

**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

**ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ
ТА ТЕХНОЛОГІЙ**

**Кафедра автоматики та комп'ютерного телекерування
рухом поїздів**

**ВИКОРИСТАННЯ MathCAD Prime ДЛЯ ІНЖЕНЕРНИХ
РОЗРАХУНКІВ**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**для виконання практичних робіт, самостійної роботи
з освітньої компоненти**

***«МЕТОДИ ТА ПРОГРАМНО-ТЕХНІЧНІ ЗАСОБИ
ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКІВ»***

**для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
спеціальності G7 (174) «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані
технології та робототехніка»**

Харків 2026

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри автоматики та комп'ютерного телекерування рухом поїздів 29 грудня 2025 р., протокол № 4.

Методичні вказівки призначені для здобувачів спеціальності G7 (174) «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка», які вивчають освітню компоненту «Методи та програмно-технічні засоби інженерних розрахунків», усіх форм здобуття освіти.

Укладачі:

доц. С. О. Змій,
старш. викл. М. В. Ушаков

Рецензент

доц. С. В. Індик

Зміст

Вступ	4
Практична робота 1. Ознайомлення з середовищем MathCAD Prime.....	5
Практична робота 2. Лінійна алгебра в MathCAD: вектори, матриці та системи рівнянь.....	14
Практична робота 3. Візуалізація даних: побудова 2D і 3D-графіків	19
Практична робота 4. Символьні обчислення (Computer Algebra System) і аналітичні перетворення.....	23
Практична робота 5. Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь та оптимізація (Given-Find, Minimize)	27
Список літератури	32

Вступ

В умовах стрімкого розвитку індустрії 4.0 і цифровізації виробничих процесів вимоги щодо кваліфікації інженера з автоматизації суттєво трансформуються. Сучасний фахівець повинен не лише розуміти фізику процесів, але й володіти інструментарієм для їхнього математичного моделювання, аналізу та оптимізації. Освітня компонента «Методи та програмно-технічні засоби інженерних розрахунків» є фундаментальною складовою підготовки здобувачів спеціальності G7 (174) «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» усіх форм здобуття освіти.

Методичні вказівки присвячені вивченню програмного середовища PTC MathCAD Prime – одного з найпотужніших і найбільш поширених у світі інструментів для виконання інженерних розрахунків. На відміну від класичних мов програмування (C++, Python) або електронних таблиць (Excel), MathCAD використовує інтерфейс «живого документа» (WYSIWYG — What You See Is What You Get). Це дає змогу інженеру записувати формули у звичному математичному вигляді, поєднувати їх із текстом, графіками та зображеннями, створюючи професійно оформлену технічну документацію одночасно з обчисленнями.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 1

Ознайомлення з середовищем MathCAD Prime

Мета роботи

Ознайомитися з архітектурою та інтерфейсом програмного комплексу PTC MathCAD Prime. Вивчити структуру стрічкового меню (Ribbon UI), опанувати техніку введення та редагування математичних виразів, зрозуміти відмінності між різними типами операторів рівності. Навчитися працювати з «розумною» системою фізичних одиниць вимірювання (Units Management System) і налаштовувати формати відображення результатів обчислень.

1.1 Теоретичні відомості

Система MathCAD була створена в 1986 році Алленом Раздовим (Allen Razdow) із MIT. Його ідея полягала в тому, щоб дати інженерам «електронну дошку», яка б розуміла математичну нотацію. Довгий час стандартом де-факто була версія MathCAD 15, базована на застарілому програмному ядрі. Із 2011 року компанія PTC (Parametric Technology Corporation) розпочала випускати лінійку MathCAD Prime, яка повністю переписана на платформі .NET і має сучасний інтерфейс.

На відміну від систем типу MATLAB, які орієнтовані на матричні обчислення та скриптові мови, MathCAD орієнтований на **документування**. Документ MathCAD (.mcdx) читають як сторінку підручника: формули записані через дроби, інтеграли — через знак $\int$, а не функцію `int()`. Це забезпечує верифікацію розрахунків (Calculations Verification): будь-який інший інженер може подивитися на роздруківку і перевірити логіку, не знаючи синтаксису програмування.

Інтерфейс користувача: концепція робочого аркуша

Після запуску MathCAD Prime відкривається робочий простір, організований за принципом нескінченного (або сторінкового) білого аркуша.

Основні елементи інтерфейсу:

- **кнопка додатка (Application Button):** ліворуч вгорі (логотип MathCAD). Містить меню роботи з файлами *New, Open, Save, Print, Close*, а також доступ до *Options* (налаштування програми);
- **панель швидкого доступу (Quick Access Toolbar)** розміщена поруч із кнопкою додатка, містить найчастіші команди (*Undo, Redo, Save*);
- **стрічка (Ribbon):** основний інструментарій, згрупований за вкладками;
 - **Math:** головна вкладка. Тут знаходяться інструменти для визначення змінних, вставлення операторів, символів, одиниць вимірювання, вибору регіонів;
 - **Input/Output:** інструменти для інтеграції зовнішніх даних (*Excel, CSV, текстові файли*). Дає змогу вбудовувати компоненти *Excel* прямо в аркуш MathCAD («*Excel Component*»);
 - **Functions:** бібліотека вбудованих функцій, категоризована за типом (*Statistics, Trigonometry, Solving, Differential Equations* тощо);
 - **Matrices/Tables:** інструменти для створення та маніпуляцій із векторами і матрицями;
 - **Plots:** інструменти візуалізації (*XY Plots, 3D Plots, Contour Plots*);
 - **Math Formatting:** керування шрифтами у формулах (*Math Font*), точністю (*Precision*), системою числення (*Decimal, Hex, Octal*);
 - **Text Formatting:** аналог функцій *MS Word* для текстових блоків;
 - **Calculation:** керування процесом обчислення (*Auto Calculation, Stop, Calculate Now*);
 - **Document:** налаштування параметрів сторінки (*Page Size, Margins, Grid*).

Регіони: будівельні блоки документа

У MathCAD Prime документ складається з **регіонів**. Це прямокутні області, які містять контент.

