УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ ТА ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра автоматики та комп'ютерного телекерування рухом поїздів

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до контрольної роботи з дисципліни

«*ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ*»

Харків 2025

Методичні вказівки до контрольної роботи розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри автоматики та комп'ютерного телекерування рухом поїздів 17 березня 2025 р., протокол № 10.

У методичних вказівках наведено варіанти завдань, рекомендації щодо виконання та довідковий матеріал до контрольної роботи з дисципліни «Теорія автоматичного керування».

Друге видання, перероблене та доповнене з врахуванням багаторічного досвіду викладання цієї дисципліни.

Методичні вказівки призначено для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальності 174 (G7) «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» освітньої програми «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» всіх форм здобуття вищої освіти та також може використовуватися для спеціальності 273 (J7) «Залізничний транспорт» освітньої програми «Організація контролю систем керування рухом поїздів», які вивчають дисципліну «Теорія автоматичного керування».

Укладачі:
проф. В. Ш. Хісматулін,
доц. О. О. Сосунов,
старш. викл. М. В. Ушаков

Рецензент
доц. А. А. Прилипко

Зміст

1 Оператор передачі та характеристики динамічної системи

1.1 Завдання

Диференціальне рівняння "вхід-вихід" лінійної стаціонарної динамічної системи має вигляд

$$a_2 \cdot y''(t) + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = b_1 \cdot x'(t) + b_0 \cdot x(t)\ , \tag{1.1}$$

де $x(t),\ x'(t)$ – вхідна величина та її перша похідна;

$y(t),\ y'(t),\ y''(t)$ – вихідна величина та її перша і друга похідні;

a_i, b_l – постійні коефіцієнти.

Виконати таке:

1) визначити оператор передачі системи $K(p)$;

2) визначити передаточну функцію $K(p)$ та записати її у вигляді добутку передаточних функцій елементарних ланок.

1.2 Варіанти завдань

Варіанти (таблиця 1.1) відрізняються значеннями коефіцієнтів a_i, b_l. Номер варіанта визначається за правилом

$$N = k - 30 \cdot \mathrm{int}(k/30),$$

де k – дві останні цифри номера залікової книжки студента;

$\mathrm{int}(*)$ – ціла частина числа.

Наприклад, $k = 47$. Тоді номер варіанта

$$N = 47 - 30 \cdot \mathrm{int}(47/30) = 47 - 30 \cdot \mathrm{int}(1{,}57) = 47 - 30 = 17.$$

Таблиця 1.1 – Варіанти завдань

Номер варіанта	Значення коефіцієнтів				
	a_2	a_1	a_0	b_1	b_0
0	0	0.1	1	1	0
1	0	0.3	1	0.2	2
2	0.1	1	0	0.6	2
3	0.3	1	0	0	10
4	0	1	0	0.6	2
5	1	0	0	1.5	5
6	0.2	2.1	1	1	2
7	0.5	5.1	1	2	0
8	0.01	0.05	1	0	2
9	0.09	0.15	1	2	0
10	0	0.2	1	2	0
11	0	0.2	1	1	5
12	0.2	1	0	1	5
13	0.2	1	0	0	5
14	0	1	0	1	1
15	1	0	0	1	2
16	0.6	3.2	1	1	5
17	0.6	3.2	1	5	0
18	0.04	0.2	1	0	5
19	0.04	0.2	1	5	0
20	0	0.3	1	5	0
21	0	0.1	1	3	10
22	0.3	1	0	1	10
23	0.1	1	0	0	2
24	0	1	0	1	5
25	1	0	0	1	10
26	1.5	5.3	1	1	10
27	0.6	2.3	1	10	0
28	0.09	0.45	1	0	10
29	0.01	0.15	1	10	0

1.3 Методичні рекомендації до розв'язання завдання

1.3.1 Методика визначення оператора передачі системи

Оператор передачі являє собою запис диференціального рівняння "вхід-вихід" динамічної системи у спрощеній (символьній) формі.

Процеси, що відбуваються у лінійних стаціонарних інерційних динамічних системах, описуються диференціальними рівняннями "вхід-вихід", які мають такий загальний вигляд [1-3]:

$$\begin{aligned} &a_k \cdot y^{(k)}(t) + a_{k-1} \cdot y^{(k-1)}(t) + \dots + a_0 \cdot y(t) = \\ &= b_m \cdot x^{(m)}(t) + b_{m-1} \cdot x^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 \cdot x(t), \end{aligned} \tag{1.2}$$

де згідно з принципом причинності $m \le k$.

Рівняння (1.2) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням порядку k з постійними коефіцієнтами. Вони описують динаміку процесів як у лінійних функціональних блоках, так і у лінійній системі автоматичного керування (САК) у цілому.

З метою спрощення виконання дій над сукупністю таких рівнянь при побудові математичної моделі системи, їх записують у спрощеній операторній (символьній) формі.

Введемо в розгляд оператор (символ) диференціювання D[1], дія якого на довільну функцію $v(t)$ визначається за правилом

$$D^n v(t) = v^{(n)}(t) = \frac{d^n v(t)}{dt^n}, \tag{1.3}$$

і запишемо рівняння (1.2) в операторній (символьній) формі

[1] В інших джерелах застосовуються позначення «*p*», «*s*» (у MATLAB) та ін.

$$
\begin{aligned}
&a_k \cdot D^k\, y(t) + a_{k-1} \cdot D^{k-1}\, y(t) + \ldots + a_0 \cdot y(t) = \\
&= b_m \cdot D^m\, x(t) + b_{m-1} \cdot D^{m-1}\, x(t) + \ldots + b_0 \cdot x(t).
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Винесемо функції часу за дужки

$$
\left(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot D^i \right) y(t) = \left(\sum_{l=0}^{m} b_l \cdot D^l \right) x(t) .
$$

Формально розв’язуючи цей вираз відносно $y(t)$, отримаємо такий запис диференціального рівняння "вхід-вихід":

$$
y(t) = K(D) \cdot x(t) , \tag{1.5}
$$

де

$$
K(D) = \frac{\left(\sum_{l=0}^{m} b_l \cdot D^l \right)}{\left(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot D^i \right)} \tag{1.6}
$$

– диференціальний оператор передачі лінійної стаціонарної неперервної динамічної системи.

У теорії автоматичного керування операторна форма (1.5) запису диференціального рівняння "вхід-вихід" застосовується для графічного відображення у вигляді ***схеми математичної моделі*** системи у часовій області (рисунок 1.1).

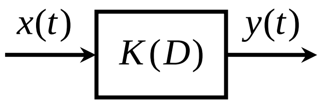


Рисунок 1.1

Приклад. Нехай за умовами завдання $b_1 = 1,\ b_0 = 2$, $a_2 = 0,2,\ a_1 = 1,2,\ a_0 = 1$, тобто рівняння "вхід-вихід" динамічної системи має такий вигляд

$$0,2y''(t) + 1,2y'(t) + y(t) = x'(t) + 2x(t) .$$

Запишемо його в операторній (символьній) формі

$$0,2 \cdot D^2 y(t) + 1,2 \cdot Dy(t) + y(t) = Dx(t) + 2x(t) .$$

Винесемо функції часу за дужки

$$(0,2 \cdot D^2 + 1,2 \cdot D + 1) y(t) = (D + 2) x(t) .$$

Формально розв’язуючи цей вираз відносно $y(t)$, отримаємо

$$y(t) = \frac{D + 2}{0,2 \cdot D^2 + 1,2 \cdot D + 1} x(t) = K(D) \cdot x(t) ,$$

де

$$K(D) = \frac{D + 2}{0,2 \cdot D^2 + 1,2 \cdot D + 1}$$

– шуканий диференціальний оператор передачі системи.

1.3.2 Методика визначення передаточної функції системи

Для аналізу динамічних систем широко застосовуються алгебраїчні методи, засновані на перетворенні Лапласа.

Перетворенням Лапласа функції $u(t)$ називається функція $U(p)$, яка визначається виразом

$$U(p) = \int_0^\infty u(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt} dt\,, \tag{1.7}$$

де p – змінна (змінна Лапласа), яка є комплексною величиною

$$p = \sigma + j\omega.$$

Перетворення Лапласа замінює функцію часу $u(t)$ (оригінал) на функцію нової комплексної змінної $U(p)$ (зображення за Лапласом), причому між оригіналом та його зображенням існує взаємно однозначний зв'язок.

Основні властивості перетворення Лапласа та таблиця зображень деяких функцій часу наведені у додатку А. Відзначимо, що всі функції-оригінали дорівнюють нулю при $t < 0$.

Передаточною функцією системи називається відношення перетворення Лапласа її вихідної величини до перетворення Лапласа вхідної величини при нульових початкових умовах

$$K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \tag{1.8}$$

Передаточна функція може бути знайдена безпосередньо з диференціального рівняння "вхід-вихід" або оператора передачі лінійної стаціонарної динамічної системи. Цей перехід оснований на властивостях лінійності перетворення Лапласа та диференціювання оригіналу (додаток А, таблиця А1). З урахуванням того, що передаточна функція визначається при нульових початкових умовах, між похідною n-го порядку функції часу $u(t)$ та її перетворенням Лапласа $U(p)$ має місце таке співвідношення

$$u^{(n)}(t) \longleftrightarrow p^n \cdot U(p). \tag{1.9}$$

Застосовуючи відповідність (1.9) до кожного доданка виразу (1.2), перейдемо від диференціального рівняння "вхід-вихід" до алгебраїчного рівняння для зображень вхідної та вихідної величини

$$\begin{aligned} &a_k \cdot p^k \cdot Y(p) + a_{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot Y(p) + \ldots + a_0 \cdot Y(p) = \\ &= b_m \cdot p^m \cdot X(p) + b_{m-1} \cdot p^{m-1} \cdot X(p) + \ldots + b_0 \cdot X(p). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Винесемо перетворення Лапласа вхідної та вихідної величин за дужки

$$\left(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot p^i \right) Y(p) = \left(\sum_{l=0}^{m} b_l \cdot p^l \right) X(p).$$

Розв’яжемо отримане алгебраїчне рівняння відносно перетворення Лапласа $Y(p)$ вихідної величини

$$Y(p) = K(p) \cdot X(p), \tag{1.11}$$

де

$$K(p) = \frac{\left(\sum_{l=0}^{m} b_l \cdot p^l\right)}{\left(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot p^i\right)} \tag{1.12}$$

– шукана передаточна функція. Вона являє собою дрібно-раціональну алгебраїчну функцію відносно комплексної змінної p.

З порівняння виразів (1.6) і (1.12) випливає, що

$$K(p) = K(D)\Big|_{D=p}, \tag{1.13}$$

тобто ***передаточна функція системи може бути знайдена безпосередньо за її оператором передачі $K(D)$ шляхом формальної заміни символу диференціювання D на змінну Лапласа p.***

Приклад. Нехай

$$K(D) = \frac{D+2}{0,2 \cdot D^2 + 1,2 \cdot D + 1}$$

– оператор передачі системи. Тоді її передаточна функція відповідно до виразу (1.12) дорівнює

$$K(p) = K(D)\Big|_{D=p} = \frac{p+2}{0,2 \cdot p^2 + 1,2 \cdot p + 1}.$$

1.3.3 Запис передаточної функції системи у вигляді добутку передаточних функцій елементарних ланок

Відповідно до виразу (1.12) передаточна функція лінійної неперервної стаціонарної динамічної системи є відношенням многочленів відносно змінної Лапласа p

$$K(p) = \frac{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + ... + b_0}{a_k \cdot p^k + a_{k-1} \cdot p^{k-1} + ... + a_0} = \frac{M(p)}{N(p)}, \quad k \geq m. \tag{1.14}$$

Згідно з теоремою Безу́ многочлени $M(p)$ і $N(p)$ можуть бути представлені у вигляді розкладу на прості множники

$$M(p) = b_m \prod_{r=1}^{m} (p - q_r), \qquad N(p) = a_k \prod_{i=1}^{k} (p - p_i),$$

де q_r, p_i – корені рівнянь $M(p) = 0$ та $N(p) = 0$ відповідно.

Корені рівнянь можуть бути нульовими, дійсними (відмінними від нуля) і комплексними спряженими. Тому у кожному многочлені можна виділити по три групи співмножників, що відповідають характеру коренів, причому нульовим та дійсним кореням відповідають множники першого порядку, а парі комплексних спряжених – множники другого порядку з дійсними коефіцієнтами.

З урахуванням цього, передаточну функцію лінійної неперервної стаціонарної динамічної системи завжди можна представити у вигляді добутку компонентів сімох типів: масштабного коефіцієнта, трьох видів простих множників та трьох видів простих дробів. Вказані сім типів компонентів, з яких складається передаточна функція будь-якої лінійної стаціонарної неперервної динамічної системи, отримали назву ***елементарних ланок*** [1, 4, 5].

У таблиці 1.2 наведені назви елементарних ланок та стандартний запис їх передаточних функцій.

Підсилювальна ланка відповідає масштабному коефіцієнту, диференціююча та інтегруюча ланки відповідають нульовим кореням, форсуюча та аперіодична (інерційна) ланки відповідають дійсним кореням, а форсуюча 2-го порядку та коливальна ланки – парам комплексних спряжених коренів чисельника та знаменника передаточної функції $K(p)$ динамічної системи. Параметри елементарних ланок задовольняють нерівностям $\tau > 0$, $T > 0$, $\tau_0 > 0$, $T_0 > 0$, $0 \le \xi < 1$, $0 \le \eta < 1$.

Таблиця 1.2 – Елементарні ланки

Назва ланки	Передаточна функція
Підсилювальна	$K(p) = k$ (k – коефіцієнт підсилення)
Диференціююча	$K(p) = p$
Інтегруюча	$K(p) = 1/p$
Форсуюча	$K(p) = \tau \cdot p + 1$ (τ – постійна часу, с)
Аперіодична (інерційна)	$K(p) = \dfrac{1}{T \cdot p + 1}$ (T – постійна часу, с)
Коливальна	$K(p) = \dfrac{1}{T_0{}^2 \cdot p^2 + 2\xi \cdot T_0 \cdot p + 1}$ (ξ – відносний коефіцієнт згасання – безрозмірний параметр; T_0 – постійна часу, с)
Форсуюча 2-го порядку	$K(p) = \tau_0{}^2 \cdot p^2 + 2\eta \cdot \tau_0 \cdot p + 1$ (η – безрозмірний параметр; τ_0 – постійна часу, с)

Елементарні ланки можна розглядати як «будівельні блоки», з яких складається структура будь-якої САК. Представлення структури системи у вигляді добутку сукупності елементарних ланок дозволяє аналізувати її властивості, спираючись на характеристики елементарних ланок, з яких вона складається.

Приклад 1. Запишемо передаточну функцію системи

$$K(p) = \frac{2}{0,2p^2 + 5p}$$

у вигляді добутку передаточних функцій елементарних ланок.

Виділимо у передаточній функції окремі множники

$$K(p) = \frac{2}{0,2p^2 + 5p} = 2 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{0,2p + 5}.$$

У передаточних функцій елементарних ланок вільний коефіцієнт завжди дорівнює одиниці, тому для приведення отриманого виразу до необхідного вигляду винесемо із знаменника третього множника коефіцієнт 5

$$K(p) = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(0,2/5)p + 1} = 0,4 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{0,4p + 1}.$$

Порівнюючи отриманий результат з виразами для передаточних функцій елементарних ланок (таблиця 1.2), доходимо висновку, що передаточна функція системи складається з добутку передаточних функцій

$$K(p) = K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p),$$

де $K_1(p) = k$ – передаточна функція підсилювальної ланки з коефіцієнтом підсилення $k = 0,4$;

$K_2(p) = 1/p$ – передаточна функція інтегруючої ланки;

$K_3(p) = \dfrac{1}{Tp+1}$ – передаточна функція інерційної ланки з постійною часу $T = 0,4$ с.

Приклад 2. Запишемо передаточну функцію системи

$$K(p) = \frac{p+2}{0,2 \cdot p^2 + 1,2 \cdot p + 1}$$

у вигляді добутку передаточних функцій елементарних ланок.

Перетворимо чисельник з урахуванням того, що вільний коефіцієнт передаточних функцій елементарних ланок завжди дорівнює одиниці. Для цього винесемо із чисельника коефіцієнт 2

$$M(p) = p + 2 = 2(0,5p + 1) = k(\tau \cdot p + 1),$$

де k – коефіцієнт підсилення підсилювальної ланки, $k = 2$;

τ – постійна часу форсуючої ланки, $\tau = 0,5$ с (таблиця 1.2).

Знаменник має другий порядок відносно змінної *p*. Тому спочатку з'ясуємо, які корені – дійсні чи комплексно-спряжені – має характеристичне рівняння знаменника

$$N(p) = 0,2 \cdot p^2 + 1,2 \cdot p + 1 = a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0 = 0.$$

Його дискримінант $d = a_1^2 - 4a_0 \cdot a_2 = 0.64 > 0$.

Отже, $d > 0$, тому корені характеристичного рівняння знаменника дійсні. У цьому випадку знаменник записуємо у вигляді, що відповідає добутку знаменників двох інерційних ланок (таблиця 1.2)

$$N(p) = a_0 \cdot (T_1 p + 1)(T_2 p + 1),$$

де T_1, T_2 – постійні часу,

$$T_{1,\,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{d}}{2a_0}.$$

Після підрахунку маємо $T_1 = 1$ с, $T_2 = 0{,}2$ с.

Таким чином, передаточна функція системи приводиться до такого кінцевого вигляду

$$K(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = k \cdot (\tau p + 1) \cdot \frac{1}{T_1 p + 1} \cdot \frac{1}{T_2 p + 1},$$

де k – коефіцієнт підсилення підсилювальної ланки, $k = 2$;

τ – постійна часу форсуючої ланки, $\tau = 0{,}5$ с;

T_1, T_2 – постійні часу інерційних ланок, $T_1 = 1$ с, $T_2 = 0{,}2$ с.

Приклад 3. Запишемо передаточну функцію системи

$$K(p) = \frac{p + 2}{p^2 + p + 1}$$

у вигляді добутку передаточних функцій елементарних ланок.

Тут чисельник співпадає з попереднім прикладом. Знаменник має другий порядок відносно змінної *p*. З'ясуємо, дійсні чи комплексно-спряжені корені має характеристичне рівняння знаменника

$$N(p) = 1 \cdot p^2 + 1 \cdot p + 1 = a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0 = 0.$$

Його дискримінант $d = a_1^2 - 4a_0 \cdot a_2 = -3 < 0$ від'ємний, тому корені характеристичного рівняння знаменника комплексно-спряжені. У цьому випадку знаменник записуємо у вигляді, що відповідає коливальній ланці (таблиця 1.2)

$$N(p) = a_0 \cdot (T_0^2 \cdot p^2 + 2\xi \cdot T_0 \cdot p + 1),$$

де $\xi = \dfrac{a_1}{2\sqrt{a_0 \cdot a_2}}$ – відносний коефіцієнт згасання, $0 \le \xi < 1$;

$T_0 = \sqrt{\dfrac{a_2}{a_0}}$ – постійна часу, с.

Після підрахунку маємо $T_0 = 1$ с, $\xi = 0{,}5$.

Таким чином, передаточна функція системи

$$K(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = k \cdot (\tau p + 1) \cdot \frac{1}{T_0^2 \cdot p^2 + 2\xi \cdot T_0 \cdot p + 1},$$

де k – коефіцієнт підсилення підсилювальної ланки, $k = 2$;

τ – постійна часу форсуючої ланки, $\tau = 0{,}5$ с;

ξ – відносний коефіцієнт згасання коливальної ланки, $\xi = 0{,}5$;

T_0 – постійна часу коливальної ланки, $T_0 = 1$ с.

2 Схема математичної моделі та основні рівняння системи автоматичного керування

2.1 Завдання

Для заданої схеми математичної моделі системи автоматичного керування (САК) виконати таке:

1) перетворити схему математичної моделі до найпростішого одноконтурного вигляду;

2) визначити оператори передачі системи та записати основні рівняння.

2.2 Варіанти завдань

Варіанти завдань відрізняються виглядом схеми математичної моделі системи та операторами передачі ланок.

Варіанти завдань наведено в таблиці 2.1 та на рисунках 2.1–2.10. На рисунках позначено:

$g(t)$ – задавальне діяння;

$y(t)$ – вихідне діяння;

$\varepsilon(t)$ – помилка системи;

$K_1(D) - K_2(D)$ – оператори передачі ланок.

Номер варіанта визначається за правилом

$$N = k - 30 \cdot \mathrm{int}(k/30),$$

де k – дві останні цифри шифру (номера залікової книжки) студента;

$\mathrm{int}(*)$ – ціла частина числа.

