

**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

**ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ
ТА ТЕХНОЛОГІЙ**

**Кафедра автоматики та комп'ютерного телекерування
рухом поїздів**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання практичних занять та самостійної роботи
з дисципліни
«МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ АНАЛІЗУ
І СИНТЕЗУ СИСТЕМ АВТОМАТИКИ»

Харків 2025

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри автоматики та комп'ютерного телекерування рухом поїздів 01 вересня 2025 р., протокол № 1.

Наведено короткі теоретичні дані, завдання та порядок дій для виконання практичних робіт, а також рекомендації до самостійного вивчення відповідних розділів курсу. Основну увагу приділено практичному вивченню основ теорії множин, теорії груп, комбінаторики та теорії графів, також розв'язанню конкретних прикладних задач за відповідною темою. Виокремлені особливості використання елементів дискретної математики для формалізованого відтворення моделей розподілених систем автоматики з метою їхнього подальшого аналізу і синтезу, що є важливою складовою сучасних систем автоматики на залізничному транспорті.

Методичні вказівки можуть бути корисними здобувачам, які вивчають елементи дискретної математики з розділів «Теорія множин», «Комбінаторика», «Теорія графів» в інших дисциплінах, а також під час підготовки курсових та атестаційних робіт.

Призначено для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальності 174 (G7) «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка», які вивчають дисципліну «Математичні основи аналізу і синтезу систем автоматики» усіх форм здобуття освіти.

Укладачі:

доценти Д. П. Лабенко,
О. В. Щєбликіна,
старш. викл. О. В. Лазарєв

Рецензент

доц. А. В. Рибін

ЗМІСТ

Загальні вказівки.....	5
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1. Способи завдання множин. Виконання елементарних операцій над множинами. Формалізоване представлення виключення ворожості маршрутів.....	7
1.1 Короткі теоретичні відомості.....	7
1.2 Завдання для виконання.....	14
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2. Геометричне представлення операцій над множинами за допомогою кругів Ейлера. Виконання спеціальних операцій над множинами. Розв'язання задач маршрутизації потоків.....	17
2.1 Короткі теоретичні відомості.....	17
2.2 Завдання для виконання.....	22
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3. Геометричне представлення операцій над множинами за допомогою діаграм Венна. Визначення відношень між технологічними об'єктами систем автоматики. Встановлення морфізмів.....	25
3.1 Короткі теоретичні відомості.....	25
3.2 Завдання для виконання.....	36
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4. Теоретико-групова формалізація систем автоматики. Розв'язання задач групового представлення технологічних об'єктів.....	40
4.1 Короткі теоретичні відомості.....	40
4.2 Завдання для виконання.....	47
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5. Основи роботи з графами. Графи та способи їхнього представлення.....	50
5.1 Короткі теоретичні відомості.....	50
5.2 Завдання для виконання.....	54

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6. Графічне представлення об'єктів	
автоматизації та технологічних процесів за допомогою графів.....	57
6.1 Короткі теоретичні відомості.....	57
6.2 Завдання для виконання.....	63
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7. Аналітична інтерпретація графічних	
моделей на базі топологічних матриць та параметрично-	
топологічних матриць.....	68
7.1 Короткі теоретичні відомості.....	68
7.2 Завдання для виконання.....	72
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8. Застосування понять теорії множин,	
комбінаторики та теорії графів до аналізу та моделювання елементів	
автоматизованих систем.....	74
8.1 Короткі теоретичні відомості.....	74
8.2 Завдання для виконання.....	80
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	83

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Методичні вказівки з дисципліни «Математичні основи аналізу і синтезу систем автоматики» (МОА ССА) розроблені для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітніми програмами «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» спеціальності 174 (G7) «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка».

Предметом вивчення дисципліни є спеціалізований математичний апарат окремих розділів вищої математики, що використовують для проєктування, розроблення та дослідження систем автоматики і автоматизації різного призначення. Дисципліна дає прикладні знання зі специфічних розділів математики: теорії множин, теорії груп, теорії графів. Отримані знання використовують для формалізованого відтворення моделей розподілених систем автоматики з метою їхнього подальшого аналізу і синтезу.

Методичні рекомендації містять короткий опис теоретичних даних, необхідних для виконання конкретних практичних робіт для підготовки фахівців за вказаними освітніми програмами, прикладів розв'язання задач та завдань для виконання і для самостійної роботи. Матеріал відповідає робочій навчальній програмі цієї дисципліни.

Завдання до практичних робіт подано в єдиному форматі, який містить:

- коротку цільову установку;
- стислі теоретичні відомості щодо вивчення теми заняття, виконання робіт;
- план їхнього виконання у вигляді робочих завдань для відпрацювання.

Кожна з робіт розрахована на практичне розв'язання поставлених задач. Методика їхнього виконання передбачає етап підготовки. У ході підготовки потрібно вивчити теоретичні відомості, розібрати надані приклади та скласти приблизний план дій з реалізації кожного пункту робочого завдання.

Методичні вказівки покликані надати здобувачу теоретичні та практичні знання, необхідні для забезпечення програмних результатів навчання, визначених стандартом вищої освіти спеціальності та підготувати їх до життя у сучасному інформаційному суспільстві.

Кожна виконана практична робота має бути оцінена викладачем.

Ці методичні вказівки можуть бути корисними при вивченні окремих розділів з тем теорії множин, теорії груп, теорії графів в інших дисциплінах.

Практичне заняття 1

СПОСОБИ ЗАВДАННЯ МНОЖИН. ВИКОНАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ОПЕРАЦІЙ НАД МНОЖИНАМИ. ФОРМАЛІЗОВАНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ВОРОЖОСТІ МАРШРУТІВ

Мета заняття: ознайомлення з основними поняттями теорії множин; основними операціями над множинами; вміння застосовувати на практиці отримані знання та застосування теоретико-множинного підходу для формалізації задач у сфері автоматизації транспортних систем та представлення ворожості маршрутів.

1.1 Короткі теоретичні відомості

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МНОЖИН. ОСНОВНІ СПОСОБИ ЗАВДАННЯ МНОЖИН

1.1.1 Основні поняття теорії множин

Множиною називається сукупність об'єктів, об'єднаних за певною ознакою.

Окремі об'єкти, із яких складається множина, називаються **елементами множини**.

Множина – це сукупність елементів, які мають певну спільну властивість.

Множини позначають заголовними літерами латинського алфавіту: X , Y , Z , а елементи множин – відповідними малими літерами того ж алфавіту: x , y , z або малими буквами з індексами: x_1 , x_2 , ... y_1 , y_2 , ...

Усі елементи множини записують у фігурних дужках.

Наприклад $A = \{4, 11, 20, 25, 31\}$.

Однією з характеристик множини є те, що вона не містить однакових елементів. Належність елемента "а" до множини "А" позначається символом $\in$, як ось: $a \in A$, тоді як факт того, що елемент "а" не є частиною множини "А", позначається $a \notin A$.

Підмножина — множина, кожен елемент якої належить іншій множині. Якщо А — підмножина множини В, то це записується як $A \subseteq B$.

Загальна **кількість підмножин** множини визначається формулою 2^n , де n — кількість елементів множини.

Послідовність з **n** елементів множини називають **n-рядком**. На відміну від звичайної множини, де порядок елементів неважливий, в **n-рядку** обов'язково задають певну послідовність.

Кількість елементів множини $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ називається її **потужністю** і позначається так: $|X|$ — потужність множини X, $|X| = n$.

Кінцева множина містить кінцеве число елементів.

Порожня множина $\emptyset$ не містить жодного елемента, його потужність дорівнює нулю: $|\emptyset| = 0$.

Загальноприйнятими є позначення основних числових множин:

- **N** — натуральних чисел, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$;
- **Z** — цілих чисел, $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;
- **R** — дійсних чисел, $R = \{x \mid x \text{ є дійсне число}\}$ (множина усіх чисел числової прямої);
- **Q** — раціональних чисел, $Q = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in Z, b \in N\right\}$;
- **C** — комплексних чисел, $C = \{z = a + bi \mid a, b \in R\}$, де z — комплексне число, a b — дійсні числа, i — уявна одиниця, така, що $i^2 = -1$.
- **[a; b]** — числовий проміжок (відрізок);
- **(a; b)** — числовий інтервал.

Розглянемо взаємозв'язок основних понять теорії множин на прикладі розв'язування задачі.

Задача 1.1. Перерахувати всі підмножини множини $A=\{a, b, c\}$.

Розв'язок. Для множини $A=\{a, b, c\}$ усі її підмножини можна знайти шляхом перерахування всіх можливих комбінацій елементів. Кількість підмножин множини A дорівнює 2^n , де n — кількість елементів множини. У нашому випадку $n=3$, тому $2^3=8$ підмножин.

Усі підмножини множини A :

- 1 $\emptyset$ (порожня множина),
- 2 $\{a\}$,
- 3 $\{b\}$,
- 4 $\{c\}$,
- 5 $\{a, b\}$,
- 6 $\{a, c\}$,
- 7 $\{b, c\}$,
- 8 $\{a, b, c\}$ (сама множина A).

1.1.2 Основні способи завдання множин

Способи завдання множин — це методи, за допомогою яких можна описати або визначити множину. Є два основних способи: **перелічення елементів** і **завдання властивості**. Окрім цього, є деякі додаткові підходи, які можуть бути корисними в різних задачах.

1 Перелічення елементів. Цей метод зручний для кінцевих множин.

Множину задають шляхом запису всіх її елементів у фігурних дужках $A=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.

Наприклад:

- $A=\{1, 2, 3, 4\}$ — множина цілих чисел від 1 до 4;
- $B=\{\text{червоний, зелений, синій}\}$ — множина кольорів.

2 Словесний. Вказівкою властивості (описово)

Множину задають через опис властивості, яка притаманна всім елементам множини: $A=\{x / P(x)\}$,

де $P(x)$ — умова (властивість), яку задовольняють елементи x .

Наприклад:

- $A = \{x / x > 0, x \in \mathbb{Z}\}$ — множина всіх додатних цілих чисел;
- $B = \{x / x^2 \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$ — множина всіх дійсних чисел, для яких квадрат не перевищує 4 ($B = [-2, 2]$).

3 Графічний спосіб

Множину можна задавати за допомогою геометричних чи інших графічних зображень.

Наприклад точки на площині, які лежать у колі радіуса r , утворюють множину $\{(x, y) / x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

4 Рекурсивний спосіб

Використовують для нескінченних або складних структур, коли вказують початковий елемент і правило утворення наступних.

Наприклад:

- A — множина натуральних чисел:
 - початковий елемент: $1 \in A$;
 - правило: якщо $n \in A$, то $n+1 \in A$.

5 Аналітичний спосіб. Побудова за правилом (формулою) — задають певну формулу або правило, за яким можна отримати кожен елемент множини.

Наприклад:

- Множина значень функції $f(x) = x^2, x \in [0, 3]$: $A = \{x^2 / x \in [0, 3]\} = [0, 9]$.

Вибір способу залежить від природи задачі та множини, яку потрібно описати.

1.1.3 Основні операції над множинами

1.1.3.1 Об'єднання множин ($A \cup B$). Об'єднанням множин A та B називають множину, що містить усі елементи, які належать хоча б одній із множин A або B . Запис: $A \cup B = \{x / x \in A \text{ або } x \in B\}$.

Тут «або» відіграє не розділову (або-або), а об'єднавчу роль, тобто об'єднанню належать і спільні елементи згаданих множин. (Об'єднання множин іноді називають сумою або додаванням множин).

Задача 1.2. Знайти об'єднання множин X і Y за умови, що

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, Y = \{2, 5, 8, 9\}.$$

Розв'язок. $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\}.$

1.1.3.2 Перетин множин ($A \cap B$). Перетином множин A та B називають множину, що містить усі елементи, які належать одночасно і A , і B .

Запис: $A \cap B = \{x / x \in A \text{ та } x \in B\}.$

(Перетин множин іноді називають добутком множин).

Задача 1.3. Знайти перетин множин X і Y за умови, що $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а $Y = \{2, 5, 8, 9\}.$

Розв'язок. $X \cap Y = \{2, 5\}.$

1.1.3.3 Різниця множин ($A \setminus B$). Ця операція, на відміну від операцій об'єднання і перетину, може бути застосована тільки для двох множин.

Різницею множин A та B називають множину, що містить усі елементи множини A , які не належать множині B .

Запис: $A \setminus B = \{x / x \in A \text{ та } x \notin B\}.$

Задача 1.4. Знайти $X \setminus Y$ і $Y \setminus X$, якщо $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $Y = \{2, 4, 6, 7\}.$

Розв'язок. $X \setminus Y = \{1, 3, 5\}, Y \setminus X = \{6, 7\}.$

1.1.3.4 Симетрична різниця множин A і B – це множина, яка складається з елементів, що належать або множині A , або множині B , але не належать обом одночасно. Її позначають як $A \Delta B$.

Запис: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$

де $A \setminus B$ – елементи A , яких немає в B ,

$B \setminus A$ – елементи B , яких немає в A .

Наприклад: Нехай $A=\{1,2,3\}$ і $B=\{3,4,5\}$.

- $A \setminus B = \{1,2\}$ – елементи A , яких немає в B ;
- $B \setminus A = \{4,5\}$ – елементи B , яких немає в A .

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 4, 5\}.$$

1.1.4 Ворожість маршрутів в теорії множин

Основні поняття

У теорії множин поняття «ворожість маршрутів» можна формалізувати через відносини між множинами, які представляють маршрути.

➤ **Множина маршруту:** Кожен маршрут можна представити як множину елементів (наприклад, секцій колії, стрілочний перевід у певному положенні, вузлів графу, або інших елементів, що використовують маршрутом). Наприклад: A і B — множини, які представляють два маршрути.

➤ **Ворожість маршрутів:** Два маршрути є «ворожими», якщо вони мають спільні елементи, тобто якщо їх множини перетинаються: $A \cap B \neq \emptyset$.

Це означає, що маршрути є ворожими, оскільки одночасне використання одного або більше елементів з двох маршрутів неможливе і може привести до зіткнення рухомого складу.

➤ **Виключення ворожості:** Два маршрути є неворожими, якщо вони не мають спільних елементів: $A \cap B = \emptyset$.

Математична модель:

Якщо система складається з n маршрутів, можна створити **матрицю ворожості H** , де кожен елемент h_{ij} визначається так:

$$h_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } A_i \cap A_j \neq \emptyset \text{ (ворожі маршрути);} \\ 0, & \text{якщо } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ (неворожі маршрути).} \end{cases}$$

Задача 1.5. Розглянемо систему з трьома маршрутами:

$$A=\{1,2,3\},$$

$$B=\{3,4,5\},$$

$$C=\{6,7\}.$$

Тоді:

- $A \cap B = \{3\}$, маршрути А і В є ворожими;
- $A \cap C = \emptyset$, маршрути А і С є неворожими;
- $B \cap C = \emptyset$, маршрути В і С є неворожими.

Матриця ворожості виглядатиме так:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пояснення

$$\begin{array}{c} A \quad B \quad C \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

– А і В мають спільний елемент {3}, тому вони є ворожими, що відображається в елементах $H[1,2]$ та $H[2,1]$;

– А і С, а також В і С не мають спільних елементів, тому вони неворожі ($H[1,3]=0$, $H[2,3]=0$, $H[3,1]=0$, $H[3,2]=0$).

Діагональні елементи (наприклад, $H[1,1]$) завжди дорівнюють 1, оскільки маршрут «ворожий самому собі» через повний збіг.

Виключення ворожості маршрутів у контексті теорії множин (і не тільки) стосується концепції, коли два або більше маршрутів в певній системі не заважають один одному, тобто вони можуть співіснувати або функціонувати паралельно без конфліктів.

