у рамках наведених пунктів алгоритму продовжується до тих пір, поки на шляху до стоку v_n сформується хоча б один розріз, який проходить по насичених ребрах, тобто використано всі можливі шляхи формування нових потоків.

6 Знаходиться отриманий сумарний потік $X = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k$, який і має бути максимальним, що треба підтвердити перевіркою теореми Форда-Фалкерсона.

1.6 Поняття про сітки Петрі, які використовуються для проектування складних обчислюваних систем

Ознайомлення з поняттям ”сітки Петрі” є, з одного боку, ознайомленням з найбільш, на сьогоднішній момент, сучасною формою графу станів, а з іншого – з обов’язковим для сучасного фахівця обсягом знань саме в галузі обчислювальної техніки.

Відліковою точкою розвитку сіток Петрі вважаються роботи німецького дослідника Карла Адама Петрі (1962 р.), які були продовжені та розвинуті групами дослідників США, Франції та Німеччини. Ці роботи отримали велике розповсюдження в різних галузях науки і технологічних процесах, коли існуючі математичні моделі перестали задовольняти вимоги їх розробників у зв’язку з необхідністю описувати все більш ускладнені системи, зокрема в питаннях обробки інформації.

Ускладнення проектування програмного забезпечення обчислювальних систем пов’язано не стільки з великою кількістю елементів, з яких складається система, що проектується, а з ускладненням причинно-наслідкових зв’язків у комплексі взаємодіючих і взаємозалежних компонентів системи. Тобто виникає якісно нова задача зі встановлення, опису та наступного відтворення причинно-наслідкових зв’язків між елементами складних систем програмного забезпечення. Причому ця задача стає особливо актуальною для систем паралельної обробки інформації (процесорів, ресурсів пам’яті тощо).

Сітки Петрі визначаються як модифікований, багатофункціональний, *зважений дводольний граф*.

Визначимо його особливості.

1 Всі вершини графа належать до двох типів: *позиції* (*місця*) P *та переходи* V. Позиції зображуються кільцем, а переходи – відрізками прямих. Дуги в сітках Петрі – орієнтовні. Причому кожна дуга зв’язує вершини тільки різних типів. Дуги позначаються відповідними значеннями ваги (цілими числами), і дугу з вагою k можна вважати еквівалентною k паралельним дугам. У задачах моделювання, де використовуються поняття *умов (станів)* і *подій*, *позиції* (*місця*) відповідають *умовам, а переходи – подіям*. Кожний перехід (подія) пов’язаний з певною кількістю вхідних і вихідних позицій – аналогів відповідно передумов і післяумов цієї події. На рисунку 1.32 наведено приклади зображення дводольних графів.

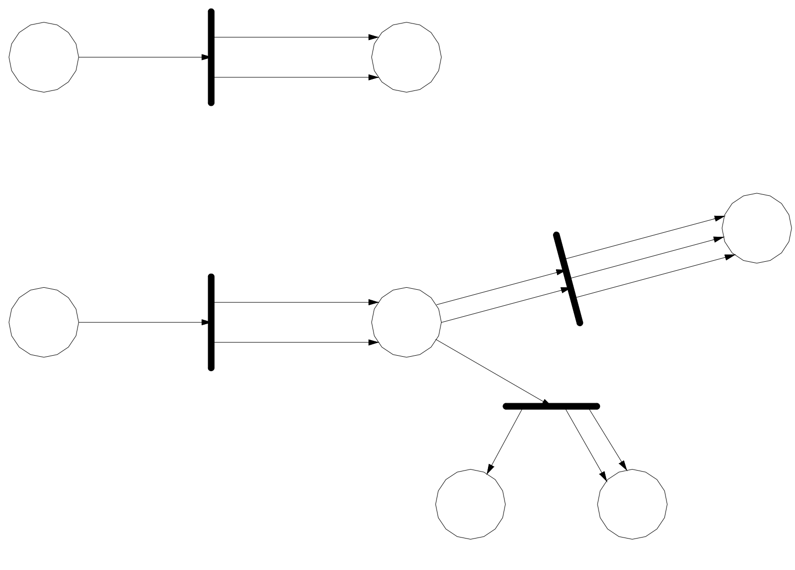


Рисунок 1.32

2 Оригінальним поняттям сіток Петрі є поняття *«фішки»*. Фішки зображуються точками, розташованими всередині позицій. Таким чином, кожній позиції сітки ставиться у відповідність натуральне число, яке вказує кількість фішок у даній позиції – *розмітку позиції.* Сукупність таких чисел для всіх позицій сітки називають *розміткою сітки*. Якщо позиція не

містить фішок, то вона має нульову розмітку. Приклад сітки з розміткою наведено на рисунку 1.33.

