



**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

БУДІВЕЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра будівельної механіки та гідравліки

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для виконання розрахунково-графічних робіт

з дисципліни

«ОПІР МАТЕРІАЛІВ»

Частина 2

Харків 2025

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри будівельної механіки та гідравліки 28 березня 2025 р., протокол № 8.

Методичні вказівки для виконання розрахунково-графічних робіт з дисципліни «Опір матеріалів» рекомендуються для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня 273 спеціальності «Залізничний транспорт» механіко-енергетичного факультету. Методичні вказівки складено на основі типової програми з дисципліни «Опір матеріалів» для студентів спеціальності 273 «Залізничний транспорт» освітніх програм: «Локомотиви та локомотивне господарство», «Високошвидкісний рухомий склад», «Автомотриси, автодрезини та спеціальні машини залізничного транспорту» (ААСМ), «Мехатроніка у вагонобудуванні», «Вагони та транспортна інженерія» (ВТІ).

Завдання наведено відповідно до робочої програми з опору матеріалів для здобувачів спеціальності 273 «Залізничний транспорт» денної та заочної (повної та прискореної) форм здобуття вищої освіти.

Укладачі:

доценти С. Ю. Берестянська,

Л. Б. Кравців

Рецензент

доц. О. В. Лобяк

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 МЕТА І ОСНОВНІ ЗАВДАННЯ	4
2 КОМПЕТЕНТНОСТІ, ЩО ФОРМУЮТЬСЯ У ЗДОБУВАЧІВ	5
3 МЕТОДИ ВИВЧЕННЯ ТА МЕТОДИ КОНТРОЛЮ.....	6
4 ПЕРЕЛІК ДОКУМЕНТІВ, ЯКІ НЕОБХІДНО ПОДАТИ ДО ЗАХИСТУ	6
5 РОЗТЯГАННЯ-СТИСКАННЯ.....	7
5.1 Напруження	7
5.2 Деформації	10
5.3 Закон Гука	11
5.4 Урахування власної ваги	12
5.5 Статично невизначені системи.....	13
6 ТЕСТОВІ ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ	19
7 ЗАВДАННЯ НА РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНУ РОБОТУ №1 (ЧАСТИНА 2).....	20
8 ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ З РОЗ’ЯСНЕННЯМ	28
8.1 <i>Задача № 6.</i> Визначення розмірів поперечних перерізів стержнів у шарнірно-стержневій системі.	28
8.2 <i>Задача № 7.</i> Розрахунок східчастого стержня з урахуванням власної ваги.	30
8.3 <i>Задача № 8.1.</i> Розрахунок східчастого статично невизначеного стержня на температурний вплив.	36
8.4 <i>Задача № 8.2.</i> Розрахунок східчастого статично невизначеного стержня на зміщення опорних зав’язків.	42
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	49
ДОДАТОК А	50

ВСТУП

Методичні вказівки призначені для самостійної роботи здобувачів при вивченні курсу «Опір матеріалів» згідно з робочими програмами спеціальностей 273 «Залізничний транспорт», освітніх програм: «Локомотиви та локомотивне господарство»; «Високошвидкісний рухомий склад»; «Автомотриси, автодрезини та спеціальні машини залізничного транспорту»; «Мехатроніка у вагонобудуванні»; «Вагони та транспортна інженерія» (ВТІ) денної та заочної (повної та прискореної) форм навчання.

Вони мають високий науково-педагогічний рівень, викладені систематично та послідовно, відображають новітні досягнення науки, техніки. Забезпечують реалізацію основних принципів навчання: науковості, систематичності, послідовності й доступності викладу, наочності, ґрунтовності, зв'язку матеріалу з професійною діяльністю. Відповідають вимогам освітніх програм, державних освітніх стандартів.

1 МЕТА І ОСНОВНІ ЗАВДАННЯ

При виконанні частини 2 розрахунково-графічної роботи здобувач має отримати теоретичні знання, які необхідні для розрахунків систем, що знаходяться під деформацією розтягання-стискання. Метою завдання є набуття практичних навичок побудови епюр внутрішніх зусиль та напружень, визначення переміщень стержнів з урахуванням власної ваги, розрахунки на міцність з визначенням розмірів поперечного перерізу, розрахунки статично невизначених систем на дію зовнішнього навантаження, температурний вплив та зміщення опор.

Очікувані результати навчання:

- визначати параметри об'єктів залізничного транспорту, їх систем та елементів шляхом проведення вимірювального експерименту з оцінкою його результатів;

- знати методи та вміти використовувати засоби технічних вимірювань, технічні регламенти, стандарти та інші нормативні документи під час технічного діагностування об'єктів залізничного транспорту, їх систем та елементів.

2 КОМПЕТЕНТНОСТІ, ЩО ФОРМУЮТЬСЯ У ЗДОБУВАЧІВ

Уміння вирішувати завдання опору матеріалів – це основа надбання професійних компетенцій. Набуті знання, вміння, навички дозволяють здобувачу виконувати поставлені перед ним професійні завдання. Здобувачі вищої освіти спеціальності 273 «Залізничний транспорт» першого рівня освіти (бакалавр) всіх форм здобуття вищої освіти мають сформувати та розвинути наступні компетенції:

- здатність проведення досліджень на відповідному рівні;
- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність розрізняти об'єкти залізничного транспорту та їх складові, визначати вимоги до їхньої конструкції, параметрів та характеристик;
- здатність проведення вимірних експериментів з визначення параметрів та характеристик об'єктів залізничного транспорту, їх агрегатів, систем та елементів;
- здатність аналізувати технологічні процеси виробництва та ремонту об'єктів залізничного транспорту як об'єкта управління, застосовувати експертні оцінки для вироблення управлінських рішень щодо подальшого функціонування підприємства з оцінкою якості його продукції;
- здатність застосовувати методи та засоби технічних вимірювань, технічні регламенти, стандарти та інші.

3 МЕТОДИ ВИВЧЕННЯ ТА МЕТОДИ КОНТРОЛЮ

Методичні вказівки мають теоретичну частину за темою роботи, контрольні запитання, схеми завдання, та приклади їх розв'язання.

Теоретична частина містить весь матеріал, який необхідно знати для виконання частини 2 розрахунково-графічної роботи. Здобувачі знайомляться з основними задачами дисципліни «Опір матеріалів», з видами навантажень, типами опорних пристроїв та поняттям розрахункової схеми, видами внутрішніх зусиль та методом їх знаходження. Розглянуто метод перерізів для побудови епюр внутрішніх зусиль. Контрольні запитання дозволяють перевірити отримані теоретичні знання. Приведено схеми самих завдань для виконання розрахунково-графічної роботи, частина 2, які складаються з трьох задач. Це визначення розмірів поперечного перерізу у шарнірно-стержневій системі, побудова епюр поздовжніх сил та нормальних напружень у східчастому стержні з урахуванням власної ваги, визначення міцності статично невизначеного східчастого стержня, який знаходиться під дією силового навантаження та температури або під впливом зміщеної опори. До кожної задачі приведено приклад розв'язання з роз'ясненнями.

4 ПЕРЕЛІК ДОКУМЕНТІВ, ЯКІ НЕОБХІДНО ПОДАТИ ДО ЗАХИСТУ

Розрахунково-графічна робота має містити розрахункові схеми та самі розрахунки задач з поясненням та остаточними результатами. У додатку подано зразок оформлення титульного листа. Завдання має бути оформлене відповідно до вимог [6].

5 РОЗТЯГАННЯ-СТИСКАННЯ

Центральним розтяганням або стисканням називається деформація стержня під впливом 2-х рівних та протилежно спрямованих сил, лінія дії яких збігається з віссю стержня (рисунок 1).

При розтяганні-стисканні виникає поздовжня сила. Поздовжньою силою в заданому перерізі називають суму проекцій всіх зовнішніх поздовжніх сил, розташованих по одну сторону від розглянутого перерізу. Поздовжня сила додатна, якщо вона спрямована від перерізу, тобто розтягує стержень (рисунок 2).

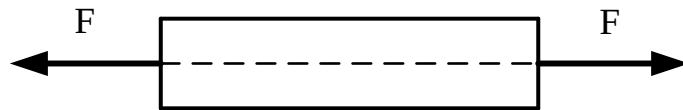


Рисунок 1 – Центральне розтягання.

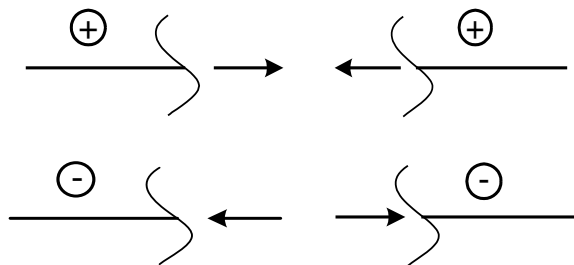


Рисунок 2 – Правило знаків поздовжньої сили.

5.1 Напруження

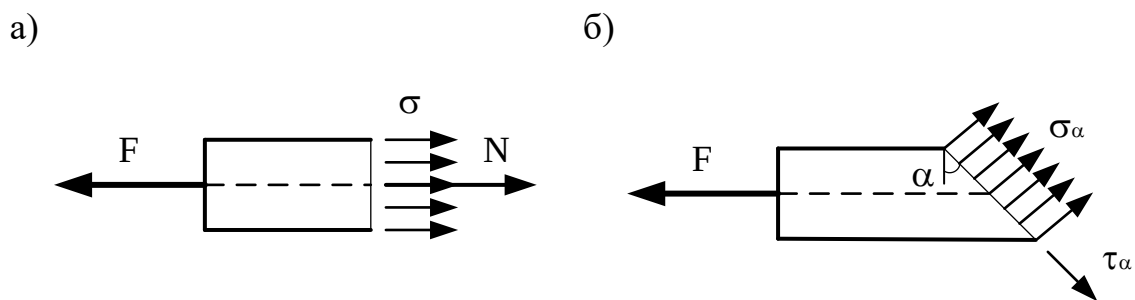
На площадках, які спрямовані по нормалі, діють нормальні напруження (рисунок 3, а). Вони визначаються за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (1)$$

При розтяганні або стисканні нормальні напруження в поперечному перерізі дорівнюють діючому внутрішньому зусиллю N , поділеному на площу поперечного перерізу A .

За нахиленими площадками діють нормальні напруження σ_α та дотичні напруження τ_α (рисунок 3, б). Їх визначають за формулами:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha, \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha. \quad (2)$$



а) на нормальними площадками; б) за нахиленими площадками

Рисунок 3 – Напруження за нормальними і нахиленими площадками при деформації розтягання-тискання

Формули (2) дають можливість визначити напруження за будь-якими нахиленими площадками. Аналіз залежностей (2) дає можливість визначити площадки, за якими діють екстремальні нормальні та дотичні напруження.

При $\alpha = 0$, площадки перпендикулярні осі стержня; $\cos \alpha = 1, \Rightarrow \sigma_0 = \sigma_{max}$,

$$\sin 2\alpha = 0, \Rightarrow \tau_0 = 0;$$

При $\alpha = 90^\circ$, площадки паралельні осі стержня; $\cos \alpha = 0, \Rightarrow \sigma_{90} = 0$,

$$\sin 2\alpha = 0, \Rightarrow \tau_{90} = 0;$$

При $\alpha = 45^\circ$; $\cos \alpha = 0,71, \Rightarrow \sigma_{45} = \frac{\sigma}{2}$,

$$\sin 2\alpha = 1, \Rightarrow \tau_{45} = \tau_{max} = \frac{\sigma}{2}.$$

Таким чином, максимальні нормальні напруження діють на площадках перпендикулярних осі стержня, а максимальні дотичні напруження діють на площадках, нахилених під кутом 45° .

При розрахунках на міцність широке розповсюдження має метод за допустимими напруженнями. Відповідно до цього методу, найбільші напруження, що виникають в елементі, мають не перевищувати допустимі напруження. Умова (3) називається умовою міцності при розтяганні-стисканні.

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma] , \quad (3)$$

де $[\sigma]$ – це таке напруження, при якому конструкція витримує діючі навантаження тривалий час не руйнуючись. Залежить від матеріалу, довідкова величина.

З умови міцності впливають три типи задач:

1 Перевірка міцності – потребує визначення розрахункових напружень σ у небезпечних перерізах при відомих розмірах поперечного перерізу і внутрішніх зусиллях, та допустимому напруженні. Отримані таким чином напруження співвідносять з допустимими напруженнями (3).