Математичний регіон (Math Region): Містить виконувані формули. При натисканні на будь-яке вільне місце і введенні цифри або букви автоматично створюється математичний регіон.

Текстовий регіон (Text Region): створений натисканням Ctrl+T або через меню. Не обчислюваний, служить для коментарів.

Блок розв'язання (Solve Block): спеціальний контейнер для структурних чисельних алгоритмів.

Графічний регіон (Plot Region): область візуалізації.

Особливість: регіони можна вільно перетягувати мишею. Якщо один регіон накладається на інший, їхні межі підсвічені, попереджаючи про перекриття. MathCAD виконує обчислення **зліва направо і зверху вниз**. Це критично важливо: змінна має бути визначена *вище* або *лівіше* того місця, де її використовують.

Оператори рівності: фундаментальна відмінність

Однією з найчастіших помилок початківців є плутанина між трьома видами знака «дорівнює». У MathCAD вони мають різну семантику (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1

Оператор	Символ на екрані	Клавіатура	Призначення	Пояснення
1	2	3	4	5
Definition (Присвоєння)	:=	: (двокрапка)	Записати значення в пам'ять	Використовують, коли ми <i>створюємо</i> нову змінну або функцію. Наприклад, Voltage := 220. Із цього моменту система «знає», що Voltage дорівнює 220

Продовження таблиці 1.1

1	2	3	4	5
Evaluation (Обчислення)	=	= (дорівнює)	Вивести результат із пам'яті	Використовують, щоб запитати в системи «чому це дорівнює?». Наприклад, якщо написати Voltage =, система виведе 220. Якщо написати 2 + 2 =, система виведе 4
Comparison / Boolean (Логічне)	= (жирне)	Ctrl + =	Порівняння або зв'язок	Використовують у логічних виразах (чи A дорівнює B?) і блоках Solve Block для запису рівнянь, які потрібно розв'язати. Це ствердження рівності, а не дія присвоєння
Global Definition (Глобальне)	≡	Ctrl+Shift+~	Глобальна константа	Змінну, визначена цим оператором, видно у всьому документі, навіть вище місця визначення. Використовують рідко, зазвичай для фізичних констант

Інтелектуальна система одиниць (Units)

MathCAD відрізняється від Excel і мов програмування тим, що «розуміє» фізичну сутність числа. Число 5 і число 5 м для MathCAD — це різні об'єкти.

Введення одиниць. Після введення числа потрібно ввести знак множення *, а потім назву одиниці. MathCAD автоматично розпізнає стандартні позначення: *m*, *s*, *kg*, *A*, *V*, *W*, *J*. Якщо одиниця розпізнана, вона підсвічена синім кольором (за замовчуванням).

Автоматичний перерахунок. Якщо ви додасте $1\text{ m} + 50\text{ cm}$, MathCAD автоматично переведе 50 см у 0.5 м і видасть результат 1.5 м.

Контроль розмірності (Dimensional Analysis). Якщо ви спробуєте додати $1\text{ kg} + 1\text{ s}$, MathCAD видасть повідомлення про помилку: «*The units are not compatible*». Це потужний інструмент для пошуку помилок у формулах.

Зміна одиниць результату. За замовчуванням результат виведено в базових одиницях системи SI. Щоб перевести результат в інші одиниці (наприклад із джоулів у калорії або кіловат за годину), потрібно натиснути на чорний квадратик (placeholder) наприкінці результату (після одиниці вимірювання) і вписати туди бажану одиницю.

1.2 Порядок виконання

Етап 1. Запуск і налаштування

- 1 Запустіть програму PTC MathCAD Prime.
- 2 Натисніть кнопку додатка (Application Button) -> *Options*.

Перейдіть у вкладку *Worksheet Options*. Переконайтеся, що система одиниць (Unit System) встановлена як **SI** (International System of Units). Це важливо для коректності подальших розрахунків.

- 3 На стрічці перейдіть у вкладку *Document*.

Увімкніть відображення сітки (Grid), натиснувши *Show Grid*. Виберіть тип сітки *Fine*, щоб зручніше вирівнювати регіони.

Встановіть розмір сторінки A4 та орієнтацію *Portrait*.

Етап 2. Текстове оформлення

1 Створіть текстовий блок у верхній частині сторінки. Для цього натисніть **Ctrl + T** або виберіть *Text Block* на вкладці *Math*.

2 Введіть текст заголовка лабораторної роботи: Практична робота 1.
Тема: Ознайомлення з середовищем MathCAD Prime

Виконав: здобувач освіти гр. 174-XX Прізвище І. Б.

3 Виділіть текст. Перейдіть на вкладку *Text Formatting*:

- змініть шрифт на *Times New Roman* або *Arial*;
- встановіть розмір шрифту 14-16 пт для заголовка;
- застосуйте накреслення **Bold** (напівжирний) для теми;
- змініть колір тексту (Text Color), наприклад, на темно-синій.

Етап 3. Арифметичні операції

1 Натисніть мишею нижче текстового блока. Введіть простий вираз:
15 + 24.

2 Натисніть **=** на клавіатурі. Система миттєво виведе результат: **39.**

3 Спробуйте складніший вираз із використанням панелі Operators (вкладка Math -> Operators):

$$\frac{12.5 + 3^2}{\sqrt{16}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Підказка. Для дробу використовуйте клавішу **/**. Для ступеня — **^**. Для кореня — ****. Число π вводять як **р**, потім **Ctrl + G** (грецька літера) або через кнопку *Constants* на стрічці.

Увага! Аргумент тригонометричних функцій (sin, cos, tan) за замовчуванням у радіанах. Вираз **sin(30)** обчислить синус 30 радіан. Щоб обчислити синус 30 градусів, потрібно ввести **sin(30 deg)**.

Етап 4. Змінні та оператор присвоєння

1 Визначте змінні *a*, *b* та *c*:

- натисніть **a**, потім **:=**, введіть **2.5**. (На екрані з'явиться **a := 2.5**);
- натисніть **b**, потім **:=**, введіть **-4**;
- натисніть **c**, потім **:=**, введіть **10**.