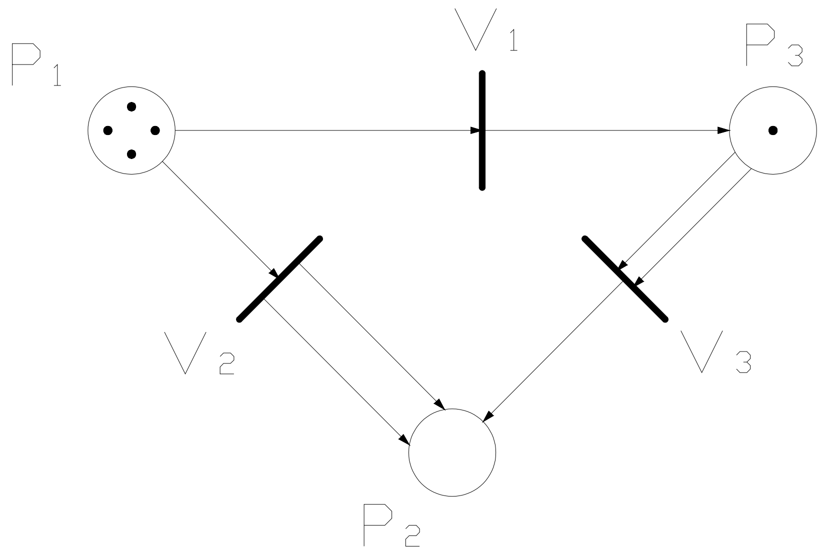


Рисунок 1.33

3 Важливим поняттям сіток Петрі є поняття *«спрацьовування переходів»*, яке полягає у вилученні фішок з кожної вхідної позиції та переміщення їх у кожну вихідну позицію. Причому кількість фішок, які вилучаються з конкретної позиції або переміщуються в конкретну позицію, дорівнює кількості дуг, що з'єднують перехід, що спрацьовує, із даною конкретною позицією. Так, наприклад, перехід V_1 на рисунку 1.33 при спрацьовуванні вилучає з позиції P_1 одну фішку та збільшує кількість фішок у позиції P_3 на одну. Перехід V_2 вилучає одну фішку з позиції P_1 та переміщує в позицію P_2 дві фішки.

Сітка Петрі *функціонує*, переходячи від розмітки до розмітки, наприклад від деякої *початкової* до деякої *проміжної* або до *заключної – тупикової* розмітки, тобто такої, коли не може спрацьовувати жодний перехід. Це означає, що спрацьовування переходів змінює розмітку сітки. Власно кажучи, предметом теоретичного дослідження сіток Петрі є процес їх функціонування, тобто аналіз можливих послідовностей спрацьовування переходів, і властивості розміток сітки, які при цьому отримують.

Інтерпретація спрацьовування переходів може бути сформульована так. Перехід може спрацювати тоді і тільки тоді, коли всі його вхідні місця заповнені хоча б однією фішкою. Перехід при спрацьовуванні вилучає рівно по одній фішці з кожного свого вхідного місця і утворює рівно по одній новій фішці в кожному своєму вихідному місці. Якщо в сітці Петрі є один перехід, який може спрацьовувати, він обов'язково це зробить. Якщо можуть спрацьовувати два або більше переходів, то вони спрацьовуватимуть послідовно, але не детерміновано, тобто не можна заздалегідь знати, який перехід повинен спрацьовувати. Наприклад, на рисунку 1.33 перехід V_3 не може спрацьовувати, оскільки в позиції P_3 міститься тільки одна фішка, а дуг, що пов'язують P_3 і V_3, – дві. Але, якщо спрацьовував перехід V_1, то внаслідок збільшення кількості фішок у позиції P_3 перехід V_3 спрацьовуватиме. Тобто саме введення поняття «спрацьовування переходів» дає підставу для моделювання процесів, які пов'язані між собою причинно-наслідковим зв'язком.

Сіткам Петрі притаманні певні *властивості*.

Безпека. Місце сітки Петрі, яке містить не більше однієї фішки, називається безпечним. Сітка Петрі безпечна, коли безпечні всі місця сітки.

