



**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

**БУДІВЕЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра будівельної механіки та гідравліки**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**для виконання розрахунково-графічних робіт**

**з освітньої компоненти**

**«БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА»**

**Харків – 2026**

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри будівельної механіки та гідравліки 27 грудня 2025 р., протокол № 8.

Методичні вказівки призначені для розв'язання розрахунково-графічних робіт із будівельної механіки для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальності G11 «Машинобудування» будівельного факультету, освітня програма «Підйомно-транспортні, будівельні, колійні та видобувні машини».

2-ге видання

Укладачі:

доценти О. В. Опанасенко,

Є. І. Галагуря,

М. О. Ковальов

Рецензент

доц. Є. Ф. Орел

## З М І С Т

Вступ	5
1 Розрахунок статично визначної багатопрогонової балки	8
1.1 Розрахунок багатопрогонової балки на зовнішнє навантаження	8
1.2 Розрахунок багатопрогонової балки на рухоме навантаження	13
1.3 Визначення внутрішніх зусиль у багатопрогоновій балці по лініях впливу	19
Тестові запитання для самоконтролю	21
2 Розрахунок плоскої статично невизначної рами методом сил	23
2.1 Визначення ступеня статичної невизначності	23
2.2 Вибір основної системи	24
2.3 Система канонічних рівнянь	28
2.4 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь	29
2.5 Перевірка правильності визначення коефіцієнтів і вільних членів	30
2.6 Розв'язання системи канонічних рівнянь	33
2.7 Побудова епюри моментів у заданій статично невизначній системі	33
2.8 Перевірка правильності побудови епюри M	34
2.9 Побудова епюри поперечних сил Q	35
2.10 Побудова епюри поздовжніх сил N	38
2.11 Перевірка правильності побудови епюр Q і N	39
Тестові запитання для самоконтролю	40
3 Розрахунок плоскої статично невизначної рами методом переміщень	42
3.1 Визначення ступеня кінематичної невизначності	43
3.2 Основна система методу переміщень	44

3.3 Система канонічних рівнянь	45
3.4 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь	47
3.5 Побудова епюри моментів $M$ у заданій статично невизначній системі	50
3.6 Побудова епюри поперечних сил $Q$	52
3.7 Побудова епюри поздовжніх сил $N$	49
Тестові запитання для самоконтролю	56
4 Розрахунок статично визначної ферми	58
4.1 Розрахунок ферми на нерухоме навантаження	58
4.2 Розрахунок ферми на рухоме навантаження	63
4.3 Визначення внутрішніх зусиль у стрижнях ферми по лініях впливу	71
Тестові запитання для самоконтролю	71
Список літератури	74
Додаток А Таблиця стандартних рішень	75
Додаток Б Вихідні дані для розрахунково-графічних робіт	77

## ВСТУП

Методичні вказівки призначені для самостійної роботи здобувачів і містять приклади розв'язання завдань, які виконують здобувачі денної та заочної форм здобуття освіти спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія», вивчаючи будівельну механіку. Ці вказівки є продовженням і доповненням методичних рекомендацій кафедри будівельної механіки та гідравліки [1-4].

Вказівки містять довідковий матеріал, необхідний для розв'язання завдань: таблиці стандартних рішень (додаток А), вихідні дані для розрахунково-графічних робіт (додаток Б).

У методичних вказівках розв'язання задач супроводжено основними теоретичними даними курсу, які покладено в основу розв'язання. Однак ці вказівки не можуть замінити підручник, тому, щоб розв'язувати задачі з розумінням, потрібно попередньо ознайомитися з відповідним матеріалом у підручнику чи курсі лекцій.

Зміст і наповнення розрахунково-графічних завдань мають високий науково-педагогічний рівень, викладені систематично та послідовно, відображають новітні досягнення науки, техніки; забезпечують реалізацію основних принципів навчання: науковості, систематичності, послідовності, доступності викладення, наочності, ґрунтовності, зв'язку матеріалу з професійною діяльністю; відповідають вимогам освітніх програм, державних освітніх стандартів.