2 Визначте проміжну змінну D (дискримінант): введіть D , натисніть $:=$, введіть формулу $b^2 - 4*a*c$.

3 Перевірте значення D . Нижче напишіть $D =$. Результат має бути -84.

4 Змініть значення змінної a на 1. Натисніть мишею поза регіоном. Зверніть увагу, що значення D автоматично перераховано (стало -24). Це принцип **Live Calculation**.

Етап 5. Робота з одиницями вимірювання

Розв'яжемо просту задачу з механіки.

1 Задайте масу тіла: $m := 50 \text{ kg}$ (введіть kg , і переконайтеся, що воно стало синім).

2 Задайте прискорення: $a_{acc} := 2.5 \cdot \frac{m}{s^2}$ (використовуйте нижній індекс $_{acc}$ для створення імені a_{acc} , щоб не плутати з попередньою змінною a).

3 Обчисліть силу за другим законом Ньютона

$$F := m a_{acc}.$$

4 Виведіть результат: $F =$. Система покаже 125 N . MathCAD знає, що $\text{kg m/s}^2 = \text{Newton}$.

5 Спробуйте перевести результат у кілоньютони:

- натисніть на результат 125 N ;
- наприкінці рядка з'явиться чорний прямокутник біля одиниці вимірювання;
- зітріть N і напишіть kN ;
- натисніть **Enter**. Результат зміниться на 0.125 kN .

Етап 6. Форматування математичного результату

1 Припустимо, ми отримали число з великою кількістю знаків після коми, наприклад π . Введіть π , **Ctrl+G**, $=$. Результат: 3.142 (за замовчуванням три знаки).

2 Перейдіть на вкладку *Math Formatting*.

3 Знайдіть групу *Result*:

- *General*: стандартне відображення;

- *Decimal*: фіксована кількість знаків. Виберіть цей режим;
- *Scientific*: експоненційний запис (наприклад $3.14 \cdot 10^0$).

4 Змініть параметр *Displayed Precision* (відображувана точність) на 10. Переконайтеся, що відображено більше цифр числа π .

1.3 Індивідуальні завдання для практичної роботи 1

Кожен здобувач отримує індивідуальний варіант згідно з номером у списку групи (таблиця 1.2). Завдання складається з двох частин: чисто математичного обчислення та фізичної задачі з розмірностями.

1 Обчислити значення математичного виразу (завдання 1) за заданого x .

2 Розв'язати фізичну задачу (завдання 2), використовуючи вбудовані одиниці вимірювання. Результат перевести у вказані в дужках одиниці.

Таблиця 1.2 – Варіанти завдань

Варіант	Завдання 1 (обчислити значення виразу)	Завдання 2 (фізична задача з одиницями)
1	2	3
1	$y = \frac{\sin^2(x) + \cos(2x)}{e^x + \sqrt{x}}, x = 2.5$	$E = \frac{mv^2}{2}, m = 1500\text{кг}, v = 90\text{км/год} \rightarrow [\text{кДж}]$
2	$y = \ln(x^2 + 1) \cdot \tan(\frac{x}{2}), x = 0.5$	$\rho = \frac{m}{V}, m = 450\text{г}, V = 200\text{см}^3 \rightarrow [\text{кг/м}^3]$
3	$y = \sqrt{x^2 + 5x} - e^{-x}, x = 4$	$P = \rho gh, \rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, h = 10\text{м} \rightarrow [\text{кПа}]$
4	$y = \arccos(\frac{1}{x}) + x^3, x = 1.5$	$A = I^2 Rt, I = 5\text{А}, R = 100\text{Ом}, t = 1\text{год} \rightarrow [\text{кВт} \cdot \text{год}]$
5	$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sin(x), x = 1$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, l = 2.5\text{м} \rightarrow [\text{с}]$
6	$y = \frac{\lg(x) + x}{\sqrt{x^2 + 1}}, x = 100$	$I = \frac{U}{R}, U = 220\text{В}, R = 50\text{Ом} \rightarrow [\text{мА}]$

Продовження таблиці 1.2

1	2	3
7	$y = \cos^2(x) - \sin^2(x), x = \frac{\pi}{4}$	$E_p = mgh, m = 50\text{кг}, h = 20\text{м} \rightarrow [\text{кДж}]$
8	$y = \sqrt{x^{\sin(x)}}, x = 2$	$V = \pi r^2 h, r = 5\text{см}, h = 0.2\text{м} \rightarrow [\text{л}]$
9	$y = \frac{1}{\tan(x)} + e^{x-1}, x = 0.8$	$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, L = 10\text{мГн}, C = 100\text{мкФ} \rightarrow [\text{Гц}]$
10	$y = x^2 \cdot e^{\cos(x)}, x = 3$	$P = F \cdot v, F = 2\text{кН}, v = 10\text{м/с} \rightarrow [\text{к.с.}]$
11	$y = \frac{\sqrt{x} + \ln(x)}{x^2}, x = 5$	$Q = cm\Delta T, c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, m = 2\text{кг}, \Delta T = 50^\circ\text{C} \rightarrow [\text{кДж}]$
12	$y = \sin(x) \cos(x) \tan(x), x = 1$	$W = \frac{LI^2}{2}, L = 0.5\text{Гн}, I = 2\text{А} \rightarrow [\text{Дж}]$
13	$y = \frac{x^3-1}{x-1}, x = 1.001$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3, r = 10\text{см} \rightarrow [\text{дм}^3]$
14	$y = \coth(x), x = 0.5$	$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}, S = 100\text{см}^2, d = 1\text{мм} \rightarrow [\text{пФ}]$
15	$y = \sqrt{x^2 + 1}, x = 7$	$\omega = 2\pi n, n = 3000\text{об/хв} \rightarrow [\text{рад/с}]$

Контрольні запитання

- 1 Які основні переваги MathCAD Prime порівняно з електронними таблицями Excel для виконання інженерних розрахунків?
- 2 Поясніть принцип «Live Calculation» (живого розрахунку) у MathCAD.
- 3 Чим відрізняється оператор присвоєння $:=$ від оператора обчислення $=$?
- 4 Як ввести текстовий коментар у робочий аркуш?
- 5 Що таке «регіон» у MathCAD і які типи регіонів існують?