1 У залізничному контексті:

Ця концепція може бути застосована для оптимізації руху поїздів.

Наприклад:

○ **Маршрути** — це послідовності секцій колії, які займає поїзд під час руху.

○ **Ворожість маршрутів** — це ситуація, коли два маршрути мають у своєму складі однакові ділянки колії, однакові стрілки в різних положеннях.

Виключення ворожості означає:

○ Розроблення таких алгоритмів, які запобігають одночасному вибору ворожих маршрутів.

○ Визначення підмножин маршрутів, які можуть використовувати одночасно.

2 У теорії множин:

Ворожість можна інтерпретувати через **перетин множин**. Якщо множини маршрутів A і B мають спільні елементи (наприклад, спільні колійні ділянки), це вказує на їхню ворожість:

$$A \cap B \neq \emptyset.$$

Виключення ворожості — це така конфігурація, коли перетин множин відсутній:

$$A \cap B = \emptyset.$$

1.2 Завдання для виконання

Завдання 1.1. Задати множину станцій залізничного вузла різними способами:

А переліченням елементів;

В описом властивості елементів (наприклад, усі станції з певним призначенням);

С комбінованим описом.

Завдання 1.2. Задати множину можливих маршрутів на станції, використовуючи:

А табличну форму;

В аналітичну форму (наприклад, маршрути з однаковою кількістю ділянок);

С комбіновану форму.

Завдання 1.3. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, якщо $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.

Завдання 1.4. Вказати усі підмножини множини $A = \{1, 2, 3\}$ та визначити їхні потужності.

Завдання 1.5. Є множина $A = \{a, b, c, d\}$ і множина $B = \{c, d, e, f\}$. Записати множину C , яка є симетричною різницею множин A і B . Визначити підмножини цієї множини та їхню потужність.

Завдання 1.6. Дано множини:

- $A\{P_1, P_2, P_3\}$ — маршрути, що дозволяють рух від станції S_1 до S_2 ;
- $B\{P_2, P_3, P_4\}$ — маршрути, що перетинають ділянку D_3 .

Виконати такі операції:

- об'єднання множин ($A \cup B$);
- перетин множин ($A \cap B$);
- різницю ($A \setminus B$).

Завдання 1.7. Знайти доповнення множин A до B , якщо $A = \{x: 1 < x < 2\}$, $B = \{x: 0 < x < 4\}$.

Завдання 1.8. Перелічити елементи множини

$$M = \{x: 2 < x < 15, x - \text{просте число}\}.$$

Задачі виключення ворожості маршрутів

Завдання 1.9. На залізничній станції є маршрути P_1, P_2, P_3 .

Наприклад, $P_1 = \{A, B, C\}$, $P_2 = \{B, C, D\}$, $P_3 = \{E, F\}$.

Визначити множини маршрутів, що є ворожими, враховуючи що маршрути вважають ворожими, якщо використовують однакові елементи одночасно.

Завдання 1.10. Формалізувати виключення ворожості.

- 1 Побудувати матрицю ворожості між маршрутами (завдання 2.1).
- 2 Використовуючи множини, визначити ворожі маршрути та запропонувати варіанти їхнього розведення.

1.2.1 Завдання для самостійного розв'язання

- 1 Множина $A = \{7, 8, 9\}$, множина $B = \{a, b, c\}$. Скільки підмножин у A і B ?
- 2 Множина $A = \{9, 7, 8\}$, множина $B = \{e, f\}$. Перерахувати їхні множини. Яка множина має більше підмножин?
- 3 Перерахувати всі підмножини множини $A = \{1, 2, 3\}$.
- 4 Записати, що множина B є підмножиною множини A .

Завдання

На станції є два типи маршрутів: маневрові (F) та поїзні (P).

- $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ — множина маневрових маршрутів;
- $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ — множина поїзних маршрутів.

Завдання:

- задати множини маршрутів, які перетинаються з певним маневровим маршрутом (f_1);
- знайти всі можливі поїзні маршрути, які не мають ворожості з маневровими.

Підказка. Для кожного маршруту самостійно задати його ділянки.
Наприклад: $f_1 = \{A, B, C\}$, $f_2 = \{C, D\}$ і т. д.

Використана література: [1], [2], [4], [5].

Практичне заняття 2

ГЕОМЕТРИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ОПЕРАЦІЙ НАД МНОЖИНАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ КРУГІВ ЕЙЛЕРА. ВИКОНАННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ОПЕРАЦІЙ НАД МНОЖИНАМИ. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦІЇ ПОТОКІВ.

Мета заняття – ознайомлення з геометричним представленням операцій над множинами за допомогою кругів Ейлера та застосування спеціальних операцій над множинами для розв'язання задач.

2.1 Короткі теоретичні відомості

2.1.1 Геометричне представлення операцій над множинами за допомогою кругів Ейлера

Множина – це сукупність елементів, які мають певну спільну властивість.

Операції над множинами — це дії, які дають змогу утворювати нові множини з наявних, надаючи їм різні комбінаційні або структурні властивості.

Основні операції: **об'єднання множин** ($A \cup B$); **перетин множин** ($A \cap B$); **різниця множин** ($A \setminus B$); дивись попереднє практичне заняття та конспект лекції.

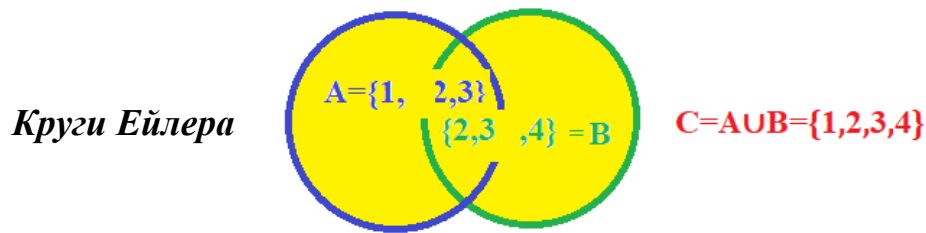
Спеціальні операції над множинами – це математичні дії, які дають змогу аналізувати відносини між множинами та виконувати різні маніпуляції з їхніми елементами.

Круги Ейлера – це наглядний спосіб показати за допомогою кругів взаємозв'язок між різними групами або множинами.

Спеціальні операції над множинами. Круги Ейлера

1 Об'єднання множин ($A \cup B$) визначає множину елементів, які належать і множині А, і множині В: $A \cup B: A \cup B = \{x / x \in A \text{ або } x \in B\}$.

Наприклад: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$ $A \cup B = \{1,2,3,4\}$.



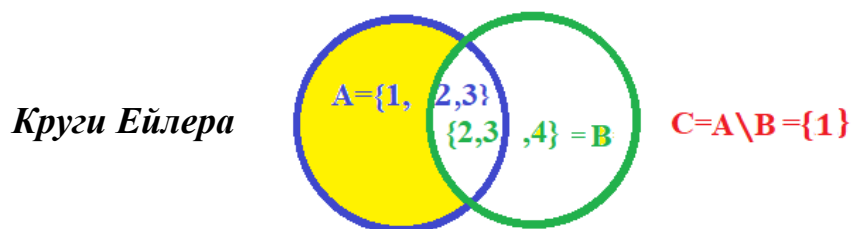
2 Перетин множин ($A \cap B$) визначає множину елементів, які належать одночасно і A , і B : $A \cap B = \{x/x \in A \text{ і } x \in B\}$.

Наприклад: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$ $A \cap B = \{2,3\}$.



3 Різниця множин ($A \setminus B$) визначає множину елементів, які належать A , але не належать B : $A \setminus B = \{x/x \in A \text{ і } x \notin B\}$.

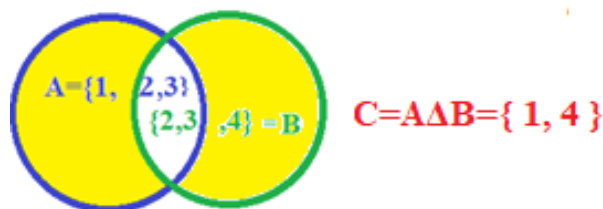
Наприклад: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$ $A \setminus B = \{1\}$.



4 Симетрична різниця ($A \Delta B$) визначає множину елементів, які належать A або B , але не належать обом одночасно: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Наприклад: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$ $A \Delta B = \{1,4\}$.

Круги Ейлера



5 Декартовий добуток ($A \times B$) визначає множину впорядкованих пар, де перший елемент пари належить A , а другий — B : $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

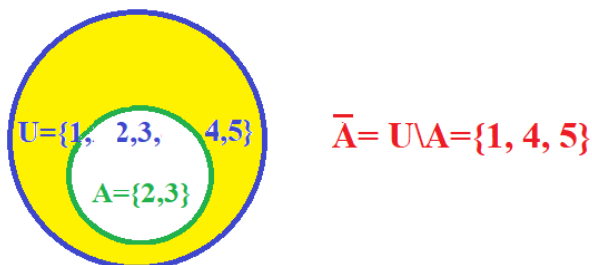
Наприклад: $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

! Круги Ейлера не використовують для візуалізації декартового добутку множин оскільки декартовий добуток містить впорядковані пари, він не є множиною, яку можна легко представити у вигляді областей, що перекриваються.

6 Доповнення множини ($\bar{A}$ або A^c) визначає множину всіх елементів універсальної множини U , які не належать A : $\bar{A} = \{x | x \in U \text{ і } x \notin A\}$

Наприклад: Нехай $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 3\}$ $\bar{A} = U \setminus A = \{1, 4, 5\}$.

Круги Ейлера



Коротке узагальнення (таблиця 2.1).

Таблиця 2.1 – Операції над множинами

Операція	Позначення	Опис
Об'єднання	$A \cup B$	Усі елементи A та B
Перетин	$A \cap B$	Спільні елементи A та B
Різниця	$A \setminus B$	Елементи A , яких немає в B
Симетрична різниця	$A \Delta B$	$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
Доповнення	$\bar{A}$	Елементи U , що не в A
Декартів добуток	$A \times B$	Пари елементів (a, b)

2.1.2 Розв'язання задач маршрутизації потоків

Задачі маршрутизації потоків пов'язані з оптимальним розподілом потоків у мережах, щоб задовольнити певні обмеження або цільові функції, такі як мінімізація часу передавання, витрат чи збільшення пропускної спроможності.

На залізничному транспорті задачі маршрутизації потоків є прикладом оптимізації мережових потоків у транспортній системі. Вони стосуються **розподілу поїздів, вантажопотоків і пасажирських перевезень** через залізничну мережу з урахуванням обмежень інфраструктури та ресурсів.

Для розв'язання задач маршрутизації потоків на залізничному транспорті з використанням теорії множин можна створити формалізований алгоритм. Він базується на описі залізничної мережі, вузлів і маршрутів через множини та операції над ними.

Задача 2.1. Розподіл залізничних маршрутів між станціями

Залізнична компанія має 50 доступних маршрутів:

- A : маршрути між станціями P і Q — $|A|=25$;
- B : маршрути між станціями Q і R — $|B|=20$;
- $A \cap B$: маршрути, що проходять через станції P , Q , і R — $|A \cap B|=10$.

Визначити:

- 1 кількість маршрутів, які проходять лише між P і Q ;
- 2 маршрути, що не пов'язані зі станцією Q .

Розв'язок

Дано:

- 1 A — множина маршрутів між станціями P і Q , $|A|=25$;
- 2 B — множина маршрутів між станціями Q і R , $|B|=20$;
- 3 $A \cap B$ — маршрути, що проходять через станції P , Q , і R , $|A \cap B|=10$,

де $|A|$, $|B|$, $|A \cap B|=10$ – потужність відповідних множин.

Потрібно знайти:

- 1 кількість маршрутів, які проходять лише між Р і Q;
- 2 кількість маршрутів, що не пов'язані зі станцією Q.

1 Кількість маршрутів лише між Р і Q

Маршрути, які проходять лише між станціями Р і Q, належать до множини А, але **не перетинаються** з множиною В (це маршрути, які не включають R, тобто належать множині А, але не В). Іншими словами, це різниця множин $A \setminus B$. Визначимо кількість елементів у $A \setminus B$:

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|.$$

Підставимо значення: $|A \setminus B| = 25 - 10 = 15$.

2 Маршрути, що не пов'язані зі станцією Q

Щоб знайти маршрути, що **не пов'язані зі станцією Q**, зауважимо:

- А і В містять усі маршрути, які проходять через Q (між Р-Q і Q-R);
- загальна кількість маршрутів через Q містить маршрути, які належать до об'єднання множин $A \cup B$.

Для обчислення $|A \cup B|$ скористаємося формулою для об'єднання множин:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Підставимо значення: $|A \cup B| = 25 + 20 - 10 = 35$.

Отже, **35 маршрутів пов'язані зі станцією Q**.

Тепер загальна кількість усіх маршрутів — 50 (за умовою задачі).

Маршрути, що **не пов'язані зі станцією Q**, становлять доповнення до $A \cup B$:

Маршрути без Q = Загальна кількість маршрутів – $|A \cup B|$

Маршрути без Q = $50 - 35 = 15$.

Відповідь:

- 1 маршрутів, які проходять лише між Р і Q: **15**;
- 2 маршрутів, що не пов'язані зі станцією Q: **15**.

2.2 Завдання для виконання

Завдання 2.1. Множини A , B і C перетинаються. За допомогою кругів Ейлера зобразити результати операцій: об'єднання всіх множин; перетину всіх множин; різниці множин $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus C$, $A \setminus B \setminus C$.

Завдання 2.2. Є три множини. За допомогою кругів Ейлера зобразити результат операції $(A \cap B) \cup C$, якщо $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

Завдання 2.3. Є три множини. За допомогою кругів Ейлера зобразити результат операції симетричної різниці множин $A \Delta B \Delta C$.

Завдання 2.4. Вплив наявності певних операцій на станції на маршрутизацію

На залізничному вузлі є станції з такими операціями:

- А: станції для обробки небезпечних вантажів;
- В: станції для сортування контейнерів;
- С: станції для технічного обслуговування поїздів.

1 Визначити загальну кількість маршрутів, якщо наявні такі дані:

- $|A|=20$, $|B|=15$, $|C|=10$;
- спільні операції між $A \cap B=5$, $B \cap C=3$, $A \cap C=4$, $A \cap B \cap C=2$.

2 Побудувати діаграму Ейлера для візуалізації та знайти, скільки станцій обслуговують лише один тип операцій.

Завдання 2.5. Оптимізація маршрутів поїздів

На станції обробляють три типи вантажних поїздів:

- А: потяги, що прямують через місто Х;
- В: потяги, що прямують через місто Y;
- С: потяги, що доставляють вантажі до міста К.

Знайти кількість потягів, що одночасно проходять через міста X і Y , але не заходять у K , якщо:

- усього $|A|=40$, $|B|=30$, $|C|=20$ (кількість елементів у множинах (кардинальність множин));
- потяги $A \cap B = 15$;
- потяги $A \cap C = 10$;
- потяги $B \cap C = 5$;
- потяги $A \cap B \cap C = 3$.

2.2.1 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 2.6. Маршрутизація потоків через вузли

На залізничному вузлі обробляють:

- А: вантажі, що прямують у північному напрямку;
- В: вантажі, що прямують у західному напрямку;
- С: вантажі, що прямують на центральний склад.

За допомогою кіл (діаграм) Ейлера визначити:

- 1 вантажі, що одночасно проходять північний і західний напрямки, але не надходять до центрального складу;
- 2 усі вантажі, що проходять хоча б один із напрямків.