2 Визначення розмірів поперечного перерізу – потребує визначити мінімальні розміри поперечного перерізу при відомих внутрішніх зусиллях та допустимому напруженні, щоб конструкція залишилась міцною. Виходячи з умови міцності (3) визначаємо необхідну площу поперечного перерізу (4)

$$A \geq [A] = \frac{N}{[\sigma]} . \quad (4)$$

3 Визначення вантажопідйомності – потребує визначення максимального навантаження, яке може витримати конструкція. Виходячи з умови міцності (3) визначаємо максимальне навантаження (5)

$$F \leq [F] = [N] = [\sigma] \cdot A . \quad (5)$$

5.2 Деформації

Розглянемо стержень довжиною l і шириною поперечного перерізу a , який знаходиться під дією сили F , що розтягує (рисунок 4). Під дією сили стержень видовжиться на величину Δl , яка називається абсолютна поздовжня деформація, або абсолютне видовження, що вимірюється у м, см. Якщо абсолютне видовження віднести до початкової довжини, то отримуємо відносне видовження, або відносну поздовжню деформацію ε , яка є величиною безрозмірною (6). У поперечному напрямку, під дією сили F , що розтягує, розміри зменшаться на величину Δa , яка називається абсолютна поперечна деформація, або абсолютне звуження, що вимірюється у м, см. Якщо абсолютну поперечну деформацію віднести до початкової ширини, то отримуємо відносну поперечну деформацію ε' , яка є величиною безрозмірною (7).

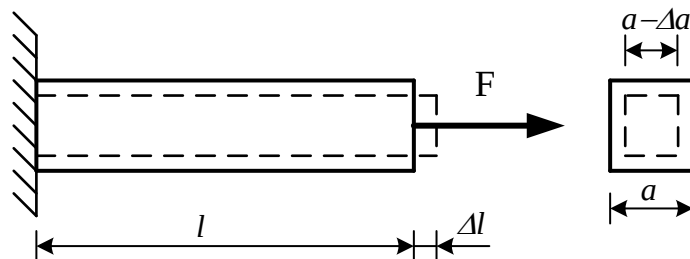


Рисунок 4 – Деформації стержня при розтяганні-стисканні.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (6)$$

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}. \quad (7)$$

Досліди показують, що між подовженням зразка та зменшенням поперечного розміру перерізу існує зв'язок у вигляді коефіцієнту Пуасона ν (величина безрозмірна) (8). Коефіцієнт Пуасона залежить від матеріалу і коливається у межах $0 \leq \nu \leq 0,5$; визначається експериментальним шляхом. Його значення для будь яких матеріалів є у довідковій літературі. Наприклад для пробки $\nu = 0$, для парафіну $\nu = 0,5$, для сталі $\nu = 0,2 - 0,3$ залежно від марки сталі.

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (8)$$

5.3 Закон Гука

Згідно з передумовою, що матеріал ідеально пружний, англійський вчений Роберт Гук припустив, що напруження (у певних межах) прямопропорційне відносному подовженню. Це ствердження носить назву закон Гука (9).

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (9)$$

де E – коефіцієнт пропорційності, або модуль пружності 1-го роду. Механічна характеристика матеріалу, визначається експериментальним шляхом, залежить від матеріалу, одиниці виміру Па, МПа. Його значення для будь яких матеріалів є у довідковій літературі. Для сталі $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Підставивши у закон Гука (9) формулу для визначення нормального напруження (1) та формулу для визначення відносної поздовжньої деформації (6), отримуємо другу форму закону Гука при розтяганні-стисканні (10), яка дозволяє знаходити абсолютне подовження елементів.

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}. \quad (10)$$

Добуток $E \cdot A$ називають жорсткість при розтяганні-стисканні.

5.4 Урахування власної ваги

Якщо власна вага становить невелику частину від зовнішнього навантаження, то нею можна знехтувати. Але трапляються випадки, коли власна вага є основним навантаженням (троси, ланцюги, стіни будівель, бурові штанги тощо). Вага елементів конструкції вважається зовнішнім навантаженням, що додається до елемента або споруди. У цих випадках при розрахунках, необхідно враховувати власну вагу елементів. Тоді поздовжня сила та напруження не постійні по довжині стержня, а залежать від відстані x (11,12) (рисунок 5). Видовження стержня з урахуванням власної ваги (рисунок 5), складається з видовження від діючої сили та видовження безпосередньо від власної ваги (13).

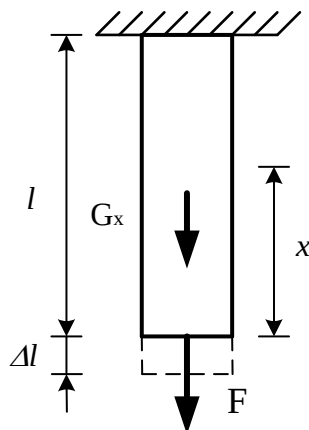


Рисунок 5 – Урахування власної ваги

$$N_x = F + \gamma \cdot A \cdot x ; \quad (11)$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \gamma \cdot x ; \quad (12)$$

$$\Delta l = \frac{N \cdot x}{E \cdot A} + \frac{G_x \cdot x}{2 \cdot E \cdot A} , \quad (13)$$

де, γ – об’ємна вага матеріалу;

G_x – власна вага у перерізі x .

При $x = 0$, тобто на вільному кінці стержня, поздовжня сила та напруження мінімальні і дорівнюють відповідно: $N_0 = F$, $\sigma_0 = \frac{N}{A}$.

При $x = l$, тобто в защемленні, поздовжня сила та напруження максимальні і дорівнюють відповідно: $N_l = F + \gamma \cdot A \cdot l$, $\sigma_l = \frac{N}{A} + \gamma \cdot l$.

5.5 Статично невизначені системи

Статично невизначеними називають системи, які не можна вирішити використовуючи тільки рівняння статки (рівноваги). Для вирішення таких задач необхідно складати додаткові рівняння, розглядаючи деформацію стержнів у системі або системи загалом. У зв'язку з цим, додаткові рівняння, які складаються для вирішення задач, називають рівняннями сумісності або нерозривності деформацій.

Ступінь статичної невизначеності системи визначається як різниця між кількістю реакцій в опорах та кількістю незалежних рівнянь статки.

Статично невизначені задачі бувають трьох типів залежно від виду зовнішніх впливів. Тобто, розрахунок статично невизначених задач проводиться на: дію зовнішнього навантаження; на температурний вплив; на неточність збирання.

Розрахунок на дію зовнішнього навантаження

Розглянемо стержень, зацмлений з двох сторін і завантажений силою F (рисунок 6, а). Власною вагою нехтуємо. Під дією сили F в опорах виникнуть реакції R_a та R_b . Складаємо рівняння рівноваги для заданої системи (14)

$$\sum x = 0, F + R_b - R_a = 0 . \quad (14)$$

У це рівняння входять дві невідомі: R_a та R_b . Тому ця задача є статично невизначеною.

Для розрахунку цієї задачі необхідно скласти додаткове рівняння, враховуючі деформацію системи. Для того, що б система могла деформуватись, відкидаємо одну із опор. Наприклад опору A (рисунок 6, б). Тепер, під дією сили F стержень видовжиться на величину Δl . Величину цього видовження знайдемо за залежністю (10). Але в заданій системі в точці A стоїть опора, тому ця точка не може переміщуватись. Прикладемо до точки A таку величину реакції R_a , щоб повернути цю точку на початкове місце. Враховуючи, що сила F розтягує довжину b , а реакція R_a стискає довжину l , отримуємо рівняння сумісності деформацій для заданої системи (15):

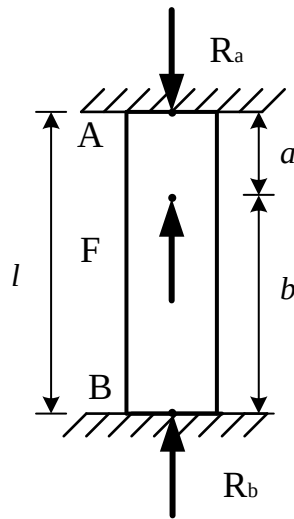
$$\Delta l = \frac{F \cdot b}{E \cdot A} - \frac{R_a \cdot l}{E \cdot A} = 0 . \quad (15)$$

З цього рівняння знаходимо величину реакції R_a (16) і таким чином розкриваємо статичну невизначеність. Тепер з рівняння рівноваги (14) знаходимо величину реакції R_b (17):

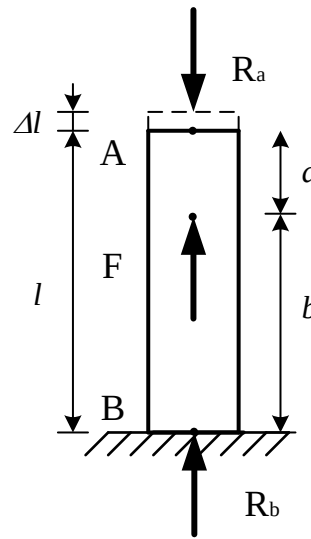
$$R_a = \frac{F \cdot b}{l} ; \quad (16)$$

$$R_b = \frac{F \cdot a}{l} . \quad (17)$$

а)



б)



а) заданий стержень; б) деформація стержня

Рисунок 6 – Розрахунок на дію зовнішнього навантаження

Розрахунок на температурний вплив

Розглянемо стержень, защемлений з двох сторін, що рівномірно нагрівається (рисунок 7, а). Під дією додатної температури стержень прагне розширитися, але защемлення цьому заважають. Таким чином в опорах виникають реакції R_a та R_b . Складаємо рівняння рівноваги для заданої системи (18):

$$\sum x = 0, \quad R_a - R_b = 0, \quad R_a = R_b = R_t. \quad (18)$$

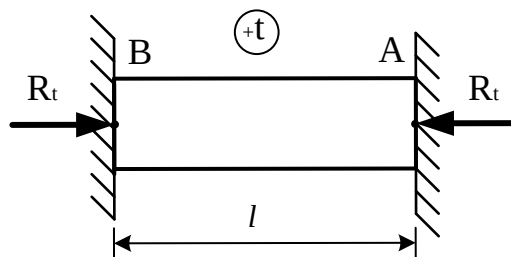
У це рівняння входять дві невідомі R_a та R_b . Ми знайшли, що вони рівні між собою і зазвичай їх позначають R_t . Але величину реакції з цього рівняння ми не знайшли. Таким чином, ця задача є статично невизначена. Складаємо додаткове рівняння, виходячи з деформації системи. Для того, що б система могла деформуватись, відкидаємо одну з опор, наприклад опору A (рисунок 7, б). Тепер під дією додатної температури стержень

вільно видовжиться і в опорі B реакція не виникне. Таким чином, у статично визначених системах від дії температури реакції не виникають. З фізики відомо, що видовження від температури можна визначити:

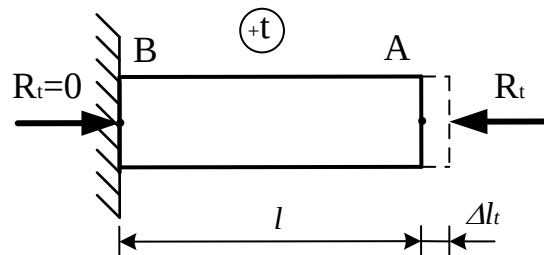
$$\Delta l_t = \alpha \cdot l \cdot t, \quad (19)$$

де α – коефіцієнт температурного розширення, що залежить від матеріалу.

а)



б)



а) заданий стержень, б) деформація стержня

Рисунок 7 – Розрахунок на температурний вплив

В заданій системі в точці A стоїть зацмлення, тому ця точка не може пересуватись. Прикладемо до неї таку величину реакції R_t , щоб повернути її на початкове місце. Величину переміщення від температурної реакції знайдемо з закону Гука (10). Враховуючи, що під дією додатної температури стержень видовжується, а під дією температурної реакції стискається,

отримуємо рівняння сумісності деформацій для заданої системи (20), з якого знаходимо температурну реакцію (21):

$$\alpha \cdot l \cdot t - \frac{R_t \cdot l}{E \cdot A} = 0 , \quad (20)$$

$$R_t = \alpha \cdot t \cdot E \cdot A . \quad (21)$$

Аналізуючи залежність (21) можна зробити висновок, що величина температурної реакції не залежить від довжини стержня.

Знайдемо напруження, що виникають від впливу температури (22):

$$\sigma_t = \frac{R_t}{A} = \alpha \cdot l \cdot E . \quad (22)$$

Проаналізувавши залежність (22) можна зробити висновок, що температурні напруження не залежать від площі поперечного перерізу.