6 Як система реагує на спробу додати величини з різними розмірностями (наприклад масу і час)?

7 Як змінити одиниці вимірювання в результаті (наприклад перевести метри за секунду в кілометри за годину)?

8 Як ввести грецьку літеру (наприклад λ або α)?

9 Як змінити точність відображення результату з трьох знаків після коми на 5?

10 Як ввести нижній індекс у назві змінної (наприклад V_{out})?

ПРАКТИЧНА РОБОТА 2

Лінійна алгебра в MathCAD: вектори, матриці та системи рівнянь

Мета роботи

Вивчити функціонал MathCAD Prime для роботи з масивами даних. Опанувати методи створення векторів і матриць, виконання матричних операцій (транспонування, обернення, множення). Навчитися розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) різними методами: матричним, методом Крамера та за допомогою вбудованих функцій оптимізованого пошуку (*lsolve*).

2.1 Теоретичні відомості

Лінійна алгебра є математичним фундаментом теорії автоматичного керування. Моделі об'єктів керування часто подають у просторі станів (State Space) як матричні диференціальні рівняння: $\dot{x} = Ax + Bu$. Розв'язання задач статички електричних кіл також зведено до СЛАР (методи контурних струмів або вузлових потенціалів).

Типи масивів та індексація

У MathCAD масив (Array) — це загальна назва для структурованих даних:

- вектор-стовпець - матриця розміром $n \times 1$;
- вектор-рядок - матриця розміром $1 \times n$;
- матриця - двовимірний масив $m \times n$.

Системна змінна ORIGIN:

Це одне з найважливіших налаштувань. Вона визначає стартовий індекс масиву.

За замовчуванням $\text{ORIGIN} = 0$. Перший елемент вектора V має індекс V_0 . Це зручно для програмування.

У математичній літературі прийнято нумерацію з одиниці (a_{11} , a_{12} ...). Щоб переключити MathCAD у цей режим, на початку документа потрібно написати: $\text{ORIGIN} := 1$.

Створення та редагування матриць

Матриці створюють через вкладку Matrices/Tables -> Insert Matrix.

Для доступу до елементів використовують індексний оператор (Matrix Index). Клавіша: .

Програма роботи

- 1 Налаштування індексації масивів (ORIGIN).
- 2 Створення матриць і векторів, заповнення їх даними.
- 3 Виконання арифметичних дій над матрицями (додавання, множення, транспонування).
- 4 Обчислення визначника та оберненої матриці.
- 5 Розв'язання СЛАР двома способами (матричним і через *lsolve*).
- 6 Перевірка правильності розв'язку.

2.2 Порядок виконання

Етап 1. Ініціалізація

- 1 Створіть новий документ.
- 2 Встановіть індексацію з одиниці: наберіть `ORIGIN`, натисніть `:`, введіть `1`.

Етап 2. Створення матриць

Задано матрицю A і вектор B (згідно з варіантом, тут приклад):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

- 1 Натисніть `A`, потім `:`, перейдіть на вкладку *Matrices/Tables*, виберіть *Insert Matrix* і задайте розмір 3×3 .
- 2 Заповніть комірки числами. Використовуйте `Tab` для переміщення.
- 3 Аналогічно створіть вектор B розміром 3×1 .

Етап 3. Операції

- 1 Знайдіть визначник матриці A . Введіть `|A|` (прямі дужки) і натисніть `=`.
- 2 Знайдіть обернену матрицю. Введіть `A^-1`.
- 3 Транспонуйте матрицю. Введіть `A`, натисніть `Ctrl+Shift+T`, потім `=`.

Етап 4. Розв'язання системи

Система рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 15 \end{cases}.$$

- 1 Спосіб 1 (матричний).
Обчисліть вектор коренів X . `X := A^-1 * B`. Виведіть результат `X`.
- 2 Спосіб 2 (вбудована функція):
`X2 := lsolve(A, B)`. Виведіть `X2`. Порівняйте з попереднім результатом.

Етап 5. Перевірка

Перевірте, чи правильно знайдено корені. Помножте вихідну матрицю A на знайдений вектор X . $Check := A * X$.

Результат має дорівнювати вектору B .

2.3 Індивідуальні завдання для практичної роботи 2

Задано матрицю коефіцієнтів A і вектор вільних членів B для системи рівнянь $AX = B$ (таблиця 2.1).

- 1 Знайти визначник матриці $|A|$.
- 2 Знайти матрицю, обернену до A^{-1} .
- 3 Розв'язати систему матричним методом ($X = A^{-1} B$).
- 4 Розв'язати систему функцією *lsolve*.
- 5 Виконати перевірку ($A X - B = 0$).

Таблиця 2.1 — Варіанти матриць (для економії місця наведено рядки матриці A і вектор B)

Варіант	Матриця A (по рядках)	Вектор B	Варіант	Матриця A (по рядках)	Вектор B
1	(2, 1, -1); (3, 2, 0); (1, 0, 1)	(1; 5; 2)	16	(3, 1, 1); (1, 3, 1); (1, 1, 3)	(5; 5; 5)
2	(1, 2, 3); (2, -1, 2); (1, 1, 1)	(6; 3; 3)	17	(2, -3, 1); (1, 5, - 4); (4, 1, -3)	(2; -5; -4)
3	(3, -1, 0); (-2, 1, 1); (2, -1, 4)	(2; 0; 5)	18	(1, 2, 4); (5, 1, 2); (3, -1, 1)	(31; 29; 10)
4	(1, 1, 1); (1, 2, 3); (1, 3, 6)	(3; 6; 10)	19	(2, 1, 0); (1, 0, 3); (0, 5, -1)	(3; 4; 4)
5	(2, 3, -1); (1, -2, 1); (1, 0, 2)	(4; 0; 3)	20	(5, 2, 3); (1, -1, 1); (3, 0, 2)	(-2; 0; 2)
6	(1, 0, 0); (2, 1, 0); (-3, 2, 1)	(1; 3; -1)	21	(1, 2, -1); (2, 3, 4); (3, 5, 3)	(2; 9; 11)