Наприклад, $k = 47$. Тоді номер варіанта

$$N = 47 - 30 \cdot \mathrm{int}(47/30) = 47 - 30 \cdot \mathrm{int}(1,57) = 47 - 30 \cdot 1 = 17.$$

Таблиця 2.1 – Варіанти завдань до задачі 2

Номер варіанта	Номер рисунка	Оператори передачі					
		$K_1(D)$	$K_2(D)$	$K_3(D)$	$K_4(D)$	$K_5(D)$	$K_6(D)$
1	2	3	4	5	6	7	8
0	Рис. 2.10	$1+2D$	$\frac{1}{(1+0{,}05D)D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{3}{1+0{,}5D}$	3
1	Рис. 2.1	2	$\frac{8}{1+10D}$	0,5	$\frac{1}{D}$	$\frac{10}{D}$	1
2	Рис. 2.2	0,5	9	$\frac{11}{1+5D}$	$\frac{1}{D}$	$\frac{9}{D}$	$\frac{2{,}3}{D}$
3	Рис. 2.3	$\frac{5}{1+0{,}1D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{9}{1+0{,}1D}$	$\frac{4}{1+100D}$	1	3
4	Рис. 2. 4	$\frac{0{,}2}{D}$	0,1	$\frac{15D}{1+50D}$	$\frac{10}{1+0{,}1D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{9}{1+0{,}1D}$
5	Рис. 2.5	$\frac{2}{1+10D}$	$0{,}1(1+2D)$	$\frac{1}{D}$	0,1	$\frac{10}{D}$	$\frac{18}{1+0{,}2D}$
6	Рис. 2.6	$\frac{0{,}1(1+100D)}{D}$	$\frac{2}{D}$	$\frac{8}{D}$	$\frac{0{,}3}{1+0{,}2D}$	$\frac{0{,}5}{D}$	10

Продовження таблиці 2.1

1	2	3	4	5	6	7	8
7	Рис. 2.7	$\frac{4}{1+0{,}05D}$	$\frac{0{,}05}{D}$	$\frac{0{,}5}{1+10D}$	$\frac{0{,}1}{1+0{,}05D}$	50	$\frac{5}{D}$
8	Рис. 2.8	$\frac{10}{D}$	$\frac{18}{1+0{,}2D}$	2	$\frac{0{,}1}{1+25D}$	$\frac{0{,}1}{D}$	6
9	Рис. 2.9	$\frac{0{,}01}{D}$	2	30	$\frac{10}{D}$	$\frac{1}{1+0{,}1D}$	9
10	Рис. 2.10	$0{,}3(1+2D)$	$\frac{3}{D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{3}{1+0{,}5D}$	3
11	Рис. 2.1	0,1	$\frac{0{,}9}{1+50D}$	$\frac{30}{D}$	$\frac{7}{1+0{,}1D}$	$\frac{1}{D}$	10
12	Рис. 2.2	$\frac{50}{1+0{,}05D}$	$\frac{0{,}05}{1+10D}$	$\frac{0{,}5}{D}$	2	$\frac{4}{D}$	$\frac{25}{1+0{,}05D}$
13	Рис. 2.3	0,2	$\frac{2}{D}$	$\frac{99}{1+0{,}5D}$	$\frac{0{,}05}{D}$	$\frac{0{,}1}{1+50D}$	0,1
14	Рис. 2.4	$\frac{0{,}2}{D}$	0,1	$0{,}02(1+50D)$	$\frac{0{,}06}{(1+0{,}5D)D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{95}{1+0{,}5D}$

Продовження таблиці 2.1

1	2	3	4	5	6	7	8
15	Рис. 2.5	$\frac{1+2D}{1+0,2D}$	$\frac{1}{1+10D}$	$\frac{1}{D}$	0,1	$\frac{10}{D}$	$\frac{18}{1+0,2D}$
16	Рис. 2.6	$\frac{25}{1+100D}$	2	$\frac{18}{1+100D}$	20	$\frac{5}{D}$	10
17	Рис. 2.7	20	$\frac{5}{D}$	10	$\frac{25}{1+100D}$	10	$\frac{2}{D}$
18	Рис. 2.8	$\frac{1}{D}$	$\frac{18}{1+2D}$	$\frac{0,05}{D}$	$\frac{7}{1+10D}$	7	$0,7(1+0,2D)$
19	Рис. 2.9	$\frac{0,01}{D}$	2	5	$\frac{10}{D}$	$\frac{18}{1+0,2D}$	$\frac{1}{1+0,2D}$
20	Рис. 2.10	$\frac{9}{1+0,05D}$	$\frac{20}{1+100D}$	2	$\frac{8}{1+100D}$	$\frac{3}{1+0,5D}$	3
21	Рис. 2.1	2	$\frac{6}{1+20D}$	$\frac{5}{1+20D}$	$\frac{3}{D}$	7	$\frac{7}{1+5D}$
22	Рис. 2.2	$\frac{0,6}{1+0,05D}$	9	$\frac{11}{1+5D}$	$\frac{1}{D}$	$\frac{9}{D}$	$\frac{2}{D}$

Закінчення таблиці 2.1

1	2	3	4	5	6	7	8
23	Рис. 2.3	$\frac{0,3}{1+0,5D}$	$\frac{2}{D}$	$\frac{99}{1+0,5D}$	$\frac{0,05}{D}$	$\frac{0,1}{1+50D}$	0,03
24	Рис. 2.4	$\frac{0,2}{D}$	0,1	$\frac{9D}{1+50D}$	5	$\frac{10}{D}$	$\frac{9}{1+0,1D}$
25	Рис. 2.5	0,5	$\frac{3}{D}$	$\frac{3}{1+0,1D}$	3	2	$\frac{8}{1+10D}$
26	Рис. 2.6	$0,1(1+100D)$	$\frac{2}{D}$	$\frac{8}{D}$	$\frac{0,01}{D}$	$\frac{0,5}{D}$	10
27	Рис. 2.7	2	$\frac{0,1}{D}$	2	$\frac{3}{1+0,1D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{9}{1+0,1D}$
28	Рис. 2.8	$\frac{10}{D}$	$\frac{18}{1+0,2D}$	$\frac{10}{1+0,2D}$	$\frac{0,1}{1+25D}$	$\frac{0,1}{D}$	3
29	Рис. 2.9	$\frac{2}{1+2,5D}$	2	$\frac{19}{1+0,5D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{0,8}{1+0,02D}$	$8(1+0,1D)$

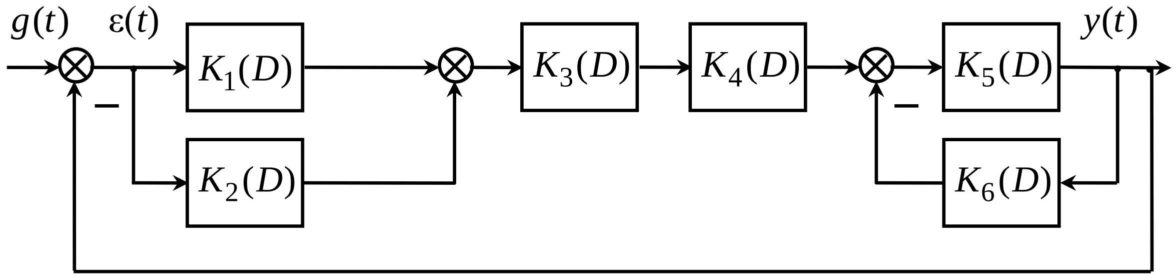


Рисунок 2.1

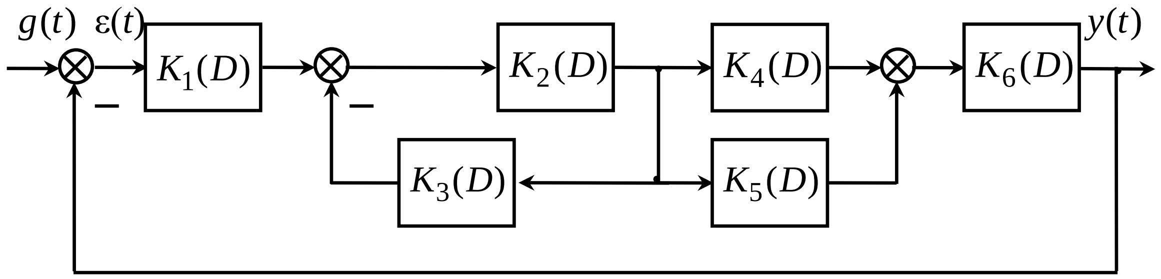


Рисунок 2.2

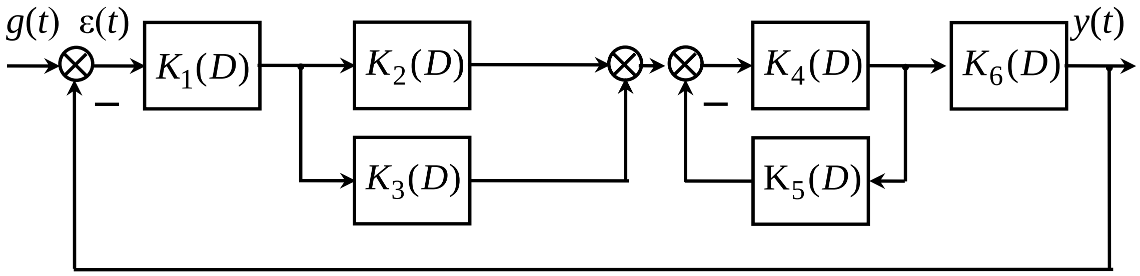


Рисунок 2.3

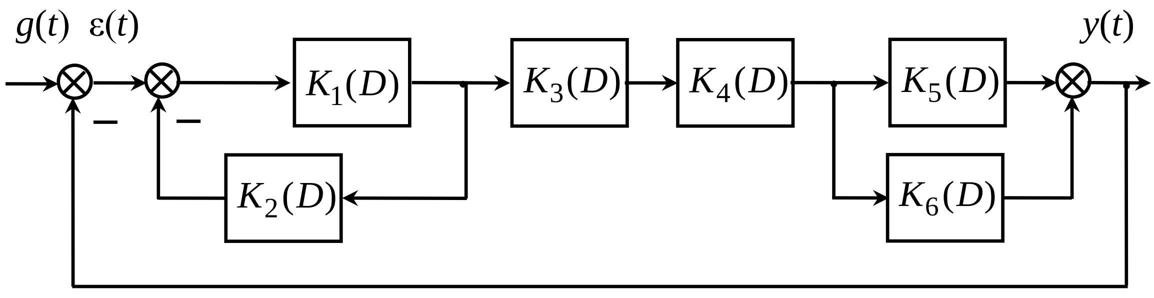


Рисунок 2.4

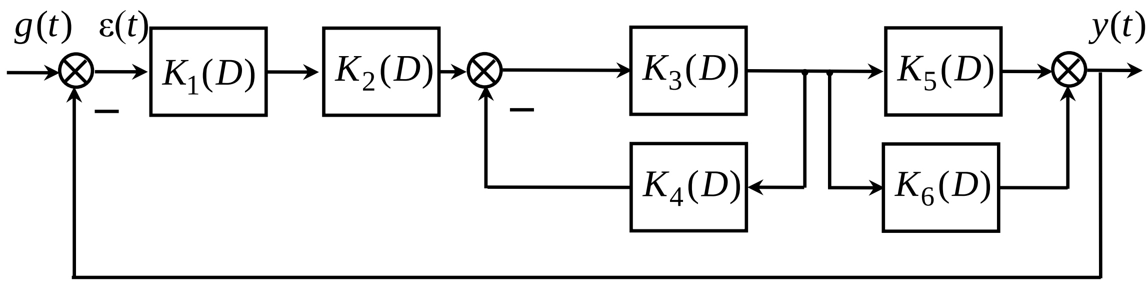


Рисунок 2.5

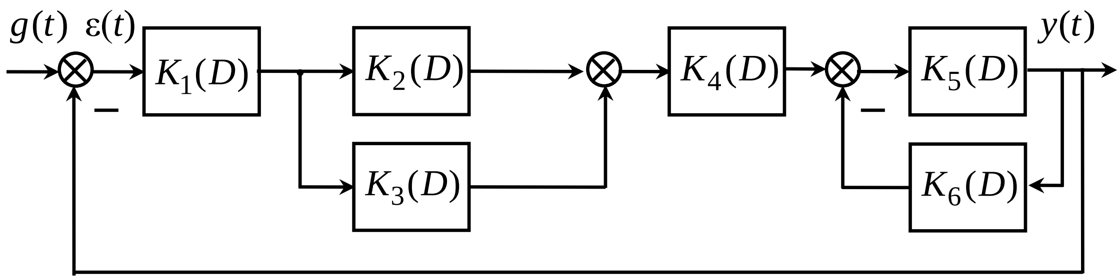


Рисунок 2.6

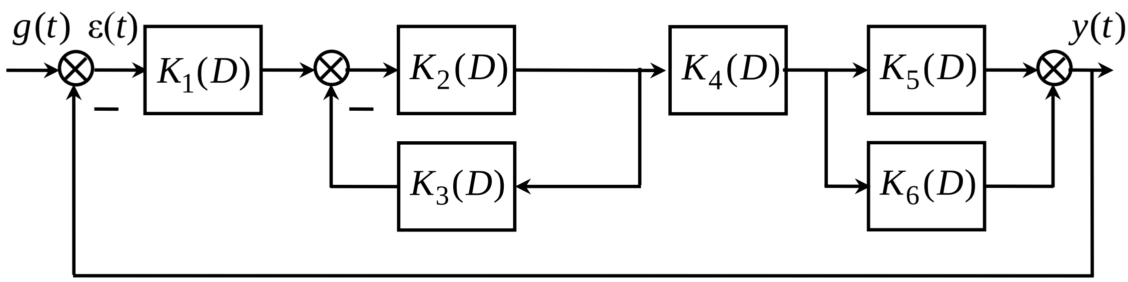


Рисунок 2.7

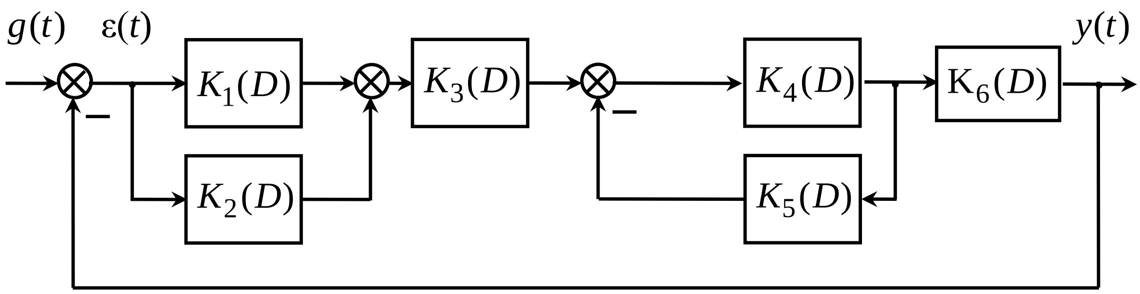


Рисунок 2.8

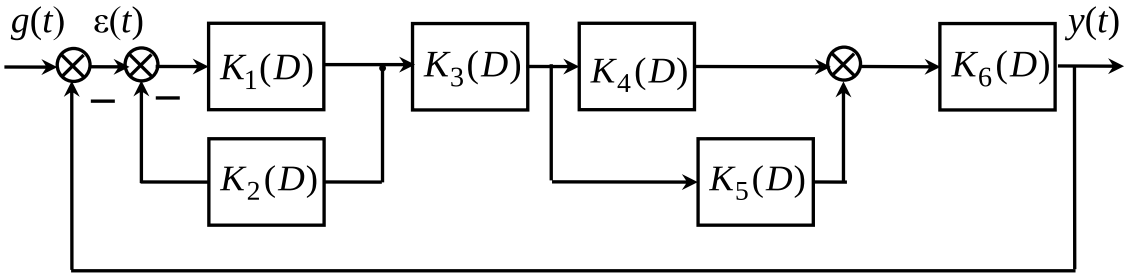


Рисунок 2.9

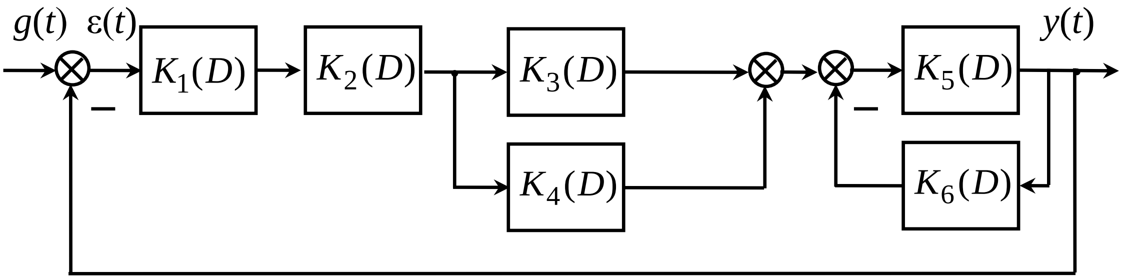


Рисунок 2.10

2.3 Методичні рекомендації до розв'язання завдання

2.3.1 Перетворення схеми математичної моделі системи до типового одноконтурного вигляду

Спрощена типова одноконтурна схема математичної моделі САК має вигляд, наведений на рисунку 2.11, де $R(D)$ – так званий ***оператор передачі розімкненої системи***, який визначає зв'язок між виходом схеми порівняння $\varepsilon(t)$ та вихідною величиною системи $y(t)$.

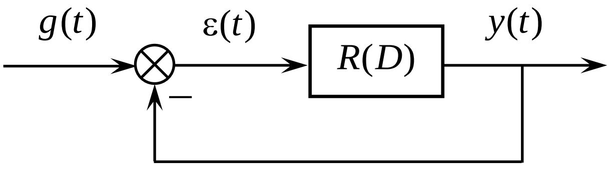


Рисунок 2.11

Для перетворення схеми математичної моделі САК до одноконтурного вигляду виконують (у тій чи іншій послідовності) такі операції:

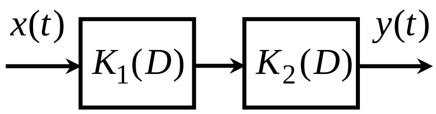
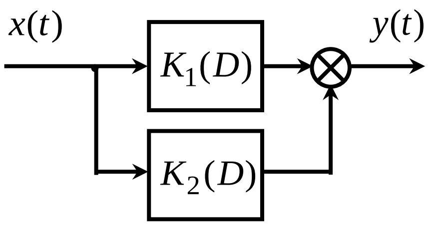
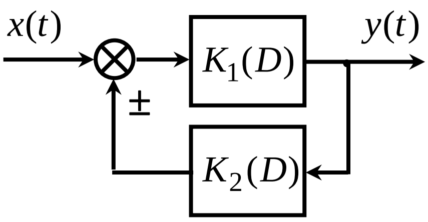
– заміну з'єднань ланок (послідовного, паралельного і охоплення зворотним зв'язком) еквівалентними ланками;

– зміну порядку підсумовування діянь;

– переміщення суматора або точки розгалуження з виходу ланки на вхід і зворотне переміщення.

Заміна з'єднань ланок еквівалентною ланкою виконується за правилами, що викладені у [1-5] та наведені в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 – Правила заміни з'єднань ланок

Види з'єднань	Схема моделі	Оператор передачі
Послідовне		$K(D)=K_1(D)K_2(D)$
Паралельне		$K(D)=K_1(D)+K_2(D)$
Зустрічно паралельне (охоплення зворотним зв'язком)	 "+" – позитивний зворотний зв'язок "–" – негативний зворотний зв'язок	$K(D)=\dfrac{K_1(D)}{1\mp K_1(D)K_2(D)}$ "–" – позитивний зворотний зв'язок "+" – негативний зворотний зв'язок

Правила зміни порядку підсумовування засновані на сполучній і переставній властивостях додавання (рисунок 2.12.)

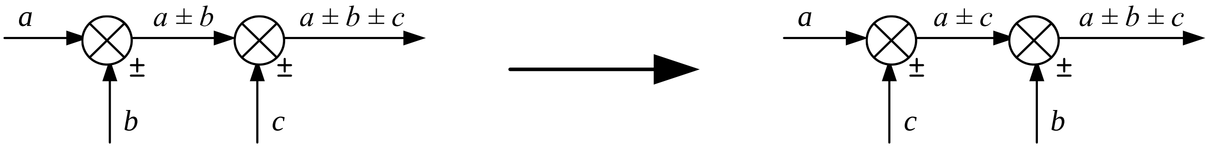


Рисунок 2.12 – Зміна порядку підсумовування

Правила переміщення суматора чи точки розгалуження засновані на принципі еквівалентності: незалежно від проведених переміщень вхідні і вихідні діяння перетвореної частини схеми повинні залишитися незмінними.

Приклад 1

Перетворити схему математичної моделі САК, що зображена на рисунку 2.13, до стандартного одноконтурного вигляду.

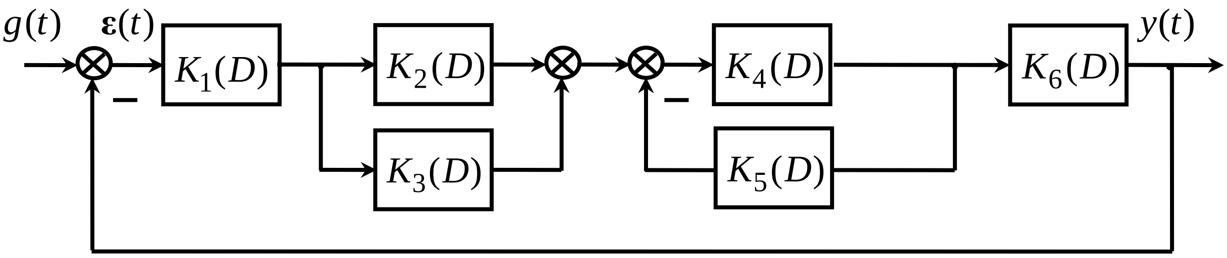


Рисунок 2.13

Розв'язання

Ланки $K_2(D)$ та $K_3(D)$ утворюють паралельне з'єднання, яке може бути замінено еквівалентною ланкою з оператором передачі, що визначається за правилом (таблиця 2.2)

$$K_{23}(D) = K_2(D) + K_3(D). \tag{2.1}$$

Ланка з оператором передачі $K_4(D)$ охоплена зворотним зв'язком через ланку $K_5(D)$. Таке з'єднання може бути замінено еквівалентною ланкою з оператором передачі, що визначається за правилом (таблиця 2.2)

$$K_{45}(D) = \frac{K_4(D)}{1 + K_4(D) K_5(D)}. \tag{2.2}$$

Після проведених перетворень схема математичної моделі САК набуває вигляду, що зображений на рисунку 2.14.

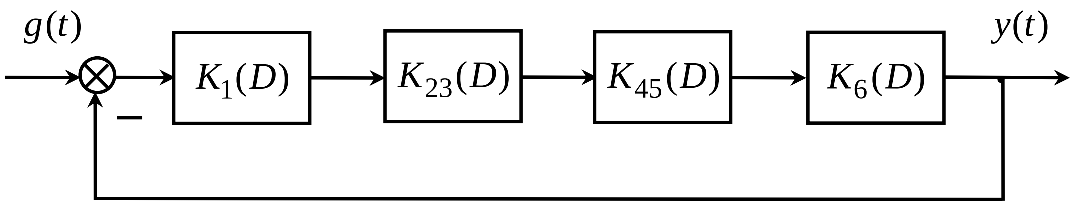


Рисунок 2.14

Для остаточного приведення отриманої схеми математичної моделі до стандартного одноконтурного вигляду необхідно замінити послідовне з'єднання ланок $K_1(D)$, $K_{23}(D)$, $K_{45}(D)$ та $K_6(D)$ еквівалентною ланкою з оператором передачі

$$R(D) = K_1(D) \cdot K_{23}(D) \cdot K_{45}(D) \cdot K_6(D). \tag{2.3}$$

Всі операції перетворення та розрахунків можна виконати із застосуванням пакету MATLAB [6-9]. Стислі відомості з методики користування пакетом MATLAB зведено у додаток Б.

Приклад 2

Система, що зображена на рисунку 2.13, має оператори передачі блоків:

$$K_1(D) = 5,\ K_2(D) = 2,\ K_3(D) = \frac{1}{D},\ \ K_4(D) = \frac{5}{D};$$

$$K_5(D) = 1,\quad K_6(D) = \frac{2}{10D + 1}.$$

Розрахувати передаточну функцію розімкненої системи за допомогою пакету MATLAB.

Розв'язання

На першому кроці необхідно ввести передаточні функції окремих блоків, на другому виконати розрахунок з’єднань, після чого розрахувати передаточну функцію розімкненої системи.

Скрипт з розрахунку наведено далі.

```
%Завдання 1
%Виконав ст. гр. … …
%Варіант …
%1 Передаточні функції блоків
k1=5;k2=2;k3=tf([1],[1 0]);
k4=tf([5],[1 0]);k5=1;k6=tf([2],[10 1]);
% 2 Передаточні функції з'єднань
k23=k2+k3;k45=feedback(k4,k5);
% 3 Передаточна функція розімкненої системи
R=k1*k23*k45*k6
%Результат виконання

Transfer function:
     100 s + 50
---------------------
10 s^3 + 51 s^2 + 5 s
```

2.3.2 Основні оператори передачі та рівняння системи

Визначення основних операторів передачі та складання рівнянь системи проводять після перетворення схеми математичної моделі системи до одноконтурного вигляду.

Основні рівняння САК встановлюють зв'язки між вхідними діяннями та реакціями системи на них. Для системи, яка має типову схему, наведену на рисунку 2.11, основні рівняння в операторній формі записуються у такому вигляді:

1) ***рівняння замкненої системи***, що зв'язує задавальне діяння $g(t)$ з вихідною величиною системи $y(t)$

$$y(t) = W(D) \cdot g(t), \tag{2.4}$$

де $W(D)$ – ***оператор передачі замкненої системи***;

2) ***рівняння помилки*** (похибки) системи, що зв'язує задавальне діяння $g(t)$ з помилкою системи $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = E(D) \cdot g(t), \tag{2.5}$$

де $E(D)$ – ***оператор передачі системи за динамічною помилкою*** – помилкою, що обумовлена неточністю відпрацювання задавального діяння.