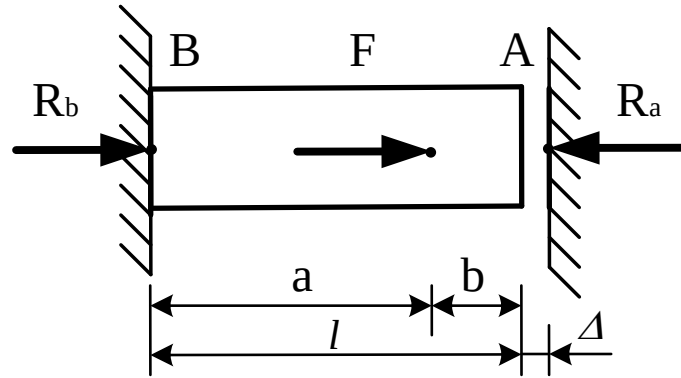
Розрахунок на неточність виготовлення

Розглянемо стержень защемлений з двох сторін. Довжина стержня була виготовлена трохи менша, ніж необхідно на величину Δ (рисунок 8, а). Під дією сили F стержень намагатиметься видовжитись, але защемлення буде заважати. Тому в опорах виникнуть реакції R_a та R_b . Складаємо рівняння рівноваги для заданої системи (23):

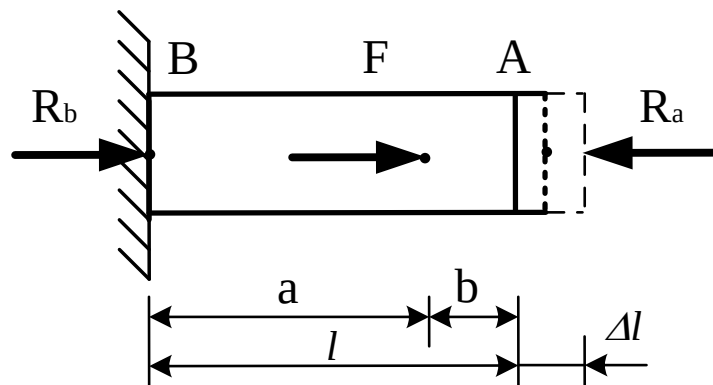
$$\sum x = 0, F + R_b - R_a = 0 . \quad (23)$$

В це рівняння входять дві невідомі: R_a та R_b . Тому ця задача є статично невизначеною.

a)



б)



a) заданий стержень, б) деформація стержня

Рисунок 8 – Розрахунок на неточність виготовлення

Для розрахунку цієї задачі необхідно скласти додаткове рівняння, враховуючи деформацію системи. Для того, що б система могла деформуватись, відкидаємо одну із опор. Наприклад опору A (рисунок 8, б). Тепер, під дією сили F стержень видовжиться на величину Δl . Величину цього видовження знайдемо за залежністю (10). Але в заданій системі в точці A стоїть опора, тому стержень може видовжитись до цієї точки. Прикладемо до точки A таку величину реакції R_a , щоб повернути цю точку на задане місце. Враховуючи, що сила F розтягує довжину a , а реакція R_a стискає довжину l , отримуємо рівняння сумісності деформацій для заданої системи (24):

$$\Delta l = \frac{F \cdot a}{E \cdot A} - \frac{R_a \cdot l}{E \cdot A} = \Delta . \quad (24)$$

З цього рівняння знаходимо величину реакції R_a (25) і таким чином розкриваємо статичну невизначеність. Тепер з рівняння рівноваги (23) знаходимо величину реакції R_b (26):

$$R_a = \frac{F \cdot a}{l} - \Delta \cdot E \cdot A ; \quad (25)$$

$$R_b = \frac{F \cdot b}{l} - \Delta \cdot E \cdot A . \quad (26)$$

6 ТЕСТОВІ ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

- 1 Що називається деформацією розтягання-стискання?
- 2 Які внутрішні зусилля виникають при розтяганні-стисканні?
- 3 За якими формулами визначають напруження на нормальних і нахилених площадках?
- 4 На яких площадках виникають максимальні нормальні і дотичні напруження?
- 5 Що таке абсолютна поздовжня та абсолютна поперечна деформація? Одиниці їх виміру.
- 6 Що таке відносна поздовжня та відносна поперечна деформація? Одиниці їх виміру.
- 7 За якою формулою визначається коефіцієнт Пуасона? Від чого він залежить, як визначається, чому дорівнює для сталі, одиниці виміру?
- 8 Запишіть обидві форми закону Гука при розтяганні-стисканні.

- 9 Чому дорівнює модуль пружності 1 роду для сталі? Якою літерою позначається, як він визначається, від чого залежить, одиниці виміру?
- 10 Як визначають внутрішні зусилля, напруження та переміщення з урахуванням власної ваги?
- 11 Які задачі називають статично невизначеними?
- 12 Які типи статично невизначених задач існують?
- 13 Що треба враховувати при складанні рівнянь сумісності деформацій для розрахунків статично невизначених задач?
- 14 Запишіть умову міцності при розтяганні-стисканні.
- 15 Які типи задач впливають з умови міцності?
- 16 Що таке допустиме напруження, як воно позначається та чому дорівнює для сталі?

7 ЗАВДАННЯ НА РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНУ РОБОТУ №1 (ЧАСТИНА 2)

Задача № 6 Для заданого варіанта даних і розрахункової схеми шарнірно-стержневої системи (рисунок 9), вважаючи балку абсолютно жорсткою, треба:

- 1) виходячи з умови міцності при розтягуванні визначити розміри перерізів сталених стержнів (діаметр d);
 - 2) прийняти допустиме напруження для сталі $[\sigma] = 160$ МПа.
- Дані для розрахунків взяти з таблиці 1.

Задача № 7 Для заданого варіанта даних і розрахункової схеми сталюого східчастого стержня (рисунок 10) треба:

1) побудувати епюри поздовжніх сил з урахуванням власної ваги і діючого навантаження;

2) побудувати епюру нормальних напружень з урахуванням власної ваги і діючого навантаження;

3) порівняти діючі напруження з допустимими, які дорівнюють $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, і дати висновок про міцність стержня;

4) з урахуванням власної ваги і діючого навантаження визначити переміщення вільного кінця стержня.

Прийняти об'ємну вагу $\gamma = 80 \text{ кН/м}^3$, модуль пружності $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Дані для розрахунків взяти з таблиці 2.

Задача № 8 Для заданого варіанта даних і розрахункової схеми чавунного статично невизначеного стержня (рисунок 11) необхідно:

- 1) скласти рівняння сумісності деформацій;
- 2) розкрити статичну невизначеність та знайти реакції;
- 3) побудувати епюри поздовжніх сил та нормальних напружень;
- 4) перевірити міцність всіх сходинок стержня із чавуну і зробити висновок.

Прийняти допустиме напруження чавуну при розтяганні $[\sigma]_p = 60 \text{ МПа}$, і при стисканні $[\sigma]_c = 120 \text{ МПа}$, температурний коефіцієнт лінійного розширення чавуну $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$, модуль пружності чавуну $E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Дані для розрахунків взяти з таблиці 3.

Таблиця 1 – Дані для розрахунків

Варіант	F ₁	F ₂	F ₃	q	a	b	l	h	α
	кН			кН/м	м				
1	110	200	15	230	1,5	0,1	2,5	1,0	20 ⁰
2	100	190	20	220	1,4	0,3	2,3	1,5	15 ⁰
3	120	180	18	200	1,2	0,2	2,0	1,4	10 ⁰
4	100	220	16	210	1,4	0,3	2,4	1,2	20 ⁰
5	110	210	20	230	1,6	0,2	2,2	1,1	15 ⁰
6	120	200	15	220	1,4	0,1	2,0	1,0	20 ⁰
7	100	190	18	200	1,5	0,2	2,3	1,5	15 ⁰
8	110	180	20	210	1,4	0,3	2,5	1,3	10 ⁰
9	120	220	16	200	1,3	0,1	2,4	1,4	20 ⁰
10	100	210	18	210	1,4	0,2	2,2	1.5	15 ⁰
11	100	170	15	200	1,5	0,3	2,3	1,2	20 ⁰
12	110	190	16	210	1,4	0,1	2,5	1,1	15 ⁰
13	120	190	16	220	1,2	0,3	2,0	1,5	10 ⁰
14	100	200	15	230	1,4	0,2	2,4	1,3	15 ⁰
15	110	220	20	210	1,6	0,1	2.2	1,4	10 ⁰
16	120	170	15	200	1,2	0,1	2,5	1,5	20 ⁰
17	100	180	18	230	1,3	0,2	2,4	1,4	15 ⁰
18	110	170	20	220	1,6	0,3	2,0	1.2	10 ⁰

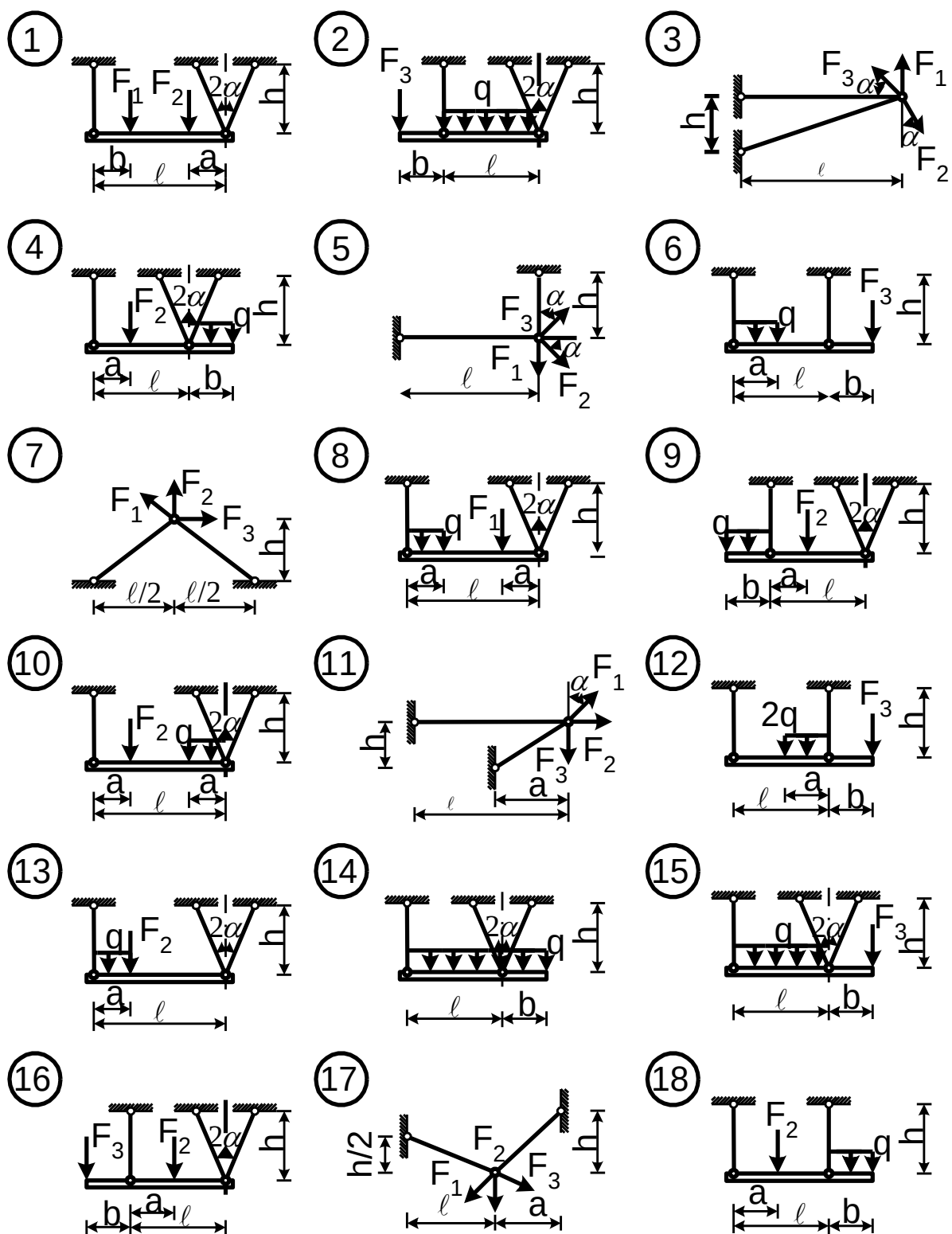


Рисунок 9 – Розрахункові схеми шарнірно-стержневих систем

Таблиця 2 – Дані для розрахунків

Варіант	F ₁	F ₂	F ₃	A ₁	A ₂	a	b	c
	кН			10 ⁻² М ²		м		
1	20	36	52	0,2	0,5	0,5	0,7	0,3
2	22	40	58	0,1	0,3	0,4	0,6	0,3
3	26	42	52	0,2	0,4	0,6	0,5	0,4
4	28	38	56	0,3	0,6	0,3	0,6	0,3
5	24	34	54	0,1	0,5	0,5	0,8	0,5
6	20	32	50	0,4	0,6	0,6	0,5	0,6
7	26	44	58	0,3	0,5	0,4	0,3	0,6
8	22	38	60	0,2	0,3	0,5	0,6	0,4
9	24	42	54	0,3	0,4	0,7	0,7	0,6
10	28	40	52	0,1	0,4	0,5	0,4	0,4
11	20	30	56	0,4	0,5	0,3	0,8	0,4
12	26	38	52	0,1	0,2	0,4	0,5	0,5
13	22	36	54	0,3	0,7	0,6	0,7	0,3
14	28	34	60	0,2	0,7	0,3	0,7	0,6
15	24	40	54	0,1	0,2	0,5	0,4	0,3
16	22	32	60	0,5	0,7	0,4	0,8	0,6
17	26	40	60	0,1	0,7	0,7	0,3	0,5
18	20	44	58	0,2	0,6	0,6	0,8	0,4