Продовження таблиці 2.1

Варіант	Матриця А (по рядках)	Вектор В	Варіант	Матриця А (по рядках)	Вектор В
7	(4, 1, -1); (2, 3, 2); (1, 1, 1)	(4; 7; 3)	22	(1, 1, -1); (2, -1, 1); (1, -2, 2)	(1; 2; 1)
8	(2, -5, 1); (3, 1, - 2); (1, 2, 3)	(-2; 2; 6)	23	(3, 2, 1); (2, 3, 1); (2, 1, 3)	(5; 1; 11)
9	(1, -1, 2); (2, 1, - 1); (3, 0, 1)	(2; 2; 4)	24	(1, 2, 3); (4, 5, 6); (7, 8, 10)	(1; 2; 3)
10	(2, 1, 3); (1, -2, 1); (3, -1, 4)	(6; 0; 6)	25	(2, -1, -1); (3, 2, 1); (1, 3, 3)	(0; 6; 7)
11	(0, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 1, 0)	(2; 3; 4)	26	(1, 1, 1); (2, 3, 1); (3, 1, 2)	(6; 11; 11)
12	(3, 4, 2); (2, -1, - 3); (1, 5, 1)	(9; -2; 7)	27	(2, 1, 1); (1, 2, 1); (1, 1, 2)	(4; 4; 4)
13	(2, 2, -1); (2, -1, 2); (-1, 2, 2)	(3; 3; 3)	28	(1, -2, 3); (4, 2, - 1); (3, 5, 2)	(2; 5; 10)
14	(1, 2, 1); (3, 2, 1); (1, 1, 2)	(4; 6; 4)	29	(2, 3, 4); (4, 3, 2); (1, 1, 1)	(9; 9; 3)
15	(5, 2, 1); (2, 1, 0); (1, 0, 2)	(8; 3; 3)	30	(1, 0, -1); (2, 3, 5); (1, 4, 0)	(0; 10; 5)

Контрольні запитання

- 1 Як змінити початковий індекс масивів у документі?
- 2 Як звернутися до конкретного елемента матриці M_{ij} ?
- 3 Яка умова існування оберненої матриці?
- 4 Що робить функція `lsolve` і чому вона краща за просте обернення матриці?
- 5 Як створити матрицю розміром 10×10 автоматично, якщо її елементи задані формулою $a_{ij} = \sin(i \cdot j)$?
- 6 Які гарячі клавіші використовують для транспонування?

ПРАКТИЧНА РОБОТА 3

Візуалізація даних: побудова 2D- і 3D-графіків

Мета роботи

Навчитися використовувати графічні можливості MathCAD Prime для аналізу функцій і даних. Опанувати побудову двовимірних графіків (XY Plot) функцій однієї змінної, параметричних графіків і графіків за точками. Навчитися форматовувати графіки (стилі ліній, маркери, легенди, осі). Ознайомитися з побудовою тривимірних поверхонь (3D Plot) і контурних графіків (Contour Plot).

3.1 Теоретичні відомості

Типи графіків у MathCAD Prime

MathCAD пропонує потужний набір інструментів для візуалізації:

- **XY Plot.** Основний тип графіка для інженерів. Дає змогу будувати залежність $y = f(x)$. Може відображати як аналітичні функції, так і вектори експериментальних даних;
- **3D Plot.** Використовують для функцій двох змінних $z = f(x, y)$. Дає змогу будувати поверхні, сітки і точкові хмари у просторі;
- **Contour Plot.** Топографічна карта поверхні. Показує лінії рівного рівня ($z = \text{const}$). Корисна для пошуку екстремумів функцій двох змінних;
- **Polar Plot.** Графік у полярній системі координат (ρ, φ) .

Створення графіка

Вставляють графік через вкладку Plots.

На відміну від Excel, де потрібно спочатку виділити дані, у MathCAD спочатку вставляють порожній шаблон графіка, а потім у спеціальні місця (placeholders) вводять імена функцій або векторів.

Програма роботи

- 1 Табулювання функції: створення векторів аргументів і значень.
- 2 Створення XY Plot.
- 3 Побудова графіка однієї функції.
- 4 Побудова декількох графіків в одній системі координат (накладання).
- 5 Форматування графіків: додавання сітки, заголовків, зміна кольорів.
- 6 Побудова 3D-поверхні.

3.2 Порядок виконання

Етап 1. Табулювання функції

Задача: обчислити значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ з n розбиттями.

- 1 Задайте вхідні параметри, наприклад

$$a := -\pi,$$

$$b := \pi,$$

$$n := 20.$$

- 2 Розрахуйте крок: $h := \frac{b-a}{n}$.

- 3 Створіть індексну змінну: $i := 0..n$.

- 4 Створіть вектор аргументів: $x_i := a + i h$.

- 5 Задайте функцію: $f(t) := e^{-0.5t} \cos(2t)$.

- 6 Обчисліть вектор значень: $y_i := f(x_i)$.

- 7 Виведіть таблицю. Напишіть $x=$ і поруч $y=$. Ви побачите два довгих стовпці даних.

Етап 2. Побудова графіка

- 1 Перейдіть на вкладку *Plots* -> *Insert Plot* -> *XY Plot*.
- 2 У нижній плейсхолдер (вісь X) введіть ім'я вектора: x .
- 3 У лівий плейсхолдер (вісь Y) введіть ім'я вектора: y .
- 4 Натисніть Enter. З'явиться ламана лінія, що з'єднує розраховані точки.