Обмеженість. Властивість не допускати перевищення кількості фішок у конкретній або довільній позиції деякого довільного числа. Місце є k-безпечним або k-обмеженим, якщо кількість фішок у ньому не перебільшує цілого числа k.

Одна з основних проблем у теорії сіток Петрі – задача про скінченність функціонування сітки, тобто про досяжність тупикової розмітки.

Формально сітку Петрі N визначають п'ятіркою значень

$$N = \langle P, V, F, H, M_0 \rangle, \tag{1.7}$$

де P – скінченна, непуста множина *місць* або *позицій* $\{P_1, P_2, , ..., P_n\}$;

V – скінченна непуста множина *переходів* $\{V_1, V_2, ..., V_m\}$;

F – *функція інцидентності*, яка вказує на наявність дуг, що з'єднують *місця з переходами*;

H – *функція інцидентності*, яка вказує на наявність дуг, що з'єднують *переходи з місцями*;

M_0 – початкова розмітка сітки.

Функції інцидентності $F\left(P_i,V_j\right)$ ($H\left(V_i,P_j\right)$) складаються з множини двох значень $\{0,1\}$: $F\left(P_iV_j\right)=1$, коли з вершини-місця P_i прямує дуга до вершини-переходу V_j ($H\left(V_iP_j\right)=1$, коли з вершини-переходу V_i прямує дуга до вершини-місця P_j), у протилежних випадках, тобто коли відповідних дуг не існує, $F\left(P_i,V_j\right)=0$ ($H\left(V_i,P_j\right)=0$).

Розглянемо довільну сітку Петрі (рисунок 1.34), яка у відповідністю з формою завдання (1.7), може бути описано так.

Нехай, $P=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$ – множина позицій (місць); $V=\{V_1,V_2,V_3\}$ – множина переходів, тоді початкову розмітка M_0 наведено в таблиці 1.1; функції інцидентності наведено в таблиці 1.2.

Таблиця 1.1

$M_0=$	P_1	P_2	P_3	P_4
	2	0	1	0

Таблиця 1.2

$F:$	V_1	V_2	V_3
P_1	1	1	0
P_2	0	0	1
P_3	0	0	1
P_4	0	1	0

$H:$	P_1	P_2	P_3	P_4
V_1	0	1	0	1
V_2	0	0	1	0
V_3	1	0	0	0

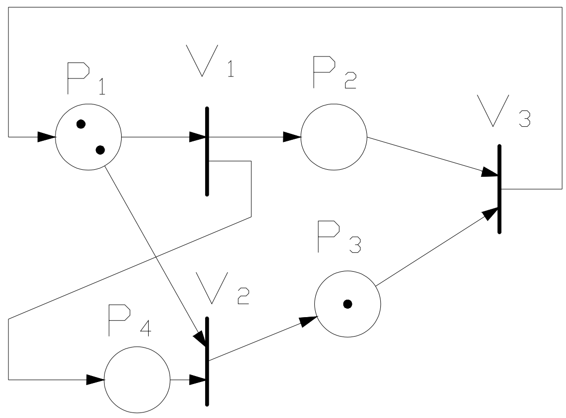


Рисунок 1.34

Результати функціонування сітки Петрі зведені в таблицю 1.3, де наведені декілька можливих змін розміток сітки, починаючи з M_0.

Таблиці 1.3

Розмітка		Позиції (місця)			
		P_1	P_2	P_3	P_4
M_0		2	0	1	0
M_1	V_1^{-}	1	1	1	1
M_2	V_2^{-}	0	1	2	0
M_3	V_3^{-}	1	0	1	0
M_4	V_1^{-}	0	1	1	1
M_5	V_3^{-}	1	0	0	1
M_6	V_1 V_2	0	1	0	2
M_7		0	0	1	0

Пояснення до таблиці 1.3

При початковій розмітці (перший рядок) лише один перехід V_1 може спрацьовувати. Відбувається зміна розміток (другий рядок). При розмітці M_1 до спрацьовування готові всі три переходи V_1, V_2, V_3, але може спрацьовувати лише один, нехай "випадково" спрацює перехід V_2, тоді утворилась розмітка M_2, при якій може спрацьовувати тільки перехід V_3, і т. д. Останній крок при розмітці M_5 у випадках спрацьовування одного з двох можливих переходів призводить до тупикових розміток: відповідно M_6 або M_7.