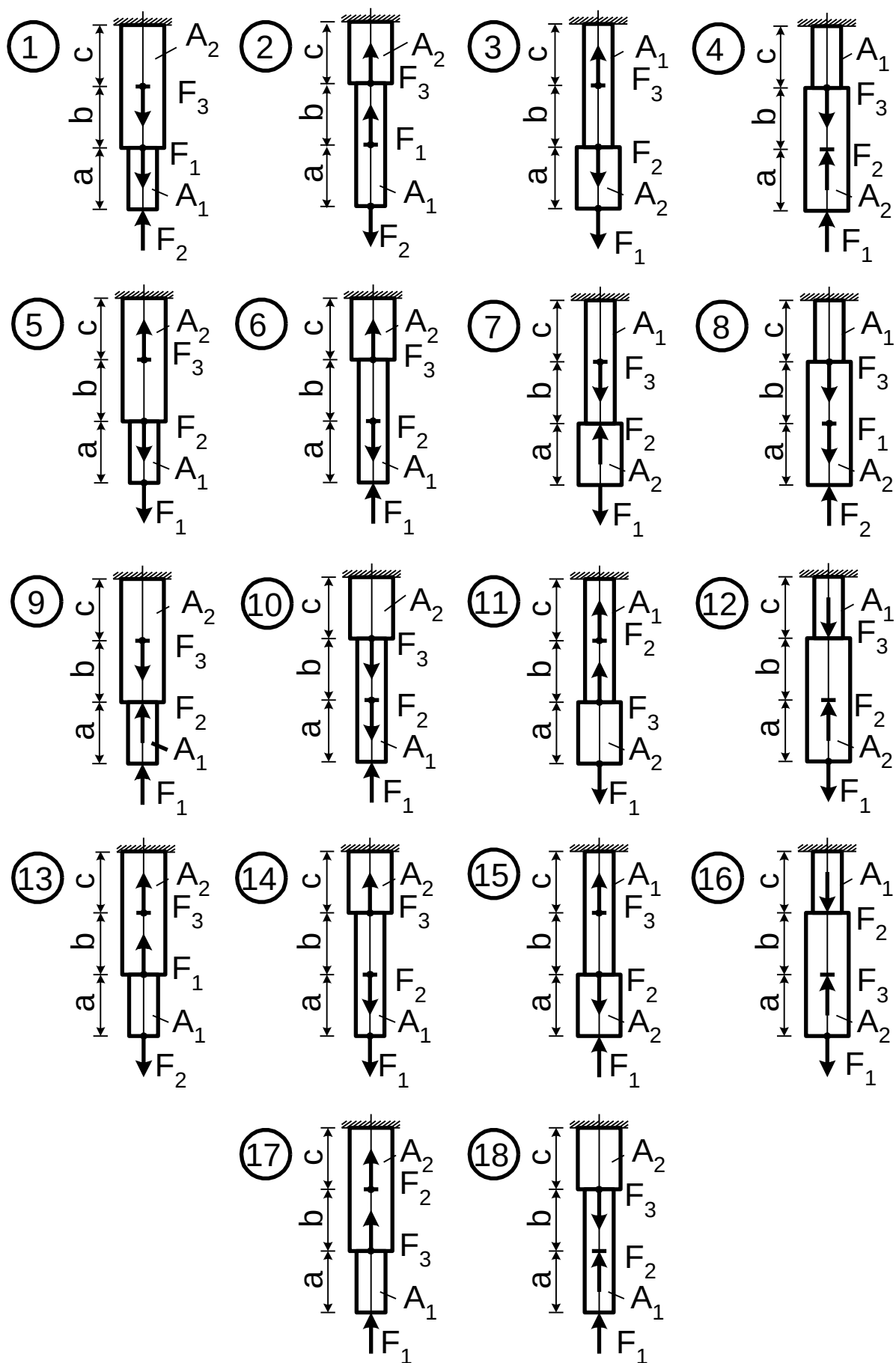


Рисунок 10 – Розрахункові схеми східчастого бруса

Таблиця 3 – Дані для розрахунків

Варіант	F ₁	F ₂	A	a	b	c
	кН		10 ⁻⁴ м	м		
1	350	100	25	0,5	0,4	0,6
2	400	100	30	0,4	0,6	0,5
3	300	150	35	0,6	0,4	0,5
4	350	150	40	0,6	0,5	0,4
5	300	200	35	0,4	0,5	0,6
6	400	150	30	0,5	0,6	0,4
7	370	140	25	0,6	0,6	0,4
8	320	150	40	0,6	0,4	0,6
9	390	100	35	0,7	0,3	0,5
10	350	120	40	0,3	0,5	0,7
11	100	300	35	0,4	0,6	0,5
12	100	350	40	0,6	0,6	0,4
13	150	300	35	0,4	0,4	0,6
14	150	400	30	0,5	0,5	0,4
15	200	370	25	0,5	0,6	0,4
16	150	320	40	0,6	0,6	0,6
17	140	390	35	0,6	0,7	0,5
18	150	350	40	0,4	0,3	0,7

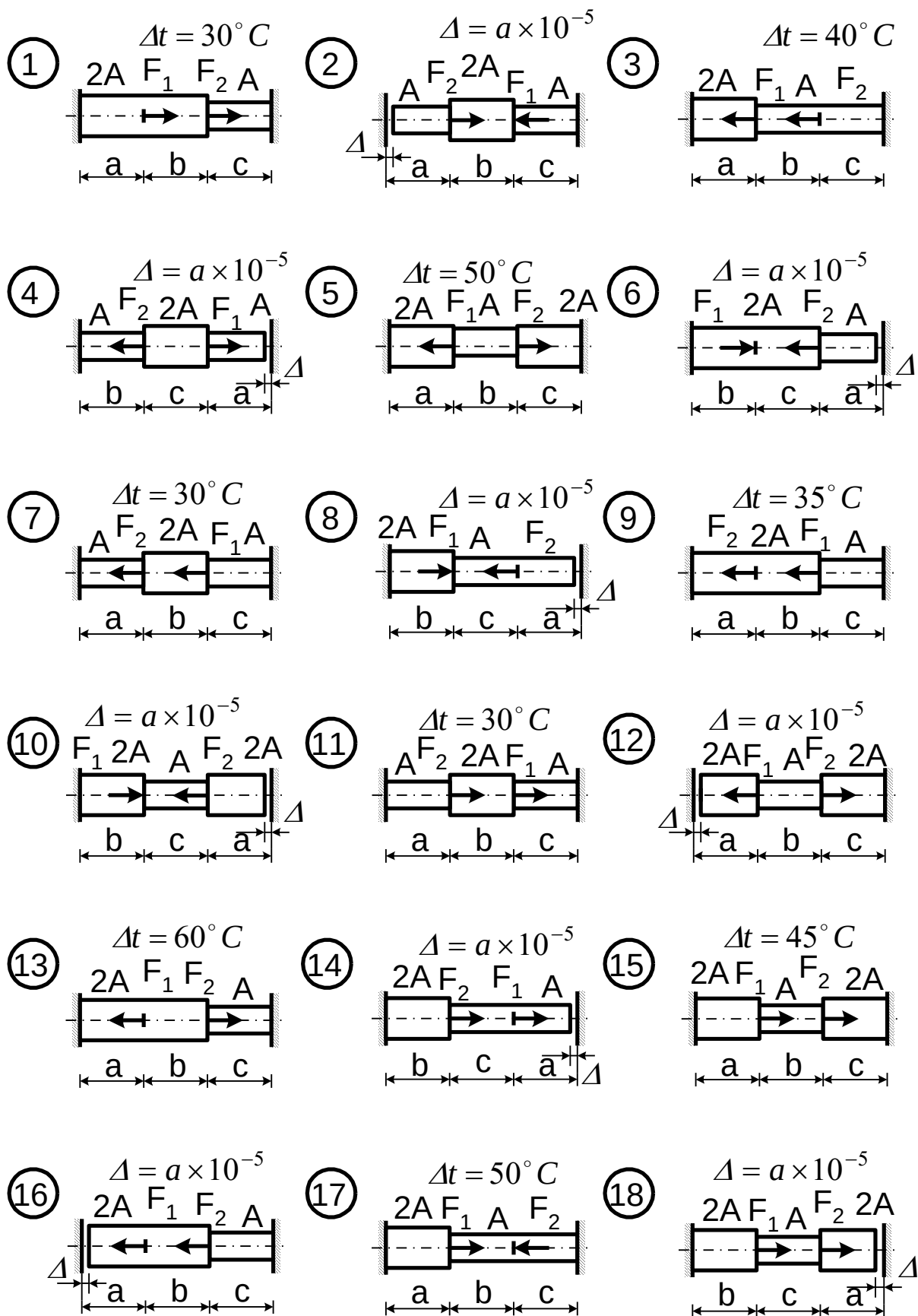


Рисунок 11 – Розрахункові схеми статично невизначених схем

8 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ З РОЗ'ЯСНЕННЯМ

8.1 Задача № 6. Визначення розмірів поперечних перерізів стержнів у шарнірно-стержневій системі.

Для заданої розрахункової схеми (рисунок 12) необхідно визначити такий діаметр стержнів, щоб конструкція залишалась міцною. Допустиме напруження для сталі прийняти $[\sigma] = 160$ МПа.

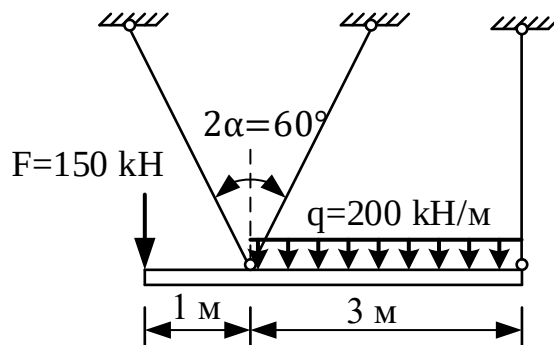


Рисунок 12 – Задана шарнірно-стержнева система

Визначення розмірів поперечного перерізу виконується на підставі умови міцності за нормальними напруженнями (3, 4). Для цього необхідно знати внутрішні зусилля в стержнях. Щоб визначити внутрішні зусилля проводимо переріз (рисунок 13) та спрямовуємо поздовжні сили за додатним напрямком відповідно до правила знаків (рисунок 2).

Оскільки задана система знаходиться в рівновазі, то і вирізана частина системи (рисунок 13) теж знаходиться в рівновазі. Таким чином, до неї можна застосувати рівняння рівноваги, з яких і знайдемо поздовжні сили.

$$\sum M_A = 0, \quad F \cdot 1 + N_1 \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 0, \quad N_1 = \frac{q \cdot 3 \cdot 1,5 - F \cdot 1}{3} = \frac{200 \cdot 3 \cdot 1,5 - 150 \cdot 1}{3} = 250,000 \text{ kH}.$$

$$\sum x = 0, \quad -N_3 \cdot \sin 30^\circ + N_2 \cdot \sin 30^\circ = 0, \quad N_3 = N_2.$$

$$\sum M_B = 0, F \cdot (1 + 3) + q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - N_3 \cdot 3 \cdot \cos 30^\circ - N_2 \cdot 3 \cdot \cos 30^\circ = 0.$$

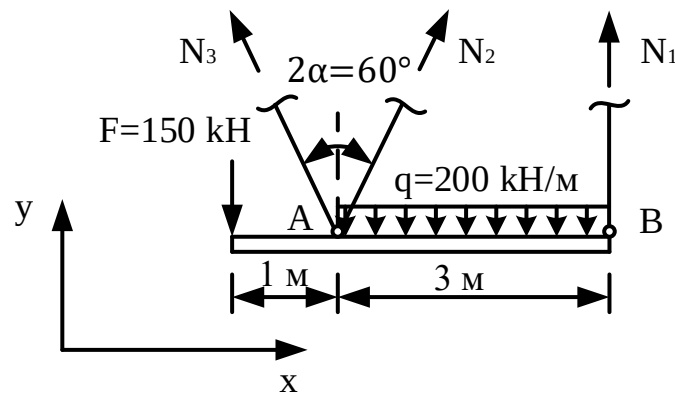


Рисунок 13 – Визначення внутрішніх зусиль у шарнірно-стержневій системі

Оскільки $N_3 = N_2$, $F \cdot (1 + 3) + q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot N_2 \cdot 3 \cdot \cos 30^\circ = 0$,

$$N_2 = N_3 = \frac{F \cdot 4 + q \cdot 3 \cdot 1,5}{2 \cdot 3 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{150 \cdot 4 + 200 \cdot 3 \cdot 1,5}{2 \cdot 3 \cdot 0,866} = 288,684 \text{ kH}.$$

Перевіряємо правильність визначених зусиль. Для цього спроектуємо сили на вертикальну вісь y .

$$\begin{aligned} \sum y = 0, -F - q \cdot 3 + N_3 \cdot \cos 30^\circ + N_2 \cdot \cos 30^\circ + N_1 = \\ = -150 - 200 \cdot 3 + 288,684 \cdot 0,866 + 288,684 \cdot 0,866 + 250,000 = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, зусилля визначено вірно.