Завдання 2.7. Побудова альтернативних маршрутів

На ділянці залізничної лінії є три групи станцій:

- А: станції, що обслуговують швидкісні потяги;
- В: станції, що обслуговують пасажирські потяги;
- С: станції, що обслуговують вантажні потяги.

Побудувати діаграму Ейлера для множин А, В і С, якщо:

- 1 усі три множини мають спільні елементи;
- 2 є станції, що обслуговують лише два типи потягів;
- 3 знайти, які станції обслуговують виключно швидкісні потяги.

Завдання 2.8. Вибір маршрутів для потягів на основі пріоритетів

На маршруті між містами А, В і С обслуговують потяги:

- Х: пасажирські (50 маршрутів);
- У: вантажні (40 маршрутів);
- К: приміські (30 маршрутів).

Визначити:

- 1 визначити маршрути, які є унікальними для кожного типу потягів;
- 2 скільки таких маршрутів?

Порада: Побудувати діаграми Ейлера для аналізу.

2.2.2 Додаткові завдання

1 Множина $A = \{a, b, c, d\}$, множина $B = \{c, d, e, f\}$. Записати множину C , що є симетричною різницею множин A і B . Зобразити у вигляді кругів Ейлера.

2 Як записати факт, що: перетин множин A і B є пуста множина; різниця множин A і B є пуста множина; симетрична різниця множин A і B є пуста множина?

3 Множина $A = \{a, b, c, d\}$, множина $B = \{a, b, c\}$. Записати множину C , що є різницею множин A і B . Зобразити у вигляді кругів Ейлера.

4 Множина $A = \{a, b, c, d\}$, множина $B = \{c, d, e, f\}$. Зобразити у вигляді кругів Ейлера множину, отриману за формулою $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Використана література: [1], [2], [5], [6].

Практичне заняття 3

ГЕОМЕТРИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ОПЕРАЦІЙ НАД МНОЖИНАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ДІАГРАМ ВЕННА. ВИЗНАЧЕННЯ ВІДНОШЕНЬ МІЖ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ СИСТЕМ АВТОМАТИКИ. ВСТАНОВЛЕННЯ МОРФІЗМІВ

Мета заняття – ознайомлення зі способами візуалізації взаємодії множин на площині, геометричним представленням операцій над множинами за допомогою діаграм Венна, визначенням відношень між технологічними об'єктами систем автоматики. Встановлення морфізмів.

3.1 Короткі теоретичні відомості

3.1.1 Геометричне представлення операцій над множинами за допомогою діаграм Венна

Геометричне представлення операцій над множинами — це візуалізація взаємодії множин на площині, зазвичай у вигляді діаграм Венна або інших графічних засобів. Це дає змогу наочно продемонструвати, як множини перетинаються, об'єднуються, віднімаються тощо.

Наприклад. Є дві множини A і B



Множина A представляє всіх живих істот, які мають дві ноги (помаранчеве коло). Множина B представляє живих істот, які можуть літати (синє коло).

Кожен окремий тип істоти можна уявити як точку десь на діаграмі. Живі істоти, які можуть і літати, і мають дві ноги (наприклад, голуб), знаходяться в обох колах, тому вони відповідають точкам області, де синє і

помаранчеве кола перетинаються. У цій області містяться всі такі і тільки такі живі істоти.

Люди та пінгвіни є двоногі, і тому вони знаходяться в помаранчевому колі, але оскільки вони не можуть літати, вони знаходяться в лівій частині помаранчевого кола, де воно не перетинається з синім.

Комарі мають шість ніг і літають, тому точка для комарів знаходиться в частині синього кола, що не перетинається з помаранчевим.

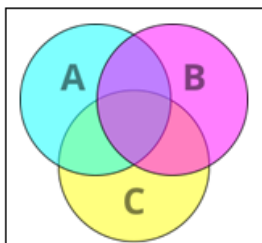
Істоти, які не мають двох ніг і не можуть літати (наприклад, кити і тигри), будуть представлені точками за межами обох кіл.

Діаграма Венна — діаграма, що показує всі можливі логічні відношення для скінченного набору множин.

Діаграми Венна використовують для вивчення елементарної теорії множин та ілюстрації простих співвідношень в різних областях науки і техніки (теорії ймовірності, логіці, інформатиці та інших).

Окрім діаграм Венна, використовують також круги Ейлера для зображення всіх можливих відношень між різними множинами, зокрема і таких, коли одна множина містить іншу або взагалі відсутні перетини множин.

Діаграми Венна є візуальними інструментами для представлення операцій над множинами. Вони дають змогу чітко показати, які елементи належать різним частинам множин при виконанні операцій об'єднання, перетину, різниці та інших.



Діаграма Венна зображує всі можливі перетини множин. Всього таких перетинів буде 2^n , де n — кількість множин. Для трьох множин діаграму Венна звичайно зображують у вигляді трьох кіл з центрами у вершинах рівностороннього трикутника і однаковим радіусом, приблизно рівним довжині сторони трикутника.

Пояснення щодо кількості перетинів для 3-х множин. Кожен елемент універсальної множини може:

- входити лише в одну з трьох множин (3 варіанти);
- входити в будь-які дві з трьох (3 варіанти);
- входити в усі три множини одночасно (1 варіант);
- не входити в жодну з них (1 варіант).

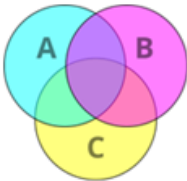
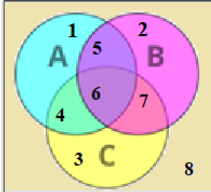
Всього: $3+3+1+1=8$.

Порівняння з кругами Ейлера (таблиця 3.1). Приклад (таблиця 3.2).

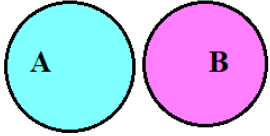
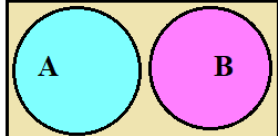
Таблиця 3.1 – Порівняння діаграм Венна і кіл Ейлера

Критерій	Діаграми Венна	Круги Ейлера
Області	Усі можливі, навіть порожні	Тільки ті, які не є порожніми
Фокус	Абстрактні взаємозв'язки	Конкретні взаємозв'язки
Гнучкість	Фіксована структура (усі перетини завжди є)	Змінна структура залежно від даних
Складність побудови	Простіший алгоритм	Вимагає знань про наявні зв'язки
Застосування	Логічний аналіз, теорія множин	Опис реальних даних, конкретних ситуацій

Таблиця 3.2 – Приклад порівняння

Круги Ейлера	Діаграма Венна
1	2
<i>І Якщо є три множини A, B, C:</i>	
У кругах Ейлера буде лише стільки областей, скільки існує в реальності 	У діаграмі Венна завжди буде показано 8 областей (включаючи порожні) 

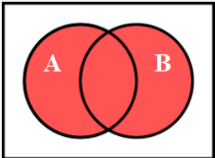
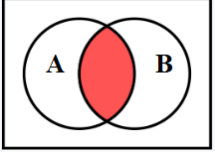
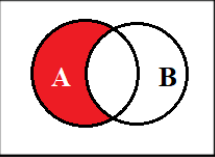
Продовження таблиці 3.2

1	2
<i>2 Якщо $A \cap B = \emptyset$:</i>	
На кругах Ейлера А і В зображені як окремі непересічні множини	На діаграмі Венна А і В все одно перетинаються (порожній перетин показаний)
	

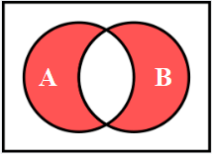
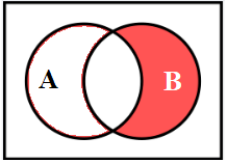
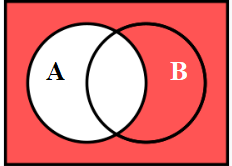
3.1.2 Основні операції над множинами та їхнє представлення діаграмами Венна

Основні операції над множинами та їхнє представлення діаграмами Венна можна описати таблицею 3.3.

Таблиця 3.3 – Представлення основних операцій діаграмами Венна

Операція	Діаграма Венна
1	2
1 Об'єднання множин ($A \cup B$): множина всіх елементів, які належать хоча б одній з множин А або В. У діаграмі Венна об'єднання двох множин зображують як обидві множини, закрашені разом (включаючи їх перетин) $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$	
2 Перетин множин ($A \cap B$): множина всіх елементів, які належать одночасно і А, і В. У діаграмі Венна перетин множин зображують як область, де дві множини перекриваються, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$	
3 Різниця множин ($A \setminus B$): множина всіх елементів, які належать А, але не належать В. У діаграмі Венна різницю множин зображують як область тільки в А, без частини, яка перекривається з В, $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$	

Продовження таблиці 3.3

1	2
4 Симетрична різниця множин ($A \Delta B$): множина всіх елементів, які належать тільки одній з множин А або В, але не обом одночасно. Симетричну різницю зображують як області, що не перекриваються між двома множинами, тобто викидають частину перетину $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	
5 Доповнення множини ($\bar{A}$): множина всіх елементів, які не належать множині А. Доповнення множини зображують як всю область, що знаходиться поза множиною А, $\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$ відносне доповнення абсолютне доповнення	 
6 Декартовий добуток множин ($A \times B$): множина всіх упорядкованих пар, де перший елемент належить А, а другий — В : $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ і } b \in B\}$. Діаграми Венна для декартового добутку не існує у звичному вигляді, оскільки це операція над елементами множин, а не над їхніми областями	Діаграми Венна для декартового добутку не існує
7 Потужність множини — це кількість елементів у множині. Для скінченних множин її позначають як A, де А — множина. Наприклад, для множини $A = \{1,2,3\}$ потужність $A =3$. Потужність множини визначають як кількість елементів, які можна побачити в діаграмі Венна, що знаходяться в межах множини. Кількість елементів у множині $A =3$	

Задача 3.1. Обробка сигналів в автоматизованій системі

На підприємстві використовують систему автоматики з трьома типами датчиків:

- А: датчики температури ($|A|=30$);
- В: датчики тиску ($|B|=25$);
- С: датчики вологості ($|C|=20$).

Відомо, що $|A \cap B| = 10$, $|B \cap C| = 8$, $|A \cap C| = 7$, $|A \cap B \cap C| = 5$.

1 Визначити кількість датчиків, які обробляють лише один параметр.

2 Побудувати діаграму Венна для візуалізації взаємозв'язків між датчиками.

Розв'язок

Маємо три множини, що відповідають типам датчиків:

- А: датчики температури ($|A| = 30$);
- В: датчики тиску ($|B| = 25$);
- С: датчики вологості ($|C| = 20$).

Крім того, відомо, що є перетини між множинами:

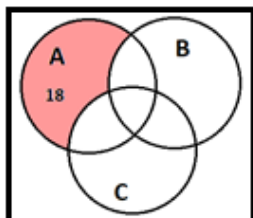
- $|A \cap B| = 10$: датчики, що обробляють одночасно температуру і тиск;
- $|B \cap C| = 8$: датчики, що обробляють одночасно тиск і вологість;
- $|A \cap C| = 7$: датчики, що обробляють одночасно температуру і вологість;
- $|A \cap B \cap C| = 5$: датчики, що обробляють усі три параметри.

1 Визначення датчиків, що обробляють лише один параметр

Щоб знайти кількість датчиків, що обробляють лише один параметр, потрібно виключити з $|A|$, $|B|$, $|C|$ ті датчики, які належать до перетинів множин.

Датчики, що обробляють лише температуру (Т)

Ці датчики належать до множини А, але не належать до жодного іншого перетину. Враховуючи, що $|A|$ містить всі датчики, що належать до А, потрібно відняти:



- $|A \cap B|$: датчики, що належать до А і В;
- $|A \cap C|$: датчики, що належать до А і С.

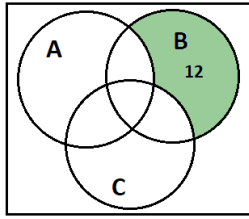
Додати $|A \cap B \cap C|$: тому що ми їх відняли двічі (враховані як частини $|A \cap B|$ та $|A \cap C|$).

Формула: $|A_T| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Обчислення: $|A_T| = 30 - 10 - 7 + 5 = 18$.

Датчики, що обробляють лише тиск (P)

Аналогічно обчислюємо для B:

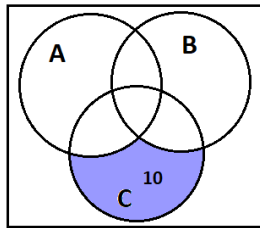


$$|B_P| = |B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Обчислення: $|B_P| = 25 - 10 - 8 + 5 = 12.$

Датчики, що обробляють лише вологість (φ)

Для C:



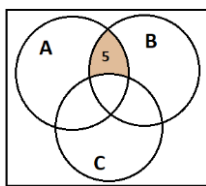
$$|C_\phi| = |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Обчислення: $|C_\phi| = 20 - 7 - 8 + 5 = 10.$

2 Визначення датчиків, що обробляють два параметри

Щоб знайти датчики, що обробляють **рівно два параметри**, беремо перетини двох множин та виключаємо тих, хто обробляє всі три параметри ($|A \cap B \cap C|$).

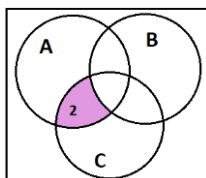
Датчики, що обробляють лише температуру і тиск:



$$|A \cap B \setminus C| = |A \cap B| - |A \cap B \cap C|.$$

Обчислення: $|A \cap B \setminus C| = 10 - 5 = 5.$

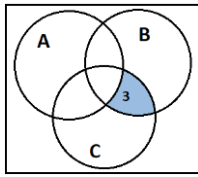
Датчики, що обробляють лише температуру і вологість:



$$|A \cap C \setminus B| = |A \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Обчислення: $|A \cap C \setminus B| = 7 - 5 = 2.$

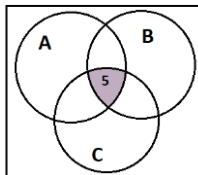
Датчики, що обробляють лише тиск і вологість:



$$|B \cap C \setminus A| = |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

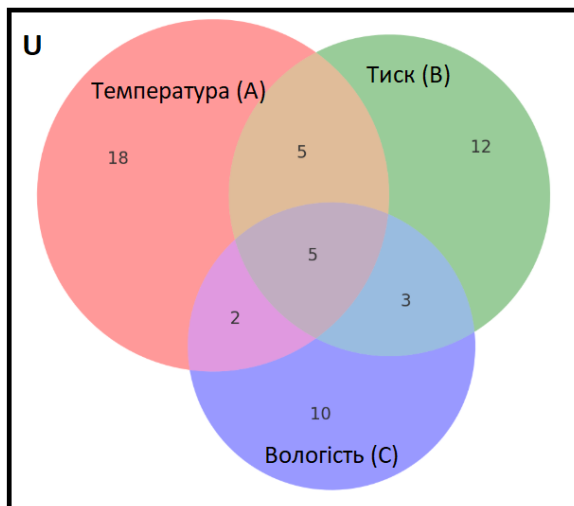
$$\text{Обчислення: } |B \cap C \setminus A| = 8 - 5 = 3.$$

3 Визначення датчиків, що обробляють всі три параметри



$$\text{Це вже задано: } |A \cap B \cap C| = 5.$$

4 Побудова діаграми Венна. Діаграма Венна, яка візуалізує взаємозв'язки між датчиками температури, тиску та вологості. Вона містить всі обчислені значення для датчиків, що обробляють різні параметри окремо, попарно та всі три параметри одночасно:



- 1 Лише температура (A_T): 18;
- 2 Лише тиск (B_P): 12;
- 3 Лише вологість (C_Φ): 10;
- 4 Температура і тиск ($A \cap B \setminus C$): 5;
- 5 Температура і вологість ($A \cap C \setminus B$): 2;
- 6 Тиск і вологість ($B \cap C \setminus A$): 3;
- 7 Усі три параметри ($A \cap B \cap C$): 5.