Можна повернутися до розмітки M_1, коли до спрацьовування готові всі три переходи, і самостійно розглянути кроки функціонування сітки Петрі у випадках, коли можуть спрацьовувати переходи V_1 або V_3, і побудувати аналогічні таблиці розміток.

Дерево досяжності – це множина досяжності розміток сітки Петрі. Початковою вершиною дерева є вершина, яка відповідає початковій розмітці M_0. Кожна можлива послідовність розміток до своєї тупикової утворює одну гілку дерева досяжності (наприклад, послідовність у наведеній таблиці) з вершинами, які відповідають розміткам на кожному кроці і поєднані стрілками. Дерево "розростається" при розгляданні спрацьовування всіх можливих переходів на кожному кроці.

2 КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторика – це розділ математики, у якому вивчаються питання про кількість комбінацій, що підлягають певним умовам і які можна скласти з визначених об'єктів.

Комбінаторика пов'язана з багатьма іншими областями математики, більш за все з теорією ймовірностей, і має широкий спектр застосування в різних галузях знань (наприклад в генетиці, інформатиці, фізиці тощо).

Термін «комбінаторика» був вперше введений Лейбніцем, який у 1666 р. опублікував свою працю «Міркування про комбінаторне мистецтво». Йому було тоді лише 20 років.

Іноді під комбінаторикою розуміють більш великий розділ дискретної математики, що включає, зокрема, теорію графів.

2.1 Правила суми і добутку

Два основних правила розв'язування комбінаторних задач:

1 *Правило суми*: якщо елемент *a* можна вибрати *m* способами, а елемент *b* можна вибрати *n* способами, то вибір *a* або *b* можна здійснити *m* + *n* способами.

Наприклад, студент має вибрати тему реферату зі списку, розміщеного на трьох аркушах. Аркуші містять відповідно 20, 15 і 17 тем. З якої кількості можливих тем студент робить свій вибір?

20 тем	15 тем	17 тем

За правилом суми кількість тем для вибору становить 20+15+17=52.

Зрозуміло, що правило суми можна розповсюдити на три і більше елементів.

2) *Правило добутку*: якщо елемент a можна вибрати m способами та якщо після кожного такого вибору елемент b можна вибрити n способами, то вибір пари a і b можна здійснити $m \times n$ способами.

З міста A у місто B є 5 доріг, а з міста B у місто C – 3 дороги (рисунок 2.1). Скількома способами можна проїхати з міста A до міста C?

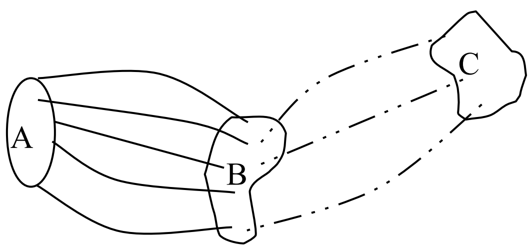


Рисунок 2.1

Щоб проїхати з A до C, треба проїхати з A до B та з B до C, тому застосуємо правило добутку: 5×3 = 15.

Правило добутку також розповсюджується на три і більше елементів.

Приклад. Скільки тризначних парних чисел можна скласти з чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри можуть повторюватися?

Позначимо цифри тризначного числа ABC. Обчислимо кількість способів обрати кожну цифру.

Перша цифра тризначного числа А не може бути 0, тому кількість способів, якими можна її обрати $m = 6$ (це цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Друга цифра В може бути будь-якою, тому $n = 7$ способів її обрати (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Остання цифра С повинна бути парною, серед наданих чисел 4 парних - 0, 2, 4, 6, тому $k = 4$ способи обрати третю цифру.

За правилом добутку тризначних парних чисел $m \cdot n \cdot k = 6 \cdot 7 \cdot 4 = 168$

Приклад. Скільки існує п'ятизначних чисел, які однаково читаються зліва направо і справа наліво?

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & B & A \\ m & n & k & & \end{array}$$

Цифри розряду десятків тисяч і цифра розряду одиниць повинні бути однаковими, не рівними 0 (9 способів), цифри розряду тисяч і десятків рівні - 10 способів, цифра розряду сотень може бути будь-якою (10 способів). Всього шуканих чисел $m \cdot n \cdot k = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Приклад. У розіграші першості з футболу беруть участь 18 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна та бронзова медалі, якщо будь-яка команда може отримати лише одну медаль?