Етап 3. Додавання другої кривої та форматування

- 1 Додамо теоретичну криву (гладку):
 - натисніть на вісь Y (там, де написано y);
 - натисніть кнопку *Add Trace* (або Shift+Enter);
 - у новому полі введіть саму функцію: $f(x)$. **Але увага!** Тут аргумент x має бути визначений як діапазон, або MathCAD спробує використати вектор x (що теж спрацює, але для гладкості краще задати окрему ранжовану змінну з дрібним кроком);
 - кращий варіант: створити `t_smooth := a, a+0.01.. b`;
 - на осі X додати `t_smooth` (через Add Trace на осі X);
 - на осі Y додати $f(t_smooth)$.
- 2 Налаштуйте вигляд:
 - перша крива (точки): стиль лінії — *None*, маркер — *Circle*, колір — *Red*;
 - друга крива (теорія): стиль лінії — *Solid*, товщина — 2, колір — *Blue*.
- 3 Додайте заголовок «Графік загасаючих коливань».
- 4 Додайте легенду (Legend), назвавши криві «Експеримент» і «Модель».

Етап 4. 3D-поверхня

- 1 Задайте функцію двох змінних: `G(x, y) := sin(x) sin(y)`.
- 2 Вставте *3D Plot*.
- 3 Введіть G .
- 4 Обертайте графік мишею. Спробуйте змінити *Color Scale* на *Rainbow*.

3.3 Індивідуальні завдання для практичної роботи 3

За даними таблиці варіантів (таблиця 3.1):

- 1 Побудувати графік функції $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$.
- 2 Побудувати 3D-графік поверхні $Z(x, y)$.
- 3 Знайти мінімальне та максимальне значення функції на цьому інтервалі (використовуючи функції $\min(y)$ та $\max(y)$).

Таблиця 3.1 — Варіанти функцій

Варіант	$f(x)$, інтервал $[-10,10]$	$Z(x,y)$
1	$x^2 \sin(x)$	$x^2 + y^2$
2	$e^{-0.1x} \cos(x)$	$x^2 - y^2$
3	$\frac{\sin(x)}{x}$	$\cos(\sqrt{x^2 + y^2})$
4	$x^3 - 5x + 1$	$\sin(x) + \sin(y)$
5	$\arctan(x)$	$e^{-(x^2+y^2)}$
6	$\ln(x^2 + 1)$	$\sqrt{x^2 + y^2}$
7	$\cos(x) + \sin(2x)$	$x \sin(y)$
8	$e^x / (1 + e^x)$	$y \cos(x)$
9	$\sqrt{x^2 + 4}$	$10 - x^2 - y^2$
10	$x \cos(x)$	$\sin(x^2 + y^2)$
11	$x^2 e^{-x}$	$x^2 y$
12	$\frac{1}{x^2+1}$	y^2/x
13	$\sin(x) \cos(2x)$	$e^x \sin(y)$
14	$x + \sin(x)$	$x^2 + xy + y^2$
15	$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$x \ln(y^2 + 1)$

Контрольні запитання

- 1 Що таке ранжована змінна і який її синтаксис?
- 2 Чим відрізняється вектор від ранжованої змінної?
- 3 Як побудувати два графіки з різними масштабами по осі Y (Secondary Y-Axis)?
- 4 Як змінити крок сітки на графіку?
- 5 Як зберегти отриманий графік як зображення (PNG/JPG) для вставлення у звіт Word?
- 6 Які дані необхідні для побудови Contour Plot?

ПРАКТИЧНА РОБОТА 4

Символьні обчислення (Computer Algebra System)

і аналітичні перетворення

Мета роботи

Ознайомитися з можливостями символьного ядра MathCAD (Symbolic Engine). Навчитися виконувати операції математичного аналізу (диференціювання, інтегрування, обчислення границь) в аналітичному (формульному) вигляді. Навчитися спрощувати алгебраїчні вирази, розв'язувати рівняння символьно та працювати з поліномами.

4.1 Теоретичні відомості

Більшість інженерних програм (Excel, MATLAB) працюють із числами. Якщо попросити їх додати $1/3 + 1/3$, вони отримають 0.666666... .

MathCAD має подвійну природу. Він має вбудовану систему комп'ютерної алгебри (CAS), яка «знає», що $1/3 + 1/3 = 2/3$.

Символьний процесор допомагає отримувати точні розв'язки, формули залежностей, які потім можна використовувати для аналізу.

Символьний оператор ($\rightarrow$)

Для виклику символьного обчислення використовують спеціальний знак рівності — стрілка вправо ($\rightarrow$).

Клавіатура: **Ctrl + .** (крапка).

Модифікатори (Keywords): над стрілкою можна писати команди, які уточнюють дію:

- **simplify**: спростити вираз (наприклад $\sin^2 x + \cos^2 x \rightarrow 1$);
- **expand**: розкрити дужки;
- **factor**: розкласти на множники;
- **solve, x**: розв'язати відносно x ;
- **explicit**: підставити значення змінних, але не обчислювати остаточний результат;
- **assume, x>0**: додати припущення (наприклад, що x – дійсне додатне число).

Математичний аналіз

Панель *Calculus* містить оператори:

- **похідна**: $\frac{d}{dx} f(x)$. Символьно дає формулу, чисельно – значення нахилу дотичної;
- **інтеграл**: $\int f(x) dx$. Символьно знаходить первісну;
- **границі**: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Програма роботи

- 1 Спрощення алгебраїчних виразів.
- 2 Символьне розв'язання квадратного та кубічного рівнянь.
- 3 Знаходження похідних першого і другого порядку.
- 4 Обчислення невизначених і визначених інтегралів.
- 5 Розкладання функції в ряд Тейлора (series).

4.2 Порядок виконання

Етап 1. Алгебра

- 1 Введіть вираз: $(a+b)^4$.
- 2 Натисніть **Ctrl + .** Результат: $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
- 3 Введіть дріб: $\frac{x^3-1}{x-1}$.
- 4 На стрічці *Math* -> *Symbolics* натисніть **Simplify**. Результат: x^2+x+1 .

Етап 2. Розв'язання рівнянь

- 1 Введіть рівняння: $a x^2 + b x + c = 0$ (використовуйте жирне дорівнює **Ctrl+=**).
- 2 Виділіть змінну x .
- 3 Натисніть кнопку **Solve** на вкладці *Symbolics*.
- 4 MathCAD виведе відому формулу коренів квадратного рівняння:
$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Етап 3. Диференціювання та інтегрування

- 1 Задайте функцію $f(x) := x \ln(x)$.
- 2 Введіть оператор похідної d/dx . Вставте $f(x)$.
- 3 Натисніть **→**. Результат: $\ln(x) + 1$.
- 4 Знайдіть інтеграл: $\int x \cdot e^x dx \rightarrow (x - 1)e^x$.