3.1.3 Визначення відношень між технологічними об'єктами систем автоматики. Встановлення морфізмів

3.1.3.1 Відношення між технологічними об'єктами систем автоматики — це логічні або функціональні зв'язки між елементами або компонентами автоматизованої системи. Ці відношення визначають, як

об'єкти взаємодіють один з одним і як змінюються залежно від умов чи впливів, що на них діють. Вони можуть бути описані за допомогою математичних моделей, таких як множини, функції, графи чи відношення.

У контексті залізничного транспорту – містять взаємодію різних елементів залізничної інфраструктури та систем автоматизованого управління. Технологічні об'єкти в системах автоматики залізниць можуть бути різними: контролери, датчики, поїзди, стрілки, світлофори, станції та інші. Вони взаємодіють через різноманітні відношення, що забезпечують безпечне, ефективне та злагоджене функціонування залізничного транспорту.

Наприклад, відношення між поїздом і сигналом

Кожен поїзд на залізниці має бути інформований про стан сигналу (зелене, жовте, червоне світло), який управляється автоматичною системою. Це відношення може бути описано як зв'язок між датчиком (який визначає стан сигналу) і контролером (який передає інформацію на дисплей поїзда або в кабіну машиніста).

3.1.3.2 Морфізми в контексті систем автоматики

Морфізми — це математичні функції або перетворення, які зберігають структуру між об'єктами чи системами. У контексті технологічних об'єктів систем автоматики морфізми можуть бути використані для опису зв'язків і перетворень між різними рівнями або частинами системи.

1 Морфізми між множинами: якщо розглядати технологічні об'єкти як елементи множини, то морфізм може бути відображенням одного набору елементів у інший. Наприклад, це може бути перетворення вхідних сигналів вхідних пристроїв у керуючі сигнали для актуаторів.

2 Морфізми між системами: у більш складних випадках, коли йдеться про відношення між підсистемами автоматизації, морфізм може описувати, як одна підсистема (наприклад, сенсорна частина) перетворює

вхідні дані в результат, який потім використовується іншою підсистемою (наприклад, модулем обробки даних).

Морфізми в контексті систем автоматики залізниць можуть бути використані для забезпечення збереження структури між різними рівнями контролю та обробки інформації. Вони допомагають створити єдину схему взаємодії об'єктів на різних рівнях автоматики. Ось кілька прикладів.

Морфізм між сигналами і контролером маршруту

Сигнальні системи можуть бути представлені як елементи множини, а функція контролера маршруту — як відображення сигналів на інші операції (наприклад, зміна напрямку руху поїзда). Морфізм описує відношення між вхідними сигналами та вихідними командами для зміни напрямку поїзда або його зупинки.

Задача 3.2. Залізничними перевезеннями управляє система автоматичного керування рухом поїздів (АСУ РП). На станції є два світлофори (сигнали), які керують рухом поїздів, та автоматична система керування маршрутом, що забезпечує безпечне переведення поїздів з однієї колії на іншу (зміна напрямку руху за допомогою стрілок).

Для спрощення припустимо, що система має два поїзди, що знаходяться на різних коліях, і необхідно визначити, коли можна переводити поїзд з однієї колії на іншу, враховуючи показання сигналів та поточний стан маршруту.

Узагальнення задачі

Маємо

- є два світлофори: один для поїзда на колії 1, інший — на колії 2;
- світлофор показує зелене світло для поїзда, якщо колія вільна;
- показує червоне світло, якщо колія зайнята;
- стрілка на колії 1 може бути переведена на колію 2, коли колія 2 вільна і світлофор на колії 2 буде показувати зелений вогонь;

- коли стрілка переведена, поїзд може рухатися на іншу колію, за умови, що сигнал буде зеленим.

Завдання

1 Побудувати відношення між технологічними об'єктами цієї системи (сигналами, стрілками, поїздами).

2 Визначити, за яких умов поїзд може змінити колію.

3 Описати рішення з використанням морфізмів.

Розв'язок

1 Визначення відношень

Відношення в цій задачі можна побудувати між такими технологічними об'єктами:

- **поїзд та світлофор:** кожен поїзд може бути на колії, у випадку зайнятості колії світлофор буде показувати червоне світло, у випадку вільності колії – зелене світло;

- **колія та стрілка:** якщо колія 2 вільна, то можна перевести стрілку в інше положення, що дозволяє поїзду змінити колію;

- **поїзд та стрілка:** якщо стрілка переведена на колію 2, то поїзд може перейти на іншу колію, якщо для цього є зелений сигнал.

2 Умови зміни колії

Поїзд може змінити колію за таких умов:

- світлофор на колії 2 має бути зеленим (тобто колія вільна);
- стрілка має бути переведена на колію 2, щоб поїзд міг змінити напрямок;

- після переведення стрілки поїзд може рухатися на колію 2, якщо сигнал на цьому шляху залишатиметься зеленим.

3 Використання морфізмів

Морфізм у цій задачі можна розглядати як перетворення між різними етапами взаємодії між компонентами:

- **морфізм між колією і стрілкою:** це відображення між станом колії (вільна чи зайнята) і можливістю переведення стрілки. Наприклад, якщо колія вільна, то за допомогою морфізму ми можемо перевести стрілку на колію 2;

- **морфізм між поїздом і сигналом:** поїзд реагує на сигнал світлофора. Якщо сигнал зелений, поїзд може рухатися вперед, якщо червоний — стоїть.

Алгоритм

1 **Початковий стан:** поїзд на колії 1, сигнал на колії 2 червоний, сигнал на колії 1 зелений.

2 Якщо поїзд на колії 1 закінчив рух або зупинився, тоді перевіряється стан сигналу на колії 2:

- якщо сигнал на колії 2 зелений (колія вільна), тоді можна перевести стрілку на колію 2;

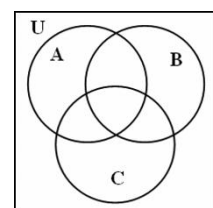
- якщо сигнал на колії 2 червоний (колія зайнята), стрілка не може бути переведена, і поїзд не може змінити колію.

3 Після переведення стрілки та зміни сигналу, поїзд може рухатися на колію 2.

Висновок. Морфізм між сигналом, стрілкою та поїздом дає змогу формалізувати взаємодії між об'єктами системи автоматики залізничного транспорту. Система автоматичного керування дозволяє здійснювати переведення поїздів з однієї колії на іншу тільки за умови, що всі необхідні умови безпеки виконуються (колія вільна, стрілка переведена в потрібне положення, відсутні ворожі маршрути).

3.2 Завдання для виконання

Завдання 3.1. Є три множини, які перетинаються.



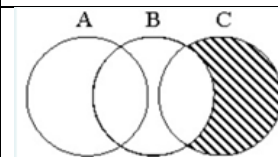
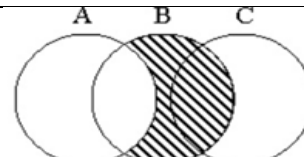
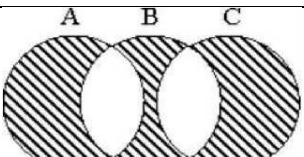
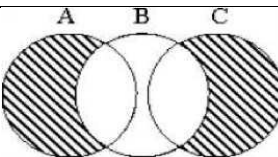
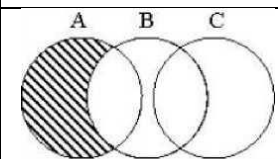
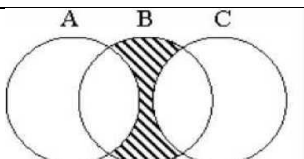
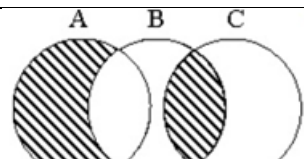
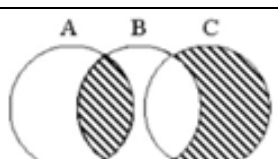
1 Визначити (заштрихувати) регіон, який представляє: **об'єднання** $A \cup B$; **перетин** $A \cap B$; **різницю** $A \setminus B$; **симетричну різницю** $A \Delta B$; **доповнення** $\bar{A}$.

2 Також визначити результати таких операцій: $C \setminus (A \cup B)$; $(B \setminus A) \cup (C \cap B)$; $(A \Delta B) \Delta C$; $(C \cup A) \setminus B$; $(A \setminus B) \cup C$; $(B \setminus A) \setminus C$; $(A \setminus B) \cup (B \cap C)$.

Завдання 3.2. Нехай є три множини $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ та $C = \{3, 4, 5\}$. Представити у вигляді діаграм Венна: **об'єднання** A і B ; **перетин** A і B ; **різницю** A і B ; **симетричну різницю** A і B ; **доповнення** $\bar{A} = \{4, 5\}$ до універсальної множини $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Завдання 3.3. Нехай множина A – це коло точок, множина B – коло точок, множина C також коло точок площини. Записати операції над множинами, за допомогою яких отримані заштриховані області, представлені у таблиці 3.4.

Таблиця 3.4 – Вихідні дані для завдання 3.3

1	2	3	4
			
5	6	7	8
			

Завдання 3.4. Класифікація технологічних станцій

На автоматизованому складі існують три типи технологічних станцій:

- А: станції зберігання рідин ($|A|=50$);
- В: станції зберігання сипучих матеріалів ($|B|=40$);

- С: універсальні станції ($|C|=30$).

Відомо, що $|A \cap B|=20$, $|B \cap C|=15$, $|A \cap C|=10$, $|A \cap B \cap C|=5$.

- 1 Визначити загальну кількість станцій.
- 2 Знайти кількість станцій, що обслуговують одночасно два типи матеріалів, але не всі три.
- 3 Побудувати діаграму Венна.

Завдання 3.5. Встановлення відношень між сигналами

У системі автоматики сигнали класифікуються за функціями:

- А: сигнали аварійного сповіщення ($|A|=25$);
- В: сигнали регуляції ($|B|=20$);
- С: діагностичні сигнали ($|C|=15$).

Відомо, що $|A \cap B|=8$, $|B \cap C|=6$, $|A \cap C|=5$, $|A \cap B \cap C|=3$.

- 1 Визначити кількість сигналів, що виконують лише одну функцію.
- 2 Встановити морфізм між множинами сигналів: яке відношення відображає функціональні зв'язки між аварійними та діагностичними сигналами?

Завдання 3.6. Синхронізація систем автоматики

У мережі автоматизації є три типи вузлів:

- А: вузли обробки вхідних даних;
- В: вузли зберігання даних;
- С: вузли передавання даних.

Загальна кількість вузлів: $|A|=40$, $|B|=30$, $|C|=20$.

Відомо, що $|A \cap B|=15$, $|B \cap C|=10$, $|A \cap C|=12$, $|A \cap B \cap C|=5$.

- 1 Визначити кількість вузлів, які виконують всі три функції.
- 2 Побудувати діаграму Венна та знайти вузли, які обробляють дані та передають їх, але не зберігають.

Завдання 3.7. Аналіз взаємозв'язків у системах

На підприємстві існують три категорії пристроїв:

- А: пристрої для моніторингу;

- В: пристрої для аналізу;
- С: пристрої для обробки даних.

Встановлено відношення морфізмів між ними:

- $A \rightarrow B$: моніторинг подає дані на аналіз;
- $B \rightarrow C$: аналізовані дані обробляють;
- $A \rightarrow C$: моніторинг подає дані безпосередньо на обробку.

1 Побудувати граф морфізмів між множинами А, В, С.

2 Знайти функціональну залежність між пристроями, якщо $|A|=30$, $|B|=25$, $|C|=20$.

Завдання 3.8. Структуризація потоків даних

У системі автоматизації є три типи потоків:

- А: вхідні потоки;
- В: проміжні обчислення;
- С: вихідні результати.

Загальні кількості: $|A|=50$, $|B|=40$, $|C|=30$.

Відомо, що $|A \cap B|=20$, $|B \cap C|=15$, $|A \cap C|=10$, $|A \cap B \cap C|=5$.

- 1 Визначити, які потоки належать лише одній категорії.
- 2 Побудувати діаграму Венна для аналізу.

3.2.1 Завдання для самостійного розв'язання

Зобразити у вигляді діаграми Венна результат виконання операції (заштрихувати відповідну область): $A \setminus (C \cup B)$; $(C \cup A) \setminus B$; $A \cup B$; $(A \setminus B) \cup C$; $(A \cap C) \cap B$; $(C \setminus B) \cup (B \cap A)$.

Завдання 3.9. Оптимізація роботи технологічних об'єктів

На виробництві функціонують три категорії об'єктів:

- А: об'єкти контролю;
- В: об'єкти калібрування;
- С: об'єкти технічного обслуговування.

Дано:

- $|A|=60, \quad |B|=45, \quad |C|=35;$
- $|A \cap B|=25, \quad |B \cap C|=15, \quad |A \cap C|=20, \quad |A \cap B \cap C|=10.$

1 Визначити загальну кількість об'єктів.

2 Побудувати діаграму Венна та знайти об'єкти, що виконують лише технічне обслуговування.

Використана література: [1 – 3], [5].

Практичне заняття 4

ТЕОРЕТИКО-ГРУПОВА ФОРМАЛІЗАЦІЯ СИСТЕМ АВТОМАТИКИ. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ГРУПОВОГО ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Мета заняття – навчитися застосовувати теоретико-груповий підхід для моделювання та аналізу систем автоматизації, засвоїти методику групового представлення технологічних об'єктів, вивчити принципи групування функціональних елементів багаторівневих систем керування.

4.1 Короткі теоретичні відомості

Теоретико-групове представлення систем і об'єктів автоматизації базується на застосуванні методів теорії груп для аналізу та моделювання їхніх структур і властивостей. В автоматизованих системах, таких як системи керування, роботи чи програмні комплекси, важливо розуміти їхню симетрію, інваріантність, а також можливі трансформації.

У контексті формалізації систем автоматизації група є алгебраїчною структурою, яка допомагає описувати симетрії, операції та трансформації, що можуть бути виконані в системі. Це дає змогу формалізувати поведінку

системи, зокрема її стани та переходи між ними, використовуючи математичну мову.

4.1.1 Формальне визначення групи

Математична група — це набір елементів із визначеною бінарною операцією. Група G визначається як пара $(G, *)$, де:

- 1 G — множина елементів;
- 2 $*$ — бінарна операція (зазвичай позначається як множення, складання або інша абстрактна дія), визначена на G , яка задовольняє властивостям (аксіомам):
 - **замкненість**: для будь-яких $a, b \in G$ результат $a * b \in G$;
 - **асоціативність**: для усіх $a, b, c \in G$ виконується $(a * b) * c = a * (b * c)$;
 - **існування нейтрального елемента**: існує такий елемент $e \in G$, що для будь-якого $a \in G$, $e * a = a * e = a$;
 - **існування оберненого елемента**: для кожного $a \in G$ існує такий $a^{-1} \in G$, що $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Бінарною операцією на множині A називається правило, за яким кожній упорядкованій парі елементів $(a, b) \in A \times A$ ставиться у відповідність певний елемент $c \in A$.

Формальне визначення

Бінарна операція $*$ на множині A — це відображення:

$$*: A \times A \rightarrow A,$$

де $(a, b) \mapsto a * b$, і результатом є $c \in A$.

4.1.2 Приклади груп

4.1.2.1 Група $(\mathbb{Z}, +)$: це група цілих чисел $(\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\})$ із операцією додавання).