Золоту медаль може отримати будь-яка з 18 команд, тому $m = 18$. Срібну медаль можуть отримати лише 17 команд, бо в однієї вже є золота, $n = 17$. Бронзову – 16 команд, у яких ще немає ніякої медалі, $k = 16$. Тому кількість способів $m \cdot n \cdot k = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896$.

Факторіал

Добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно називається n-факторіалом і позначається $n!$ (читається «ен факторіал»), тобто

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Вважають, що $0! = 1$ і $n \in N$.

Основна властивість факторіала

$$\boxed{(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!}$$

Приклад.

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

Приклад. Спростити вираз $B = \frac{7!4!}{10!}\left(\frac{8!}{3!5!} - \frac{9!}{2!7!}\right)$.

Розглянемо перший дріб $\frac{7!4!}{10!}$. Запишемо всі факторіали за визначенням і скоротимо однакові множники в чисельнику та знаменнику

$$\frac{7!4!}{10!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{9}_3 \cdot \cancel{10}} = \frac{1}{30}.$$

Звичайно, не обов'язково виписувати всі множники, можна писати три крапки замість великого добутку, який скорочується.

Аналогічно, $\frac{8!}{3!5!} = 56$, $\frac{9!}{2!7!} = 36$, тоді

$$B = \frac{1}{30}(56 - 36) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{m! - (m-1)!}{(m+1)!} = \frac{1}{6}$.

Факторіали повинні існувати, тому $m \geq 1, m \in Z$.

За основною властивістю факторіала $m! = m(m-1)!$, а $(m+1)! = (m+1)m(m-1)!$ Виносимо в чисельнику загальний множник за дужки і скорочуємо (якщо $m = 1$, то $0 \neq \frac{1}{6}$, тобто $m = 1$ – не є коренем, скорочувати можна):

$$\frac{m(m-1)! - (m-1)!}{(m+1)m(m-1)!} = \frac{(m-1)!(m-1)}{(m-1)!m(m+1)} = \frac{m-1}{m(m+1)},$$

тому $\dfrac{m-1}{m(m+1)}=\dfrac{1}{6}$.

$$\frac{m-1}{m(m+1)}-\frac{1}{6}=0, \qquad \frac{6m-6-m(m+1)}{6m(m+1)}=0,$$

$$\frac{6m-6-m^2-m}{6m(m+1)}=0,\ m\neq 0, m\neq -1,$$

$$-6-m^2+5m=0,$$

$m^2-5m+6=0$, звідки $m_1=2, m_2=3$. Числа цілі, факторіали існують.

Приклад. Розв’язати нерівність

$$\frac{1}{n-2}\cdot\left(\frac{5}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-3)!4!}-\frac{n(n-1)!}{12(n-3)(n-4)!2!}\right)\leq 5.$$

Факторіали повинні існувати, тому $n\geq 4, n\in Z$.

Перший дріб у дужках можна перетворити за визначенням факторіала:

$$\frac{5}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-3)!4!}=\frac{5(n-2)(n-1)n}{24},$$

Аналогічно другий $\dfrac{n(n-1)!}{12(n-3)(n-4)!2!}=\dfrac{n(n-2)(n-1)}{24}$.

$$\frac{1}{n-2}\cdot\left(\frac{5(n-2)(n-1)n}{24}-\frac{n(n-2)(n-1)}{24}\right)=\frac{n(n-1)}{6},$$

$\dfrac{n(n-1)}{6}\leq 5$, що рівносильно нерівності $(n-6)(n+5)\leq 0$. Цю нерівність можна розв’язати методом інтервалів $n\in[-5,6]$. Якщо врахувати умову існування факторіалів $n\geq 4, n\in Z$, задана нерівність має три розв’язки $n_1=4, n_2=5, n_3=6$.

При вибірці з n різних елементів m елементів прийнято говорити, що вони утворюють *з'єднання* з n елементів по m.

Розглянемо спочатку з'єднання, у яких елементи не повторюються.

2.2 З'єднання без повторень

Залежно від того, має значення порядок елементів у з'єднанні або ні, а також входять у з'єднання всі елементи або тільки частина їх, розрізняють три види з'єднань без повторень.

Визначення. *Перестановкою* з n елементів називають комбінації, які складаються з тих самих n різних елементів і відрізняються лише їх порядком розташування.

Кількість перестановок із n елементів позначають через R_n. Р – перша буква французького слова «permutation» - «перестановка».