4.3 Індивідуальні завдання для практичної роботи 4

Для функції $y=f(x)$ з індивідуального варіанта (таблиця 4.1):

- 1 Знайти похідну $\frac{d}{dx} f(x)$.
- 2 Знайти невизначений інтеграл $\int f(x) dx$.
- 3 Розкласти в ряд Тейлора (series) у точці $x=0$ до четвертого порядку.

Таблиця 4.1 — Варіанти функцій

Варі- ант	Функція f(x)	Варі- ант	Функція f(x)	Варі- ант	Функція f(x)
1	$x^2 e^x$	11	$x^2 \ln(x)$	21	$\frac{x}{x-1}$
2	$\sin^3(x)$	12	$\sqrt{1+x^2}$	22	$x e^{-x^2}$
3	$\frac{1}{1+x^3}$	13	$\arctan(2x)$	23	$\cos(x) e^x$
4	$x \sin(x)$	14	$x \sqrt{x}$	24	$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$
5	$\ln(1+x)$	15	$\frac{e^x}{x}$	25	$\sin(x^2)$
6	$\sqrt{x} \ln(x)$	16	$x \cos(2x)$	26	$\frac{\ln(x)}{x}$
7	$e^{2x} \cos(x)$	17	$\frac{1}{1-x}$	27	$x^3 e^{-x}$
8	$\frac{x}{x^2+1}$	18	$\tan(x)$	28	$\sqrt{1-x^2}$
9	$\cos^2(x)$	19	$x^2 \sin(x)$	29	$\frac{1}{\cos(x)}$
10	$x e^{-x}$	20	$\ln(x^2 + 1)$	30	$x \arctan(x)$

Контрольні запитання

1 У чому полягає принципова різниця між чисельним обчисленням (оператор =) і символьним обчисленням (оператор $\rightarrow$) у середовищі MathCAD?

- 2 Яку комбінацію клавіш використовують для вставки оператора символьного виведення (Symbolic Evaluation)?
- 3 Поясніть призначення ключових слів *simplify*, *expand* і *factor*. У яких випадках доцільно використовувати кожне з них?
- 4 У який спосіб можна символьно розв'язати рівняння (знайти його корені в аналітичному вигляді) відносно конкретної змінної?
- 5 Для чого використовують модифікатор *explicit* під час символьних перетворень?
- 6 Який результат поверне система із застосуванням символьного оператора до невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$?
- 7 Яку команду (ключове слово) використовують для розкладання функції в степеневий ряд (ряд Тейлора)? Як задати порядок розкладання?
- 8 Чи можна отримати формулу для похідної n -го порядку в MathCAD Prime? Як це зробити?
- 9 Чому дробу типу $1/3$ у символьних обчисленнях збережені як прості дробу, а не перетворені на десяткові (0.333...)? Яка перевага цього підходу?

ПРАКТИЧНА РОБОТА 5

Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь та оптимізація (Given-Find, Minimize)

Мета роботи

Навчитися розв'язувати рівняння, які не мають аналітичного розв'язку (трансцендентні рівняння), і системи таких рівнянь. Опанувати блок Given-Find для пошуку коренів систем. Навчитися знаходити мінімум і максимум функцій (задачі оптимізації) за допомогою функцій Minimize і Maximize.

5.1 Теоретичні відомості

Проблема нелінійних рівнянь

Рівняння вигляду $\cos(x) = x$ неможливо розв'язати класичними алгебраїчними методами (виразити x). Для цього існують чисельні методи (метод Ньютона, січних, бісекції). MathCAD автоматизує цей процес.

Функція $\text{root}(f(x), x)$ шукає корінь рівняння $f(x) = 0$ поблизу заданого початкового наближення. Якщо рівняння має кілька коренів, результат залежить від початкового значення змінної x .

Блок Given-Find

Це найпотужніша конструкція MathCAD для розв'язання систем рівнянь (як лінійних, так і нелінійних).

Вона працює за чіткою схемою:

1 **Guess Values (Початкове наближення)**: ми «підказуємо» системі, де приблизно шукати розв'язок (наприклад $x:=1, y:=1$). Без цього чисельний алгоритм не запуститься.

2 **Given**: ключове слово, що відкриває блок розв'язання. Його не можна видаляти.

3 **Constraints (Обмеження/Рівняння)**: записують рівняння та нерівності. **Увага!** Тут використовують тільки жирні знаки рівності (**Ctrl+=**, Boolean Equal), а не звичайні (**=**) чи присвоєння (**:=**).

4 **Solver (Функція пошуку)**: завершує блок.

- $\text{find}(x, y)$ повертає точний розв'язок системи;
- $\text{minerr}(x, y)$ повертає наближений розв'язок, мінімізуючи похибку (використовують, якщо точного розв'язку не існує).

Задачі оптимізації

Для пошуку екстремумів (мінімуму або максимуму) функції $f(x, y, \dots)$ використовують функції:

- $\text{minimize}(f, x, y, \dots)$;
- $\text{maximize}(f, x, y, \dots)$.

Ці функції також можуть бути використані всередині блока Given, якщо потрібно знайти екстремум за наявності обмежень (наприклад знайти мінімум витрат за умови, що міцність $S > 100$).

Програма роботи

- 1 Знаходження кореня трансцендентного рівняння за допомогою функції root.
- 2 Розв'язання системи нелінійних рівнянь за допомогою блока Given-Find.
- 3 Пошук локального мінімуму функції багатьох змінних без обмежень.
- 4 Розв'язання задачі умовної оптимізації (з обмеженнями) за допомогою блока Given-Minimize.

5.2 Порядок виконання

Етап 1. Функція Root

Розв'яжемо рівняння $x^3 - \cos(x) = 0$.