- **Перевірка аксіом групи:**

1 **замкненість:** сума двох цілих чисел завжди ціле число. *Наприклад,* $2+3=5$, $-4+7=3$;

2 **асоціативність:** $a+(b+c)=(a+b)+c$ для всіх $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *Наприклад,* $1+(2+3)=(1+2)+3=6$;

3 **нейтральний елемент:** 0 — число, яке при додаванні не змінює результат ($a+0=a$);

4 **обернений елемент:** для кожного числа $a \in \mathbb{Z}$ існує обернений елемент $-a$, такий, що $a+(-a)=0$.

- **Висновок:** Множина $\mathbb{Z}$ з операцією $+$ утворює групу.

4.1.2.2 Група $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$: це група ненульових раціональних чисел $(\mathbb{Q}^*=\{q \in \mathbb{Q} / q \neq 0\})$ із операцією множення.

- **Перевірка аксіом групи:**

1 **замкненість:** добуток двох ненульових раціональних чисел є ненульовим раціональним числом. *Наприклад,* $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

2 **асоціативність:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для всіх $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$;

3 **нейтральний елемент:** 1 — число, яке при множенні не змінює інші числа ($a \cdot 1 = a$);

4 **обернений елемент:** для кожного числа $a \in \mathbb{Q}^*$ існує обернений елемент $\frac{1}{a}$, такий, що $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

- **Висновок:** множина $\mathbb{Q}^*$ з операцією $\cdot$ (множення) утворює групу.

4.1.2.3 Симетричні групи S_n : симетрична група S_n — це група, яка складається з усіх можливих перестановок n -елементної множини. Елементами симетричної групи є **бієктивні відображення** множини $\{1, 2, \dots, n\}$ у саму себе. Операція в цій групі — це **композиція перестановок**, яка також є бієктивним відображенням.

Бієктивне відображення — це спеціальний тип функції між двома множинами, яка має дві ключові властивості:

1 ін'єктивність (однозначність): кожен елемент із області визначення (початкової множини) відображається в унікальний елемент у множині значень (цільовій множині);

2 сюр'єктивність (повнота): кожен елемент із цільової множини має хоча б один прообраз у початковій множині.

Приклад для $n=3$. Розглянемо множину $\{1,2,3\}$ та симетричну групу S_3 . Симетрична група S_3 складається з усіх можливих перестановок елементів цієї множини, тобто всіх бієкцій (взаємно-однозначних відображень) множини $\{1,2,3\}$ на себе.

Множина S_3 містить всього **$3!=6$** елементів (усі можливі перестановки):

1 тотожна перестановка e : $e(x)=x$ для всіх $x \in \{1,2,3\}$.

Запишемо її як e — ідентична перестановка, де елементи залишаються на своїх місцях.

$(e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ — нейтральна перестановка;

2 перестановки двох елементів (транспозиції):

• $\sigma=(1\ 2)$: $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=1$, $\sigma(3)=3$, $(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ — обмін 1 і 2;

• $\tau=(1\ 3)$: $\tau(1)=3$, $\tau(3)=1$, $\tau(2)=2$, $(13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ — обмін 1 і 3;

• $\rho=(2\ 3)$: $\rho(2)=3$, $\rho(3)=2$, $\rho(1)=1$. $(23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ — обмін 2 і 3;

3 циклічні перестановки:

• $\alpha=(1\ 2\ 3)$: $\alpha(1)=2$, $\alpha(2)=3$, $\alpha(3)=1$,

$(123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ — циклічний зсув $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$;

• $\beta=(1\ 3\ 2)$: $\beta(1)=3$, $\beta(3)=2$, $\beta(2)=1$,

$(132) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ — зворотній циклічний зсув $1 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$.

Множина S_3 . Тепер зібрано всі перестановки:

$S_3=\{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$,

де e — нейтральна перестановка (ідентичність, коли всі елементи залишаються на місці).

Самі перестановки в групі S_3 можна записати так:

- $e=(1,2,3)$ — ідентична перестановка, де елементи залишаються на своїх місцях;
- $\sigma_1=(1,3,2)$ — перестановка, де 2-й і 3-й елементи міняються місцями;
- $\sigma_2=(2,1,3)$ — перестановка, де 1-й і 2-й елементи міняються місцями;
- $\sigma_3=(2,3,1)$ — перестановка, де 1-й і 3-й елементи міняються місцями;
- $\sigma_4=(3,1,2)$ — перестановка, де 1-й і 2-й елементи міняються місцями;
- $\sigma_5=(3,2,1)$ — перестановка, де 2-й і 3-й елементи міняються місцями;

4 операція композиції перестановок полягає в тому, що ми застосовуємо одну перестановку після іншої. Застосування перестановок означає, що ми змінюємо порядок елементів множини, і це можна інтерпретувати як «перестановку елементів в результаті застосування двох перестановок».

Композиція перестановок позначається символом $\circ$. Якщо ми маємо дві перестановки σ_1 і σ_2 , то композиція $\sigma_1 \circ \sigma_2$ означає, що спочатку ми застосовуємо перестановку σ_2 , а потім до результату застосовуємо σ_1 ;

5 формування таблиці композиції (таблиця Келі). Таблиця операцій для S_3 містить усі можливі композиції перестановок, що належать до групи S_3 . Вона виглядає так, як показано у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Таблиця операцій для S_3

	e	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
e	e	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_1	σ_1	e	σ_3	σ_4	σ_5	σ_2
σ_2	σ_2	σ_4	e	σ_5	σ_1	σ_3
σ_3	σ_3	σ_5	σ_1	e	σ_2	σ_4
σ_4	σ_4	σ_2	σ_5	σ_1	e	σ_3
σ_5	σ_5	σ_3	σ_4	σ_2	σ_1	e

Пояснення до таблиці:

- кожен рядок і кожен стовпець в таблиці представляє одну з перестановок з групи S_3 . Тобто, ми маємо 6 перестановок: e , σ_1 , σ_2 , σ_3 , σ_4 , σ_5 ;
- операція в таблиці позначена $\circ$, що означає композицію перестановок. Тобто, ми спочатку застосовуємо перестановку з лівого стовпця, а потім застосовуємо перестановку з верхнього рядка. Результат цього комбінованого застосування двох перестановок записаний в клітинці таблиці.

Приклад композиції:1 $e \circ \sigma_1$.

Застосовуємо спочатку ідентичну перестановку e , а потім σ_1 . Ідентична перестановка не змінює порядок елементів, тому результатом буде просто σ_1 . Отже, клітинка $e \circ \sigma_1$ містить σ_1 .

2 $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

Спочатку застосовуємо σ_2 , тобто міняємо 1-й і 2-й елементи, отримуємо перестановку $(2,1,3)$. Потім застосовуємо σ_1 , що міняє 1-й і 3-й елементи. Результатом буде перестановка $(2,3,1)$, тобто σ_3 . Отже, клітинка $\sigma_1 \circ \sigma_2$ містить σ_3 .

3 $\sigma_3 \circ \sigma_4$.

Спочатку застосовуємо σ_4 , що міняє 1-й і 2-й елементи, і отримуємо перестановку $(3,1,2)$. Потім застосовуємо σ_3 , що міняє 1-й і 3-й елементи. Результат буде $(2,3,1)$, тобто σ_5 . Отже, клітинка $\sigma_3 \circ \sigma_4$ містить σ_5 .

Висновок

Таблиця операцій для групи S_3 показує, як комбінуються перестановки. Операція композиції перестановок є асоціативною, має ідентичний елемент (перестановку e), і кожна перестановка має свою обернену перестановку. Таблиця допомагає зрозуміти, як перестановки взаємодіють між собою, та є важливим інструментом для аналізу групи;

6 перевірка аксіом групи

Операція композиції: для двох перестановок f і g , композиція $f \circ g$ означає виконання g , а потім f .

1 **замкненість:** композиція двох перестановок — це знову перестановка;

2 **асоціативність:** $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;

3 **нейтральний елемент:** нейтральна перестановка e , яка не змінює порядок ($f \circ e = f$)

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

4 **обернений елемент:** для кожної перестановки f існує зворотна f^{-1} , яка повертає елементи до початкового стану ($f \circ f^{-1} = e$).

Для (12) : $(12)^{-1}$.

Для (13) : $(13)^{-1}$.

Для (23) : $(23)^{-1}$.

Для (123) : $(123)^{-1}$.

Для (132) : $(132)^{-1}$.

4.1.2.4 Абелева група — це група $(G, *)$, в якій операція є комутативною, тобто порядок виконання операції не впливає на результат. Тобто для будь-яких її елементів a, b виконується умова $a * b = b * a$.

4.2 Завдання для виконання

Завдання 4.1. Чи є множина непарних чисел з операцією додавання групою? Чому?

Завдання 4.2. Робота з симетричними групами S_n

У відомому вірші про білі мухи Галя, Петрик і Кіндрат на санчатах мчать з гірки. Перерахуйте всі можливі варіанти спуску дітей із гірки.

Текст вірша.

Білі мухи налетіли —
Все подвір'я стало біле.
Не злічити білих мух,
Що летять, неначе пух.

— Галю, Петрику, Кіндрате,
Годі, ледарі, вам спати! —
І побігли до санчат
Галя, Петрик і Кіндрат.

Всі з гори летять щодуху.
Щоб спіймати білу муху,
А санчата їм усім
Змайстрував старий Максим.

Завдання 4.3. Оптимізація розкладу маневрових робіт у депо

Є 4 маневрові локомотиви (L_1, L_2, L_3, L_4) і 4 завдання на маневрові роботи (T_1, T_2, T_3, T_4). Кожен локомотив може виконати одне завдання. Завдання полягає в тому, щоб визначити оптимальне призначення локомотивів для виконання завдань так, щоб забезпечити мінімальний час виконання робіт.

Відомі затримки часу (в хвиликах), які виникають, якщо локомотив L_i виконує завдання T_j , у вигляді матриці:

$$\begin{matrix} & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 8 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 6 & 5 & 9 \\ 8 & 7 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Підказка. Кожна перестановка локомотивів L_1, L_2, L_3, L_4 відповідає елементу симетричної групи S_4 , яка містить $4!=24$ елементи.

Завдання 4.4. Геометричні симетрії. Симетрії залізничного семафора

Розглянемо залізничний семафор із трикутною сигнальною голівкою, на якій є три світлові індикатори (червоний, жовтий і зелений), розташовані у вершинах рівностороннього трикутника.

Умова:

1 світлова голівка семафора може бути повернута на кути $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ навколо свого центру, щоб забезпечити її правильне встановлення. Також вона може бути симетрично відбита відносно кожної із трьох висот трикутника;

2 відомо, що після будь-якої з цих операцій індикатори залишаються на своїх місцях, але їхні позиції можуть змінитися (наприклад, червоний індикатор може опинитися там, де був зелений, і т. д.).

Завдання

1 Визначити всі можливі симетрії семафора (обертання та відбиття).
2 Скласти множину цих симетрій та показати, що вона утворює групу (група D_3):

- перевірити замкненість цієї множини;
- визначити нейтральний елемент;
- для кожного елемента знайти обернений елемент.

3 Побудувати таблицю Келі для цієї групи.

4 Пояснити, чи є ця група абелевою, обґрунтувавши відповідь.

Пояснення

Це завдання моделює ситуацію, коли світлова сигнальна голівка може бути налаштована в різних положеннях, але функціонально вона залишається однаковою. Розв'язання дає змогу зрозуміти основи теорії груп та їх застосування у реальних технічних системах.

Завдання 4.5. Розв'язання ігрової задачі

Розглянемо гру: на дошці є 4 кнопки, кожна з яких може бути натиснута (ввімкнена – 1) або не натиснута (вимкнена – 0). Натискання кнопки змінює її стан з 0 на 1 або з 1 на 0.

Мета: повернути всі кнопки до початкового стану (всі вимкнені, 0000), виконуючи комбінації натискань.

1 Опишіть множину всіх можливих станів кнопок як групу (операція – натискання кнопки).

2 Знайдіть мінімальну кількість ходів, необхідну для повернення до початкового стану.

Підказка. Це завдання демонструє приклад скінченних груп.

4.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 4.6. Знайти приклади груп у вашій спеціальності (наприклад, групи рухів для механічних систем).

Побудувати таблицю для групи залишків за модулем 5 з операцією додавання.

Завдання 4.7. На невеликій станції є **чотири стрілочні переводи**, які керуються автоматично:

$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}.$$

При цьому переводи t_1 і t_3 — об'єднують парні колії, а t_2 і t_4 — непарні.

Відомо, що система допускає **симетричну перестановку** $t_1 \leftrightarrow t_3$, а також $t_2 \leftrightarrow t_4$ — без зміни логіки роботи.

1 Опишіть групу G симетрій, яка описує допустимі перестановки елементів множини T .

2 Визначте всі підмножини $A \subseteq T$, які залишаються незмінними при дії групи G .

3 Як ця симетрія може бути використана для спрощення логіки керування?

Підказки до розв'язання

Тут група G є **прямим добутком** двох груп симетрії на 2 елемента:

$$G=S_2 \times S_2$$

де S_2 — симетрична група на 2 елемента.

Наприклад, елементи групи можуть бути такі:

- e — нічого не змінюється;
- $(t1 \leftrightarrow t3)$;
- $(t2 \leftrightarrow t4)$;

одночасна перестановка: $(t1 \leftrightarrow t3, t2 \leftrightarrow t4)$.

Використана література: [1], [2], [4], [5].

Практичне заняття 5

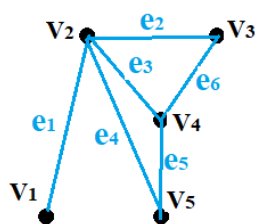
ОСНОВИ РОБОТИ З ГРАФАМИ. ГРАФИ ТА СПОСОБИ ЇХНЬОГО ПРЕДСТАВЛЕННЯ

Мета заняття — ознайомлення з базовими поняттями графів. Вивчити способи представлення графів (список суміжності, матриця суміжності, матриця інцидентності). Навчитися будувати графи та переходити між їх різними представленнями.

5.1 Короткі теоретичні відомості

5.1.1 Поняття графа

Граф: набір вершин (об'єктів) і ребер (зв'язків між ними).



Граф $G=(V,E)$ складається з:

- **V:** **множина вершин** (наприклад, вузли в мережі);
- **E:** **множина ребер** (дуг), які з'єднують вершини (наприклад, дороги між містами).

Для цього графа множини V та E матимуть такий вигляд:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \quad E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\},$$

або

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad E = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{4,5\}, \{3, 4\}.$$

Вершини (вузли) – це точка на графі, яка представляє об'єкт.

Графи бувають орієнтованими (де кожне ребро, що з'єднує дві вершини має напрямок) і неорієнтованими (де ребро не має напрямку).

Ступінь вершини ($deg(v)$) – кількість ребер, які з'єднані з вершиною.

У орієнтованих графах:

- **вхідний ступінь ($deg^-(v)$)** — кількість дуг, що входять у вершину;
- **вихідний ступінь ($deg^+(v)$)** — кількість дуг, що виходять з вершини.

Кількість вершин – це **порядок графа**, який зазвичай позначають буквою n : $|V| = n$.

Ребро – лінія, що з'єднує дві вершини і показує зв'язок між ними. Ребро, що з'єднує вершину саму із собою, називають **петлею**.

Кількість ребер – **розмір графа**, позначають m : $|E| = m$.