Допоміжним є ***рівняння розімкненої системи***, яке встановлює зв'язок між помилкою системи та вихідною величиною

$$y(t) = R(D) \cdot \varepsilon(t). \tag{2.6}$$

Для отримання оператора передачі замкненої системи $W(D)$ необхідно перетворити схему на рисунку 2.11 за правилом заміни зустрічно паралельного з'єднання еквівалентною ланкою (таблиця 2.2, де $K_1(D)=R(D)$, $K_2(D)=1$)

$$W(D)=\frac{R(D)}{1+R(D)}. \qquad (2.7)$$

Для отримання оператора передачі системи за динамічною помилкою треба спочатку привести схему на рисунку 2.11 до вигляду, де вихідною величиною є динамічна помилка (рисунок 2.15).

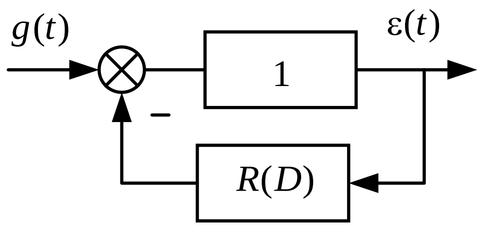


Рисунок 2.15

Користуючись правилом заміни зустрічно паралельного з'єднання еквівалентною ланкою (таблиця 2.2, де $K_1(D)=1$, $K_2(D)=R(D)$), отримуємо оператор передачі системи за динамічною помилкою

$$E(D)=\frac{1}{1+R(D)}. \qquad (2.8)$$

Нескладно встановити, що для основних операторів справедлива тотожність

$$W(D)+E(D)=1. \qquad (2.9)$$

Вона вказує, що сума вихідної величини та помилки дорівнює величині вхідного задавального діяння.

Для отримання основних операторів передачі застосовують таку методику.

1 Розраховують оператор передачі розімкненої системи та записують його у вигляді «двоповерхової» дробі

$$R(D)=\frac{B(D)}{A(D)}, \tag{2.10}$$

де $A(D)$ – ***характеристичний оператор розімкненої системи***;
$B(D)$ – ***характеристичний оператор задавального діяння***.

2 Розраховують ***характеристичний оператор замкненої системи***

$$C(D)=A(D)+B(D). \tag{2.11}$$

3 Розраховують оператор передачі замкненої системи

$$W(D)=\frac{B(D)}{C(D)}. \tag{2.12}$$

4 Розраховують оператор передачі замкненої системи за динамічною помилкою

$$E(D)=\frac{A(D)}{C(D)}. \tag{2.13}$$

Після того, як отримані оператори передачі, можна записати основні рівняння САК в операторній формі (2.4) – (2.5).

Приклад

Скласти основні рівняння САК, одноконтурна схема математичної моделі якої зображена на рисунку 2.11, якщо

$$R(D) = \frac{K}{D(TK+1)}.$$

Розв'язання

Запишемо характеристичні оператори системи

$$A(D) = D(TD+1); \quad B(D) = K; \quad C(D) = K + D(TD+1).$$

Тоді відповідно до виразів (2.12), (2.13) маємо

$$W(D) = \frac{K}{K + D(TD+1)}; \quad E(D) = \frac{D(TD+1)}{K + D(TD+1)}.$$

Підставляючи ці вирази у (2.4), (2.5), отримаємо основні рівняння в операторній формі:

– рівняння замкненої системи

$$y(t) = \frac{K}{K + D(TD+1)} g(t);$$

– рівняння помилки системи

$$\varepsilon(t) = \frac{D(TD+1)}{K + D(TD+1)} g(t).$$

Всі операції розрахунків передаточних функцій $R(p)$, $W(p)$, $E(p)$ можна виконати із застосуванням пакету MATLAB. На першому кроці необхідно розрахувати передаточну функцію розімкненої системи (п. 2.3.1, приклад 2), після чого підрахувати передаточні функції замкненої системи та помилки. Скрипт з розрахунку для передаточної функції розімкненої системи, наведеної у попередньому прикладі з чисельними значеннями параметрів $K = 10\,\text{с}^{-1}$, $T = 0{,}1\,\text{с}$, наведено далі.

```
%Завдання 2
%Виконав ст. гр. … …
%Варіант …
%1 Параметри
K=10;T=0.1;
%2 Передаточна функція розімкненої системи
R=tf([K],[T,1,0]);
%3 Передаточна функція замкненої системи
W=feedback(R,1)
%Результат виконання
Transfer function:
   10
----------------
0.1 s^2 + s + 10
%4 Передаточна функція динамічної помилки
E=feedback(1,R)
%Результат виконання
Transfer function:
 0.1 s^2 + s
----------------
0.1 s^2 + s + 10
```

3 Аналіз стійкості і якості функціонування системи автоматичного керування у перехідному режимі

3.1 Завдання

На рисунку (відповідно до варіанта) наведені:

а) логарифмічні частотні характеристики (Bode Diagram) розімкненої системи автоматичного керування (САК);

б) перехідна характеристика (Step Response).

Відомо, що характеристичне рівняння розімкненої системи $A(p)=0$ не має коренів у правій півплощині, але може мати нульові корені та корені на уявній осі.

Виконати таке:

1) обґрунтувати, чому система стійка за критерієм Найквіста;

2) визначити запаси стійкості;

3) провести аналіз якості функціонування системи автоматичного керування у перехідному режимі прямим методом;

4) оцінити якість функціонування САК у перехідному режимі частотним методом.

3.2 Варіанти завдань

Варіанти завдань наведено у додатку В. Номер варіанта визначається за правилом

$$N = k - 15 \cdot \mathrm{int}(k/15),$$

де k – дві останні цифри номера залікової книжки студента;

$\mathrm{int}(*)$ – ціла частина числа.

Наприклад, $k = 47$. Тоді номер варіанта

$$N = 47 - 15 \cdot \mathrm{int}(47/15) = 47 - 15 \cdot \mathrm{int}(3{,}17) = 47 - 15 \cdot 3 = 2.$$

3.3 Методичні рекомендації до розв’язання завдання

3.3.1 Аналіз стійкості

Стійкість характеризує властивість системи обмежено реагувати на збурення її початкового стану та (або) вхідних діянь. При відсутності стійкості невеликі збурення зовнішніх діянь або початкового стану можуть визвати появу значних змін характеру руху системи. Тому стійкість є необхідною властивістю будь-якої системи автоматичного керування – лише при її наявності вона здатна ефективно функціонувати у реальних умовах.

У лінійних САК внаслідок справедливості принципу суперпозиції зі стійкості (нестійкості) хоча б однієї реакції (руху) випливає стійкість (нестійкість) системи в цілому. Отже, стійкість лінійної САК є властивістю, яка залежить тільки від її структури і параметрів і не залежить від зовнішніх діянь та початкового стану [1-5].

На практиці найбільше застосування знайшли алгебраїчні та частотні критерії стійкості. Частотні критерії стійкості відносяться до групи графоаналітичних критеріїв. Основні відомості про частотні характеристики зведено у додаток Г.

Важливою особливістю ***частотного критерію стійкості Найквіста*** є те, що для дослідження стійкості замкненої САК застосовують частотні характеристики розімкненої системи. Найбільш просто будуються логарифмічні частотні характеристики – логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ) і логарифмічна фазочастотна характеристика (ЛФЧХ).

Для побудови логарифмічних частотних характеристик можна використовувати оператори **bode** та **margin** пакета Control Toolbox програмної оболонки MATLAB (додаток Б) [6-9].

Далі наведено логарифмічний частотний критерій стійкості Найквіста для випадку, коли характеристичне рівняння розімкненої системи $A(p) = 0$ не має коренів у правій півплощині, але може мати нульові корені та корені на уявній осі [1-3].

Теорема. ***Для стійкості замкненої системи необхідно і достатньо, щоб в усіх областях частот, де ЛАЧХ розімкненої системи є додатною, кількість переходів ЛФЧХ розімкненої системи через рівень –180°* *була парною.***

Приклад

ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи, що побудовані за допомогою функції **bode**, наведено на рисунку 3.1. Визначити, чи стійка система за критерієм Найквіста.

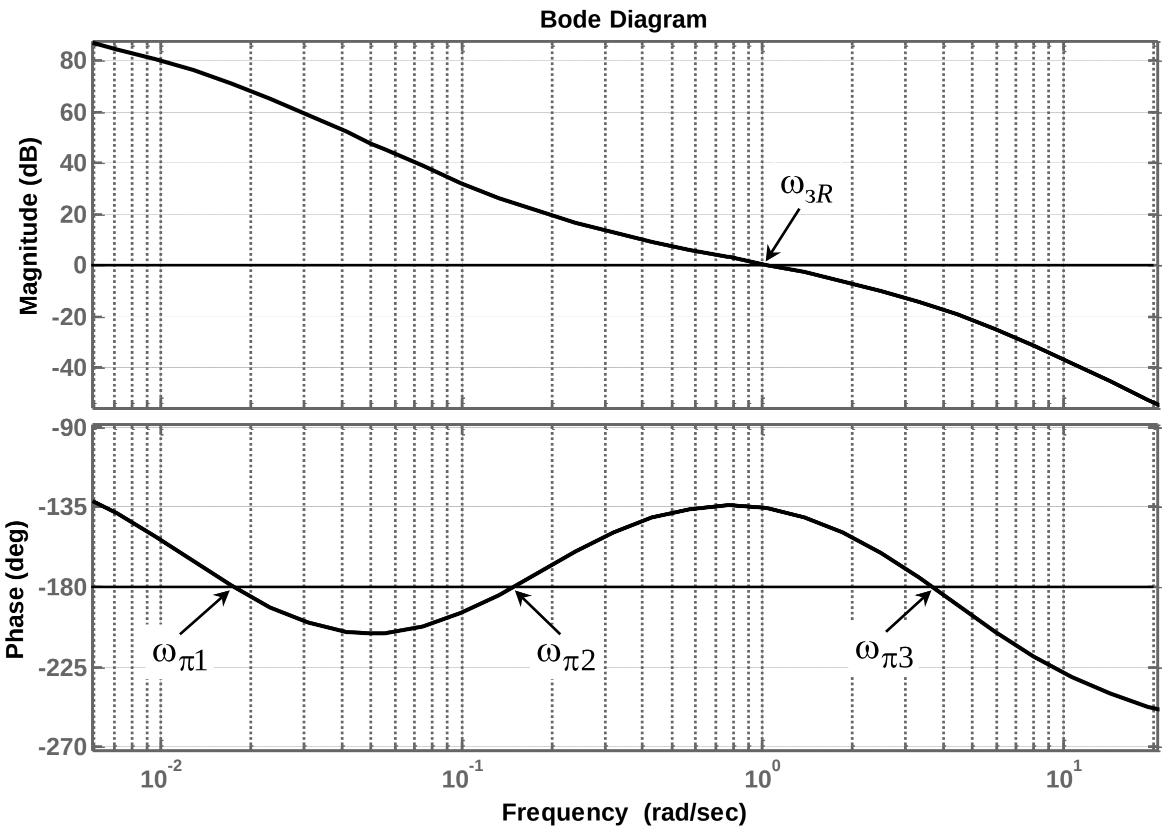


Рисунок 3.1

Розв'язання

Перевіримо, чи виконуються вимоги теореми Найквіста. Як бачимо з рисунку 3.1, ЛАЧХ розімкненої системи (Magnitude) є додатною на частотах від нуля до ***частоти зрізу*** $\omega_{зR}$ – частоти, на якій ЛАЧХ дорівнює нулю. На означеному інтервалі ЛФЧХ (Phase) має один від'ємний (на частоті $\omega_{\pi 1}$) та один додатний (на частоті $\omega_{\pi 2}$) переходи[2] через рівень $-180°$. Ще один перехід має місце на частоті $\omega_{\pi 3}$. Однак частота $\omega_{\pi 3}$ знаходиться поза межами області частот, де ЛАЧХ розімкненої системи є додатною ($\omega_{\pi 3} > \omega_{зR}$), і тому цей перехід не враховується.

Отже, за критерієм Найквіста замкнена система є стійкою.

3.3.2 Запаси стійкості

Ступінь віддалення параметрів системи від межі області стійкості визначають чисельними характеристиками, які називаються ***запасами стійкості***. У теорії автоматичного керування використовують два запаси стійкості: запас стійкості за підсиленням (амплітудою) та запас стійкості за фазою.

Запас стійкості за підсиленням (амплітудою) характеризує межі зміни коефіцієнта підсилення розімкненої САК, при яких замкнена система виходить на межі області стійкості.

За логарифмічними частотними характеристиками запаси стійкості за підсиленням (у децибелах) дорівнюють відстані від ЛАЧХ розімкненої системи до осі абсцис на частотах $\omega_{\pi i}$ переходів через рівень $-180°$, сусідніх до частоти зрізу $\omega_{зR}$

---

[2] Перехід називають додатним, якщо ЛФЧХ при збільшенні частоти перетинає рівень -180° знизу угору, і від'ємним, якщо ЛФЧХ при збільшенні частоти перетинає рівень -180° згори вниз.

$$L_{зi} = \left| L_R(\omega_{\pi i}) \right|. \tag{3.1}$$

Залежно від того, як розміщені частоти переходів $\omega_{\pi i}$, можливі такі варіанти запасів стійкості за підсиленням:

1) переходи відсутні; в цьому випадку запас стійкості за підсиленням дорівнює нескінченості: $L_з = \infty$ (Gm = inf). Така система називається абсолютно стійкою;

2) частота переходу менша частоти зрізу; система втрачає стійкість при зменшенні коефіцієнта підсилення на $L_з$ дБ;

3) частота переходу більша частоти зрізу; система втрачає стійкість при збільшенні коефіцієнта підсилення на $L_з$ дБ;

4) є дві частоти переходу – менше та більше частоти зрізу; система втрачає стійкість як при зменшенні, так і при збільшенні коефіцієнта підсилення. Така система називається умовно стійкою.

Запас стійкості за фазою характеризує максимальну припустиму деформацію ФЧХ розімкненої САК (при незмінному значенні її частоти зрізу), при якій замкнена система вийде на межу області стійкості.

За логарифмічними частотними характеристиками запас стійкості за фазою визначається як величина перевищення ЛФЧХ над рівнем –180° на частоті $\omega_{зR}$

$$\varphi_з = 180^\circ - \left| \varphi_R(\omega_{зR}) \right|, \tag{3.2}$$

де $\varphi_R(\omega_{зR})$ – значення ЛФЧХ розімкненої САК на частоті зрізу розімкненої системи.

З досвіду експлуатації встановлені мінімальні вимоги до запасів стійкості:

– за підсиленням $L_{з.\min} \ge 6$ дБ;

– за фазою $\varphi_{з.\min} \ge 30^\circ$.

Примітки

На графіках, побудованих в пакеті MATLAB за допомогою оператора **margin (R)**, є таки особливості [6-9]:

– запас за підсиленням позначається як Gm, а за фазою – як Pm; в дужках указується частота, на якій визначено відповідний запас;

– якщо частота переходу менша частоти зрізу, запас за підсиленням відображується від'ємною величиною (Gm<0);

– для умовно стійких систем відображується лише один запас стійкості за підсиленням, менший за абсолютною величною;

– в нестійких системах запас за фазою від'ємний.

Приклад

ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи, отримані за допомогою оператора **margin** пакету MATLAB, наведено на рисунку 3.2. Визначити запаси стійкості за підсиленням та за фазою.

Розв'язання. САК, ЛАЧХ та ЛФЧХ якої зображено на рисунку 3.2, має два запаси стійкості за амплітудою (підсиленням).

Запас $L_{з2}$ визначається на частоті $\omega_{\pi 2} = 0{,}155$ рад/с і характеризує можливе зменшення коефіцієнта підсилення розімкненої САК. Величина запасу стійкості $L_{з2} = 18{,}6$ дБ (у верхньому рядку позначено як $\mathrm{Gm} = -18.6$ dB).

Запас $L_{з3}$ визначається на частоті $\omega_{\pi 3} = 100$ рад/с і характеризує можливе збільшення коефіцієнта підсилення розімкненої САК. Величина запасу стійкості $L_{з3} = 50$ дБ (у верхньому рядку він не відображений!).

Запас стійкості за фазою визначається на частоті зрізу $\omega_{зR} = 0{,}563$ рад/с. Запас стійкості за фазою дорівнює $\varphi_з = 54{,}3$ град (у верхньому рядку позначено як Pm=54.3 deg).

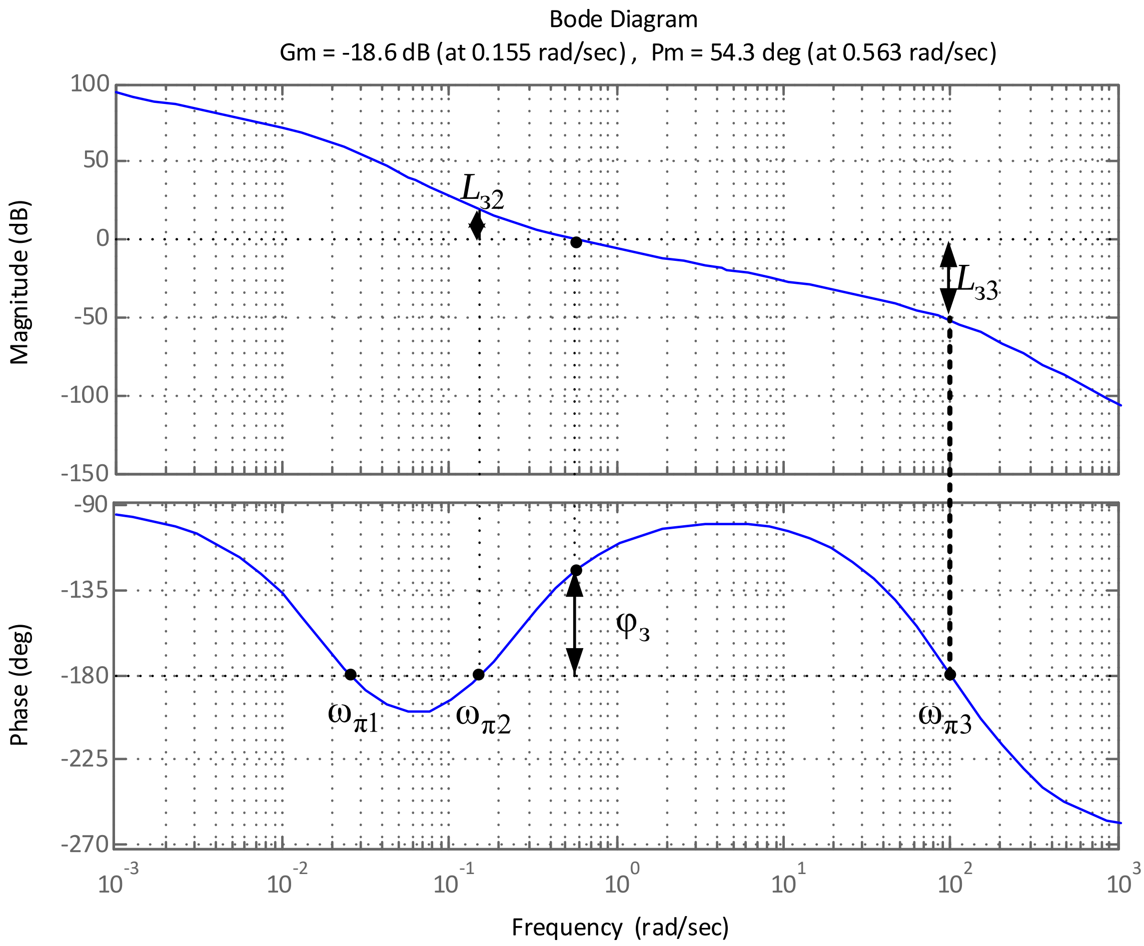


Рисунок 3.2

3.3.3 Аналіз якості функціонування САК в перехідному режимі прямим методом

Перехідним називається режим, що виникає у системі безпосередньо після прикладення до неї вхідного діяння. Для аналізу якості функціонування САК в перехідному режимі прямими методами розраховують ***перехідну характеристику*** $h(t)$, яка є реакцією системи на вхідне діяння у вигляді одиничної функції при нульових початкових умовах. У стійких САК перехідна характеристика з часом прагне до постійного усталеного значення $h_{уст}$.

Типовий графік перехідної характеристики САК наведено на рисунку 3.3.

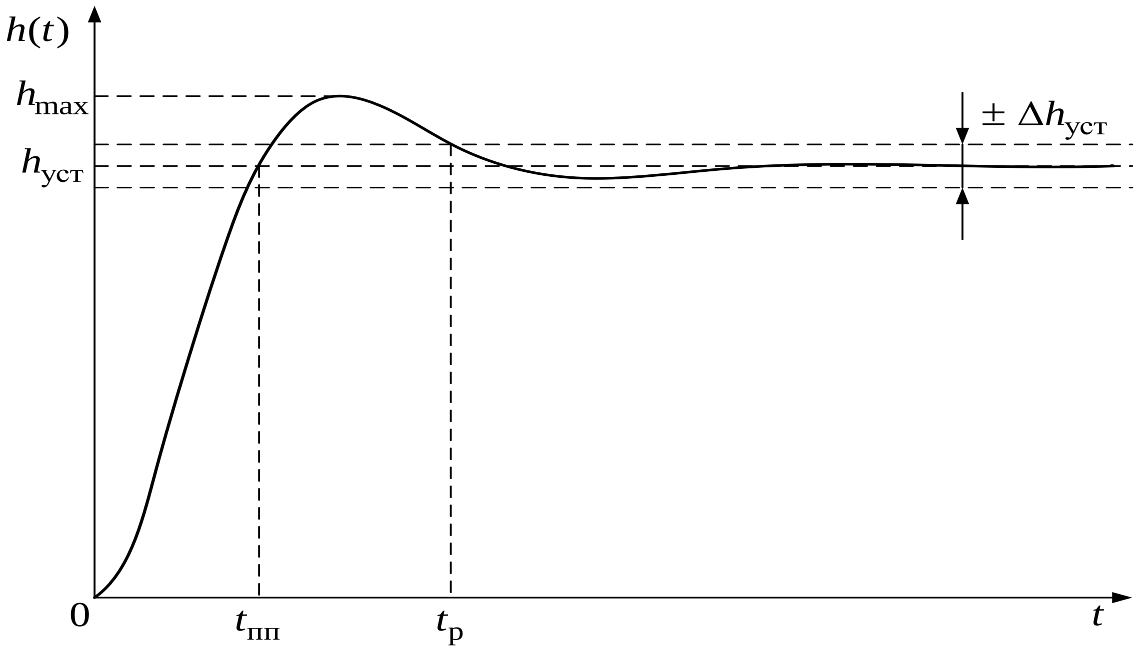


Рисунок 3.3

Основним показником якості функціонування САК в перехідному режимі є час його існування, який називається ***часом регулювання*** $t_р$. За графіком перехідної характеристики він визначається як інтервал часу, після закінчення якого вихідна величина залишається близькою до усталеного значення із заданою точністю, тобто для всіх $t > t_р$ виконується умова

$$0{,}95 < \frac{h(t)}{h_{уст}} < 1{,}05. \qquad (3.3)$$

Якщо перехідна характеристика має коливання відносно усталеного значення, якість функціонування САК, крім часу регулювання, прийнято оцінювати за такими показниками (рисунок 3.3):

1) величина ***перерегулювання*** σ – максимальне відхилення перехідної характеристики від усталеного значення, яке виражають у відсотках

$$\sigma[\%] = \frac{h_{\max} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100; \qquad (3.4)$$

2) ***час першого погодження*** $t_{\text{пп}}$ – інтервал часу від моменту прикладення на вхід системи східчастого діяння у вигляді одиничної функції до моменту, коли перехідна характеристика вперше досягне свого усталеного значення;

3) ***кількість коливань*** $N_{\text{р}}$ – кількість максимумів перехідної характеристики на інтервалі часу регулювання.