Кількість можливих перестановок з n елементів обчислюють за формулою

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n .$$

Приклад. Записати всі перестановки з елементів a, b, c без повторень

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Їх шість. Дійсно, за формулою кількість перестановок з трьох елементів дорівнює $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$.

Приклад. Скількома способами можна розкласти 8 аркушів по 8 різних конвертах, якщо в кожен конверт можна покласти лише один аркуш?

Всі 8 елементів використовуються, тільки міняються місцями, тому треба підрахувати кількість перестановок з восьми елементів:

$$P_8 = 8! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40320 \text{ способів.}$$

Визначення. *Розміщеннями* з n елементів по m називають комбінації, які складаються з n різних елементів по m елементів, що відрізняються або складом, або порядком елементів.

Кількість можливих розміщень з n елементів по m обчислюють за формулою:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ де } 0 \le m \le n;\ m,\ n \in N.$$

Позначення A – від початкової літери французького слова “arrangement”, що означає розміщення.

Очевидно, перестановки можна вважати окремим випадком розміщень при $m=n$.

Приклад. Записати всі розміщення з елементів a, b, c, d без повторень по два.

ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb bd, db, cd, dc.

Записувати всі можливі варіанти довго, а кількість їх можна підрахувати швидко за формулою кількості розміщень $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2} = 12$.

Приклад. Спростити вираз $M = \frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$.

$$M = \frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\left((n-5)+1\right)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \left(n-4\right)^2.$$

Основні властивості розміщень:

1) $A_n^0 = 1$

2) $A_n^{m+1} = A_n^m \cdot (n-m)$;

3) $A_n^n = P_n = n!$.

Визначення. *Сполученнями* з n елементів по m називають комбінації, які складаються з n різних елементів по m елементів, що відрізняються хоча б одним елементом ($m,\ n \in N$ *і* $n \geq m$).

Кількість сполучень з n елементів по m обчислюють за формулою

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(m-1))}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

C – від початкової літери французького слова "combinasion", що означає "сполучення".

Кількості розміщень, перестановок і сполучень пов'язані рівністю

$$A_n^m = P_m C_n^m.$$

Приклад. Записати всі сполучення з елементів a, b, c, d, e по три без повторень.

abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.

Кількість всіх можливих сполучень $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{4 \cdot 5}{2} = 10$.

Приклад. Скількома способами можна вибрати 5 студентів з групи 19 студентів?

З загальної кількості студентів ми повинні обрали лише частину. Порядок вибору студента не важливий, тому

$$C_{19}^5 = \frac{19!}{5!(19-5)!} = \frac{\cancel{15} \cdot \cancel{16}^{\,2} \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5}} = 2 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = 11628$$

способів.

Визначення. Біном Ньютона – це вираз вигляду

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n a^0 + C_n^1 x^{n-1} a^1 + \ldots + C_n^m x^{n-m} a^m + \ldots + C_n^n x^0 a^n.$$

Біном розкладається в суму одночленів, які є добутками деяких степенів його доданків x і a.

Значення C_n^m можуть бути послідовно записані в так званий *трикутник Паскаля*, оскільки це значення біноміальних коефіцієнтів розкладу бінома Ньютона. З таблиці видно, що кожний елемент, який не є першим у своєму рядку, є сумою елемента над ним і елемента, розташованого над ним і ліворуч. Крайні числа в кожному рядку дорівнюють одиниці.

Трикутник Паскаля

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Властивості біноміальних коефіцієнтів C_n^m:

1 Правило симетрії

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

Доведення. За визначенням

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\left(n-(n-m)\right)!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

У свою чергу $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, рівність доведена.

2 Правило Паскаля

$$C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m .$$

Доведення.

$$C_n^{m-1} + C_n^m = \frac{n!}{(m-1)!\left(n-(m-1)\right)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} =$$

$$\frac{n!}{(m-1)!(n+1-m)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} =$$

$$= \frac{n!}{m!\left(n-(m-1)\right)!}(m+n-m+1) = \frac{(n+1)!}{m!\left((n+1)-m\right)!} = C_{n+1}^m .$$

Правило Паскаля дозволяє знайти кількість всіх сполучень з $n+1$ елемента, якщо знати кількість всіх сполучень з n елементів. $\triangle$

Властивості розкладання бінома Ньютона:

1 Кількість всіх членів розкладання на одиницю більше показника степеня бінома, тобто дорівнює $n+1$.

2 Сума показників степеня x і a кожного члена розкладання дорівнює показнику степеня бінома, тобто $(n-m)+m=n$.