- 1 Задайте початкове наближення: $x := 0.5$.
- 2 Запишіть функцію пошуку: $x_{root} := \text{root}(x^3 - \cos(x), x)$.
- 3 Виведіть результат: $x_{root} =$. (Має бути бл. 0.865).
- 4 Перевірте: підставте знайдене значення в рівняння $(x_{root}^3 - \cos(x_{root})) =$. Результат має бути дуже близьким до 0 (наприклад 10^{-15}).

Етап 2. Блок Given-Find (система рівнянь)

Знайдемо точки перетину кола $x^2 + y^2 = 10$ і прямої $y = x + 1$.

- 1 Задайте початкові наближення:

$$x := 1$$

$$y := 1.$$

- 2 Напишіть ключове слово Given (воно не має бути курсивом; якщо MathCAD не розпізнав його автоматично, виберіть *Solve Block* на стрічці).

3 Введіть рівняння (використовуйте жирне дорівнює **Ctrl + =**):

$$x^2 + y^2 = 10$$

$$y = x + 1.$$

4 Знайдіть розв'язок: *Result:=Find(x, y)*.

5 Виведіть результат: *Result =*. Ви отримаєте вектор зі значеннями x та y . (Примітка - система має два розв'язки. Щоб знайти інший, змініть початкові наближення, наприклад, на $x:=-2, y:=-2$.)

Етап 3. Оптимізація (Minimize)

Знайдемо мінімум функції параболоїда $F(x, y) := (x-2)^2 + (y-3)^2$.

Очевидно, мінімум у точці (2, 3).

1 Задайте функцію $F(x, y)$.

2 Задайте початкові значення: $x := 0, y := 0$.

3 Викличте функцію: $P_{min} := Minimize(F, x, y)$.

4 Перевірте результат: $P_{min} =$. Має бути виведений вектор $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5.3 Індивідуальні завдання для практичної роботи 5

- 1 Знайти корінь рівняння $f(x)=0$ функцією *root*.
- 2 Розв'язати систему нелінійних рівнянь блоком *Given-Find*.
- 3 Знайти мінімум функції $Z(x,y)$ блоком *Minimize* (або *Maximize*) (таблиця 5.1).

Контрольні запитання

- 1 У чому різниця між функцією *root* і блоком *Given-Find*?
- 2 Для чого потрібні «початкові наближення» (Guess Values)? Як вони впливають на результат?
- 3 Який тип знака «дорівнює» використовують всередині блока *Given* для запису рівнянь?

4 Що станеться, якщо система рівнянь не має розв'язку, а ми використаємо функцію Minerr?

5 Як знайти всі корені полінома однією командою (функція polyroots)?

6 Чи можна використовувати блок Given-Find для розв'язання систем із більш ніж двома невідомими?

Таблиця 5.1 — Варіанти завдань

Варі- ант	1 Рівняння	2 Система	3 Оптимізація Z(x,y)
1	$x^3 - \cos(x) = 0$	$y = x^2, x + y = 5$	$x^2 + y^2 - 4x$
2	$e^x - 2x - 2 = 0$	$x^2 + y^2 = 10, y = x +$	$(x - 1)^2 + y^2$
3	$\ln(x) + x = 5$	$y = \sin(x), y = 0.5x$	$x^2 + (y - 2)^2$
4	$x^2 - \sin(x) - 1 =$	$y = e^x, x + y = 4$	$x^2 + xy + y^2$
5	$\tan(x) - x - 0.5 =$	$xy = 5, x + y = 6$	$2x^2 + y^2 - x$
6	$x^3 + 5x - 10 = 0$	$x^2 + y = 5, x + y =$	$(x + 1)^2 + (y + 1)^2$
7	$2^x - x^2 = 0$	$x^2 + y^2 = 25, y = 3$	$x^2 + 3y^2 + 2x$
8	$\sqrt{x+1} - x = -1$	$y = \ln(x), y = 1 -$	$xy - x^2 - y^2$ (max)
9	$\cos(x) - x^2 = 0$	$y = x^3, y = x$	$x^2 + y^2 - 6x - 8$
10	$x^x - 5 = 0$	$x^2 - y^2 = 1, x + y =$	$(x - 3)^2 + y^2$
11	$\sin(x) - 0.5x = 0$	$y = \sqrt{x}, y = 0.5x +$	$x^2 + 2y^2 - 4y$
12	$e^{-x} - x = 0$	$x^2 + y^2 = 4, y = x$	$3x^2 + 2xy + y^2$
13	$\lg(x) - \cos(x) = 0$	$xy = 10, y = x - 3$	$x^2 + y^2 + 10$
14	$x^4 - 3x - 1 = 0$	$y = x^2 - 1, y = 3$	$(x - 2)^2 + (y - 2)^2$
15	$x^3 - 2^x = 0$	$x^2 + y^2 = 9, y = x^2$	$x^2 + 4y^2$

Список літератури

- 1 Литвинов А. Л. Чисельні методи: теорія і практика: навч. посіб. Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. 166 с.
- 2 Програмне забезпечення інженерних розрахунків: Лабораторний практикум: навч. посіб. / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Д. Е. Сідоров, І. О. Казак. Київ, 2022. 166 с.
- 3 Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь засобами MathCAD: навч. посіб. / І. В. Богач, О. Ю. Краковецький, Л. В. Крилик. Вінниця: ВНТУ, 2020. 106 с.
- 4 Maxfield, B. Essential PTC® Mathcad Prime® 3.0: A Guide for New and Current Users /Elsevier. 2014. 554 p.
- 5 Martin D. R., Martin II, Randolph David. Engineering Calculations with Creo Parametric and PTC Mathcad Prime. 2020. 204 p.

Використання MathCAD Prime для інженерних розрахунків

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для виконання практичних робіт, самостійної роботи
з освітньої компоненти
*«МЕТОДИ ТА ПРОГРАМНО-ТЕХНІЧНІ ЗАСОБИ ІНЖЕНЕРНИХ
РОЗРАХУНКІВ»*

Відповідальний за випуск Щебликіна О. В.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 16.01.2026 р.

Умовн. друк. арк. 1,75. Тираж . Замовлення № .

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,

61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.