Найбільш важливими показниками якості САК в перехідному режимі є час регулювання $t_{\text{р}}$ і величина перерегулювання σ. Перша величина характеризує швидкодію системи, а друга – ступінь її коливальності.

Дослідження прямими методами суттєво полегшується при застосуванні для розрахунків пакетів прикладних програм (ППП), які призначені для розв’язання диференціальних рівнянь або для математичного моделювання динамічних систем.

У пакеті аналізу і синтезу систем керування Control System Toolbox програмної оболонки MATLAB для розрахунку перехідної характеристики застосовується оператор **step(W)**, де W – ідентифікатор передаточної функції замкненої системи *W*(*p*) (додаток Б). На графіку натисканням правої кнопки «миші» відзначаються вимірювані параметри.

Приклад

Графік перехідної характеристики САК, розрахований у пакеті MATLAB, наведено на рисунку 3.4. Визначити показники якості САК в перехідному режимі.

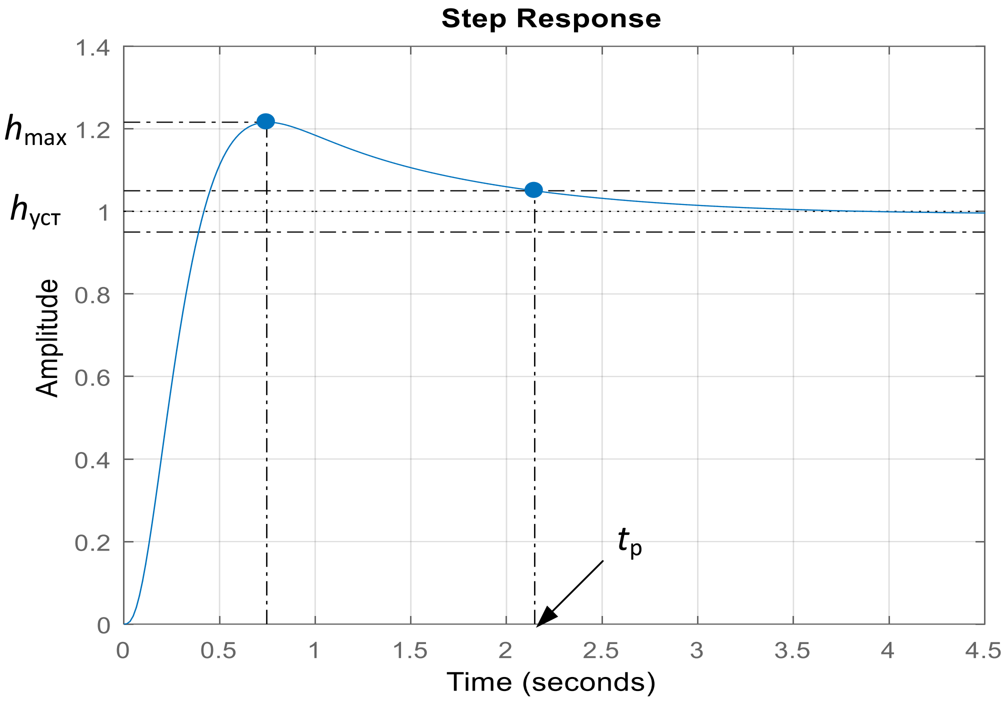


Рисунок 3.4

Розв'язання

Час регулювання визначаємо за моментом, після якого вихідна величина залишається в межах рівнів від 0,95 до 1,05 (штрихпунктирні лінії) відносно усталеного значення $h_{уст} = 1$: $t_р = 2,2$ с.

Для розрахунку величини перерегулювання знаходимо максимальний викид $h_{max} = 1,21$, після чого за формулою (3.4) визначаємо величину перерегулювання

$$\sigma = (1,21 - 1) \cdot 100 = 21\,\%.$$

3.3.4 Оцінка якості функціонування САК у перехідному режимі частотним методом

Поряд з прямими застосовуються і непрямі методи, які дозволяють судити про якість функціонування САК в перехідному режимі без отримання графіка її перехідної характеристики.

Серед непрямих методів оцінювання показників якості САК у перехідному режимі виділимо частотні методи. Вони базуються на взаємно однозначному зв'язку між перехідною характеристикою та частотними характеристиками системи [2-4].

На підставі аналізу зв'язку між перехідною і частотними характеристиками САК встановлено загальні вимоги до ходу частотних характеристик САК, виконання яких гарантує прийнятну якість перехідного процесу [1].

САК буде мати задовільні показники якості функціонування в перехідному режимі, якщо її логарифмічні частотні характеристики задовольняють таким вимогам:

1) на частоті зрізу розімкненої системи $\omega_{зR}$ і в області частот, що примикають до неї, ЛАЧХ проходить з нахилом мінус 20 дБ/дек, причому загальна довжина відрізка ЛАЧХ з таким нахилом не менша однієї декади;

2) значення запасів стійкості за підсиленням (амплітудою) $L_з$ і за фазою $\varphi_з$ знаходяться у таких межах:

$$L_з \geq 10 \text{ дБ}, \quad 45° \leq \varphi_з \leq 75°.$$

За графіками ЛАЧХ, побудованими у пакеті MATLAB, достатньо складно перевірити виконання першої вимоги. Однак, з урахуванням того, що перша та друга вимоги взаємно пов'язані, достатньо перевірити виконання лише другої вимоги.

Практика аналізу і синтезу САК свідчить про те, що при виконанні вказаних вимог показники якості САК в перехідному режимі можуть бути з достатньою для інженерної практики точністю оцінені за такими евристичними формулами [1]

$$t_{\text{р}} \cong \frac{5...9}{\omega_{зR}} \cong \frac{385}{\omega_{зR} \cdot \varphi_з^{\circ}}; \qquad \sigma \cong \begin{cases} (73 - \varphi_з{}^{\circ})\,\%, & \text{якщо } \varphi_з < 73°; \\ 0, & \text{якщо } \varphi_з \geq 73°. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Як випливає з формул (3.5), час регулювання обернено пропорційний частоті зрізу розімкненої системи $\omega_{зR}$, а величина перерегулювання σ зростає при зменшенні запасу стійкості за фазою.

Приклад

Для системи, розглянутої у попередньому прикладі, оцінити показники якості в перехідному режимі за графіками частотних характеристик розімкненої САК (рисунок 3.5). Порівняти отримані результати.

Розв'язання

Система має такі запаси стійкості:

– за підсиленням (Gm) $L_з = 19,2$ дБ;

– за фазою (Pm) $\varphi_з = 54,8°$.

Частота зрізу $\omega_{зR} = 3,91$ рад/с.

Отримані запаси свідчать про те, що система буде мати задовільну якість в перехідному режимі. Орієнтовні значення показників якості:

– час регулювання

$$t_{\text{р}} = \frac{5...9}{3,91} = 1,28...2,3 \text{ с};$$

– величина перерегулювання

$$\sigma \cong 73 - 54,8 = 18,2\,\%.$$

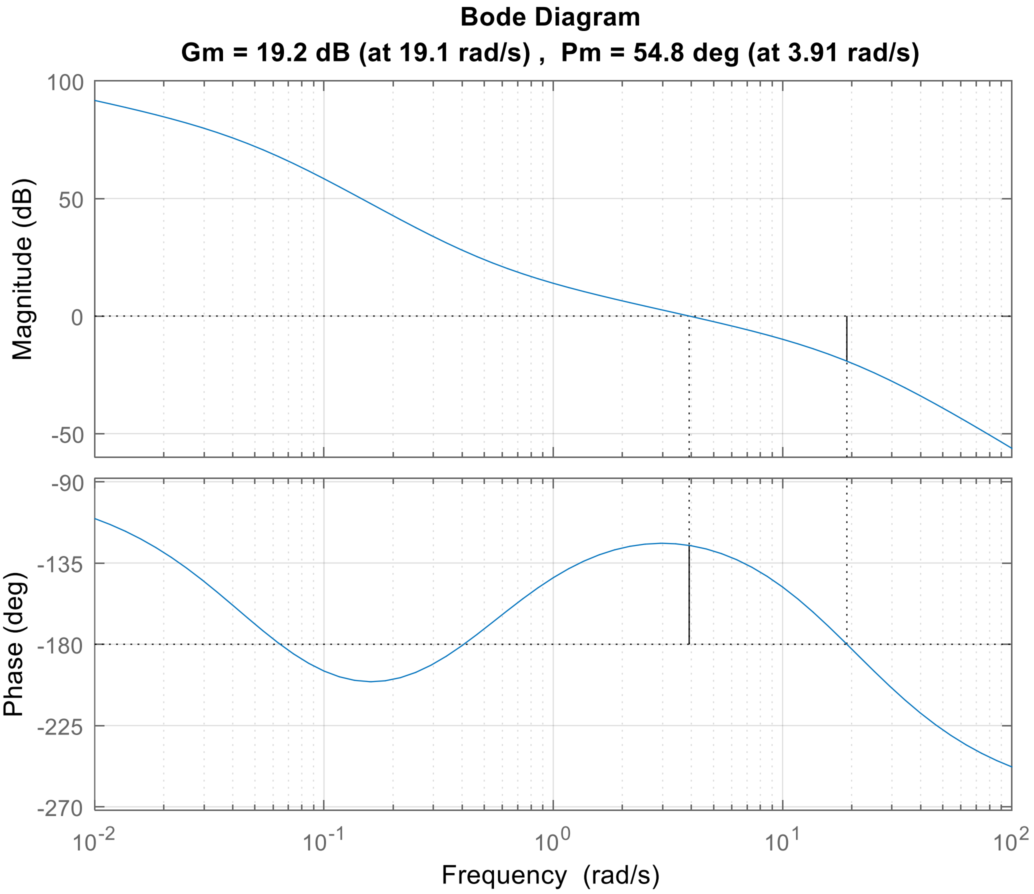


Рисунок 3.5

Отримані параметри є достатньо близькими до тих, що були розраховані прямим методом: $t_p = 2,2$ с, $\sigma = 21\,\%$.

Список літератури

1 Хісматулін В. Ш., Панченко С. В. Теорія автоматичного керування. Ч. І. Теорія лінійних неперервних систем автоматичного керування: підручник для вузів. Харків: УкрДАЗТ, 2008. 239 с.

2 Александров Є. Є. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами. Т. 1. Теорія автоматичного керування / Є. Є. Александров, Є. П. Козлов, Б. І. Кузнецов. Харків: НТУ «ХПІ», 2002. 490 с.

3 Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування: підручник. Київ: Либідь, 2007. 656 с.

4 Теорія систем керування: підручник / В. І. Корнієнко, О. Ю. Гусєв, О. В. Герасіна, В. П. Щокін. Мін. освіти і науки України. Дніпро: НГУ, 2017. 497 с.

5 Методи сучасної теорії управління: підручник / А. П. Ладанюк, Н. М. Луцька, В. Д. Кишенько, Л. О. Власенко. Київ: Вид-во Ліра-К, 2018. 368 с.

6 Paluszek M. Practical MATLAB. Deep learning. M. Paluszek, S. Thomas. Apress, 2020. 252 p.

7 Моделювання систем у середовищі MATLAB / С. С. Забара, О. О. Гагарін, І. М. Кузьменко, Ю. Д. Щербашин. Київ, 2011. 137 с.

8 Гурко О.Г., Єрьоменко І. Ф. Аналіз і синтез систем автоматичного керування в MATLAB: навч. посіб. Харків: ХНАДУ, 2011. 286 с.

9 Гоблик Н. М., Гоблик В. В. MATLAB в інженерних розрахунках: Комп'ютерний практикум. Львів: Львівська політехніка, 2020. 192 с.

Додаток А

Перетворення Лапласа

Таблиця А.1 – Основні властивості перетворення Лапласа

Назва	Оригінал	Зображення
Лінійність	$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$	$c_1X_1(p)+c_2X_2(p)$
Диференціювання оригіналу	$x'(t)$	$pX(p)-x(0)$
Інтегрування оригіналу	$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{p}X(p)$
Запізнювання оригіналу	$x(t-\tau),\ \tau>0$	$e^{-\tau p}X(p)$
Згортка оригіналів	$\int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$	$X_1(p)X_2(p)$
Кінцеве значення оригіналу	$\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$	$\lim\limits_{p\to 0} pX(p)$
Початкове значення оригіналу	$\lim\limits_{t\to 0} x(t)$	$\lim\limits_{p\to\infty} pX(p)$

Таблиця А.2 – Перетворення Лапласа елементарних функцій

$x(t)$	$X(p)$	$x(t)$	$X(p)$
$\delta(t)$	1	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\delta(t)$	$\frac{1}{p}$	$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
t^2	$\frac{1}{p^3}$	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

Додаток Б

Деякі функції пакета CONTROL TOOLBOX програмної оболонки MATLAB

Б.1 Задавання передаточної функції динамічної ланки

Для задавання передаточної функції

$$K\left(p\right)=\frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0}{a_k p^k + a_{k-1}p^{k-1} + ... + a_1 p + a_0},\ k \geq m \qquad (\text{Б}.1)$$

у командному вікні (Command Window) набирають

$$\mathbf{K = tf}\left(\left[\mathbf{b_m\ b_{m\text{-}1} ...\ b_1\ b_0}\right],\left[\mathbf{a_k\ a_{k\text{-}1} ...\ a_1\ a_0}\right]\right) \qquad (\text{Б}.2)$$

де $\mathbf{b_i}$ та $\mathbf{a_r}$ – коефіцієнти многочленів, що стоять у чисельнику та знаменнику передаточної функції $K(p)$, які набирають через пропуск, починаючи з більших номерів.

Якщо у кінці набору не поставлено знак "**;**", то після введення функції **tf(·)** командою **Enter** у командному вікні з'являється набрана передаточна функція (у пакеті MATLAB змінна Лапласа p відображається літерою s).

Приклад. Необхідно задати передаточну функцію ланки

$$K_1\left(p\right)=\frac{10}{0{,}5p+1}.$$

У командному вікні (Command Window) набираємо

```
>> k1=tf([10],[0.5 1])
```

Після натискання на клавишу **Enter** отримуємо

```
Transfer function:
     10
---------
0.5 s + 1
```

Б.2 Задавання передаточної функції з'єднань динамічних ланок

Для задавання передаточної функції з'єднань ланок необхідно спочатку задати передаточні функції окремих ланок (п. Б.1), після чого записати вираз для з'єднань відповідно до таких правил (види з'єднань у таблиці 2.2):

– послідовне з'єднання ланок

$$\mathbf{K = K1 * K2}$$

– паралельне з'єднання ланок

$$\mathbf{K = K1 + K2}$$

– зустрічно паралельне з'єднання ланок

$$\mathbf{K = K1/(1 \mp K1 * K2)}$$

де знак "–" записується при позитивному, а "+" при негативному зворотному зв’язку.

Крім того, при негативному зворотному зв’язку є спеціальна функція

K = feedback(K1,K2)

яка дає кращий результат, тому що при її виконанні здійснюється мінімізація многочленів чисельника та знаменника.

Приклад. Необхідно розрахувати передаточну функцію ланки, створеної у вигляді охоплення ланки з передаточною функцією

$$K_1(p) = \frac{10}{0{,}5p + 1}$$

негативним зворотним зв’язком через ланку

$$K_2(p) = \frac{0{,}5p}{0{,}1p + 1}.$$

У командному вікні набираємо

```
>> k1=tf([10],[0.5 1]);k2=tf([0.5 0],[0.1 1]);k=feedback(k1,k2)
```

Після натискання на клавішу **Enter** отримуємо

```
Transfer function:
        s + 10
  --------------------
 0.05 s^2 + 5.6 s + 1
```

Як бачимо, результат записаний зі скороченням загального множника $(0{,}5p + 1)$.

Б.3 Побудова перехідної характеристик динамічної системи

Для побудови перехідної характеристик у командному вікні набирають

step(K)

де **K** – передаточна функція, яка задається за допомогою функції **tf(·)** (п. Б.1).

Після введення оператора **step** з'являється вікно Figure 1, у якому побудована перехідна характеристика системи.

Для нанесення масштабної сітки необхідно після запису відповідної функції додати у командний рядок запис **grid** (наприклад: **step(K);grid**).

Далі можлива обробка графіка (зміна кольору, типу та ширини ліній, введення позначень, надписів та ін.) та передача його у зовнішні об'єкти (друк, розміщення у документах Word, Excel, Visio). Для цього застосовують кнопки командного рядку графіка.

Для визначення параметрів характеристики необхідно підвести курсор до необхідної точки на графіку, натиснути ліву кнопку «миші» та утримати її більше 1 с. Крім того, після натискання правої кнопки на графіку з'являється вікно, у якому можна задати виведення на графік характеристик та їх чисельних значень:

Peak Response – максимум перехідної характеристики **Peak Amplitude** та величина перерегулювання **Overshoot %;**

Setting Time – час регулювання; за умовчанням він вимірюється при межах 2 %; для встановлення меж 5 % необхідно додатково натиснути **Propeties Options**, після чого задати межі **Show setting time within 5 %**, а для часу першого погодження **Rise time – Show rise time from 0 to 100 %;**

Steady State – усталене значення $h_{уст}$.

Для більш детального огляду фрагмента необхідно активізувати команду $\oplus$ (**Zoom In**), після чого, натиснувши ліву кнопку «миші», виділити прямокутником досліджуваний фрагмент (увага: для визначення параметрів характеристики необхідно спочатку скасувати команду $\oplus$).

Для спостереження одночасно характеристик декількох систем, встановлення інтервалу часу спостереження, у командному вікні набирають

step(K1,K2,…,T)

де **K1, K2, …** – ідентифікатори операторів систем;

T – бажана тривалість характеристики у секундах.

Для перенесення отриманої характеристики у інший документ (Word, Visio) необхідно у командному рядку вікна **Figure** відкрити меню **Edit** та активізувати опцію **Copy Figure**. Тепер необхідно ввести копію у виділене місце документа Word натисканням кнопки «Вставити».

Приклад. Розрахувати перехідні характеристики ланки

$$K_1(p) = \frac{10}{0,5p+1}$$

до та після охоплення її негативним зворотним зв’язком через ланку

$$K_2(p) = \frac{0,5p}{0,1p+1}.$$

У командному вікні набираємо

```
>> k1=tf([10],[0.5 1]);k2=tf([0.5 0],[0.1 1]);k=feedback(k1,k2);
>> step(k,k1);grid
```

Після натискання на клавішу **Enter** отримуємо графік Figure 1, наведений на рисунку Б.1.

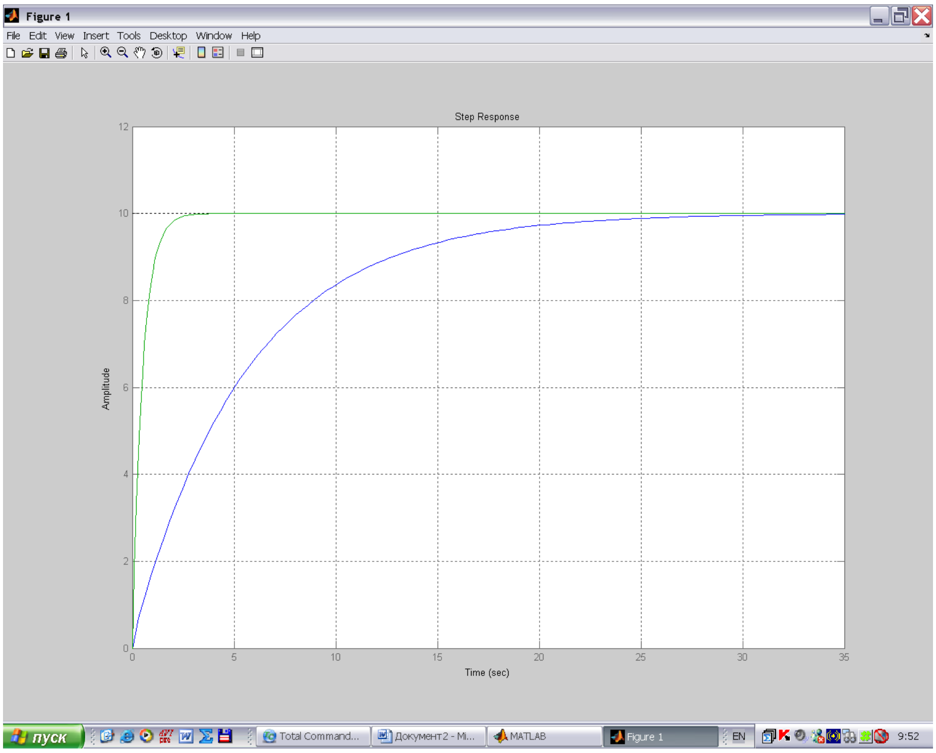


Рисунок Б.1

Далі можлива обробка графіка (зміна кольору, типу та ширини ліній, введення позначень, надписів та ін.) та передача його у зовнішні об'єкти (друк, розміщення у документах Word, Excel, Visio). Для цього застосовують кнопки командного рядку графіка. Наприклад, після визначення часу регулювання, зміни кольору, типу і ширини ліній та перенесення у документ Word графік набуває вигляду, показаного на рисунку Б.2.

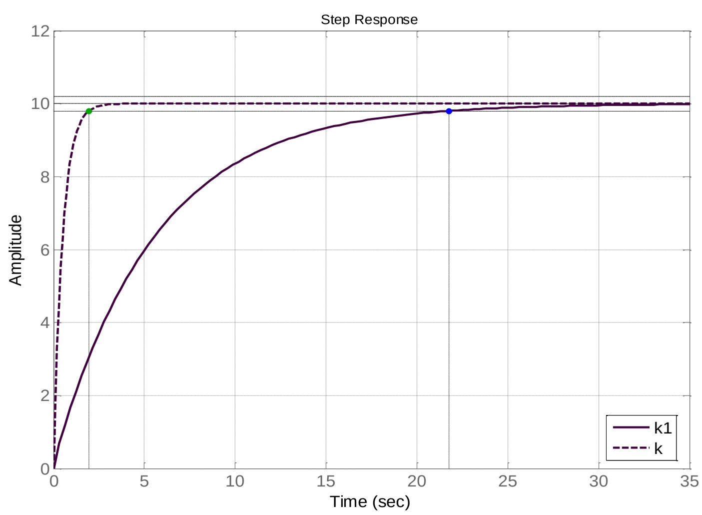


Рисунок Б.2

Б.4 Побудова логарифмічних частотних характеристик

Для побудови логарифмічних частотних характеристик системи у командному вікні набирають

$$\mathbf{bode}(\mathbf{K}),$$

де **K** – передаточна функція досліджуваної системи, яка задана за допомогою функції **tf(·)**.