3 Загальний член розкладання бінома має вигляд $T_{n+1}=C_n^m x^{n-m} a^m$. (Можна виписати будь-який член без запису всього розкладання).

4 Біноміальні коефіцієнти членів розкладу, рівновіддалених від кінців розкладання, рівні між собою. (Випливає з властивості $C_n^m = C_n^{n-m}$).

5 Кожен біноміальний коефіцієнт C_n^m розкладання, починаючи з другого, дорівнює попередньому коефіцієнту C_n^{m-1}, помноженому на дріб $\dfrac{n-(m-1)}{m}$.

6 Сума біноміальних коефіцієнтів всіх членів розкладання дорівнює 2^n (при $x=a=1$).

7 Сума біноміальних коефіцієнтів членів розкладання, що стоять на парних місцях, дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів, що стоять на непарних місцях, і дорівнює 2^{n-1} (при $x=1, a=-1$).

Приклад. Обчислити суму

$$C_5^0+2C_5^1+2^2C_5^2+2^3C_5^3+2^4C_5^4+2^5C_5^5.$$

Оскільки це біном Ньютона для п’ятого степеня, то не треба обчислювати всі коефіцієнти, а можна записати

$$C_5^0+2C_5^1+2^2C_5^2+2^3C_5^3+2^4C_5^4+2^5C_5^5=(1+2)^5=243.$$

Приклад. Знайти алгебраїчну суму коефіцієнтів многочлена відносно x в розкладанні бінома $(3x-4)^{17}$.

$$(3x-4)^{17}=C_{17}^0(3x)^{17}4^0+C_{17}^1(3x)^{16}4^1+\ldots+C_{17}^m(3x)^{17-m}4^m+\ldots+C_{17}^{17}(3x)^0 4^{17}.$$

При $x=1$ ліва частина дорівнює $(3-4)^{17}=-1$, а права – алгебраїчній сумі коефіцієнтів:

$$C_{17}^0 3^{17}4^0 + C_{17}^1 3^{16}4^1 + \ldots + C_{17}^m 3^{17-m}4^m + \ldots + C_{17}^{17}3^0 4^{17} = -1.$$

Приклад. Знайти 13-й член розкладання бінома $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^{15}$.

$$T_{13}=T_{12+1}=C_{15}^{12}\left(\sqrt[3]{3}\right)^{15-12}\left(\sqrt{2}\right)^{12}=C_{15}^3\cdot 3\cdot 2^6=\frac{13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 3\cdot 2^6=87360.$$

Приклад. Знайти номер члена розкладання бінома $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^{16}$, що не містить x.

За властивістю 3) $T_{n+1}=C_n^m x^{n-m}a^m$ маємо

$$T_{n+1}=C_{16}^n\left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-n}\left(\frac{1}{x}\right)^n=C_{16}^n x^{\frac{16-n}{3}}x^{-n}=C_{16}^n x^{\frac{16-n}{3}-n}=C_{16}^n x^{\frac{16-4n}{3}}=C_{16}^n x^0.$$

$\frac{16-4n}{3}=0$, $n=4$. П’ятий член даного розкладання не містить x.

Приклад. Знайти п’ятий член розкладання бінома

$$\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^n,$$

якщо відношення біноміального коефіцієнта четвертого члена до біноміальному коефіцієнта третього члена дорівнює $\frac{10}{3}$.

$$\frac{C_n^3}{C_n^2}=\frac{10}{3},\qquad \frac{\frac{n!}{3!(n-3)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}}=\frac{10}{3},\qquad \frac{n!}{3!(n-3)!}\cdot\frac{2!(n-2)!}{n!}=\frac{10}{3},$$

оскільки за умовою $n\geq 5$, то можна скоротити $\frac{n-2}{3}=\frac{10}{3}$, звідки $n=12$.

Тому

$$T_5 = T_{4+1} = C_n^4\left(\sqrt{a}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^4 = \frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^4\cdot\frac{1}{9a^2} = 55a^2.$$

Приклад. Скільки членів розкладання бінома $\left(\sqrt[5]{3}+\sqrt[3]{7}\right)^{36}$ є цілими числами?

$$T_{n+1} = C_n^{36}\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^{36-n}\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{n} = C_n^{36}3^{\frac{36-n}{5}}\cdot 7^{\frac{n}{3}}.$$

$$\frac{n}{3} = p,\ n = 3p,\ p \text{ – ціле.}$$

$$\frac{36-3p}{5} = \frac{3(12-p)}{5},$$

$12-p$ повинно націло ділитися на 5, тому $p = 12, 7, 2$, а звідси $n = 36, 21, 6$.