Площу поперечних перерізів стержнів визначаємо за допомогою (4), а діаметр по формулі площі круга:

$$A_1 \geq [A_1] = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{250,000 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 15,625 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 15,625 \text{ см}^2,$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 15,625}{3,14}} = 4,460 \text{ см}.$$

$$A_2 = A_3 \geq [A_2] = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{288,684 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 18,043 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 18,043 \text{ см}^2,$$

$$d_2 = d_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 18,043}{3,14}} = 4,493 \text{ см}.$$

8.2 Задача № 7. Розрахунок східчастого стержня з урахуванням власної ваги.

Для заданої розрахункової схеми (рисунок 14) необхідно побудувати епюри поздовжніх сил та нормальних напружень з урахуванням власної ваги, зробити висновок про міцність стержня та визначити переміщення вільного кінця стержня з урахуванням власної ваги. Прийняти об'ємну вагу $\gamma = 80 \text{ kH/м}^3$, модуль пружності $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

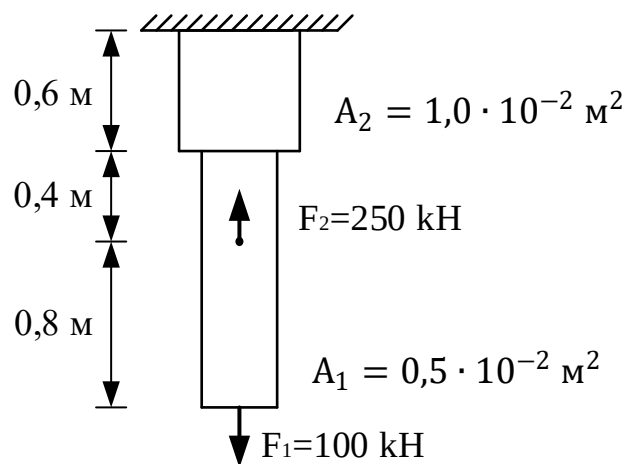


Рисунок 14 – Задана схема східчастого стержня

Спочатку намічаємо характерні точки. Характерними точками будуть: початок та кінець стержня, точки прикладання зосереджених сил та точки зміни площі поперечного перерізу (рисунок 15). Далі послідовно проводимо перерізи між характерними точками, при цьому розглядатимемо вільний кінець стержня тому, що не визначаємо реакції в опорі. Для кожного перерізу визначаємо поздовжню силу і нормальне напруження.

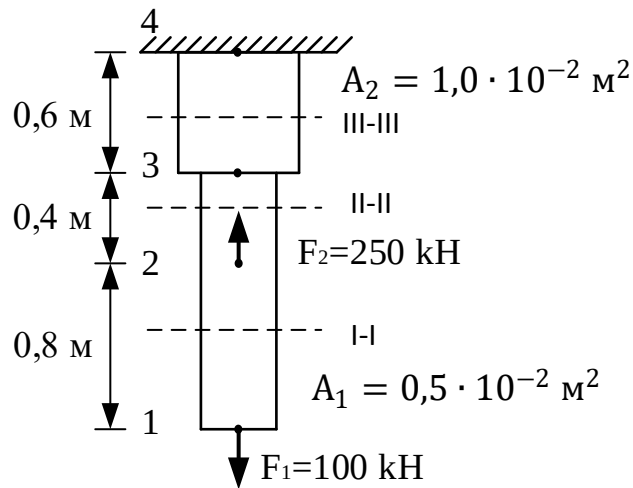
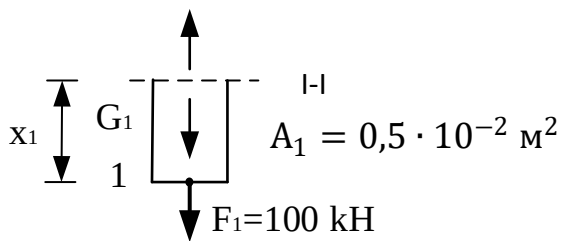


Рисунок 15 – Визначення характерних точок



Переріз I-I проводимо між точками 1 і 2, тому

$$0 \leq x_1 \leq 0,8 \text{ м.}$$

Поздовжню силу N_1 прикладаємо додатною, відповідно до правила знаків (рисунок 2), тобто вона має розтягувати стержень.

Окрім зовнішньої сили F_1 , враховуємо власну вагу, яка спрямована за законом всесвітнього тяжіння вниз: $G_1 = \gamma \cdot A_1 \cdot x_1$,

де $\gamma = 80 \text{ кН/м}^3$ – об'ємна вага, задана з умов задачі;

A_1 – площа поперечного перерізу даної ділянки.

Поздовжню силу N_1 знаходимо з рівняння рівноваги:

$$\sum x = 0, N_1 - G_1 - F_1 = 0, N_1 = G_1 + F_1 = \gamma \cdot A_1 \cdot x_1 + F_1.$$

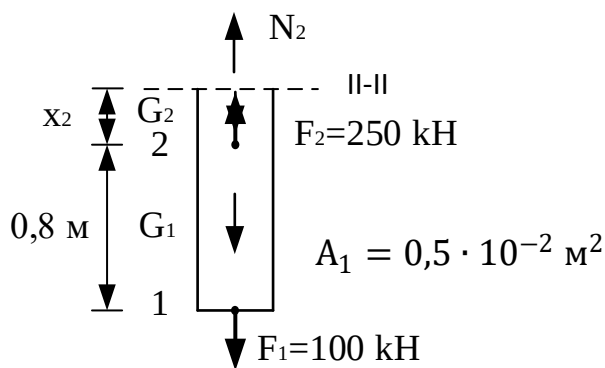
Нормальні напруження визначаються за (1) у кожній точці цієї ділянки.

При $x_1 = 0$, $N_1 = 100 \text{ kH}$, $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 10^{-2}} 10^{-6} = 20,000 \text{ МПа}$,

При $x_1 = 0,8 \text{ м}$, $N_1 = 80 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,8 + 100 = 100,320 \text{ kH}$.

$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{100,320 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 10^{-2}} 10^{-6} = 20,064 \text{ МПа}$.

Відкладаємо ці значення на епюрі поздовжніх сил (рисунок 16, б) та нормальних напружень (рисунок 16, в).



Переріз II-II проводимо між точками 2 і 3, тому

$$0 \leq x_2 \leq 0,4 \text{ м.}$$

Поздовжню силу N_2 прикладаємо додатною, відповідно до правила знаків (рисунок 2), тобто вона має розтягувати стержень.

Окрім зовнішніх сил F_1 та F_2 , враховуємо власну вагу першої ділянки, яка не залежить від відстані x_2 :

$$G_1 = \gamma \cdot A_1 \cdot 0,8 = 0,320 \text{ kH},$$

та власну вагу другої ділянки, яка залежить від x_2 :

$$G_2 = \gamma \cdot A_1 \cdot x_2.$$

Поздовжню силу N_2 знаходимо з рівняння рівноваги:

$$\sum x = 0, N_2 - G_1 - G_2 + F_2 - F_1 = 0,$$

$$N_2 = G_1 + G_2 - F_2 + F_1 = G_1 + \gamma \cdot A_1 \cdot x_2 - F_2 + F_1.$$

Нормальні напруження визначаються за (1) у кожній точці цієї ділянки.

$$\text{При } x_2 = 0, N_2 = 0,320 - 250 + 100 = -149,680 \text{ kH},$$

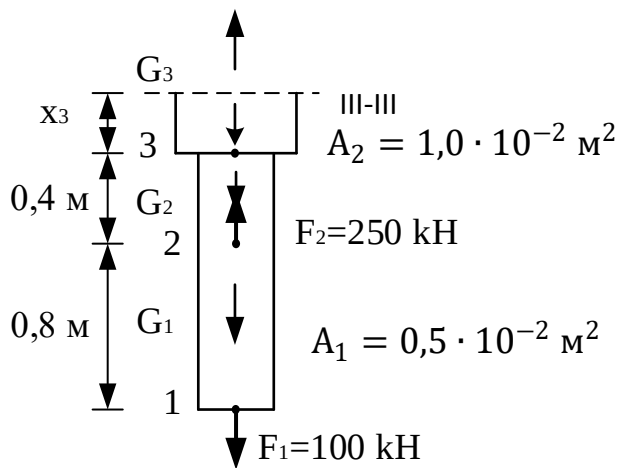
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{-149,680 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 10^{-2}} 10^{-6} = -29,936 \text{ МПа.}$$

При $x_2 = 0,4 \text{ м}$,

$$N_2 = 0,320 + 80 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 - 250 + 100 = -149,520 \text{ кН.}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{-149,520 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 10^{-2}} 10^{-6} = -29,904 \text{ МПа.}$$

Відкладаємо ці значення на епюрі поздовжніх сил (рисунок 16, б) та нормальних напружень (рисунок 16, в).



Переріз III-III прово-

димо між точками 3 і 4, тому

$$0 \leq x_3 \leq 0,6 \text{ м.}$$

Поздовжню силу N_3 прикладаємо додатною, відповідно до правила знаків (рисунок 2), тобто вона має розтягувати стержень.

Окрім зовнішніх сил F_1 та F_2 , враховуємо власну вагу першої та другої ділянок, яка не залежить від відстані x_3 :
 $G_1 = \gamma \cdot A_1 \cdot 0,8 = 0,320 \text{ кН}$,
 $G_2 = \gamma \cdot A_1 \cdot 0,4 = 0,160 \text{ кН}$ та
 власну вагу третьої ділянки, яка залежить від x_3 :

$$G_3 = \gamma \cdot A_2 \cdot x_3.$$

Поздовжню силу N_3 знаходимо з рівняння рівноваги:

$$\sum x = 0, N_3 - G_1 - G_2 - G_3 + F_2 - F_1 = 0,$$

$$N_3 = G_1 + G_2 + \gamma \cdot A_2 \cdot x_3 - F_2 + F_1 = G_1 + G_2 + \gamma \cdot A_2 \cdot x_3 - F_2 + F_1.$$

Нормальні напруження визначаються за (1) у кожній точці цієї ділянки.

$$\text{При } x_3 = 0, N_3 = 0,320 + 0,160 - 250 + 100 = -149,520 \text{ кН},$$

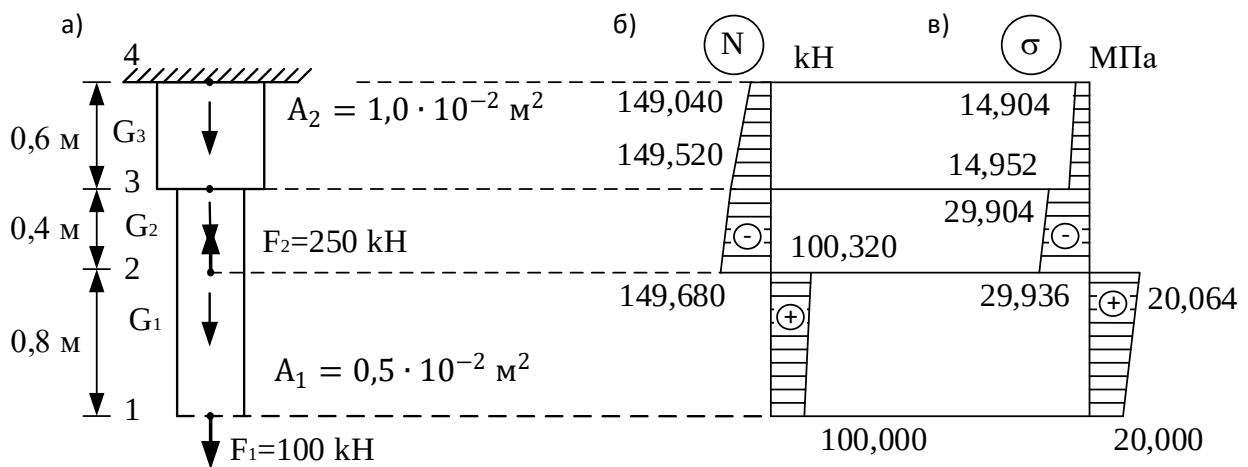
$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{-149,520 \cdot 10^3}{1,0 \cdot 10^{-2}} 10^{-6} = -14,952 \text{ МПа}.$$

$$\text{При } x_3 = 0,6 \text{ м},$$

$$N_3 = 0,320 + 0,160 + 80 \cdot 1,0 \cdot 10^{-2} \cdot 0,6 - 250 + 100 = -149,040 \text{ кН}.$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{-149,040 \cdot 10^3}{1,0 \cdot 10^{-2}} 10^{-6} = -14,904 \text{ МПа}.$$

Відкладаємо ці значення на епюрі поздовжніх сил (рисунок 16, б) та нормальних напружень (рисунок 16, в).