Після введення функції **bode** з'являється вікно Figure 1, у якому побудовані ЛАЧХ та ЛФЧХ системи, позначені відповідно Magnitude та Phase. На графіках можна наносити масштабну сітку, виділяти фрагмент та проводити вимірювання, а також будувати графіки декількох систем за розглянутими раніше правилами.

При необхідності побудови графіка у заданій смузі частот $f_{\min},\ f_{\max}$ її вказують після функції через кому

$$\mathbf{bode}\left(\mathbf{K},\mathbf{f_{min}},\mathbf{f_{max}}\right).$$

Для побудови логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи з метою вимірювання запасів стійкості у командному вікні застосовують спеціальний оператор

$$\mathbf{margin}(\mathbf{K}),$$

де **K** – передаточна функція розімкненої системи, яка задана за допомогою функції **tf(·)**. В цьому випадку на графіках автоматично відзначаються та у верхньому рядку записуються значення запасу стійкості за підсиленням $L_з$

у децибелах та за фазою $\varphi_з$ у градусах (у MATLAB вони позначуються відповідно Gm та Pm), а також частот, на яких вони виміряні.

Приклад. Розрахувати логарифмічні частотні характеристики ланки

$$K_1(p) = \frac{10}{0,5p+1}$$

до та після охоплення її негативним зворотним зв'язком через ланку

$$K_2(p) = \frac{0,5p}{0,1p+1}.$$

У командному вікні набираємо

```
>> k1=tf([10],[0.5 1]);k2=tf([0.5 0],[0.1 1]);k=feedback(k1,k2);
>> bode(k,k1);grid
```

Після натискання на клавішу **Enter** отримуємо графік Figure 1, наведений після обробки на рисунку Б.3.

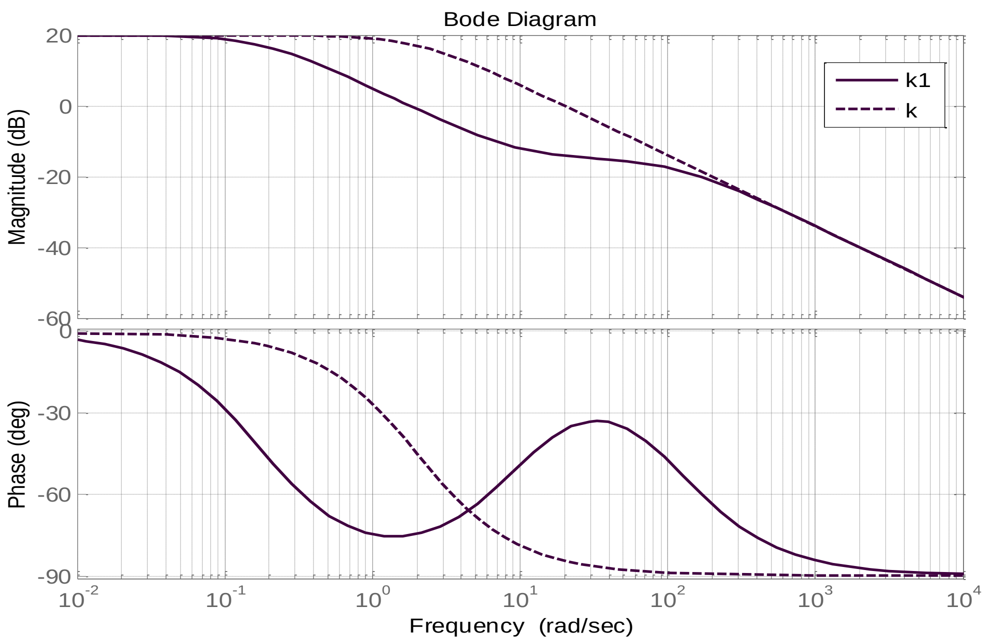
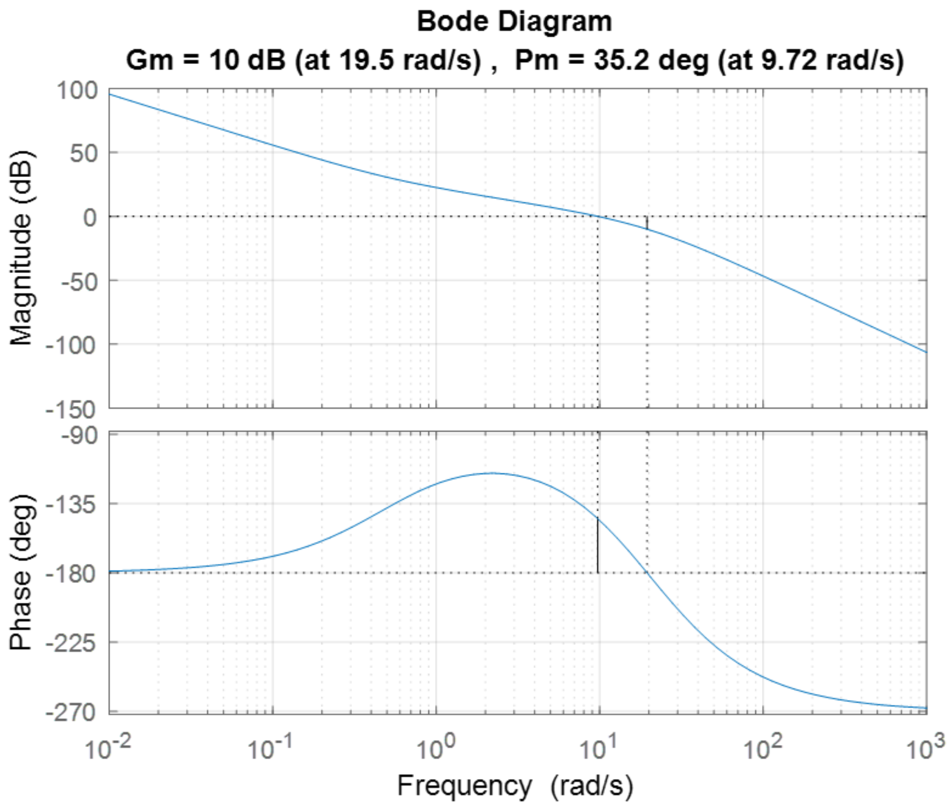


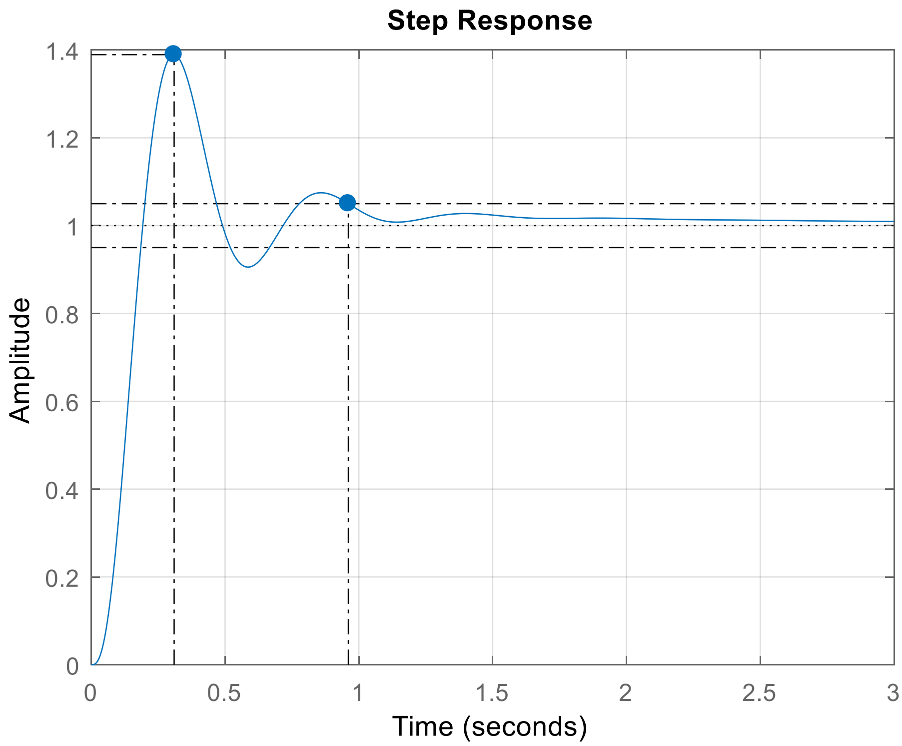
Рисунок Б.3

Додаток В

Варіанти частотних та перехідних характеристик

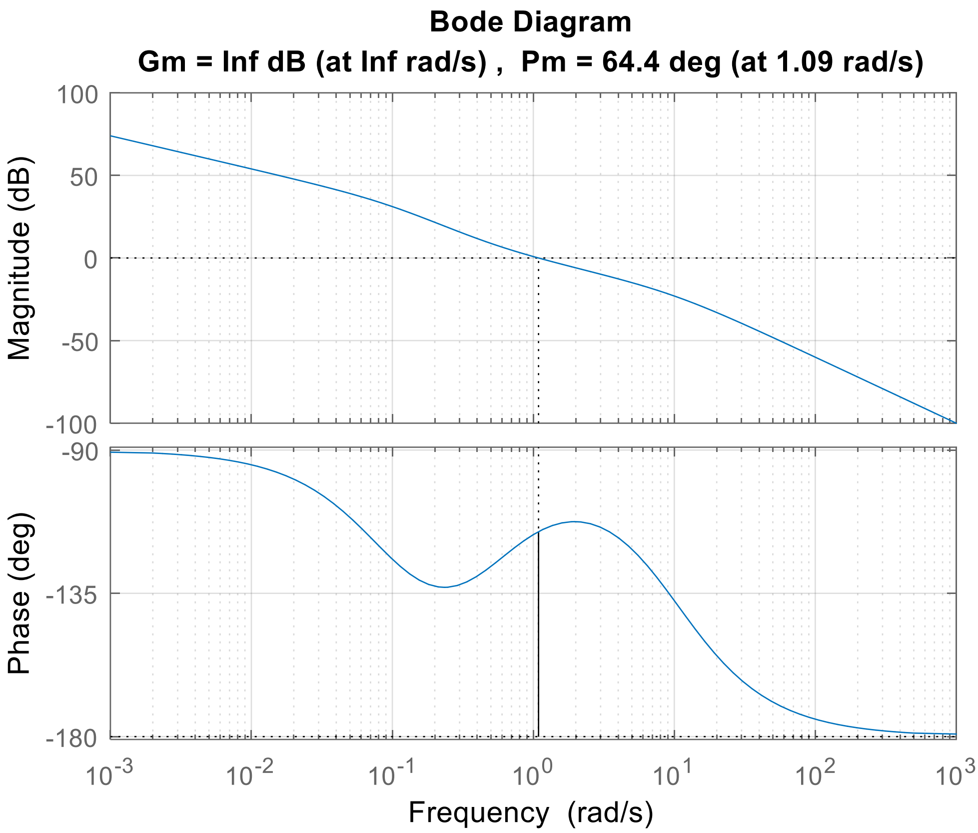


а



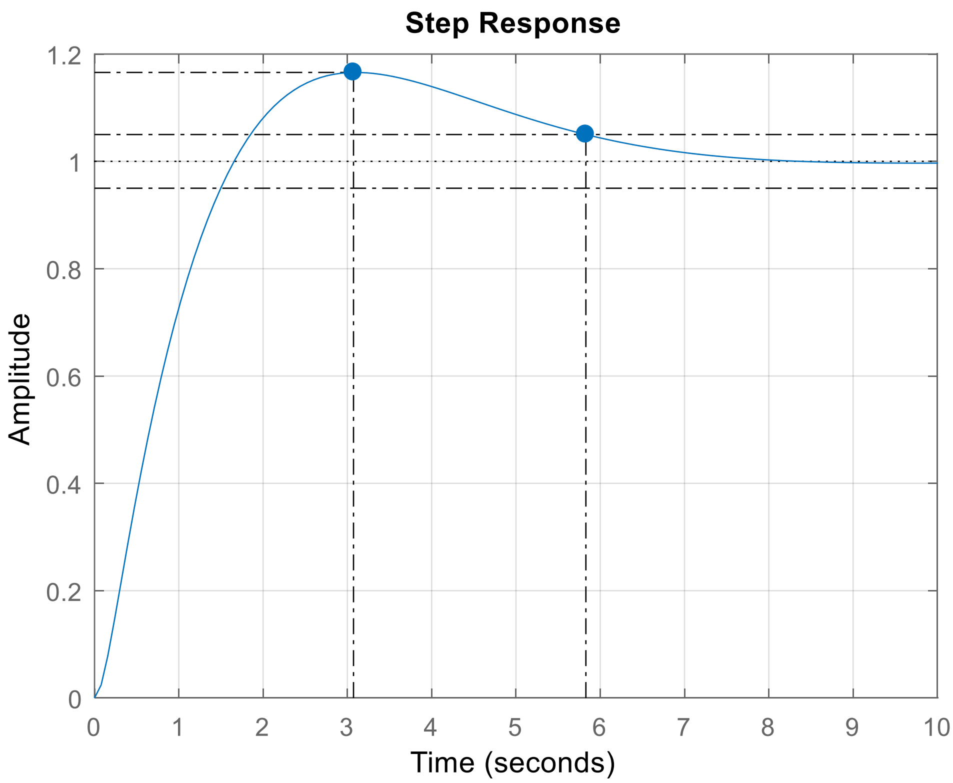
б

Варіант 0



Bode Diagram
Gm = Inf dB (at Inf rad/s) , Pm = 64.4 deg (at 1.09 rad/s)
Magnitude (dB)
100
50
0
-50
-100
Phase (deg)
-90
-135
-180
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/s)

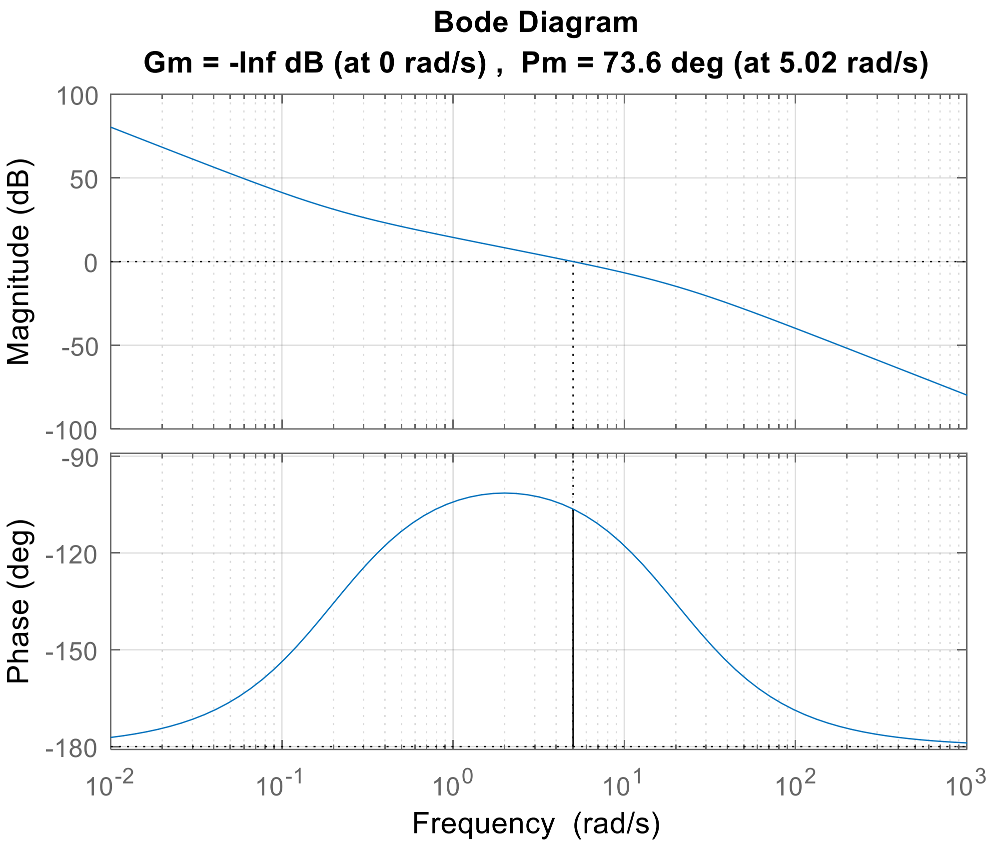
а



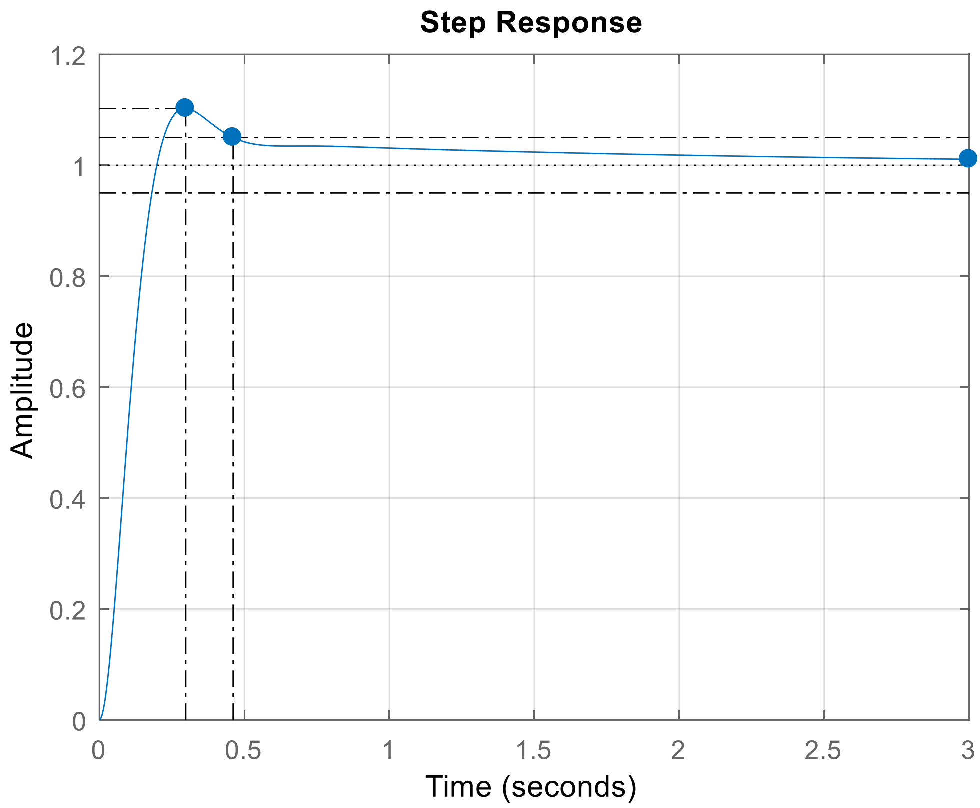
Step Response
Amplitude
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Time (seconds)

б

Варіант 1

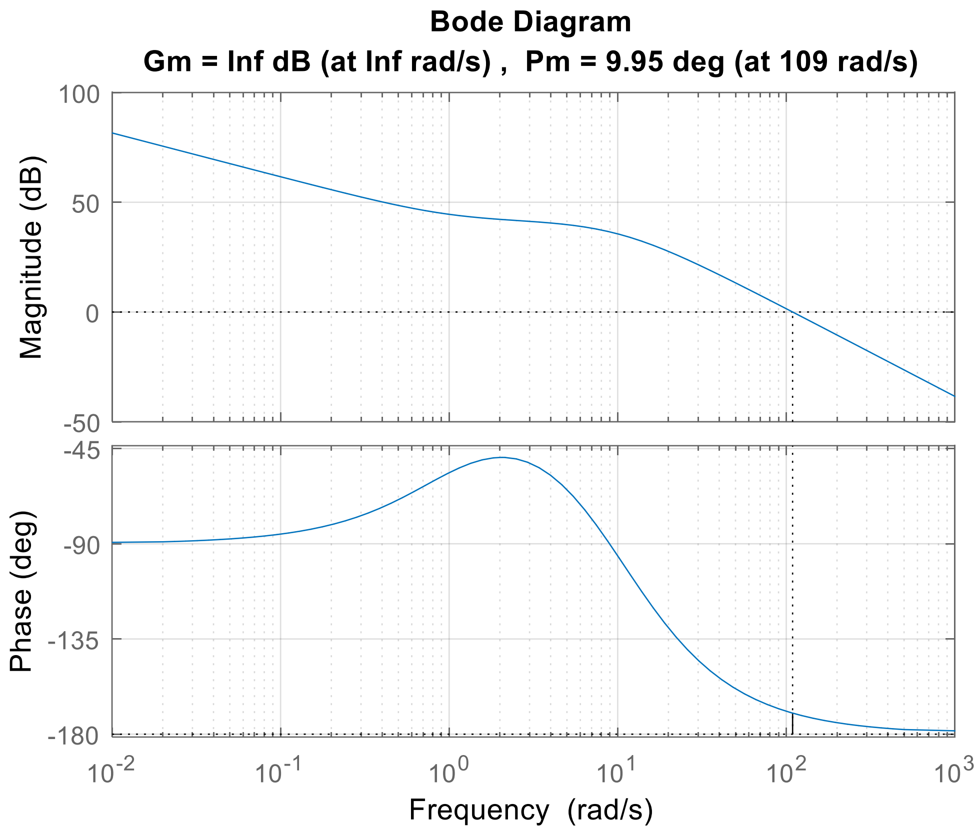

Bode Diagram
Gm = -Inf dB (at 0 rad/s) , Pm = 73.6 deg (at 5.02 rad/s)
Magnitude (dB)
100
50
0
-50
-100
Phase (deg)
-90
-120
-150
-180
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/s)

а

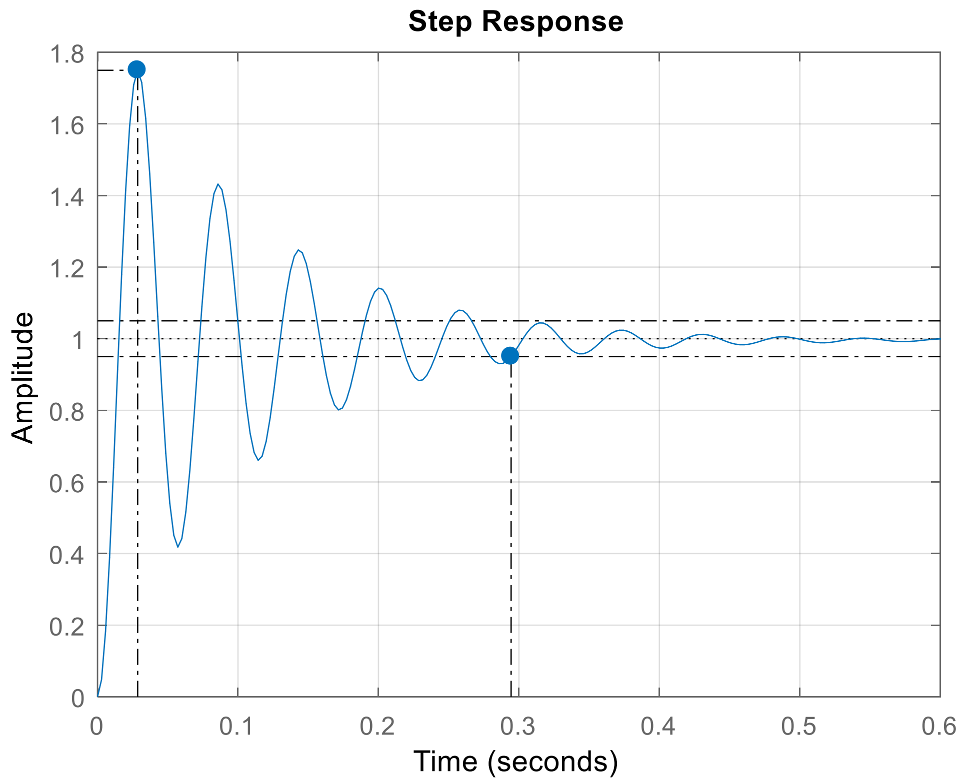

Step Response
Amplitude
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
Time (seconds)