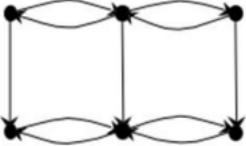
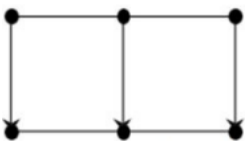
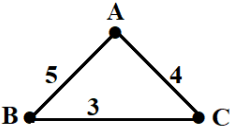
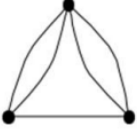
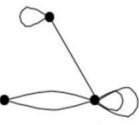
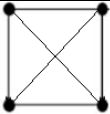
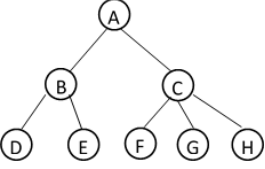
Зваженість: вага ребра може позначати витрати, час, обсяг потоку чи інші параметри.

Маршрут – це послідовність ребер (дуг), що з'єднують дві вершини.

Граф є **зв'язним**, якщо існує шлях між будь-якими двома вершинами.

Деякі види графів подані у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Види графів

Неорієнтований граф – набір вершин (V) і ребер (E), де кожне ребро з'єднує дві вершини без визначеного напрямку. Позначають $G=(V,E)$	
Орієнтований граф (орграф) – набір вершин (V) і дуг (A), де дуга має напрямок. Позначають $G=(V,A)$	
Змішані – графи, що поєднують ребра, які не мають напрямку і мають його. Також графи поділяють на зважені та незважені. Кожному ребру у зваженому графі ставлять у відповідність числове значення, або «вагу»	
Зважений граф – кожному ребру присвоєно вагу (наприклад, відстань між містами). Якщо вагу не вказано – граф незважений	
Мультиграф – граф, що містить кратні ребра (але не петлі)	
Псевдограф – граф, що містить кратні ребра або петлі. Петля — це ребро, що з'єднує вершину саму з собою	
Повний – граф, у якого кожна вершина з'єднана з усіма іншими вершинами	
Дерево – це зв'язний ациклічний граф. Іншими словами, дерево — це граф: зв'язний – існує шлях між будь-якими двома вершинами; ациклічний – не містить циклів (замкнених шляхів)	

5.1.2 Статичні та динамічні графи

Статичний граф — це граф, структура якого залишається незмінною протягом усього аналізу. Він відображає фіксовані зв'язки між об'єктами.

Приклад: Залізнична станція, де всі колії та стрілки використовують без змін.

Динамічний граф — це граф, структура якого змінюється з часом. Зміни можуть стосуватися додавання/видалення вершин і ребер або зміни їхніх характеристик.

Приклад: Граф транспортної мережі, де певні колії закривають для ремонту, а потоки поїздів змінюються.

5.1.3 Математичні подання графів

Графи можуть бути задані у вигляді різних матриць.

Матриця суміжності відображає зв'язки між вершинами.

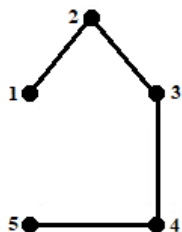
Використовують для опису зв'язків у графі: елементи $A[i][j]$ вказують на наявність і вагу ребра між вершинами i і j .

Матриця інцидентності відображає зв'язок між вершинами та ребрами. Для кожного ребра зазначають, які вершини воно з'єднує.

Списки суміжності — компактна структура для зберігання графа. Кожна вершина зберігає список вершин, до яких є з нею зв'язок.

Приклади

1 Неорієнтований граф



Розглянемо математичне представлення технологічних об'єктів на прикладі графа $G = (V, E)$,

де $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ — множина вершин;

$E = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}\}$ — множина ребер.

Тепер побудуємо відповідні матриці для цього графа.

1. Матриця суміжності

	x1	x2	x3	x4	x5
x1	0	1	0	0	0
x2	1	0	1	0	0
x3	0	1	0	1	0
x4	0	0	1	0	1
x5	0	0	0	1	0

2 Матриця інцидентності

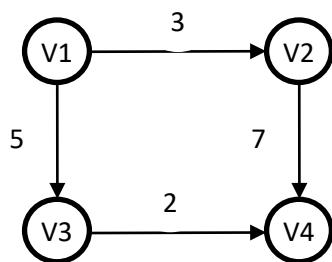
	{x1,x2}	{x2,x3}	{x3,x4}	{x4,x5}
x1	1	0	0	0
x2	1	1	0	0
x3	0	1	1	0
x4	0	0	1	1
x5	0	0	0	1

3. Список суміжності

x1: x2
 x2: x1, x3
 x3: x2, x4
 x4: x3, x5
 x5: x4

2 Зважений граф

Розглянемо зважений граф, що має 4 вершини $V=\{1,2,3,4\}$ і ребра:



- (1, 2, 3): ребро між вершинами 1 і 2 із вагою 3;
- (1, 3, 5): ребро між вершинами 1 і 3 із вагою 5;
- (2,4, 7): ребро між вершинами 2 і 4 із вагою 7;
- (3,4, 2): ребро між вершинами 3 і 4 із вагою 2.

Тепер побудуємо матриці для цього графа.

1 Матриця суміжності 2 Матриця інцидентності 3 Список суміжності

0	3	5	0
3	0	0	7
5	0	0	2
0	7	2	0

3	5	0	0
3	0	7	0
0	5	0	2
0	0	7	2

$V_1 : [(2,3), (3,5)]$
 $V_2 : [(1,3),(4,7)]$
 $V_3 : [(1,5),(4,2)]$
 $V : [(2,7),(3,2)]$

5.2 Завдання для виконання

Завдання 5.1. Побудова неорієнтованого графа за заданими даними.

Є 5 об'єктів (A, B, C, D, E). Зв'язки між об'єктами:

- $A \leftrightarrow B$;
- $A \leftrightarrow C$;
- $B \leftrightarrow D$;
- $C \leftrightarrow E$.

Представити граф у таких формах:

- графічне зображення;
- список суміжності;
- матриця суміжності;
- матриця інцидентності.

Визначити:

- ступені кожної вершини;
- чи є граф зв'язним.

Завдання 5.2. Побудова орієнтованого графа.

Побудувати орієнтований граф, що описує потоки інформації між системами автоматизації:

- система S_1 передає дані до S_2 і S_3 ;
- система S_2 передає дані до S_4 ;
- система S_3 обмінюється даними з S_4 .

Представити граф у таких формах:

- графічне зображення;
- список суміжності;
- матриця суміжності;
- матриця інцидентності.

Визначити:

- вхідний і вихідний ступені кожної вершини;
- чи є у графі вершини без вхідних/вихідних зв'язків.

Завдання 5.3. Перехід між представленнями графів.

5.3.1 Дано граф у вигляді матриці суміжності:

```
0 1 0 1
1 0 1 0
0 1 0 1
1 0 1 0 ;
```

- побудувати графічне представлення графа;
- перетворити матрицю суміжності на список суміжності.

5.3.2 Дано граф у вигляді списку суміжності:

A: B, C

B: A, D

C: A, D

D: B, C ;

- побудувати графічне представлення графа;
- перетворити список суміжності на матрицю інцидентності.

Завдання 5.4. Аналіз графа.

Проаналізувати граф, заданий матрицею суміжності:

0 1 1 0 0

1 0 1 1 0

1 1 0 0 1

0 1 0 0 1

0 0 1 1 0 ;

- визначити, чи є граф зв'язним;
- знайти ізольовані вершини (якщо є);
- побудувати графічне зображення графа.

5.2.1 Завдання для самостійного виконання

Завдання 5.5. Задано неорієнтований граф із 5 вершинами та ребрами:

(1,2), (1,3), (2,4), (3,4), (4,5);

- побудувати графічне зображення графа;
- представити граф у вигляді матриць суміжності та інцидентності;
- визначити ступінь кожної вершини.

Завдання 5.6. Є орієнтований граф з 4 вершинами та дугами:

(1→2), (1→3), (2→4), (3→2), (4→1);

- представити цей граф у вигляді списків суміжності;
- записати матрицю інцидентності для графа;
- побудувати графічне зображення графа.

Завдання 5.7. Дано граф у вигляді списку суміжності:

- 1: 2, 4
- 2: 3
- 3: 4
- 4: (немає суміжних вершин);
- побудувати схематичне зображення графа;
- визначити, чи є граф орієнтованим, і пояснити чому;
- знайти всі шляхи, що ведуть із вершини 1 до вершини 3.

Завдання 5.8. Побудувати граф, що описує відомі маршрути міського транспорту (наприклад, автобусні, тролейбусні, трамвайні лінії або лінії метро від університету до вашої домівки):

- вершини – зупинки;
- ребра – маршрути між зупинками;
- додати ваги (час у хвилинах або відстань у кілометрах).

Використана література: [1], [2], [5], [6].

Практичне заняття 6

ГРАФІЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ОБ'ЄКТІВ АВТОМАТИЗАЦІЇ ТА ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ГРАФІВ

Мета заняття – навчитися використовувати графи для моделювання технологічних процесів та систем автоматизації. Розвинути навички побудови, аналізу та використання графічних моделей.

6.1 Короткі теоретичні відомості

6.1.1 Основні поняття теорії графів

Граф: набір вершин (об'єктів) і ребер (зв'язків між ними).

Граф $G=(V, E)$ складається:

- з V : множина вершин (наприклад, вузли в мережі);
- E : множина ребер, які з'єднують вершини (наприклад, дороги між містами).

Множини вершин $V(G)$: набір точок (вершин), які позначаються, наприклад, $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Множини ребер $E(G)$: набір зв'язків між вершинами. Ребра можуть бути представлені як пари вершин, наприклад, $e=(v_i, v_j)$.

Граф можна зобразити у вигляді малюнка, де вершини – це точки, а ребра – лінії між ними.

6.1.2 Види графів. Орієнтовані та неорієнтовані графи

Орієнтований граф (орграф). У такому графі кожне ребро має напрямок. Ребро записують у вигляді впорядкованої пари (v_i, v_j) , що означає зв'язок від вершини v_i до v_j .

Наприклад. Маршрути руху транспорту між містами через населені пункти.

Неорієнтований граф. У такому графі ребра не мають напрямку. Ребро записують як неупорядковану пару $\{v_i, v_j\}$, що означає двосторонній зв'язок між вершинами v_i та v_j .

Наприклад. Дорожні мережі, де дороги доступні в обох напрямках.

6.1.3 Вагові графи, дерева та підграфи

Ваговий граф. Це граф, у якого кожному ребру присвоєно числове значення (вагу). **Ваги ребер** – числові значення, які відображають вартість, тривалість або інші характеристики зв'язків.

Наприклад. Граф, що описує дорожні маршрути, де вага ребра – це відстань між містами або вартість проїзду.

Дерево: Це зв'язний граф без циклів, тобто у ньому немає замкнутих шляхів. Дерево з n вершинами завжди має $n-1$ ребро.

Наприклад. Структура файлової системи комп'ютера, де папки представлені у вигляді дерева.

Підграф. Це граф, який складається з підмножини вершин і ребер певного графа.

Наприклад. Частина дорожньої мережі, що включає тільки вибрані міста та дороги між ними.

6.1.4 Застосування графів у технологічних процесах

Графи відіграють ключову роль у моделюванні, аналізі та оптимізації технологічних процесів.

Розглянемо задачу про комівояжера.

Постановка задачі

Є n міст, між якими задані відстані (або витрати на доставку продукції). Потрібно знайти найкоротший маршрут, що проходить через кожне місто рівно один раз і повертається до початкового міста.

Наприклад

Нехай є 4 міста (A, B, C, D) з відстанями між ними (таблиця 6.1):

Таблиця 6.1. Вихідні дані для прикладу задачі про комівояжера

Відстань	A	B	C	D
A	0	10	15	20
B	10	0	35	25
C	15	35	0	30
D	20	25	30	0

Потрібно знайти найкоротший шлях, що проходить через усі міста.

Методи розв'язання задачі про комівояжера

Є багато алгоритмів і методів:

1 **Повний перебір (як у прикладі).** Ефективний тільки для малих задач ($n \leq 10$).

2 **Алгоритм «жадібного пошуку» (алгоритм Дейкстри).** Починаємо з міста А, вибираємо найближче місто і так далі. Не гарантує оптимального розв'язку.

Розв'язок методом повного перебору

1 Для спрощення розв'язку і наочності будуємо ваговий граф (рисунок 6.1).

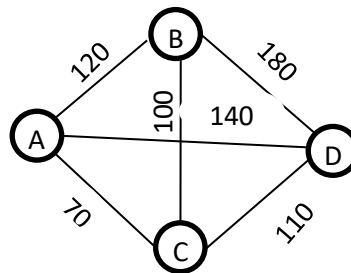


Рисунок 6.1 – Граф для прикладу задачі про комівояжера

2 Перебираємо всі можливі маршрути та розраховуємо довжину кожного з них (таблиця 6.2). Таких маршрутів може бути 6.

Таблиця 6.2 – Можливі маршрути руху (без повернення в попередні міста)

	із А	із В	із С	із D	Σ
Кількість маршрутів	3	2	1	0	6

Усі можливі маршрути з відстанню:

- 1 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$: $120 + 100 + 110 + 140 = 470$;
- 2 $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$: $120 + 180 + 110 + 70 = 480$;
- 3 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$: $70 + 100 + 180 + 140 = 490$;
- 4 $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$: $70 + 110 + 180 + 120 = 480$;
- 5 $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$: $140 + 180 + 100 + 70 = 490$;
- 6 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$: $140 + 110 + 100 + 120 = 470$.

3 Знаходимо маршрут з мінімальною довжиною.

Найкоротші маршрути:

- $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A: = 470$;
- $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A: = 470$.

Оптимальний розв'язок

Маршрут $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ з довжиною 470 є оптимальним (маршрут $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ – це такий же маршрут, тільки у зворотному порядку).

Алгоритм Дейкстри — це реалізація одного із методів знаходження найкоротшого шляху від однієї вершини до всіх інших вершин в зваженому графі з невід'ємними вагами ребер. Алгоритм широко використовують у задачах на маршрутизацію, навігацію та інших, де необхідно мінімізувати вартість переміщення.

Ідея алгоритму

Алгоритм працює за принципом «жадібного пошуку», поступово знаходячи найкоротші шляхи. Основна ідея полягає в тому, щоб на кожному кроці вибирати вершину, до якої відомий шлях має мінімальну вартість, і оновлювати відстані до сусідніх вершин.

Покроковий опис алгоритму

1 Ініціалізація:

- для кожної вершини графа встановлюють відстань від джерела. Для джерела ця відстань дорівнює 0, а для всіх інших — нескінченність (∞);
- створюють множину S , яка містить вершини, для яких вже знайдено найкоротшу відстань. Спочатку множина S порожня;
- використовують пріоритетну чергу (зазвичай на основі мінімальної купи) для зберігання вершин з їхніми поточними мінімальними відстанями.

2 Вибір поточної вершини

З пріоритетної черги обирають вершину v з мінімальною відстанню. Якщо черга порожня, алгоритм завершується.

3 Оновлення сусідів

Для всіх сусідів вершини v , якщо шлях через v зменшує відстань до сусіда, відстань оновлюють за формулою

$$d(u) = \min(d(u), d(v) + w(v, u)),$$

де $d(u)$ — поточна відстань до сусіда u , $w(v, u)$ — вага ребра між v і u .

4 Додавання у множину S

Вершина v позначається як оброблена (додається до множини S).

5 Повторення

Кроки 2–4 повторюють, поки не будуть оброблені всі вершини або поки черга не стане порожньою.

Результат

Алгоритм повертає найкоротші відстані від джерела до всіх інших вершин графа.

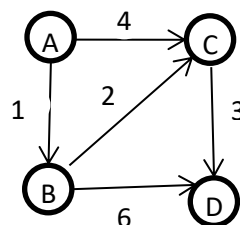
Обмеження: ваги ребер мають бути невід’ємними.