а) схема східчастого стержня; б) епюра поздовжніх сил;

в) епюра нормальних напружень

Рисунок 16 – Побудова епюри повздовжніх сил та нормальних напружень для східчастого стержня з урахуванням власної ваги

Визначаємо переміщення вільного кінця стержня. На стержень одночасно діють зовнішні сили і власна вага стержня, тому переміщення визначаємо за допомогою (13):

$$\begin{aligned}
 \Delta l &= \frac{F_1 \cdot (0,8 + 0,4)}{E \cdot A_1} + \frac{F_1 \cdot 0,6}{E \cdot A_2} - \frac{F_2 \cdot 0,4}{E \cdot A_1} - \frac{F_2 \cdot 0,6}{E \cdot A_2} + \\
 &+ \frac{(G_1 + G_2) \cdot (0,8 + 0,4)}{2 \cdot E \cdot A_1} + \frac{G_3 \cdot 0,6}{2 \cdot E \cdot A_2} + \frac{(G_1 + G_2) \cdot 0,6}{E \cdot A_2} = \\
 &= \frac{100,000 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} + \frac{100,000 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1,0 \cdot 10^{-2}} - \\
 &- \frac{250,000 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} - \frac{250,000 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1,0 \cdot 10^{-2}} + \\
 &+ \frac{(0,320 + 0,160) \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} + \frac{0,480 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1,0 \cdot 10^{-2}} + \\
 &+ \frac{(0,320 + 0,160) \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1,0 \cdot 10^{-2}} = \\
 &= -23,329 \cdot 10^{-6} \text{ м} = -0,233 \text{ мм}.
 \end{aligned}$$

Перший доданок та другий $\frac{F_1 \cdot (0,8+0,4)}{E \cdot A_1} + \frac{F_1 \cdot 0,6}{E \cdot A_2}$ – сила F_1 розтягує (тому вона додатна) довжину $(0,8 + 0,4)$ м площею A_1 та довжину $0,6$ м площею A_2 .

Третій та четвертий доданок $-\frac{F_2 \cdot 0,4}{E \cdot A_1} - \frac{F_2 \cdot 0,6}{E \cdot A_2}$ – сила F_2 стискає (тому вона від’ємна) довжину $0,4$ м площею A_1 та довжину $0,6$ м площею A_2 .

П’ятий доданок $\frac{(G_1+G_2) \cdot (0,8+0,4)}{2 \cdot E \cdot A_1}$ – власна вага $G_1 + G_2$ розтягують (тому вони додатні) довжину $(0,8 + 0,4)$ м площею A_1 .

Шостий доданок $\frac{G_3 \cdot 0,6}{2 \cdot E \cdot A_2}$ – власна вага G_3 розтягує (тому вона додатна) довжину $0,6$ м площею A_2 .

Сьомий доданок $\frac{(G_1+G_2) \cdot 0,6}{E \cdot A_2}$ – власна вага $G_1 + G_2$ розтягують (тому вони додатні) довжину 0,6 м площею A_2 як сила.

Від’ємне переміщення означає, що вільний кінець стержня пересувається вгору.

8.3 Задача № 8.1. Розрахунок східчастого статично невизначеного стержня на температурний вплив.

Для заданого варіанта даних і розрахункової схеми чавунного статично невизначеного стержня (рисунок 17) необхідно:

- 1 Скласти рівняння сумісності деформацій.
- 2 Розкрити статичну невизначеність та знайти реакції.
- 3 Побудувати епюри поздовжніх сил та нормальних напружень.
- 4 Перевірити міцність всіх сходинок стержня із чавуну і зробити висновок.

Прийняти допустиме напруження чавуну при розтяганні $[\sigma]^p = 60$ МПа і при стисканні $[\sigma]^c = 120$ МПа, температурний коефіцієнт лінійного розширення чавуну $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$, модуль пружності чавуну $E = 1,2 \cdot 10^5$ МПа.

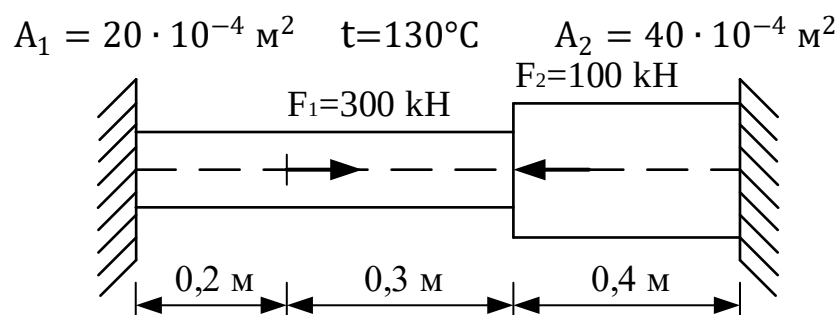


Рисунок 17 – Задана схема статично невизначеного східчастого стержня

На заданий стержень діють зосереджені сили та стержень нагрівається. Під дією цих факторів стержень має деформуватись (видовжитись або скоротитись). Але з обох боків він защемлений, тому в опорах зліва і справа виникнуть реакції (рисунок 18).

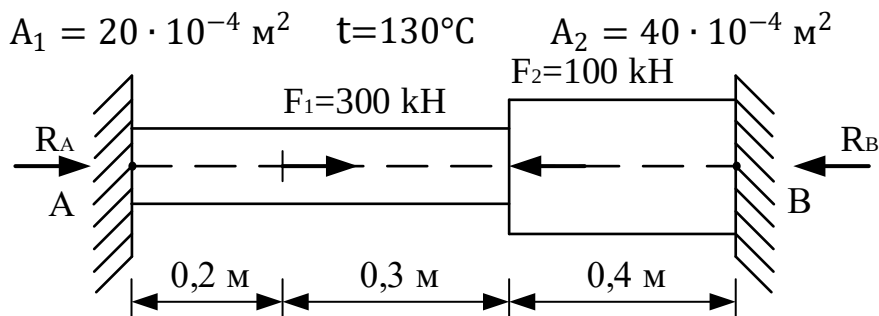


Рисунок 18 – Визначення статичної невизначеності східчастого стержня

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum x = 0; R_A + F_1 - F_2 - R_B = 0.$$

У це рівняння входять дві невідомі: R_A та R_B , тому його неможливо розрахувати за допомогою тільки цього рівняння. Для його рішення необхідно скласти одне додаткове рівняння – рівняння сумісності деформацій. Для цього відкидаємо одну з опор, наприклад, опору B (рисунок 19).

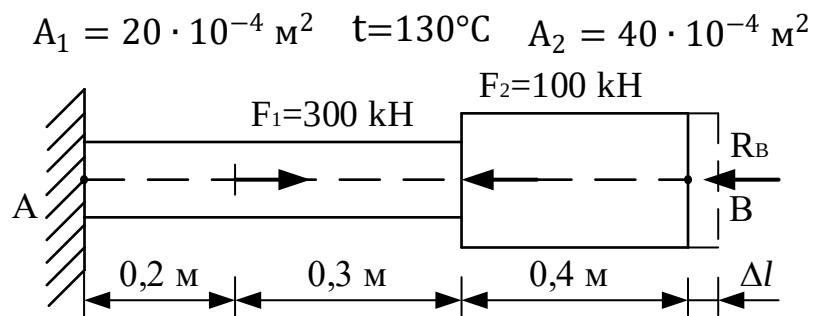


Рисунок 19 – Розрахункова схема східчастого стержня

Тепер під дією сил та температури стержень може деформуватись на деяку величину Δl . Знайти цю деформацію можна за законом Гука (10), пам'ятаючи, що деформація розтягання додатна, а стискання – від'ємна, а також враховуючи температурний вплив. Як відомо з фізики, температурна деформація визначається: $\Delta l_t = \alpha \cdot l \cdot t$, де α – коефіцієнт температурного розширення матеріалу. Для чавуну він дорівнює $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$.

$$\Delta l = \frac{F_1 \cdot 0,2}{E \cdot A_1} - \frac{F_2 \cdot (0,2 + 0,3)}{E \cdot A_1} + \alpha \cdot (0,2 + 0,3 + 0,4) \cdot t.$$

Але в заданій системі в точці B стоїть опора і ця точка не може пресуватись. Тому прикладемо в точку B таку величину реакції, щоб повернути цю точку на місце:

$$\Delta l + \Delta l_{R_B} = 0.$$

Це рівняння є рівнянням сумісності деформацій для заданої системи. Деформацію від реакції R_B знаходимо за допомогою закону Гука (10):

$$\Delta l_{R_B} = -\frac{R_B \cdot (0,2 + 0,3)}{E \cdot A_1} - \frac{R_B \cdot 0,4}{E \cdot A_2}.$$

Підставляючи знайдені значення Δl та Δl_{R_B} в рівняння сумісності деформацій отримуємо рівняння з однією невідомою R_B :

$$\frac{F_1 \cdot 0,2}{E \cdot A_1} - \frac{F_2 \cdot (0,2 + 0,3)}{E \cdot A_1} + \alpha \cdot (0,2 + 0,3 + 0,4) \cdot t - \frac{R_B \cdot (0,2 + 0,3)}{E \cdot A_1} - \frac{R_B \cdot 0,4}{E \cdot A_2} = 0;$$

$$\frac{R_B \cdot (0,2 + 0,3)}{E \cdot A_1} + \frac{R_B \cdot 0,4}{E \cdot A_2} = \frac{F_1 \cdot 0,2}{E \cdot A_1} - \frac{F_2 \cdot (0,2 + 0,3)}{E \cdot A_1} + \alpha \cdot (0,2 + 0,3 + 0,4) \cdot t;$$

$$\frac{R_B \cdot 0,5}{1,2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} + \frac{R_B \cdot 0,4}{1,2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 40 \cdot 10^{-4}} = F_1 \cdot 0,2 - F_2 \cdot 0,5 + \alpha \cdot 0,9 \cdot t \cdot E \cdot A_1;$$

$$R_B \cdot (208,333 \cdot 10^3 + 83,333 \cdot 10^3) = 300 \cdot 10^3 \cdot 0,2 - \\ - 100 \cdot 10^3 \cdot 0,5 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 0,9 \cdot 130 \cdot 1,2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-4};$$

$$291,666 \cdot 10^3 R_B = 60 \cdot 10^3 - 50 \cdot 10^3 + 336,960 \cdot 10^3;$$

$$R_B = \frac{346,960 \cdot 10^3}{291,666 \cdot 10^3} = 1,190 \text{ H} = 0,001 \text{ kH}.$$

Розв'язавши рівняння сумісності деформацій, ми знайшли реакцію R_B і таким чином розкрили статичну невизначеність. Тепер використовуючи рівняння рівноваги можна знайти реакцію R_A

$$R_A = F_1 + F_2 + R_B = -300 + 100 + 0,001 = -199,999 \text{ kH}.$$

Реакція R_A отримана від'ємна. Це означає, що вона спрямована в інший бік (рисунок 20, а). Знайшовши всі реакції можна побудувати епюру поздовжніх сил (рисунок 20, в). Для цього розглядаємо кожну ділянку стержня і знаходимо поздовжню силу за допомогою рівняння рівноваги, пам'ятаючи правило знаків поздовжньої сили (рисунок 2). Одразу на кожній ділянці визначаємо нормальні напруження за формулою (1) (рисунок 20, г).