б

Варіант 2

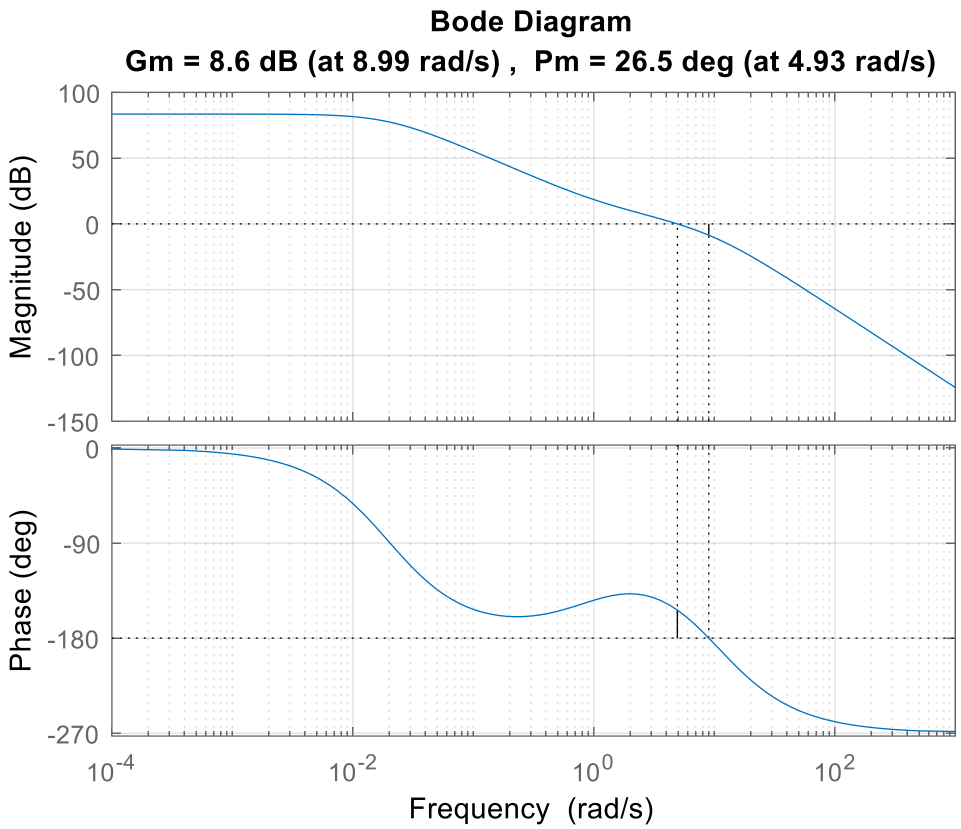

Bode Diagram
Gm = Inf dB (at Inf rad/s) , Pm = 9.95 deg (at 109 rad/s)
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
100
50
0
-50
-45
-90
-135
-180
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3

а

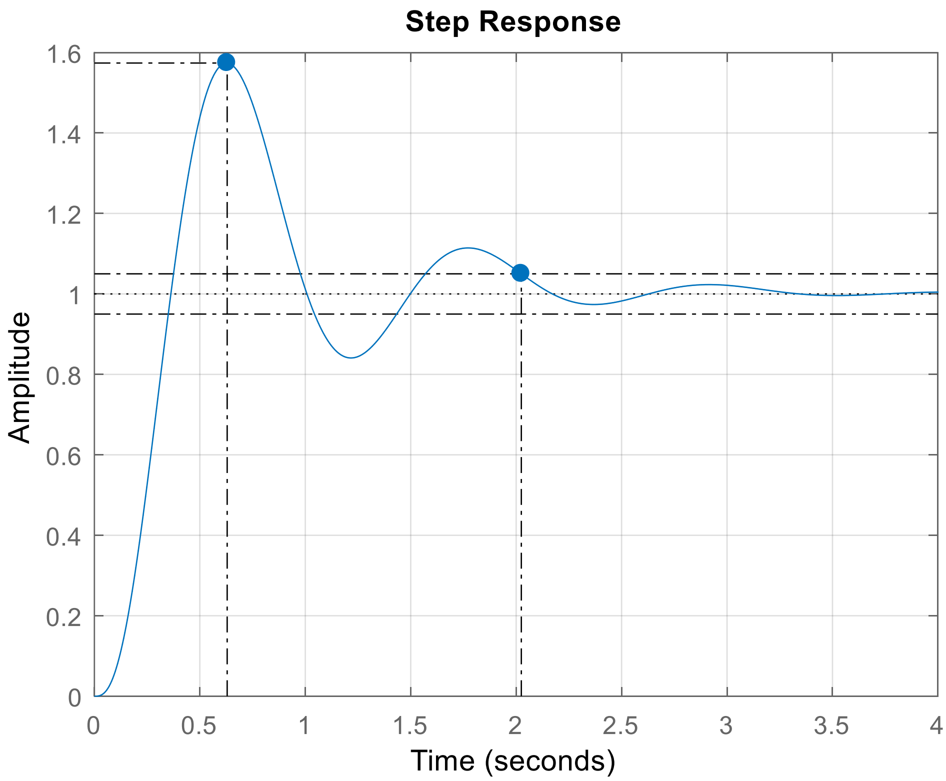

Step Response
Amplitude
Time (seconds)
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

б

Варіант 3

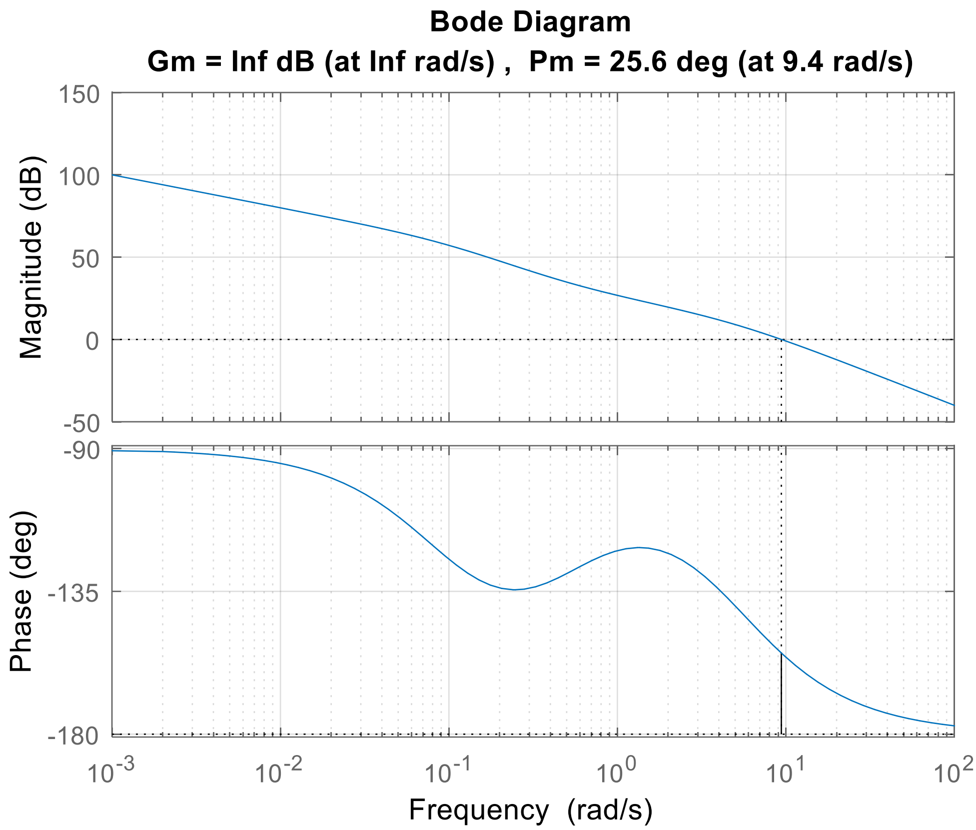

Bode Diagram
Gm = 8.6 dB (at 8.99 rad/s) , Pm = 26.5 deg (at 4.93 rad/s)
Magnitude (dB)
Phase (deg)
100
50
0
-50
-100
-150
0
-90
-180
-270
10^{-4}
10^{-2}
10^{0}
10^{2}
Frequency (rad/s)

а

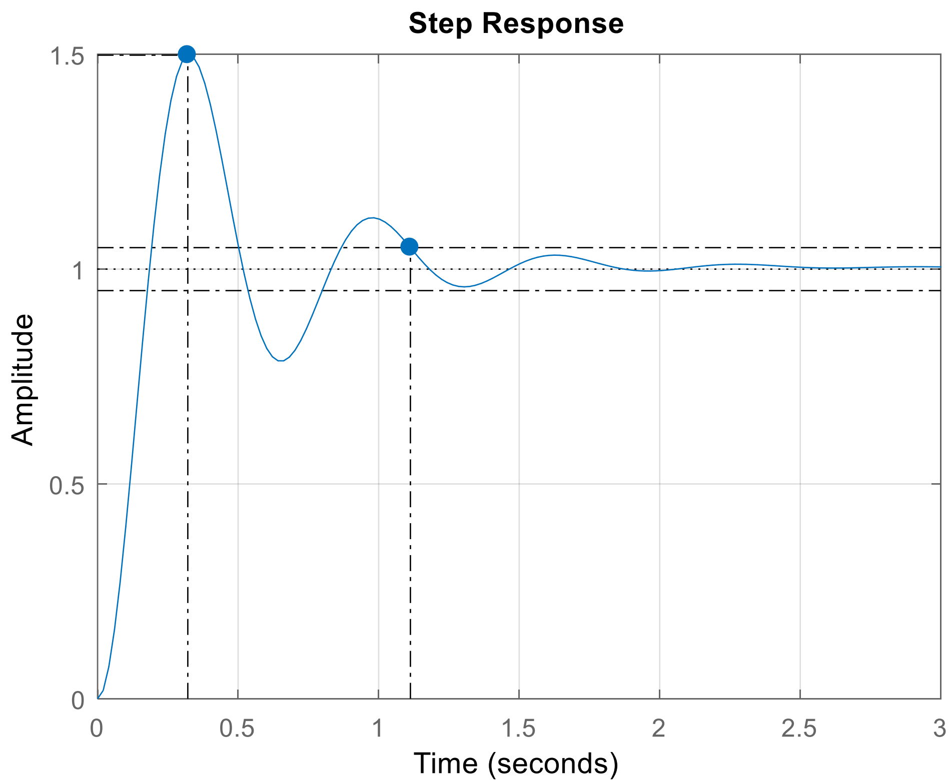

Step Response
Amplitude
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
Time (seconds)

б

Варіант 4

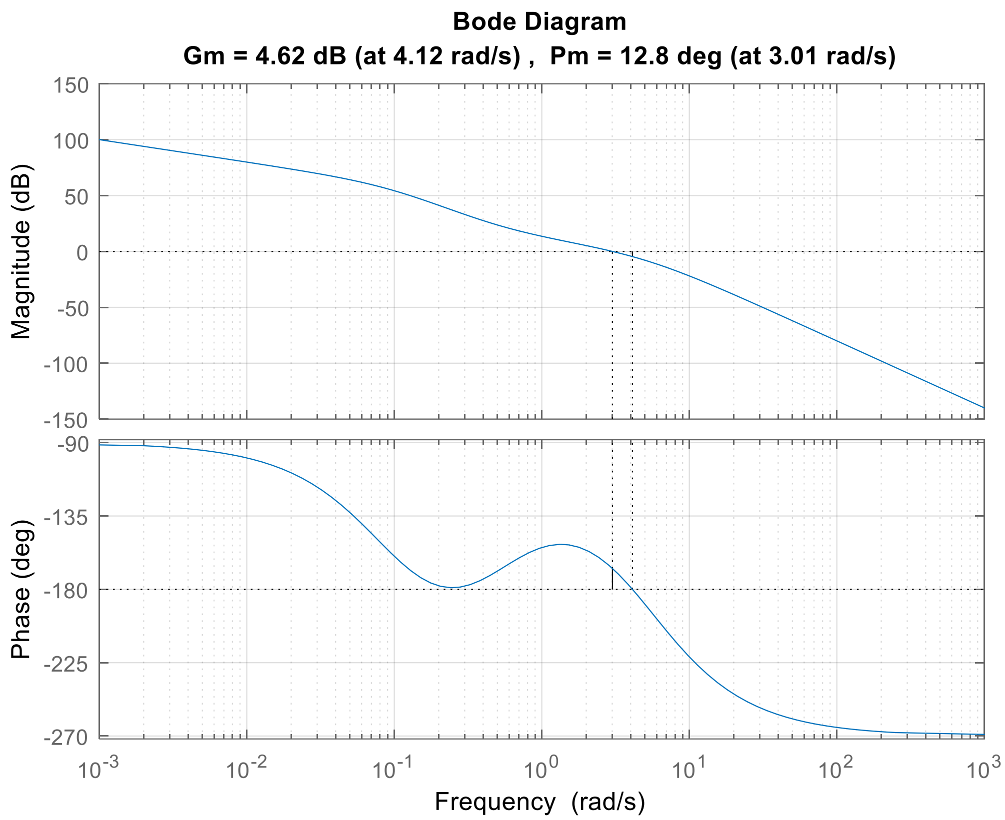

Bode Diagram
Gm = Inf dB (at Inf rad/s) , Pm = 25.6 deg (at 9.4 rad/s)
Magnitude (dB)
Phase (deg)
150
100
50
0
-50
-90
-135
-180
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)

а

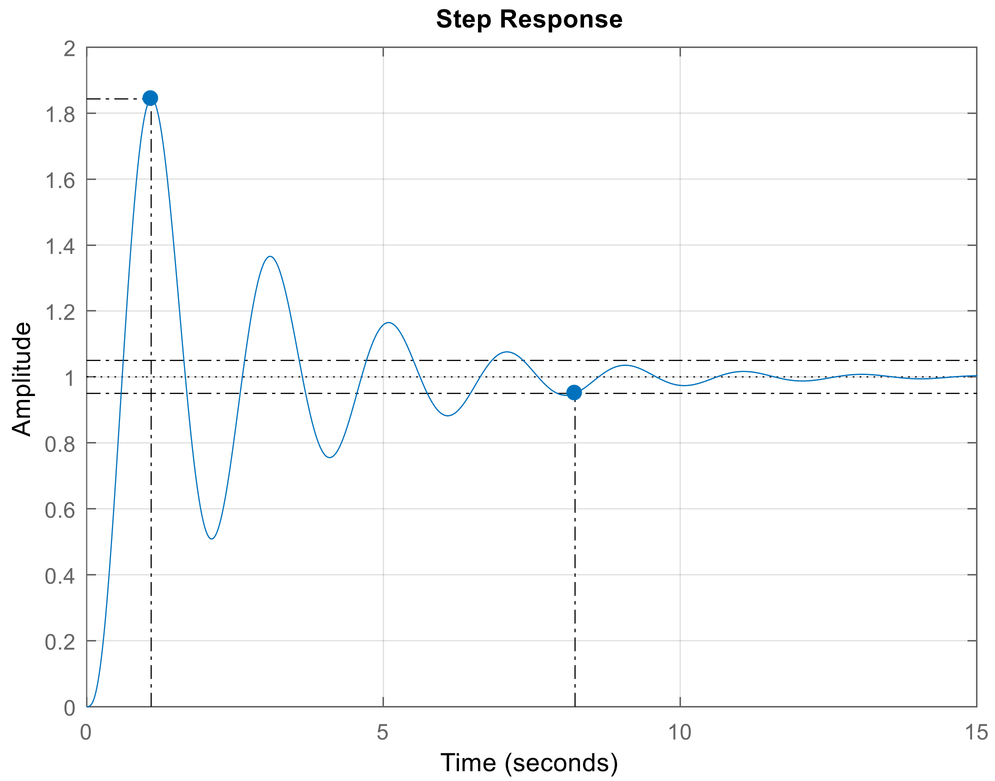

Step Response
Amplitude
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
Time (seconds)

б

Варіант 5

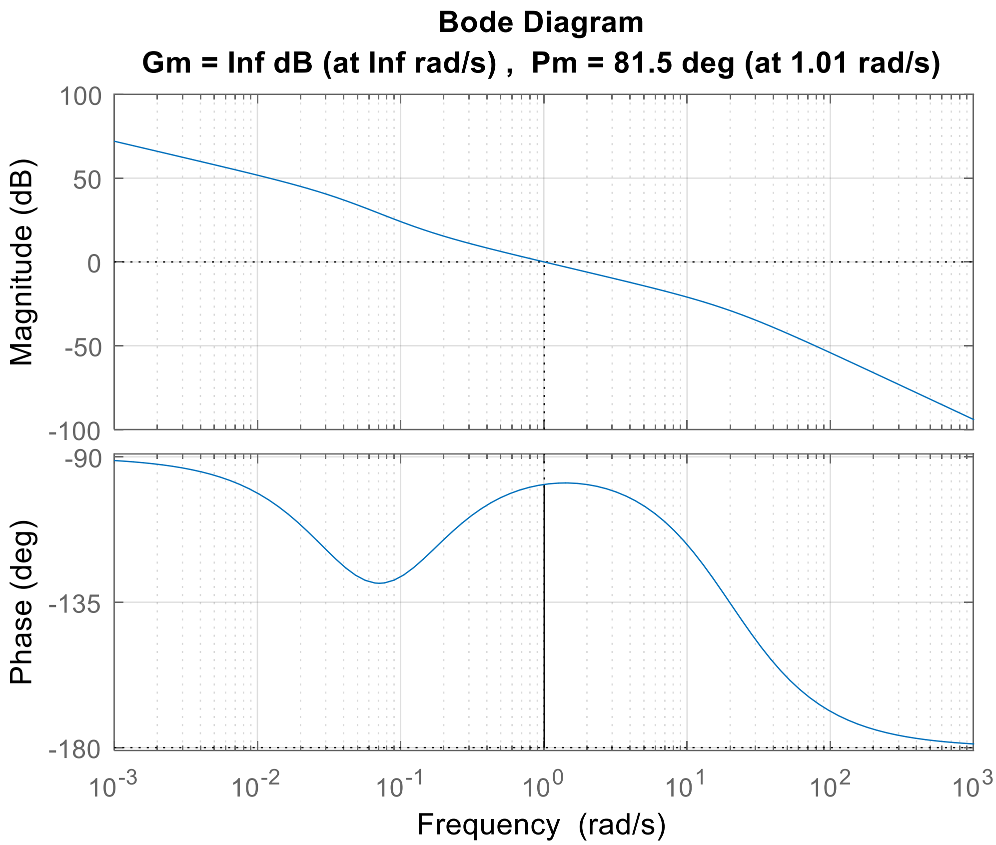

Bode Diagram
Gm = 4.62 dB (at 4.12 rad/s) , Pm = 12.8 deg (at 3.01 rad/s)
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)

а

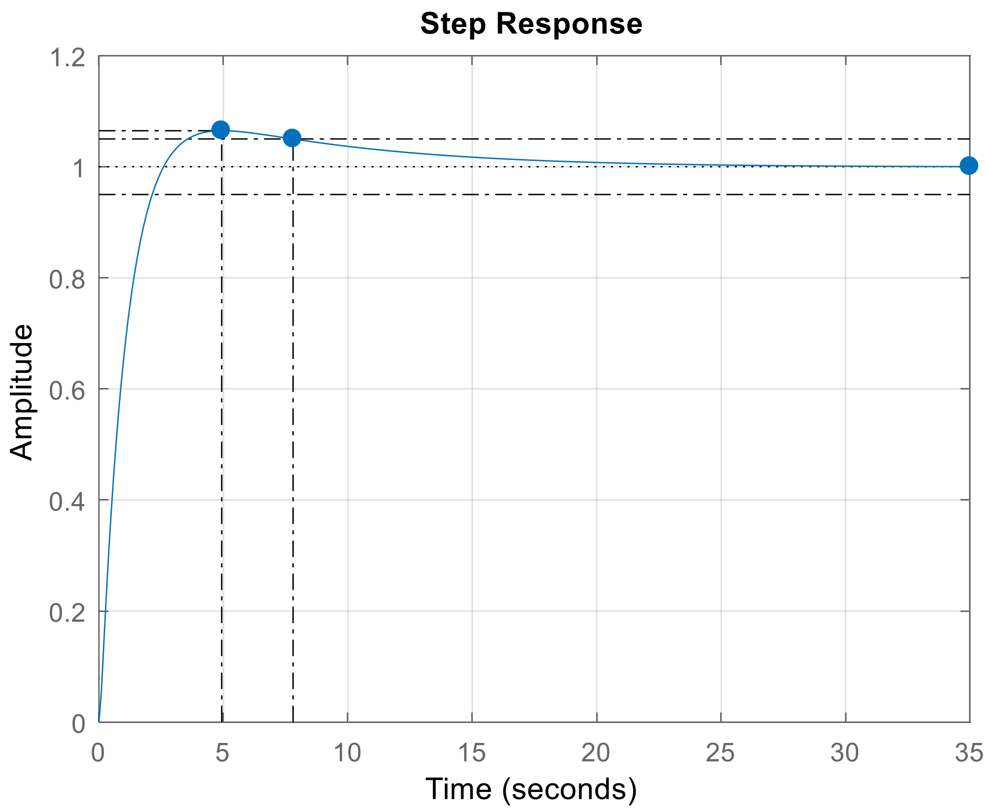

Step Response
Amplitude
Time (seconds)