Три члени наданого розкладання T_7, T_{22}, T_{37} є цілими числами.

2.3 З'єднання з повтореннями

Досі розглядалися з'єднання, у кожне з яких будь-який з різних елементів входить лише один раз. Можна розглядати з'єднання з повтореннями, тобто з'єднання, у кожному з яких будь-який елемент може входити більше одного разу.

Визначення. *Розміщення* з n елементів по m елементів, у якому один і той самий елемент може повторюватися в кожному розміщенні будь-яку кількість раз, називаються розміщеннями з n елементів по m з повтореннями.

Приклад. 444, 544, 454, 445, 554, 545, 455, 555 є розміщеннями по три з двох елементів з повтореннями. Їх вісім. Можна кількість цих елементів підрахувати за формулою.

Кількість всіх розміщень з n елементів по m елементів з повтореннями дорівнює

$$A_n^m(\textit{повт}) = n^m.$$

Приклад. Кожен телефонний номер складається з семи цифр. Скільки всього телефонних номерів, що не містять інших цифр, крім 2, 3, 5, 7?

Порядок цифр важливий при наборі телефону, цифри можуть повторюватися, тому $A_4^7(\textit{повт}) = 4^7 = 256 \times 64 = 16384$.

Визначення. Перестановки з *n* елементів, у кожну з яких входять n_1 однакових елементів одного типу, n_2 однакових елементів іншого типу і т. д. до n_k однакових елементів k-го типу, де $n_1 + n_2 + .. + n_k = n$, називаються *перестановками з n елементів з повтореннями.*

Кількість всіх перестановок з повтореннями дорівнює

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Приклад. Скількома способами можна включити в ряд дві зелені і чотири червоні лампочки?

Всього кольорових лампочок шість. Всіх перестановок з повтореннями

$$P_6(2,4) = \frac{6!}{2!4!} = 15.$$

Приклад. Скільки всіх семизначних чисел, у кожного з яких цифра 6 зустрічається 3 рази, а цифра 5 – чотири рази?

$$P_7(3,4) = \frac{7!}{3!4!} = 35 \text{ чисел.}$$

Приклад. Скількома способами можна переставити букви в слові «математика», «абракадабра», «какао»?

Для слова «математика»

$$P_{10}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151200 \text{ способів.}$$

Для слова «абракадабра»

$$P_{11}(5,2,2,1,1)=\frac{11!}{5!2!2!1!1!}=83160 \text{ способів.}$$

Для слова «какао»

$$P_5(2,2,1)=\frac{5!}{2!2!1!}=30 \text{ способів.}$$

Визначення. *Сполученнями* з n елементів по m з повтореннями називаються з’єднання з m елементів без урахування порядку входження, причому будь-який елемент може входити в з'єднання певну кількість раз.

Кількість всіх сполучень з n елементів по m з повтореннями дорівнює

$$C_n^m(\text{повт})=\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}=C_{m+n-1}^m.$$

Приклад. У кондитерській є п'ять різних сортів тістечок. Скількома способами можна вибрати набір з чотирьох тістечок?

Порядок тістечка не важливий, ми їх всі з’їмо. Можливо, деякі улюблені візьмемо більш одного. А всього

$$C_5^4(\text{повт})=C_{4+5-1}^4=70 \text{ способів.}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.

2 Гончарова Г.А., Мочалин А.А. Элементы дискретной математики: Учеб. пособие. – М.: Форум: Инфра-М, 2007. – 128 с.

3 Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. — М.: Вузовская книга, 2000. — 280 с.

4 Капітонова Ю.В. Основи дискретної математики. Підручник / Ю.В. Капітонова, С.Л. Кривий, О.А. Летичевський, Г.М. Луцький, М.К. Печорін – К.: Наукова думка, 2002. – 579 с.

5 Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Мир, 1978. – 432 с.

6 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. – К.: Видавнича група BHV, 2007. – 368 с.

7 Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учеб. для вузов. – 2–е изд. – СПб.: Питер, 2006. – 364 с.

8 Оре О. Теория графов.— 2-е изд.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 336 с.

9 Татт У. Теория графов / Пер. с англ. – М.:Мир, 1988. – 424 с.

10 Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 511 с.

11 Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. – 384 с.