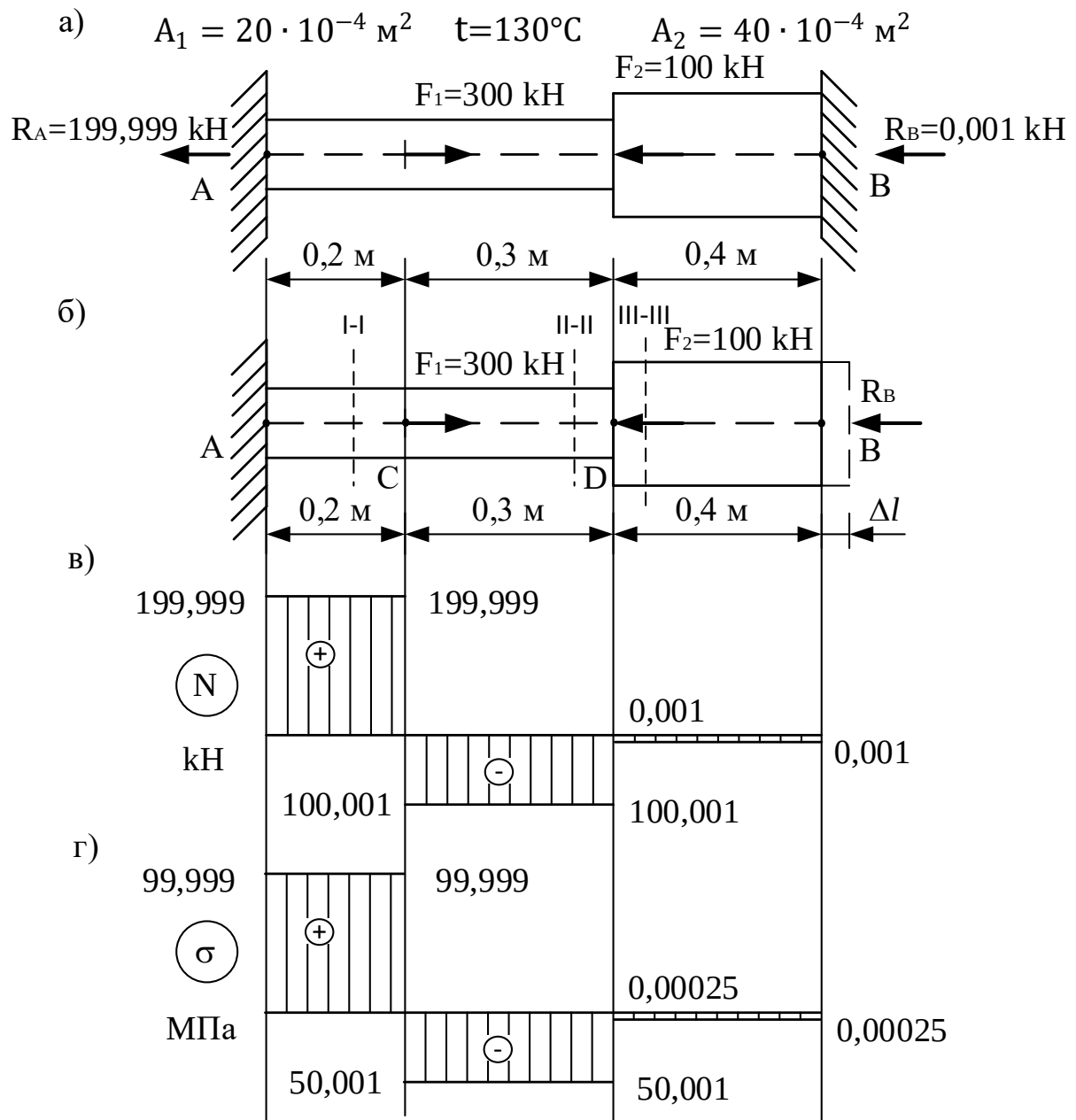
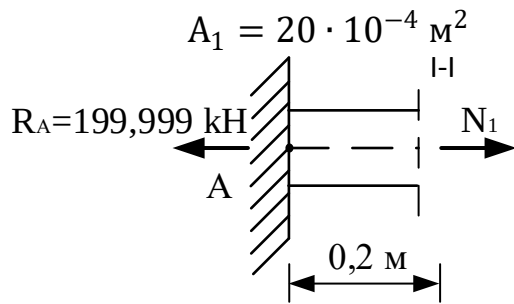


Рисунок 20 – Побудова епюри повздовжніх сил та нормальних напружень
для статично невизначеного стержня

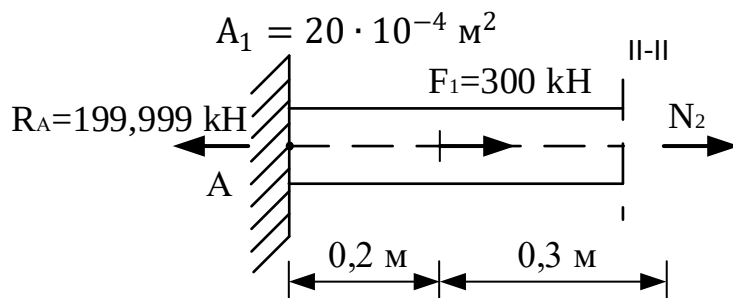


Перший переріз проводимо між точками A і C.

$$\sum x = 0, -R_A + N_1 = 0,$$

$$N_1 = R_A = 199,999 \text{ kH/}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{199,999 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = 99,999 \text{ МПа.}$$

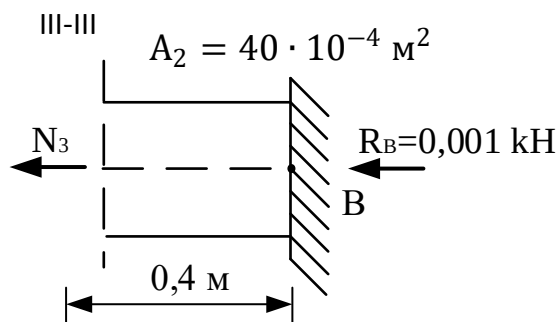


Другий переріз проводимо між точками C і D.

$$\sum x = 0, -R_A + F_1 + N_2 = 0,$$

$$N_2 = R_A - F_1 = 199,999 - 300 = -100,001 \text{ kH}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{-100,001 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = -50,001 \text{ МПа.}$$



Третій переріз проводимо між точками D і B.

$$\sum x = 0, -R_B - N_3 = 0,$$

$$N_3 = -R_B = -0,001 \text{ kH.}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{0,001 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^{-4}} = 0,00025 \text{ МПа.}$$

Для перевірки міцності стержня використовуємо умову міцності (3). Тобто, порівнюємо найбільші стискаючі напруження, які виникають на ділянці між точками C і D, з допустимим напруженням на стиск:

$$|\sigma_{max}^c| = |50,001| \text{ МПа} < [\sigma]^c = 120 \text{ МПа}.$$

Найбільші розтягуючі напруження, які виникають на ділянці між точками A і C , перевищують допустимі напруження на розтягання:

$$\sigma_{max}^p = 99,999 \text{ МПа} > [\sigma]^p = 60 \text{ МПа}.$$

Тому умова міцності не виконується. Стержень на цій ділянці не міцний.

8.4 *Задача № 8.2.* Розрахунок східчастого статично невизначеного стержня на зміщення опорних зав'язків.

Для заданого варіанта даних і розрахункової схеми чавунного статично невизначеного стержня (рисунок 21) необхідно:

- 1 Скласти рівняння сумісності деформацій.
- 2 Розкрити статичну невизначеність та знайти реакції.
- 3 Побудувати епюри поздовжніх сил та нормальних напружень.
- 4 Перевірити міцність всіх сходинок стержня із чавуну, і зробити висновок.

Прийняти допустиме напруження чавуну при розтяганні $[\sigma]^p = 60 \text{ МПа}$ і при стисканні $[\sigma]^c = 120 \text{ МПа}$, модуль пружності чавуну $E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

На заданий стержень діють зосереджені сили та стержень має невеликий зазор. Під дією сил стержень має деформуватись (видовжитись або скоротитись). Але з обох боків він защемлений, тому в опорах зліва і справа виникнуть реакції (рисунок 22).

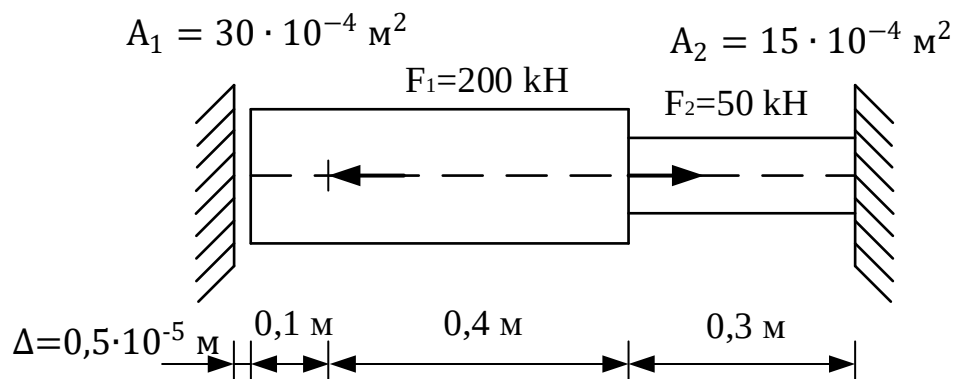


Рисунок 21 – Задана схема статично невизначеного східчастого стержня

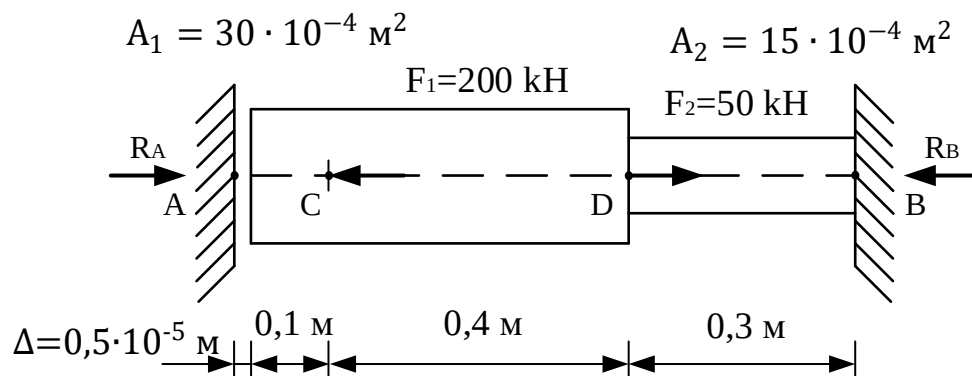


Рисунок 22 – Визначення статичної невизначеності східчастого стержня

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum x = 0; R_A - F_1 + F_2 - R_B = 0.$$

В це рівняння входять дві невідомі: R_A та R_B , тому його неможливо розрахувати за допомогою тільки цього рівняння. Для його рішення необхідно скласти одне додаткове рівняння – рівняння сумісності деформацій. Для цього відкидаємо одну з опор, доцільно відкидати опору, в якій є зміщення. Тому відкидаємо опору A (рисунок 23).