Приклад використання алгоритму Дейкстри

Розглянемо граф, де вершини A, B, C, D , ребра:

- $A \rightarrow B$ з вагою 1;
- $A \rightarrow C$ з вагою 4;
- $B \rightarrow C$ з вагою 2;
- $B \rightarrow D$ з вагою 6;
- $C \rightarrow D$ з вагою 3.

Для наглядності побудуємо граф



1 Ініціалізація

Відстані $d(A)=0$, $d(B)=\infty$, $d(C)=\infty$, $d(D)=\infty$.

2 Обираємо А

Оновлюємо відстані:

$$d(B)=\min(\infty, 0+1)=1;$$

$$d(C)=\min(\infty, 0+4)=4.$$

3 Обираємо В (мінімальна відстань)

Оновлюємо відстані:

$$d(C)=\min(4, 1+2)=3;$$

$$d(D)=\min(\infty, 1+6)=7.$$

4 Обираємо С

Оновлюємо відстані:

$$d(D)=\min(7, 3+3)=6.$$

5 Обираємо D

Усі вершини оброблено.

Результат

Найкоротші відстані від А:

- $d(A)=0$,
- $d(B)=1$,
- $d(C)=3$,
- $d(D)=6$.

6.2 Завдання для виконання

Завдання 6.1. На рисунку 6.1 у вигляді орієнтованого графу представлена схема доріг, що зв'язують міста А, Б, В, Г, Д, Б, Ж, З, І. По кожній дорозі можна рухатися тільки в одному напрямку, що вказує стрілка. Скільки існує різних шляхів з міста А в місто І?

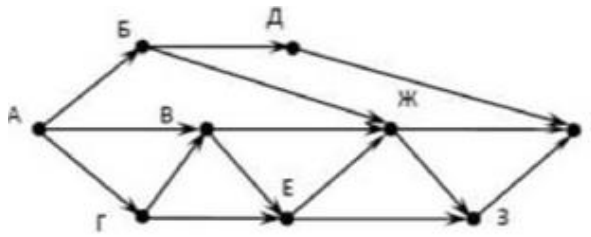


Рисунок 6.1 – Схема доріг до завдання 6.1

Завдання 6.2. У таблиці 6.3. наведено вартість перевезення пасажирів між сусідніми населеними пунктами. Представити цю таблицю у вигляді зваженого графу.

Таблиця 6.3 – Вихідні дані завдання 6.2

	A	B	C	D	E
A		5	3		
B	5		4	2	
C	3	4			3
D		2			
E			3		

Завдання 6.3. Побудова орієнтованого графа автоматизації виробничої лінії.

Опис ситуації. Є автоматизована система, яка складається з датчиків, виконавчих механізмів та контролера.

Датчики передають дані на контролер (вершини S_1, S_2). Контролер надсилає команди на виконавчі механізми (вершини M_1, M_2). Взаємодія між елементами відбувається через канали зв'язку.

Завдання:

- побудувати орієнтований граф, де ребра відображають потоки інформації;
- проаналізувати, чи є граф зв'язним;
- визначити всі вхідні та вихідні ступені вершин.

Завдання 6.4. Моделювання залізничної станції як об'єкта автоматизації.

Опис ситуації. На станції є такі об'єкти:

- колії (K_1, K_2, K_3);
- стрілочні переводи (S_1, S_2);
- сигнали (G_1, G_2).

Завдання:

- побудувати граф, де вершини відповідають об'єктам, а ребра — зв'язкам між ними (наприклад, стрілочний перевод пов'язує дві колії);
- додати ваги, які відображають час переходу між об'єктами;
- проаналізувати граф: знайти всі шляхи від колії K_1 до колії K_3 .

Завдання 6.5. Аналіз оптимізації роботи системи.

Опис ситуації. У системі автоматизації потрібно визначити можливі «вузькі місця» — об'єкти, через які проходить найбільше зв'язків.

Завдання:

- використати побудований граф у завданні 3;
- визначити вершину з максимальним ступенем (вхідним або вихідним);
- запропонувати спосіб зменшення навантаження на цю вершину (наприклад, додати новий об'єкт або альтернативний маршрут).

Завдання 6.6. Оптимізація маршрутів між станціями для зменшення часу в дорозі.

Є залізнична мережа, яка з'єднує кілька станцій. Визначити найкоротший маршрут за часом від станції А до станції F.

Вхідні дані. Граф представлений у вигляді вагового графа, де **вершини** – це станції А, В, С, D, E, F, а **ребра** – шляхи між станціями з вказаним часом у хвилинах.

- $A \rightarrow B=10$ $A \rightarrow C=15$
- $B \rightarrow D=12$ $B \rightarrow E=15$

- $C \rightarrow E = 10$
- $D \rightarrow F = 10$
- $E \rightarrow F = 5$.

Знайти маршрут з мінімальним часом в дорозі, використовуючи алгоритм Дейкстри.

Завдання 6.7. Знаходження найкоротшого шляху між населеними пунктами.

Між населеними пунктами А, В, С, D, E, F побудовані дороги, протяжність яких наведена в таблиці 6.4.

Таблиця 6.4 – Вихідні дані завдання 6.7

	A	B	C	D	E	F
A		4				
B	4		6	3	6	
C		6			4	
D		3			2	
E		6	4	2		5
F					5	

Визначити довжину найкоротшого шляху між пунктами А і F (за умови, що пересуватися можна лише по побудованих дорогах).

6.2.1 Завдання для самостійного розв'язку

Завдання 6.8. Аналіз оптимізації роботи системи.

Опис ситуації. У системі автоматизації потрібно визначити можливі «вузькі місця» — об'єкти, через які проходить найбільше зв'язків.

Завдання:

- використати один із побудованих графів;
- визначити вершину з максимальним ступенем (вхідним або вихідним);
- запропонувати спосіб зменшення навантаження на цю вершину (наприклад, додати новий об'єкт або альтернативний маршрут).

Завдання 6.9. Модель управління стрілками на сортувальній гірці.

Сортувальна гірка має 6 стрілочних переводів, які формують систему з 8 колій. Кожна стрілка може направляти вагон на один із двох подальших шляхів.

Представити цей об'єкт у вигляді **орієнтованого графа**, де:

- вершини — це стан вагонів у точках перемикання або зупинок;
- ребра — це можливі напрями руху, визначені стрілками.

Завдання:

- побудувати граф, що моделює процес сортування вагонів;
- визначити всі можливі шляхи від початкової точки (верх гірки) до кожної з 8 кінцевих колій;
- запропонувати алгоритм, який дає змогу автоматизовано обирати стрілки для направлення вагонів у заданий кінець.

Завдання 6.10. Автоматизована система сигналізації на станції.

На вузловій залізничній станції встановлено систему світлофорної сигналізації, яка контролює переміщення поїздів між 5 основними ділянками станції. Кожна ділянка має вхідний та вихідний світлофор. Умови переміщення поїзда регулюють станом сигналів і відстанями між ними.

Завдання:

- побудувати **неорієнтований зважений граф**, де:
 - вершини — ділянки станції;
 - ребра — можливі переміщення між ділянками;
 - вага ребра — відстань між ділянками або час проходження з урахуванням сигналів;
- визначити найкоротший маршрут проходження поїзда від ділянки А до ділянки Е;
- проаналізувати, як зміна стану одного світлофора (наприклад, блокування ділянки С) впливає на маршрути в системі.

Використана література: [1], [2], [5], [6].

Практичне заняття 7

АНАЛІТИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ГРАФІЧНИХ МОДЕЛЕЙ НА БАЗІ ТОПОЛОГІЧНИХ МАТРИЦЬ ТА ПАРАМЕТРИЧНО- ТОПОЛОГІЧНИХ МАТРИЦЬ

Мета заняття – ознайомлення здобувачів з методами побудови та аналізу графічних моделей, Навчити їх використовувати топологічні матриці для аналітичного опису графів та застосовувати параметрично-топологічні матриці для моделювання систем з урахуванням параметрів.

7.1 Короткі теоретичні відомості

7.1.1 Топологічні матриці

Топологічна матриця — це матриця, яка описує зв'язки між вершинами та ребрами графа.

Основні види топологічних матриць.

Матриця суміжності – це спосіб представлення графа у вигляді квадратної матриці, який відображає суміжність (наявність ребра) між вершинами графа.

Для графа $G=(V,E)$ (де: $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ — множина вершин, E — множина ребер), матриця суміжності A має розмір $n \times n$, де $n=|V|$. Елемент a_{ij} визначається так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо існує ребро } (i,j) \\ 0, \text{ інакше} \end{cases}.$$

Якщо граф **неорієнтований**, матриця симетрична.

Якщо граф **орієнтований**, матриця може бути асиметричною.

Якщо граф **зважений**, то елементи a_{ij} можуть містити ваги ребер: $a_{ij} = w$, де w — вага ребра між v_i і v_j .

Матриця інцидентності – це математичне представлення графа, яке використовують для опису зв'язків між вершинами та ребрами графа. Вона

дає змогу легко аналізувати структуру графа, його властивості та взаємозв'язки між елементами.

Для **неорієнтованого графа** $G=(V,E)$ (де V — множина вершин, E — множина ребер), прямокутна матриця A має розмірність $n \times m$, де n — кількість вершин, а m — кількість ребер. Елемент a_{ij} показує, чи інцидентна вершина i ребру j і визначається так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } i \text{ інцидентна (з'єднана) з ребром } j \\ 0, \text{ якщо вершина } i \text{ неінцидентна ребру } j \end{cases}.$$

Для **орієнтованого графа** матриця інцидентності враховує напрямки:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } i \text{ є початком ребра } j \\ -1, \text{ якщо вершина } i \text{ є кінцем ребра } j \\ 0, \text{ якщо вершина } i \text{ неінцидентна ребру } j \end{cases}.$$

Параметрично-топологічна матриця — це комбінована матриця, яка містить як топологічну структуру графа (зв'язки між вершинами), так і параметри, такі як ваги ребер. Цю матрицю використовують для опису систем із врахуванням зв'язків і відповідних параметрів.

Наприклад: довжина ребра, координати вузлів, маса елемента тощо.

7.1.2 Аналітична інтерпретація графічних моделей

Аналітична інтерпретація — процес переведення графічної моделі в математичну форму для подальшого аналізу, прогнозування чи оптимізації.

З точки зору **теорії графів**, аналітична інтерпретація базується на топологічному аналізі структури графічних моделей, зокрема використанні графів та матриць, що їх описують.

Наприклад

На лекції ми розглядали мережу з трьох станцій:

- $V=\{A, B, C\}$;

- $E = \{(A,B), (B,C), (A,C)\}$.

Параметри:

- $L(A,B) = 100$ км, $L(B,C) = 150$ км, $L(A,C) = 180$ км;
- $V_{\text{макс}}(A,B) = 120$ км/год, $V_{\text{макс}}(B,C) = 100$ км/год, $V_{\text{макс}}(A,C) = 110$ км/год.
- $C(A,B) = 10$ поїздів/год, $C(B,C) = 8$ поїздів/год, $C(A,C) = 5$ поїздів/год.

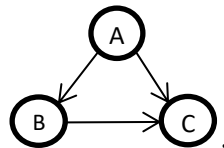
Задача

Знайти маршрут з А до С, що мінімізує час у дорозі, враховуючи пропускну здатність доріг.

Розв'язання

Щоб врахувати завантаженість (пропускну спроможність С), можна розрахувати ефективний час проходження кожного сегмента з урахуванням кількості поїздів, що курсують. У цьому випадку враховують, що більша завантаженість може збільшувати час у дорозі.

1 Побудуємо граф моделі



2. Оскільки у графі є три станції А, В, С, всі можливі маршрути з А до С можна записати:

А прямий маршрут: $A \rightarrow C$;

В маршрут через В: $A \rightarrow B \rightarrow C$.

3 **Урахування завантаженості.** Формула для ефективного часу з урахуванням завантаженості

$$t_{\text{ефективний}} = \frac{L}{V_{\text{макс}}} \cdot \left(1 + \frac{K}{C}\right),$$

де K — середня кількість поїздів, що курсують (завантаженість);

C — пропускна спроможність (максимальна кількість поїздів/год);

L — відстань між станціями;

$V_{\text{макс}}$ — максимальна швидкість.

4 Обчислимо час у дорозі для кожного маршруту:

4.1 для маршруту $A \rightarrow C$: нехай $K(A,C)=5$ і $C(A,C)=5$

$$t_{\text{ефективний}}(A, C) = \frac{L(A, C)}{V_{\text{макс}}(A, C)} \cdot \left(1 + \frac{K(A, C)}{C(A, C)}\right) = \frac{180}{110} \cdot \left(1 + \frac{5}{5}\right);$$

$$t_{\text{ефективний}}(A, C) = 1,64 \cdot 2 = 3,28 \text{ год};$$

4.2 для маршруту $A \rightarrow B$: нехай $K(A,B)=10$ і $C(A,B)=10$

$$t_{\text{ефективний}}(A, B) = \frac{L(A, B)}{V_{\text{макс}}(A, B)} \cdot \left(1 + \frac{K(A, B)}{C(A, B)}\right) = \frac{100}{120} \cdot \left(1 + \frac{10}{10}\right);$$

$$t_{\text{ефективний}}(A, B) = 0,83 \cdot 2 = 1,66 \text{ год};$$

4.3 для маршруту $B \rightarrow C$: нехай $K(B,C)=8$ і $C(B,C)=8$

$$t_{\text{ефективний}}(B, C) = \frac{L(B, C)}{V_{\text{макс}}(B, C)} \cdot \left(1 + \frac{K(B, C)}{C(B, C)}\right) = \frac{150}{100} \cdot \left(1 + \frac{8}{8}\right);$$

$$t_{\text{ефективний}}(B, C) = 1,5 \cdot 2 = 3,0 \text{ год}.$$

5. Обчислення загального часу для кожного маршруту:

5.1 прямий маршрут $A \rightarrow C$

$$t_{\text{ефективний}}(A \rightarrow C) = 3,28 \text{ год};$$

5.2 маршрут через B : $A \rightarrow B \rightarrow C$

$$\begin{aligned} t_{\text{ефективний}}(A \rightarrow B \rightarrow C) &= t_{\text{ефективний}}(A \rightarrow B) + t_{\text{ефективний}}(B \rightarrow C) = 1,66 + 3,0 = \\ &= 4,66 \text{ год}. \end{aligned}$$

З урахуванням завантаженості оптимальним маршрутом залишається прямий маршрут $A \rightarrow C$.

Оптимальний маршрут: $A \rightarrow C$, ефективний час – 3,28 год.

7.2 Завдання для виконання

Завдання 7.1. Побудова топологічних матриць.

Для графа з 5 вершинами та 7 ребрами скласти:

- матрицю інцидентності;
- матрицю суміжності;
- побудувати граф за заданою матрицею суміжності.

Завдання 7.2. Аналіз параметрично-топологічних матриць.

Враховуючи ваги ребер попереднього графа $((A,B)=8, (A,C)=7, (B,C)=10, (B,D)=5, (C,D)=11, (D,E)=9, (E,A)=15)$, знайти матрицю ваги.

Проаналізувати суму ваг для кожної вершини графа.

Завдання 7.3. Моделювання транспортної системи.

Є транспортна мережа із 5 пунктів і 8 доріг:

- побудувати топологічну модель цієї транспортної мережі;
- визначити матрицю, враховуючи довжини доріг;
- знайти найкоротший маршрут між пунктами 1 і 5.

Вихідні дані задати самому.