б

Варіант 6

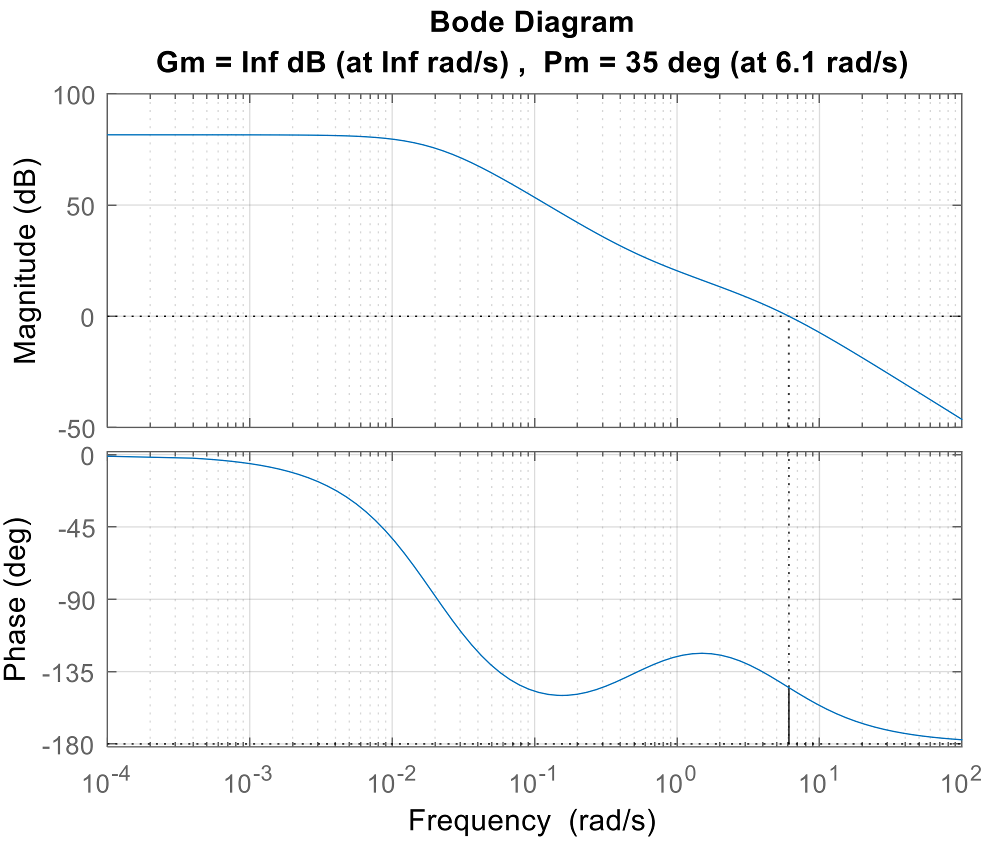

Bode Diagram
Gm = Inf dB (at Inf rad/s) , Pm = 81.5 deg (at 1.01 rad/s)
Magnitude (dB)
Phase (deg)
100
50
0
-50
-100
-90
-135
-180
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/s)

а


Step Response
Amplitude
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
5
10
15
20
25
30
35
Time (seconds)

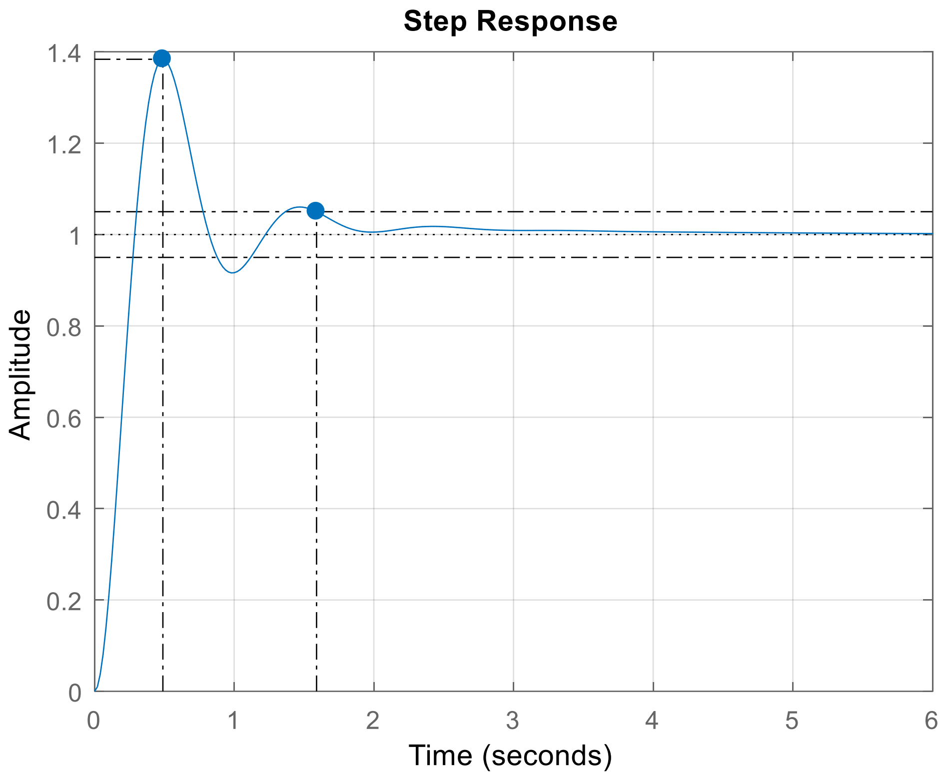
б

Варіант 7



Bode Diagram
Gm = Inf dB (at Inf rad/s) , Pm = 35 deg (at 6.1 rad/s)
Magnitude (dB)
100
50
0
-50
Phase (deg)
0
-45
-90
-135
-180
10-4
10-3
10-2
10-1
100
101
102
Frequency (rad/s)

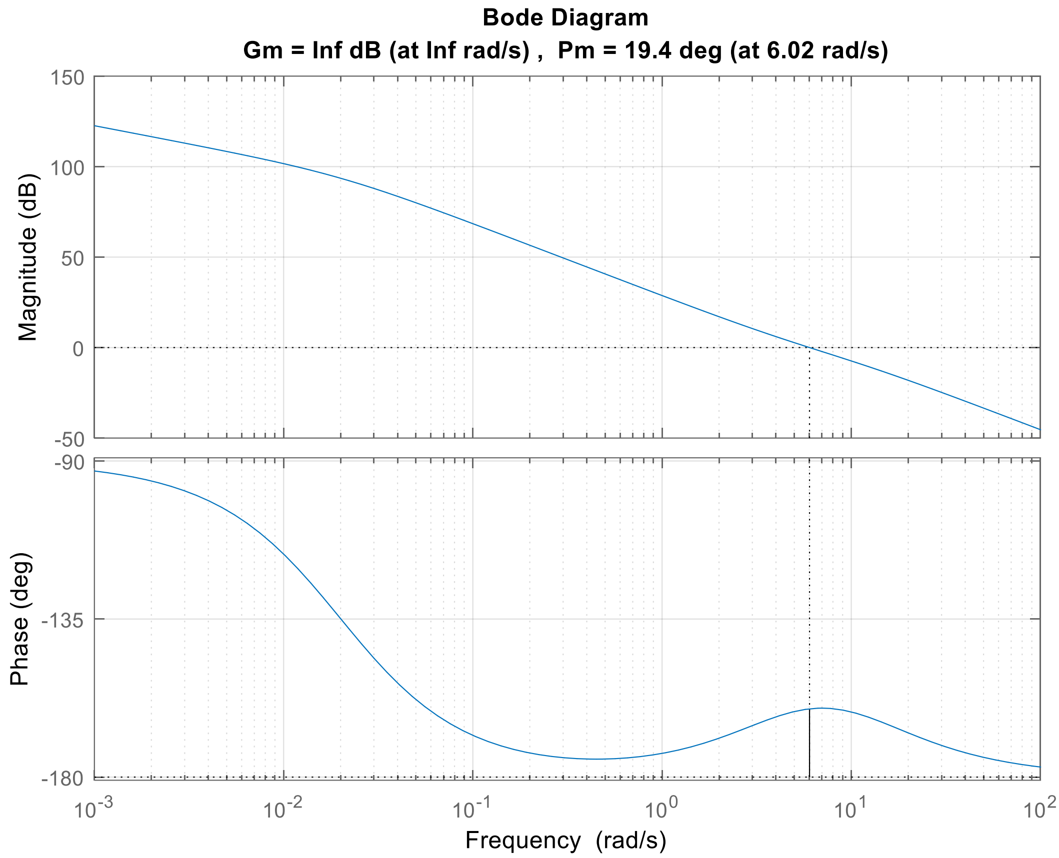
а



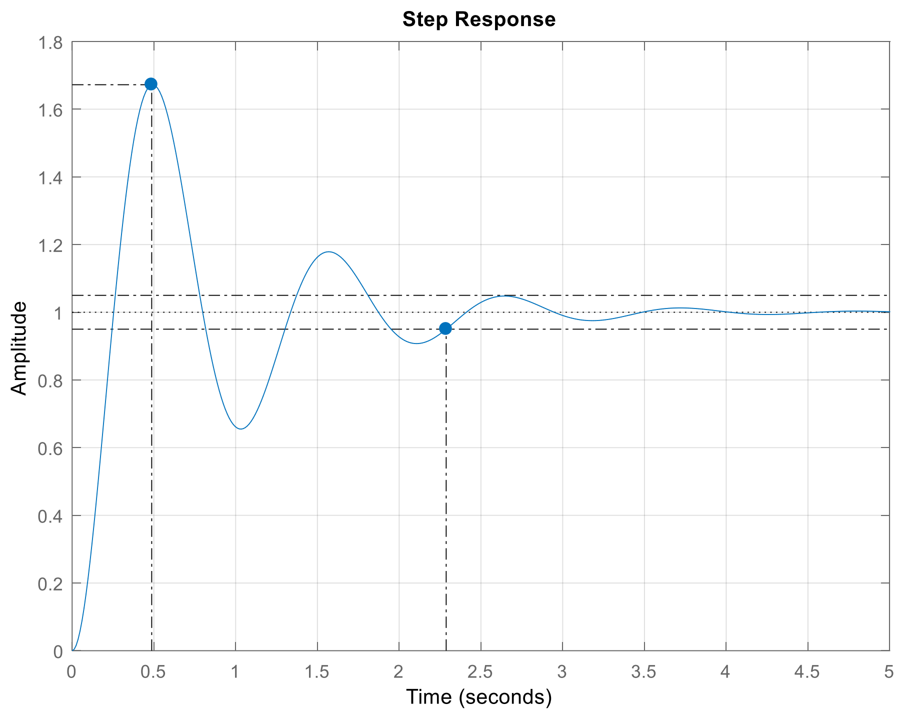
Step Response
Amplitude
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5
6
Time (seconds)

б

Варіант 8

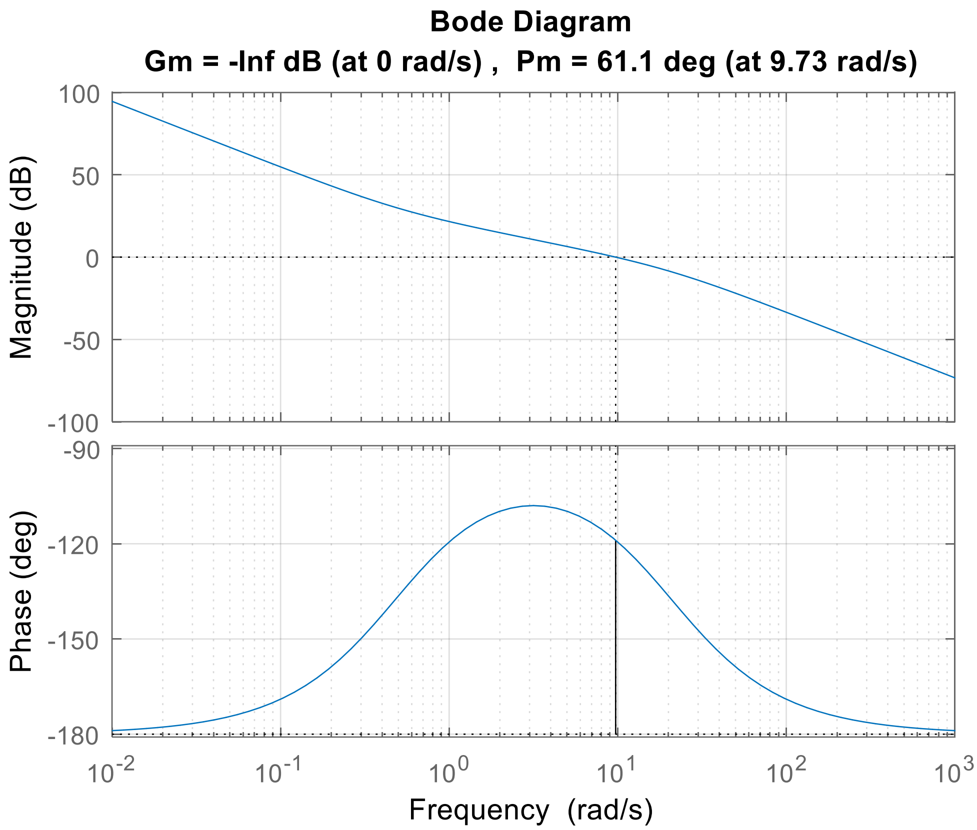

Bode Diagram
Gm = Inf dB (at Inf rad/s) , Pm = 19.4 deg (at 6.02 rad/s)
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
150
100
50
0
-50
-90
-135
-180
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}

а

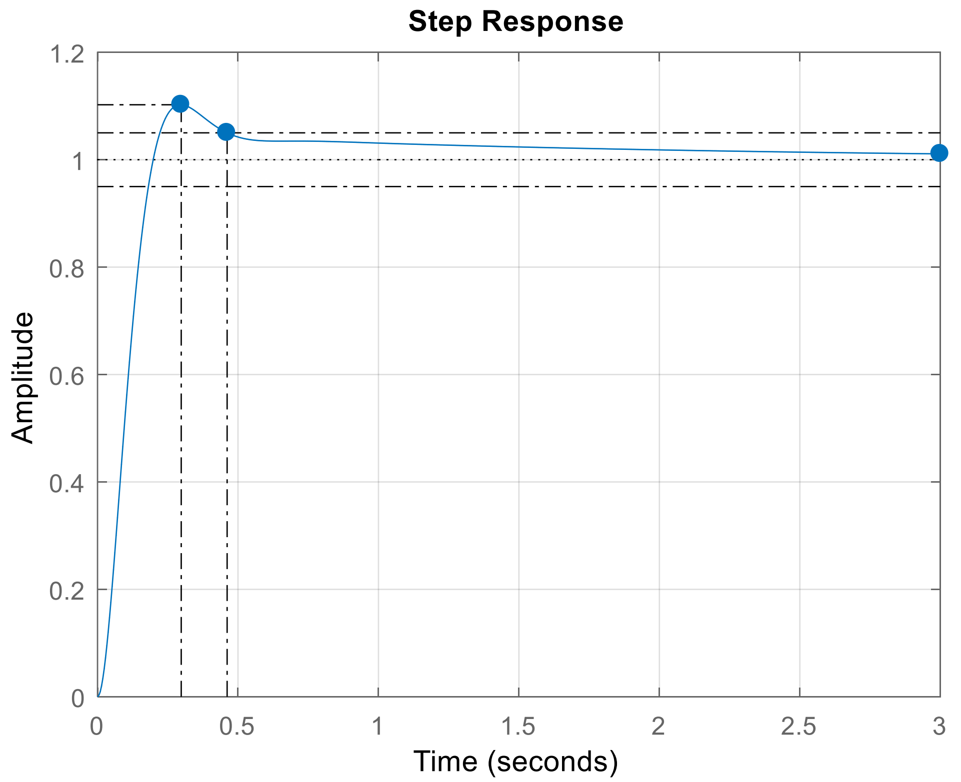

Step Response
Amplitude
Time (seconds)
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