Тепер під дією сил стержень може деформуватись на деяку величину Δl . Знайти цю деформацію можна за законом Гука (10), пам'ятаючи, що деформація розтягання додатна, а стискання – від'ємна,

$$\Delta l = \frac{F_1 \cdot 0,4}{E \cdot A_1} + \frac{F_1 \cdot 0,3}{E \cdot A_2} - \frac{F_2 \cdot 0,3}{E \cdot A_2}.$$

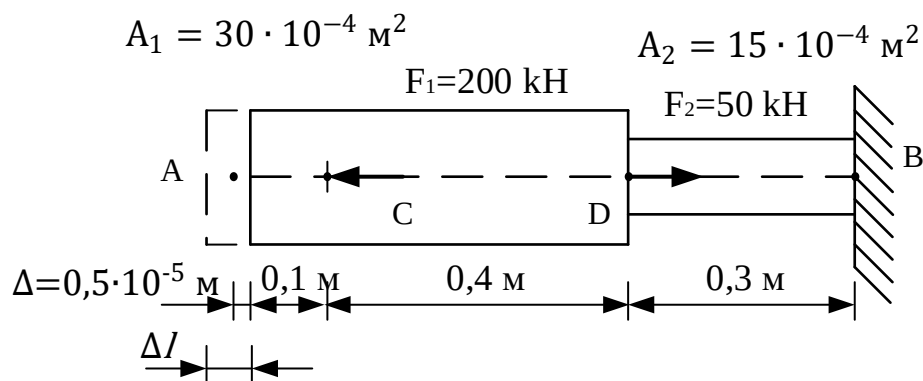


Рисунок 23 – Розрахункова схема сходового стержня

Але в заданій системі в точці A стоїть опора і ця точка не може пресуватись. Тому прикладемо в точку A таку величину реакції, щоб повернути цю точку на місце, з урахування зазору Δ :

$$\Delta l_{R_A} + \Delta l - \Delta = 0.$$

Це рівняння є рівнянням сумісності деформацій для заданої системи. Деформацію від реакції R_A знаходимо за допомогою закону Гука (10):

$$\Delta l_{R_A} = - \frac{R_A \cdot (0,1 + 0,4)}{E \cdot A_1} - \frac{R_A \cdot 0,3}{E \cdot A_2}.$$

Підставляючи знайдені значення Δl та Δl_{R_A} в рівняння сумісності деформацій, отримуємо рівняння з однією невідомою R_A

$$-\frac{R_A \cdot (0,1 + 0,4)}{E \cdot A_1} - \frac{R_A \cdot 0,3}{E \cdot A_2} + \frac{F_1 \cdot 0,4}{E \cdot A_1} + \frac{F_1 \cdot 0,3}{E \cdot A_2} - \frac{F_2 \cdot 0,3}{E \cdot A_2} - \Delta = 0;$$

$$\frac{R_A \cdot (0,1 + 0,4)}{E \cdot A_1} + \frac{R_A \cdot 0,3}{E \cdot A_2} = \frac{F_1 \cdot 0,4}{E \cdot A_1} + \frac{F_1 \cdot 0,3}{E \cdot A_2} - \frac{F_2 \cdot 0,3}{E \cdot A_2} - \Delta;$$

$$\frac{0,5 \cdot R_A}{30 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,3 \cdot R_A}{15 \cdot 10^{-4}} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{30 \cdot 10^{-4}} + \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{15 \cdot 10^{-4}} - \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{15 \cdot 10^{-4}} - 0,5 \cdot 10^{-5} \cdot 1,2 \cdot 10^5 \cdot 10^6;$$

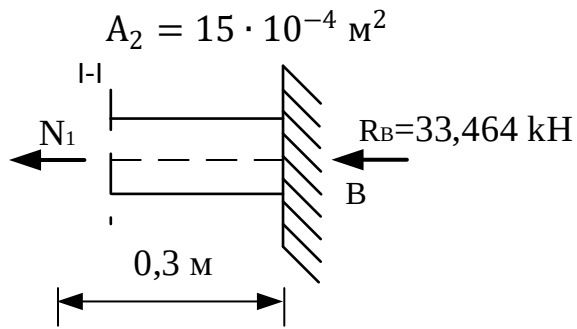
$$(166,667 + 200)R_A = 2,667 \cdot 10^7 + 4,000 \cdot 10^7 - 0,060 \cdot 10^7$$

$$R_A = \frac{6,727 \cdot 10^7}{366,667} = 183,464 \cdot 10^3 \text{ Н} = 183,464 \text{ кН}.$$

Розв'язавши рівняння сумісності деформацій, ми знайшли реакцію R_A і таким чином розкрили статичну невизначеність. Тепер використовуючи рівняння рівноваги можна знайти реакцію R_B

$$R_B = R_A - F_1 + F_2 = 183,464 - 200 + 50 = 33,464 \text{ кН}.$$

Знайшовши всі реакції, можна побудувати епюру поздовжніх сил (рисунок 24, в). Для цього розглядаємо кожну ділянку стержня і знаходимо поздовжню силу за допомогою рівняння рівноваги, пам'ятаючи правило знаків поздовжньої сили (рисунок 2). Одразу на кожній ділянці визначаємо нормальні напруження за формулою (1) (рисунок 24, г).

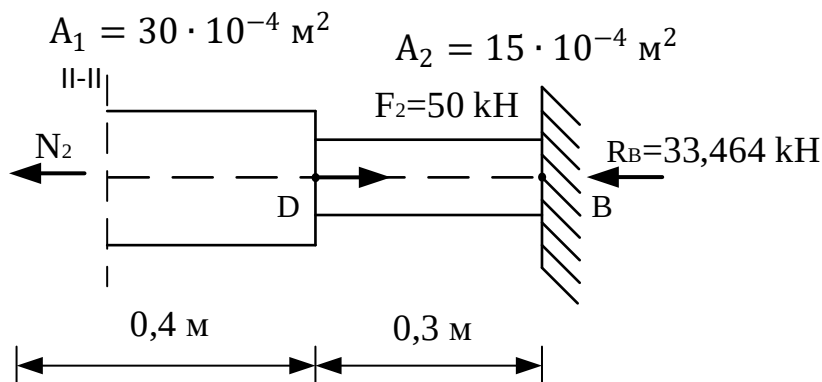


Перший переріз проводимо між точками B і D

$$\sum x = 0, -R_B - N_1 = 0,$$

$$N_1 = -R_B = -33,464 \text{ kH}.$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_2} = \frac{-33,464 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = -22,309 \text{ МПа}.$$



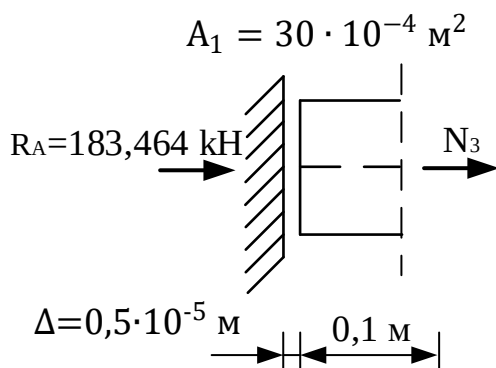
Другий переріз проводимо між точками D і C.

$$\sum x = 0,$$

$$-R_B + F_1 - N_2 = 0,$$

$$N_2 = -R_B + F_1 = -33,464 + 50,0 = 16,536 \text{ kH},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{16,536 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = 5,512 \text{ МПа}.$$

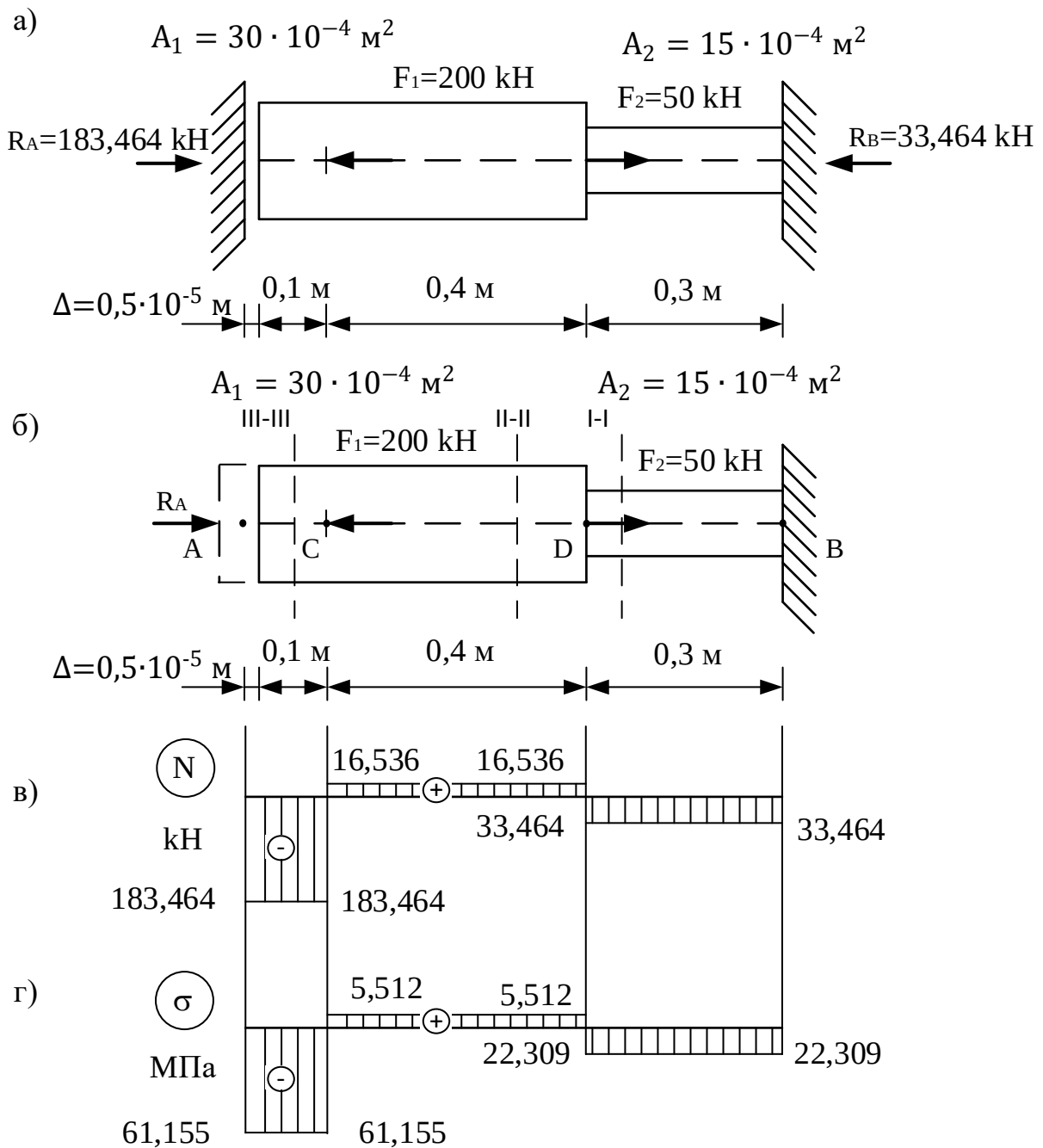


Третій переріз проводимо між точками A і C

$$\sum x = 0, R_A + N_3 = 0,$$

$$N_3 = -R_A = -183,464 \text{ kH},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_1} = \frac{-183,464 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = -61,155 \text{ МПа}.$$



а) схема стержня; б) розрахункова схема; в) епюра поздовжніх сил;
г) епюра нормальних напружень

Рисунок 24 – Побудова епюри повздовжніх сил та нормальних напружень
для статично невизначеного стержня

Для перевірки міцності стержня використовуємо умову міцності (3).
Тобто порівнюємо найбільші стискаючі напруження, які виникають на ділянці між точками A і C , з допустимим напруженням на стиск:

$$|\sigma_{max}^c| = |61,155| \text{ МПа} < [\sigma]^c = 120 \text{ МПа}.$$

Найбільші розтягуючі напруження, які виникають на ділянці між точками C і D з допустимими напруженнями на розтягання:

$$\sigma_{max}^p = 5,512 \text{ МПа} < [\sigma]^p = 60 \text{ МПа}.$$

Умова міцності на всіх ділянках виконується. Стержень міцний.

Список літератури

- 1 Чихладзе Е. Д. Опір матеріалів: підручн. Харків: УкрДАЗТ, 2011. 362 с.
- 2 Опір матеріалів: навч. посібник / С. Ю. Берестянська, О. В. Лобяк, О. В. Опанасенко, А. М. Петров, М. В. Павлюченков. Харків: УкрДУЗТ, 2020. Ч. 1. 151 с.
- 3 Чихладзе Е. Д., Кітов Ю. П. Вибрані задачі з опору матеріалів з розв'язаннями. Харків: УкрДАЗТ, 2002. 194 с.
- 4 Веревічева М. А., Петренко Д. Г. Приклади розв'язання розрахунково-проектувальних завдань з дисципліни «Опір матеріалів». Харків: УкрДАЗТ, 2015. 128 с.
- 5 Кітов Ю. П., Веревічева М. А., Чуменко С. М. Навчальний програмний комплекс з опору матеріалів. Харків: ХарДАЗТ, 2002. 62 с.
- 6 Студентська навчальна звітність. Текстова частина (пояснювальна записка). Загальні вимоги до побудови, викладення, оформлення: методичний посібник з державних вимог нормоконтролю у студентській звітності. Харків: УкрДАЗТ, 2014. 54 с.

ДОДАТОК А

Зразок оформлення титульного листа пояснювальної записки

Міністерство освіти та науки України

Український державний університет залізничного транспорту

Кафедра будівельної механіки та гідравліки

Розрахунково-графічна робота №__

Схема №__

Варіант №__

Виконав студент групи _____

Перевірив _____

Харків 20__

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для виконання розрахунково-графічних робіт
з дисципліни

«ОПР МАТЕРІАЛІВ»

Частина 2

Відповідальний за випуск Берестянська С. Ю.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 12.05.2025 р.

Умовн. друк. арк. 3,0. Тираж . Замовлення № .

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,

61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.