Завдання 7.4. Між чотирма місцевими аеропортами КУТ, ЗОРЯ, ОЗЕРКИ і ГІРКА, щодня виконують авіарейси. У таблиці 7.1 наведено фрагмент розкладу перельотів між аеропортами.

Таблиця 7.1 – Розклад рейсів для завдання 7.4

Аеропорт вильоту	Аеропорт прильоту	Час вильоту	Час прильоту
Кут	Гірка	13:10	17:15
Озерки	Зоря	13:00	14:30
Озерки	Кут	12:10	14:20
Гірка	Озерки	11:15	15:30
Кут	Озерки	12:35	14:50
Зоря	Озерки	12:30	14:20
Кут	Зоря	10:30	12:15
Зоря	Гірка	14:40	16:45
Гірка	Зоря	15:15	17:20
Озерки	Гірка	14:30	16:20

Мандрівник прибув в аеропорт Кут опівночі (0:00). Йому потрібно якнайшвидше потрапити в аеропорт ГІРКА (можливий маршрут через інші аеропорти). Визначити найраніший час, коли він може потрапити в аеропорт ГІРКА.

Завдання 7.5. Є 5 населених пунктів: Мир, Бук, Куб, Лев, Жук, які з'єднані між собою магістралями. Витрата палива для кожного відрізка і ціни на паливо наведені в таблиці 7.2.

Таблиця 7.2 – Дані для завдання 7.5

Селище А	Селище К	Витрати палива, л	Ціна за 1л палива в селищі А
Мир	Бук	6	10
Мир	Лев	7	10
Мир	Куб	8	10
Бук	Лев	10	2
Бук	Жук	16	2
Лев	Бук	15	3
Лев	Куб	10	2
Куб	Жук	1	10

Проїзд по магістралях можливий в обох напрямках, проте в населеному пункті діє закон: виїжджаючи з селища А, мандрівник зобов'язаний на весь найближчий відрізок до селища Б закупити паливо за цінами, встановленими в селищі А. Визначити найдешевший маршрут з населеного пункту Мир в населений пункт Жук.

Завдання 7.6. Є 5 залізничних станцій, які сполучені залізничними коліями. Проїзд кожною колією характеризується витратою палива локомотивом та вартістю палива на станції, де починається маршрут. Машиніст локомотива повинен закупити паливо для переїзду на кожній станції за місцевими цінами. Вхідні дані подані у таблиці 7.3.

Таблиця 7.3 – Дані для завдання 7.6

Станція А	Станція В	Витрати палива (л)	Ціна за 1 л на станції А
Київ	Львів	10	20
Київ	Одеса	15	20
Київ	Харків	25	20
Львів	Одеса	30	18
Львів	Дніпро	40	18
Одеса	Дніпро	20	25
Харків	Дніпро	10	22
Харків	Львів	35	22

Знайти найдешевший маршрут із **Києва до Дніпра**.

Використана література: [1], [2], [3], [5], [6].

Практичне заняття 8

ЗАСТОСУВАННЯ ПОНЯТЬ ТЕОРІЇ МНОЖИН, КОМБІНАТОРИКИ ТА ТЕОРІЇ ГРАФІВ ДО АНАЛІЗУ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ АВТОМАТИЗОВАНИХ СИСТЕМ

Мета заняття – закріпити, узагальнити та систематизувати знання здобувачів із основних понять теорії множин, комбінаторики та теорії графів, навчити застосовувати їх для аналізу структури, функціонування та взаємозв’язків у автоматизованих системах. Формувати аналітичне мислення при роботі з дискретними структурами.

8.1 Короткі теоретичні відомості

8.1.1 Теорія множин

Використання теорії множин для опису вхідних/вихідних сигналів, станів системи:

- основні операції: об'єднання ($\cup$), перетин ($\cap$), різниця ($\setminus$), доповнення;
- закони: комутативність, асоціативність, дистрибутивність;
- підмножини, потужність множини;
- декартовий добуток множин.

8.1.2 Комбінаторика

Комбінаторика як інструмент аналізу кількості варіантів вибору, послідовностей дій, комутацій:

- правила підрахунку: правило суми, правило добутку;
- розміщення: без повторень $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, з повтореннями $A_n^{(k)} = n^k$;
- перестановки: без повторень $P_n = n!$, з повтореннями;
- комбінації: без повторень $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, з повтореннями

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

8.1.3 Теорія графів

Теорія графів для побудови структурної схеми системи, аналізу зв'язності, маршрутів передавання сигналів:

- графи: орієнтовані, неорієнтовані;
- вершини, ребра, петлі, ступінь вершини;
- шляхи, цикли, зв'язність графа;
- дерева, остовні дерева;
- матриця суміжності та інцидентності.

8.1.4 Приклади розв'язання задач

8.1.4.1 Множини в автоматизованих системах

Задача 8.1. Задано множини можливих сигналів сенсора, актуатора і контролера. Побудувати множину допустимих станів системи.

Розв'язок

Нехай маємо:

- **S** — множина можливих сигналів від **сенсора** $S=\{0,1\}$,

де 0 — об'єкт не виявлено;

1 — об'єкт виявлено;

- **A** — множина керуючих сигналів **актуатора** $A=\{OFF,ON\}$,

де OFF — привід вимкнено;

ON — привід увімкнено;

- **C** — множина станів **контролера** $C=\{ОЧ, РЕАГ\}$,

де ОЧ — очікування події;

РЕАГ — активне реагування.

Система працює за логікою:

- якщо сенсор подає «1», контролер переходить у стан РЕАГ і активує актуатор (ON);
- якщо сенсор подає «0», контролер у стані ОЧ і актуатор вимкнений (OFF);
- інші комбінації **не допускаються** (суперечать логіці автоматики).

Побудова повної множини всіх можливих комбінацій

Це декартовий добуток

$$S \times A \times C = \{0,1\} \times \{OFF,ON\} \times \{WAIT,ACT\}$$

Загалом $2 \times 2 \times 2 = 8$ комбінацій.

Вибір допустимих станів відповідно до логіки роботи

Розглянемо всі 8 комбінацій і відфільтруємо лише ті, що відповідають описаним правилам (таблиця 8.1).

Таблиця 8.1 – Результати всіх комбінацій

Сенсор (S)	Актuator (A)	Контролер (C)	Допустимий стан?
0	OFF	ОЧ	✓ так
0	OFF	РЕАГ	✗ ні
0	ON	ОЧ	✗ ні
0	ON	РЕАГ	✗ ні
1	OFF	ОЧ	✗ ні
1	OFF	РЕАГ	✗ ні
1	ON	ОЧ	✗ ні
1	ON	РЕАГ	✓ так

Висновок

Отже, множина допустимих станів системи

$$D=\{(0,OFF,ОЧ), (1,ON,РЕАГ)\}.$$

Це означає, що система функціонує лише в **двох логічно правильних станах** відповідно до принципу роботи сенсор-контролер-актуатор.

8.1.4.2 Комбінаторика для аналізу режимів

Задача 8.2. Скільки можливих режимів роботи має система з 3 незалежними пристроями, кожен з яких може бути в 2 станах?

Розв'язок

Маємо систему з **3 незалежними пристроями**, кожен із яких може бути в **2 станах**: увімкнений (**1**) або вимкнений (**0**).

Потрібно визначити, **скільки можливих режимів роботи** має така система.

1 Аналіз природи задачі

Це класичне завдання на **комбінаторику** — визначення кількості можливих **комбінацій станів** елементів системи.

Оскільки:

- кожен пристрій **незалежний** (стан одного не впливає на інші);
- має **2 можливих стани** (наприклад, $\{0,1\}$);

- то кожен пристрій вносить **2 варіанти** в загальний добуток.

2 Формула для обчислень кількості усіх можливих комбінацій:

$$N=2^3=8.$$

Це — **декартовий добуток** множин станів для кожного пристрою:

$$\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}.$$

3 Побудова множини всіх можливих режимів (для наочності).

Позначимо пристрої як P_1, P_2, P_3 .

Тоді всі 8 режимів:

1 (0, 0, 0);

2 (0, 0, 1);

3 (0, 1, 0);

4 (0, 1, 1);

5 (1, 0, 0);

6 (1, 0, 1);

7 (1, 1, 0);

8 (1, 1, 1).

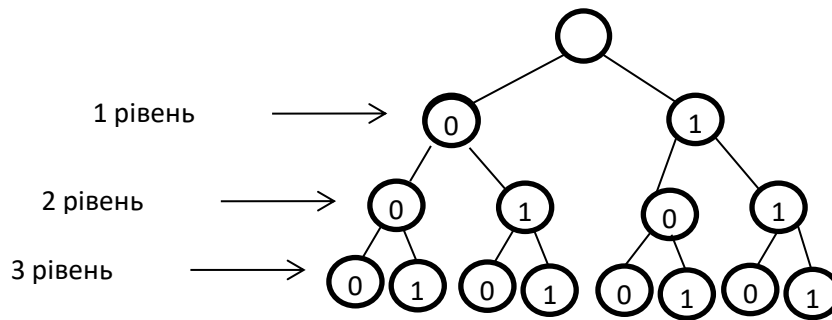
Кожна трійка — окремий режим роботи всієї системи.

Відповідь

Система має 8 можливих режимів роботи.

Графічна модель у вигляді **бінарного дерева станів**, яке ілюструє всі **8 можливих режимів роботи системи з 3 незалежними пристроями** (кожен у 2 станах: 0 або 1).

Дерево режимів роботи (бінарне дерево, 3 рівні)



Графова модель

Задача 8.3. Побудувати орієнтований граф для системи з п'яти елементів, у якій сигнал проходить через певну послідовність блоків. Знайти всі можливі шляхи від входу до виходу.

Розв'язок

1 Формалізація задачі

Маємо 5 блоків: **A, B, C, D, E** — кожен виконує свою функцію в заданій автоматизованій системі.

Сигнал має йти від входу (**A**) до виходу (**E**), але може проходити лише через частину з інших блоків (**B, C, D**), причому структура має вигляд дерева — з можливістю розгалужень.

2 Створимо граф системи

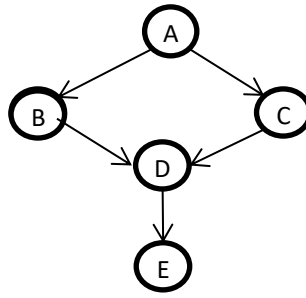
Нехай структура системи така:

- **A** — вхід (старт системи);
- з **A** сигнал може перейти до **B** або до **C**;
- з **B** та **C** сигнал іде в **D**;
- з **D** — у **E** (вихід).

Тобто орієнтовані дуги

- $A \rightarrow B$;
- $A \rightarrow C$;
- $B \rightarrow D$;
- $C \rightarrow D$;
- $D \rightarrow E$.

Це орієнтований **ациклічний граф (DAG)** з розгалуженням.



3 Знаходимо всі шляхи від А до Е.

Сигнал може йти:

- $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E$;
- $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$.

Усього **2 шляхи**.

4 Пояснення:

- а) хоча в системі 5 елементів, сигнал проходить **лише по одному з двох варіантів**, залежно від того, який блок активується після А (В чи С);
- б) усі елементи **не обов'язково** використовують в кожному шляху — важливо лише, що вхід завжди А, а вихід — Е;
- в) за умови, що від А або Е сигнал проходить через усі елементи (В, С, D) шляхів буде більше і вони будуть інші.

8.2 Завдання для виконання

Завдання 8.1. Опис множини допустимих станів системи керування стрілками.

Залізнична станція має **3 стрілки**: S_1 , S_2 , S_3 . Кожна може мати два стани: «пряма» (П) або «відхилена» (В).

Проте система автоматизованого керування допускає лише ті конфігурації стрілок, у яких **не більше однієї стрілки у відхиленому стані**, інакше виникає конфлікт маршрутів.

Побудувати множину всіх допустимих станів системи.

Завдання 8.2. Множина маршрутів для поїзда.

Поїзд має прямувати з пункту А в пункт D. На ділянці між ними розташовані **3 станції: В, С, Е**, які можна відвідувати або оминати.

Задати множину всіх можливих **маршрутів**, які:

- починаються в А і закінчуються в D;
- не проходять одну й ту саму станцію двічі;
- можуть включати будь-яку підмножину станцій {В, С, Е} в довільному порядку.

Завдання 8.3. Комбінаторика для аналізу режимів.

Скільки можливих режимів роботи має система з 3 незалежними пристроями, кожен з яких може бути в 2 станах: «увімкнено» або «вимкнено»?

Завдання 8.4. У системі автоматичного керування є 4 незалежні елементи. Два з них можуть бути в **3 станах** (*норма, перевантаження, аварія*), а ще два — лише в **2 станах** (*увімкнено/вимкнено*). Скільки всього режимів роботи системи?

Завдання 8.5. На залізничній ділянці встановлено **3 незалежні автоматизовані пристрої**:

- 1 **сигнал** (може бути червоним або зеленим);
- 2 **стрілка** (може бути переведена вліво або вправо);
- 3 **шлагбаум на переїзді** (може бути опущеним, піднятим або в русі).

Скільки **різних режимів роботи** може мати така система?

Завдання 8.6. Графові моделі.

Мережа складається з вузлів:

- А (центральний контролер);
- В, С, D (виконавчі пристрої);
- Е, F (датчики).

З'єднання такі: А — В, А — С, В — D, С — Е, D — F.

- 1 Побудувати неорієнтований граф мережі;

- 2 знайти ступінь кожної вершини;
- 3 чи є цей граф деревом;
- 4 побудувати матриці суміжності та інцидентності.

Завдання 8.7. Побудувати орієнтований граф для автоматизованої залізничної системи з п'яти елементів, через які проходить сигнал керування (наприклад, від прибуття поїзда до керування стрілкою). Визначити всі можливі шляхи сигналу від входу (початку роботи системи) до виходу (виконання команди).

Завдання 8.8. Застосування алгоритму пошуку в графі.

Для мережі, яка складається з вузлів:

- А (центральний контролер);
- В, С, D (виконавчі пристрої);
- Е, F (датчики).

Зі з'єднаннями: $A \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$, $C \leftrightarrow E$, $D \leftrightarrow F$.

- 1 Представити мережу у вигляді графа;
- 2 визначити структуру графа та ступеня вершин;
- 3 визначити чи всі вершини досяжні, починаючи з вузла А;
- 4 визначити мінімальний шлях від А до F;
- 5 визначити мінімальний шлях від Е до F.

Використана література: [1 – 5], [6].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Математичні основи аналізу і синтезу систем автоматики : лекційні матеріали, що розміщені на порталі дистанційного навчання MOODLE.

2 Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. Комп'ютерна дискретна математика. Харків: Компанія Сміт, 2004. 480 с.

3 Мічура О. Р. Методичні вказівки для виконання практичних завдань з дисципліни «Комп'ютерна дискретна математика» для студ. спеціальностей 121 «Інженерія програмного забезпечення» та 122 «Комп'ютерні науки» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання. Рівне: НУВГП, 2018. 23 с.

4 Стеганцев Є. В. Теорія груп: метод. вказівки для студ. напряму підготовки «Математика» спеціалізації «Алгебра і теорія чисел». Запоріжжя: ЗНУ, 2013. 45 с.

5 Харченко В. М. Практикум з дискретної математики. Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2022. 148 с.

6 Зеліско М. М., Пирч Н. М. Практикум з дискретної математики. Львів: Українська Академія Друкарства, 2022. 609 с.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання практичних занять та самостійної роботи

з дисципліни
*«МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ АНАЛІЗУ
І СИНТЕЗУ СИСТЕМ АВТОМАТИКИ»*

Відповідальний за випуск Щебликіна О. В.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 13.10.2025 р.
Умовн. друк. арк. 5,0. Тираж . Замовлення № .
Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.