б

Варіант 9

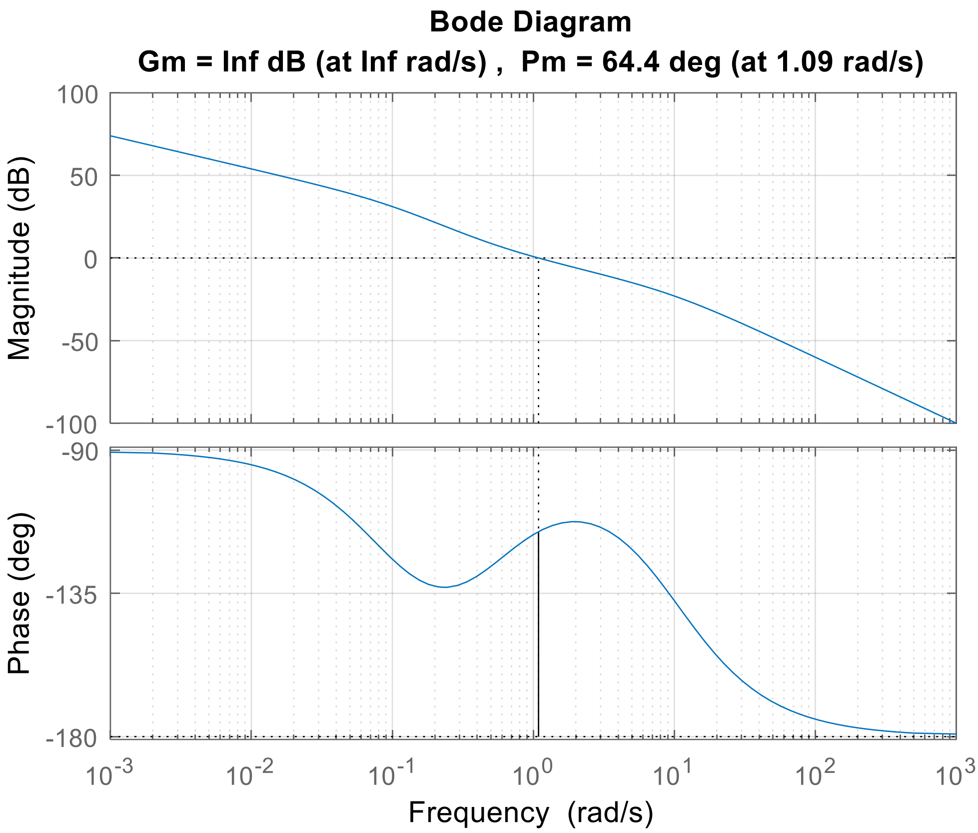


а

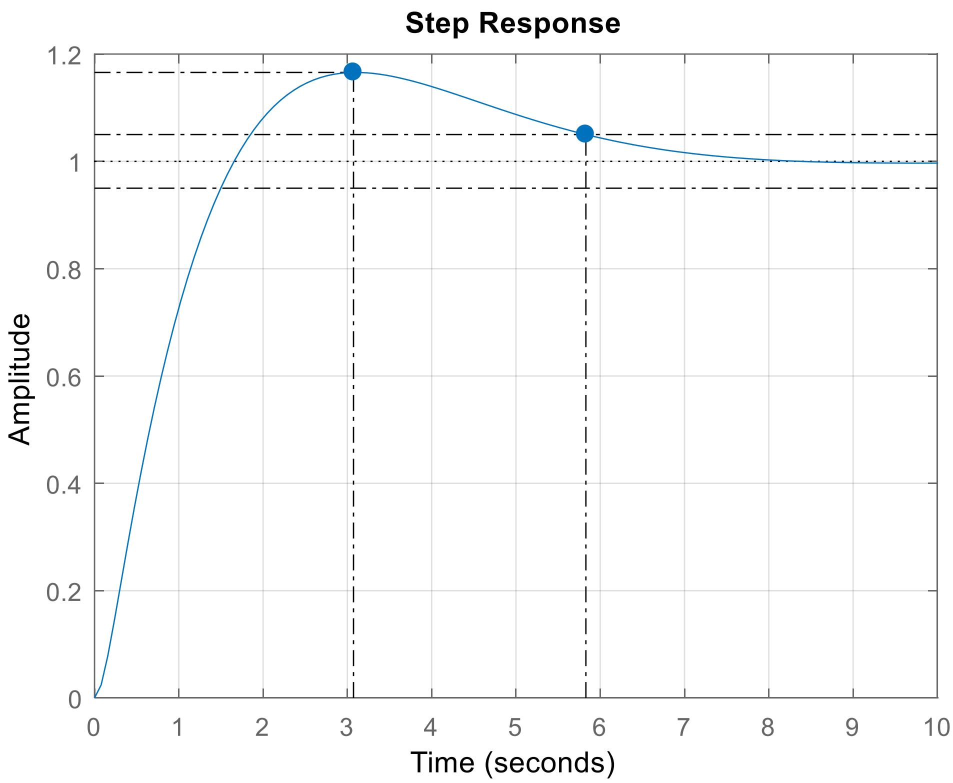


б

Варіант 10

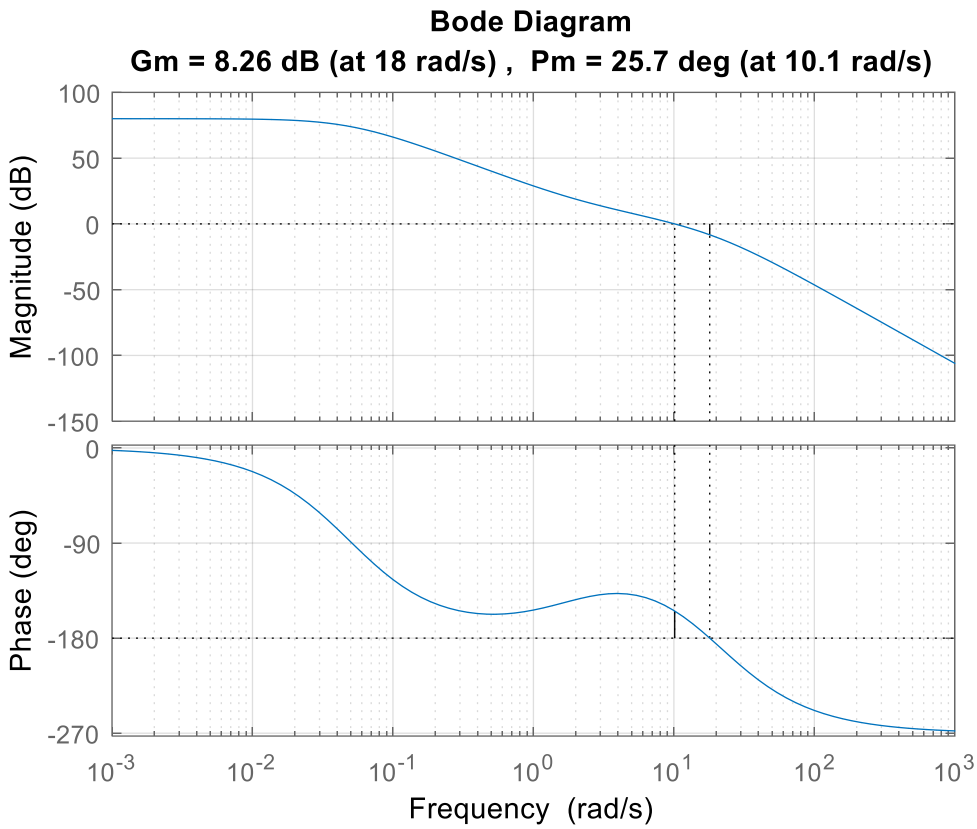


а

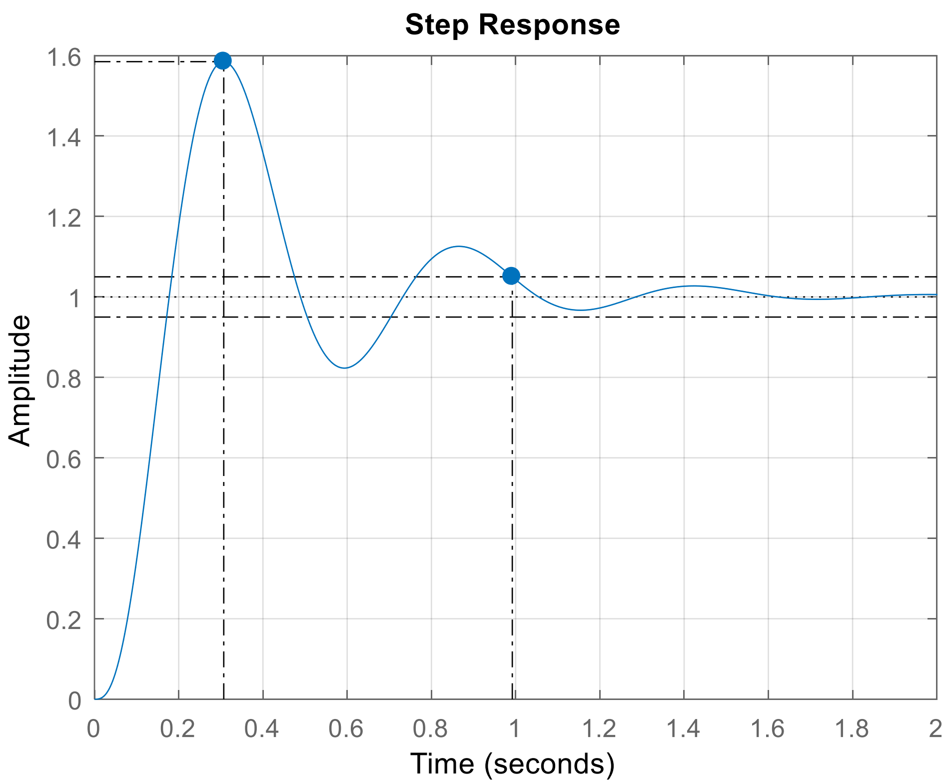


б

Варіант 11

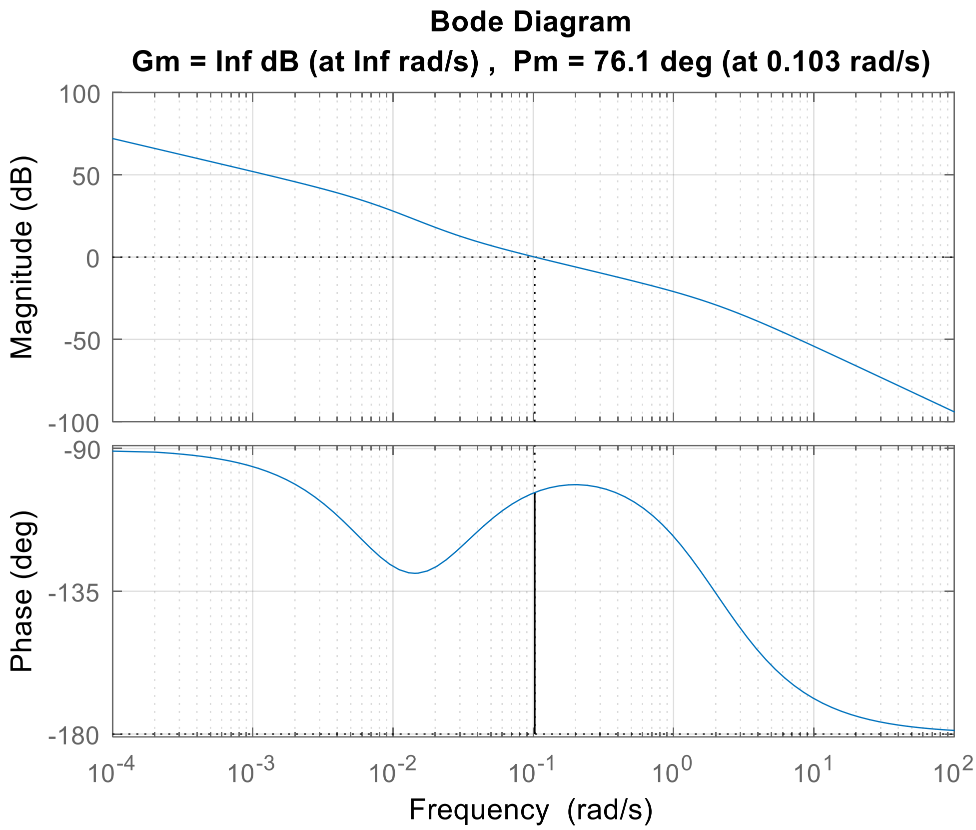


а

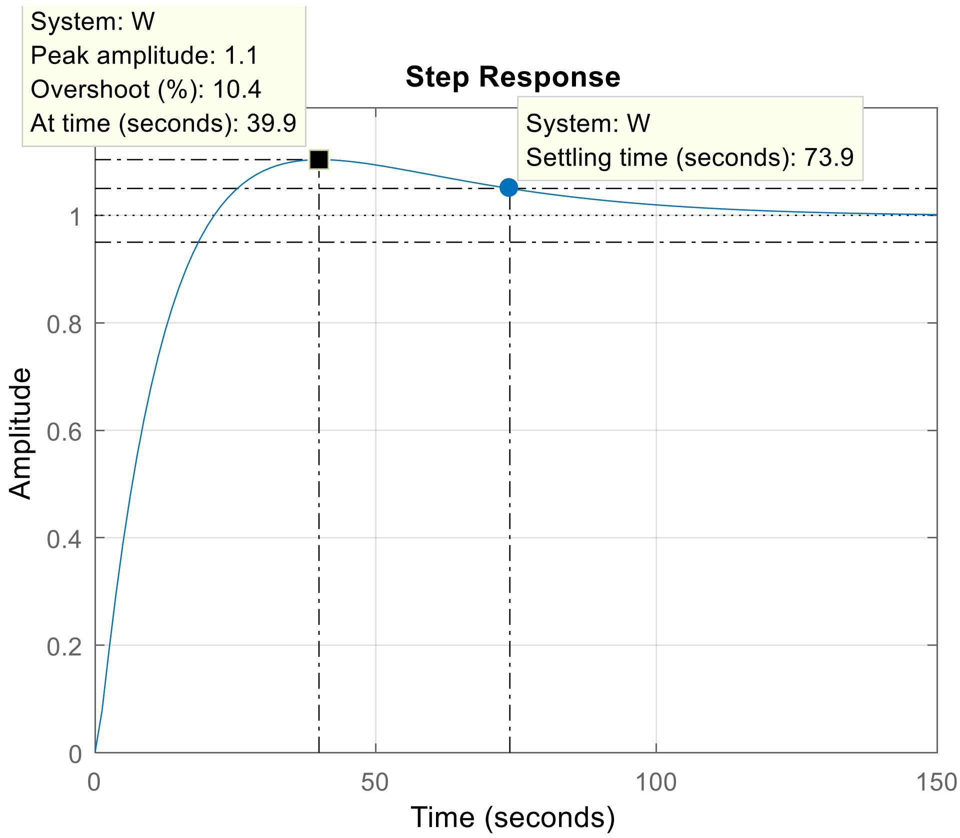


б

Варіант 12

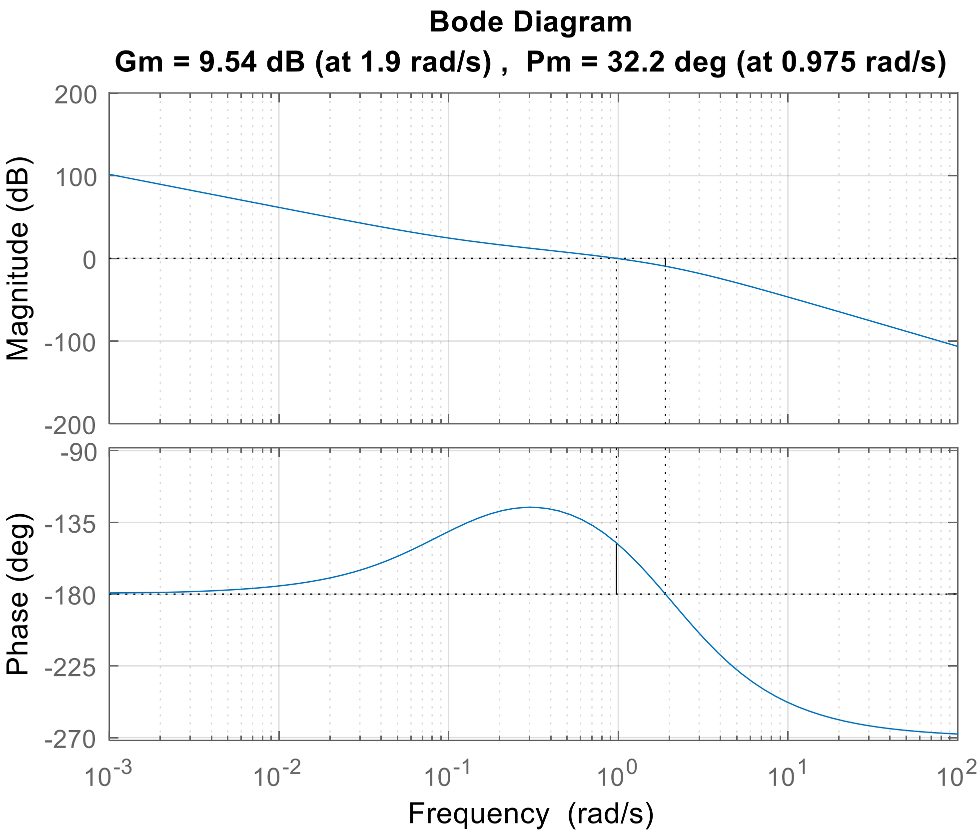


а

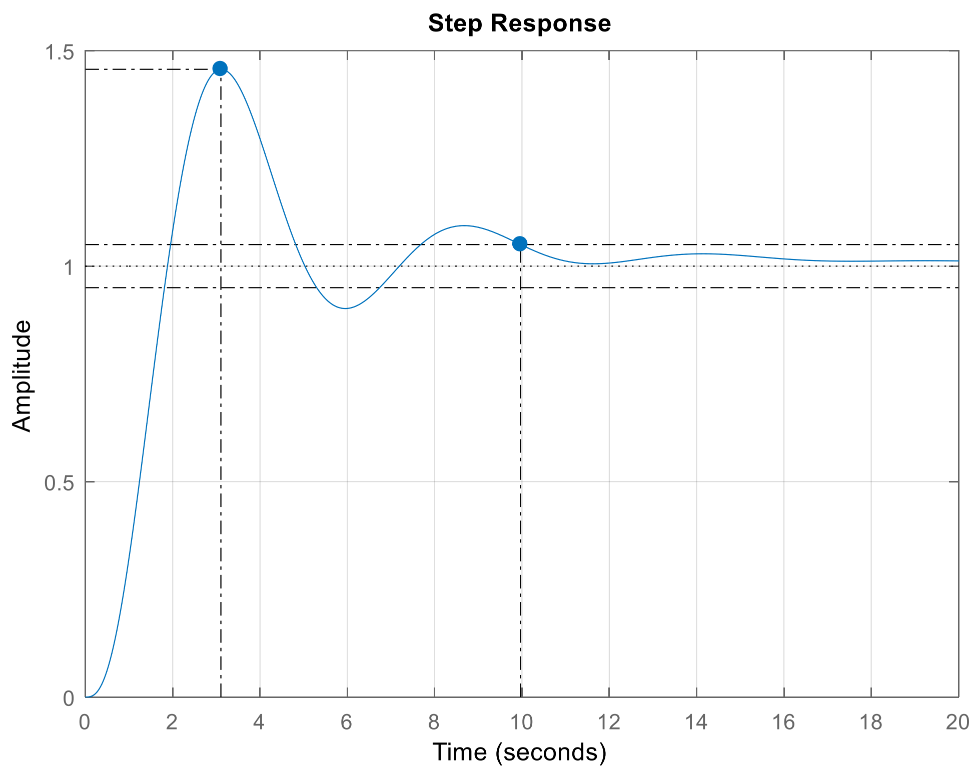


б

Варіант 13



а



б

Варіант 14

Додаток Г

Частотні характеристики системи

Для аналізу динамічних систем застосовуються графоаналітичні методи, що засновані на перетворенні Фур'є.

Перетворенням Фур'є функції $u(t)$ називається функція $U(j\omega)$, яка визначається виразом

$$U(j\omega) = F\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \mathrm{e}^{-j\omega t} dt, \qquad (\text{Г.1})$$

де ω – аргумент, що називається круговою (циклічною) частотою, рад/с.

Таким чином, перетворення Фур'є замінює функцію часу $u(t)$ на функцію $U(j\omega)$ дійсної змінної ω (зображення за Фур'є, або спектр).

Відзначимо, що всі функції-оригінали дорівнюють нулю при $t < 0$. Тому для них нижня межа інтегрування у (Г.1) дорівнює нулю. Для таких функцій між зображеннями за Фур'є та за Лапласом існує такий простий зв'язок

$$U(j\omega) = U(p)\Big|_{p=j\omega}. \qquad (\text{Г.2})$$

Комплексною частотною характеристикою (КЧХ) системи називається відношення перетворень Фур'є вихідної і вхідної величин при нульових початкових умовах

$$K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}. \qquad (\text{Г3})$$

Відповідно до виразу (Г2) між КЧХ та передаточною функцією системи існує такий зв'язок

$$K(j\omega) = K(p)\Big|_{p=j\omega}. \qquad (Г4)$$

КЧХ являє собою дрібно-раціональну комплекснозначну функцію відносно змінної ω, тому її можна представити в алгебраїчній формі

$$K(j\omega) = P(\omega) + j \cdot Q(\omega), \qquad (Г.5)$$

або у показовій формі

$$K(j\omega) = K(\omega) \cdot \mathrm{e}^{j\varphi(\omega)}, \qquad (Г.6)$$

де $P(\omega) = \mathrm{Re}\left[K(j\omega)\right]$ – дійсна частина КЧХ, яка називається ***дійсною частотною характеристикою*** системи;

$Q(\omega) = \mathrm{Im}\left[K(j\omega)\right]$– уявна частина КЧХ, яка називається ***уявною частотною характеристикою*** системи;

$K(\omega) = \left|K(j\omega)\right|$ – модуль КЧХ, який називається ***амплітудно-частотною характеристикою*** (АЧХ) системи;

$\varphi(\omega) = \arg\left[K(j\omega)\right]$ – аргумент КЧХ, який називається ***фазочастотною характеристикою*** (ФЧХ) системи.

Нескладно встановити зв'язок між частотними характеристиками (рисунок Г.1)

$$K(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}; \qquad (Г.7)$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{Q(\omega)}{P(\omega)}, \text{ якщо } P(\omega)>0,\\[2ex] \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{Q(\omega)}{P(\omega)}, \text{ якщо } P(\omega)<0.\end{cases} \qquad (Г.8)$$

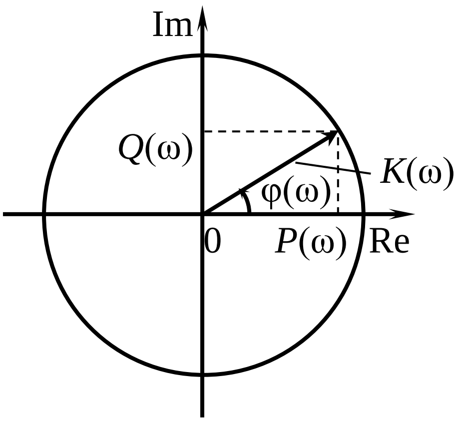


Рисунок Г.1

АЧХ та ФЧХ мають просту фізичну сутність. Для пояснення фізичної сутності представимо спектри вхідної та вихідної величин у вигляді

$$X(j\omega)=X(\omega)\mathrm{e}^{j\varphi_x(\omega)},\quad Y(j\omega)=Y(\omega)\mathrm{e}^{j\varphi_y(\omega)}.$$

Тоді з урахуванням виразів (Г.3), (Г.6) маємо

$$K(\omega)\cdot\mathrm{e}^{j\varphi(\omega)}=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}\mathrm{e}^{j\left[\varphi_y(\omega)-\varphi_x(\omega)\right]},$$

тобто

$$K(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)};\quad \varphi(\omega)=\varphi_y(\omega)-\varphi_x(\omega).$$

Отже, АЧХ характеризує залежність коефіцієнта підсилення системи від частоти, а ФЧХ – залежність фазового зрушення, що додає система до вхідної величини, від частоти.

Крім звичайних частотних характеристик, широке застосування знайшли логарифмічні частотні характеристики – логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ) та логарифмічна фазочастотна характеристика (ЛФЧХ).

При побудові логарифмічних частотних характеристик по осі абсцис відкладається частота ω у логарифмічному масштабі ($\lg\omega$ у лінійному масштабі), а тому відстань між частотами вимірюється логарифмічними одиницями – октавою та декадою (рисунок Г.2). Інтервал між частотами, значення яких відрізняються у десять разів ($\omega_2 / \omega_1 = 10$), називається ***декадою***. Інтервал між частотами, значення яких відрізняються у два рази ($\omega_2 / \omega_1 = 2$), називається ***октавою***.

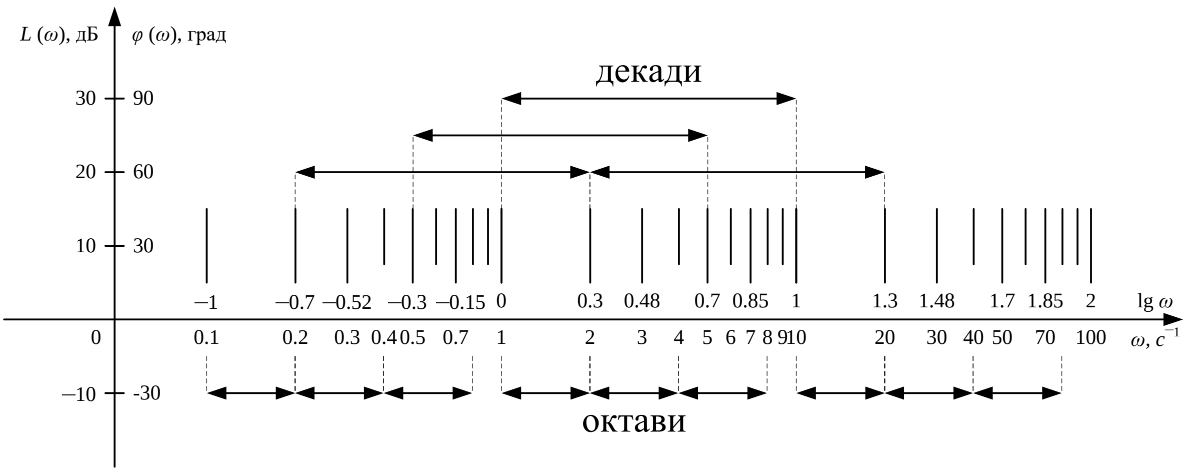


Рисунок Г.2 – Масштаб для побудови логарифмічних частотних характеристик

Завдяки застосуванню логарифмічного масштабу можна будувати частотні характеристики, які добре спостерігаються у надзвичайно широкому діапазоні частот.

Оскільки при $\omega = 0$ величина $\lg \omega = -\infty$, шкала ординат проводиться через довільну точку осі абсцис, виходячи з розумінь зручності побудови логарифмічних частотних характеристик.

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика визначається з АЧХ системи за таким співвідношенням

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg K(\omega). \qquad (Г.9)$$

Тут величина коефіцієнта підсилення L виражається у логарифмічних одиницях – децибелах (дБ). Зв'язок між деякими значеннями коефіцієнта підсилення K у натуральних одиницях та у децибелах $L = 20 \cdot \lg K$ наведено у таблиці Г.1.

Таблиця Г.1

K	0,1	0,2	0,5	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{10}$	5	10
L, дБ	– 20	– 14	– 6	– 3	0	3	6	10	14	20

Використовуючи дані, що наведені у таблиці Г.1, та властивості логарифма, можна легко перейти від багатьох значень коефіцієнта підсилення у натуральних одиницях до значень у децибелах та навпаки. Нехай, наприклад, $K_1 = 2{,}5$, $K_2 = 1000$. Тоді

$$L_1 = 20 \cdot \lg 2{,}5 = 20 \cdot \lg(5/2) = 20 \cdot \lg 5 - 20 \cdot \lg 2 = 14 - 6 = 8 \text{ дБ};$$
$$L_2 = 20 \cdot \lg 1000 = 20 \cdot \lg\left(10^3\right) = 20 \cdot 3 \cdot \lg 10 = 60 \text{ дБ}.$$

Логарифмічна фазочастотна характеристика системи являє собою фазочастотну характеристику $\varphi(\omega)$, що будується як функція логарифма частоти.

Для аналізу САК частотним методом найбільш часто застосовують логарифмічні частотні характеристики розімкненої системи – логарифмічну амплітудно-частотну характеристику

$$L_R(\omega) = 20 \cdot \lg R(\omega)$$

та логарифмічну фазочастотну характеристику $\varphi_R(\omega)$. Тут $R(\omega)$, $\varphi_R(\omega)$ – модуль та аргумент комплексної частотної характеристики розімкненої системи

$$R(j\omega) = R(\omega) \cdot \exp\left(\varphi_R(\omega)\right).$$

Як відомо, комплексна частотна характеристика розімкненої системи пов'язана з її оператором передачі та передаточною функцією виразами

$$R(j\omega) = R(D)\Big|_{D=j\omega} = R(p)\Big|_{p=j\omega}.$$

Побудову графіків логарифмічних частотних характеристик на бланку з логарифмічним масштабом зручно виконувати, попередньо розклавши передаточну функцію розімкненої системи на добуток передаточних функцій елементарних ланок

$$R(p) = \prod_i K_i(p), \qquad (\text{Г}.10)$$

де $K_i(p)$ – передаточна функція i-ої елементарної ланки.

Тоді ЛАЧХ та ФЧХ розімкненої системи визначаються з ЛАЧХ та ФЧХ елементарних ланок такими виразами

$$L_R(\omega) = \sum_i L_i(\omega), \quad \varphi_R(\omega) = \sum_i \varphi_i(\omega), \tag{Г.11}$$

де $L_i(\omega)$, $\varphi_i(\omega)$ – ЛАЧХ та ФЧХ i-тої елементарної ланки.

На практиці зазвичай обмежуються побудовою асимптотичної ЛАЧХ розімкненої системи. Її будують на бланку з логарифмічним масштабом (додаток Г) шляхом послідовного підсумовування асимптотичних ЛАЧХ елементарних ланок. Така методика побудови є достатньо складною. ЇЇ головна перевага полягає у з’ясуванні закономірностей зв’язків між компонентним складом та виглядом результуючої ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи, що надалі веде до тих чи інших показників якості її функціонування. Наприклад, введення інерційних ланок та збільшення їх постійних часу веде до зменшення смуги пропускання системи та збільшення фазового запізнювання. Навпаки, форсуючі ланки дозволяють підняти частотні характеристики, й тому збільшити смугу пропускання та зменшити фазове запізнення.

Побудову частотних характеристик можна надзвичайно просто виконати із застосуванням пакету MATLAB (додаток Б).

Для побудови логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи з метою вимірювання запасів стійкості доцільно скористатись спеціальною функцією

$$\mathbf{margin}(\mathbf{R}),$$

де R – ідентифікатор передаточній функції розімкненої системи.

У цьому випадку на графіках автоматично відзначаються та у верхньому рядку записуються значення запасу стійкості за підсиленням $L_з$ у децибелах та за фазою $\varphi_з$ у градусах (у MATLAB вони позначуються відповідно Gm та Pm), а також частоти, на яких вони виміряні.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до контрольної роботи з дисципліни

«ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»

Відповідальний за випуск Сосунов О. О.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 21.07.2025 р.
Умовн. друк. арк. 4,5. Тираж . Замовлення № .

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха,7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.