### **Мета і основні завдання**

Виконуючи розрахунково-графічну роботу, здобувач має отримати теоретичні знання, необхідні для розрахунків систем, на які діє зовнішнє навантаження. Метою завдання є набуття практичних навичок побудови

ліній впливу, розрахунків статично-невизначних систем, на дію зовнішнього навантаження.

Очікувані результати навчання:

- визначати параметри об'єктів залізничного транспорту, їхніх систем та елементів за допомогою вимірювального експерименту з оцінюванням його результатів;

- забезпечувати надійну та безпечну експлуатацію будівельних конструкцій будівель, споруд та інженерних мереж;

- визначати і оцінювати навантаження та напружено-деформований стан ґрунтових основ і несучих конструкцій будівель (споруд), у тому числі з використанням сучасних інформаційних технологій.

### **Компетентності, що формують у здобувачів**

Уміння розв'язувати завдання будівельної механіки – це основа надбання професійних компетенцій. Набуті знання, вміння, навички допомагають здобувачу виконувати визначені перед ним професійні завдання з розрахунку споруд на зовнішні впливи. Курс має на меті сформувати і розвинути такі компетентності здобувачів:

- здатність використовувати інформаційні та комунікаційні технології;

- здатність критично мислити і застосовувати основні теорії, методи і принципи економіки та менеджменту для раціональної організації та управління будівельним виробництвом;

- здатність проектувати будівельні конструкції, будівлі, споруди та інженерні мережі з урахуванням інженерно-технічних і ресурсозберігаючих заходів, правових, соціальних, екологічних, техніко-економічних показників, наукових та етичних аспектів, сучасних вимог нормативної документації у сфері архітектури та будівництва, охорони довкілля та безпеки праці;

- здатність застосовувати комп'ютеризовані системи проектування та спеціалізоване прикладне програмне забезпечення для розв'язання інженерних задач будівництва та цивільної інженерії;

- здатність розробляти конструктивні рішення об'єктів будівництва на базі знання номенклатури та конструктивних форм, уміння розраховувати і конструювати несучі та огорожувальні будівельні конструкції;

- розуміння вимог щодо надійності та засобів забезпечення надійності будівельних конструкцій, будівель, споруд та інженерних мереж.

### **Методи вивчення та контролю**

Методичні вказівки мають схеми завдання, приклади їх розв'язання та контрольні запитання.

Здобувачі ознайомлюються з основними задачами дисципліни «Будівельна механіка». Контрольні запитання допомагають перевірити набуті знання. Наведено схеми самих завдань для виконання розрахунково-графічної роботи, які складаються з чотирьох задач – це розрахунок статично визначної багатопрогової балки, розрахунок плоскої статично визначної рами методом сил, розрахунок плоскої статично визначної рами методом переміщень, розрахунок статично визначної ферми. Для кожної задачі наведено приклад розв'язання з роз'ясненнями.

### **Перелік документів, які необхідно подати для захисту**

Розрахунково-графічна робота має містити розрахункові схеми та самі розрахунки задач із поясненням та остаточними результатами. У додатку подано зразок оформлення титульного аркуша. Завдання має бути оформлене відповідно до вимог [9].

# 1 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧНОЇ БАГАТОПРОГОНОВОЇ БАЛКИ

*Завдання 1.* Розрахувати статично визначну багатопрогонову балку на рухоме і нерухоме навантаження. Визначити внутрішні зусилля в балці і побудувати лінії впливу.

*План розв'язання*

1 Накреслити в масштабі схему балки, зазначивши всі необхідні розміри і величини навантажень.

2 Побудувати схему взаємодії окремих балок.

3 Побудувати епюри моментів і поперечних сил.

4 Побудувати лінії впливу всіх опорних реакцій, поперечних сил, згинальних моментів у зазначеному на схемі перерізі I.

5 За лініями впливу визначити на другій опорі величину опорної реакції, а також величини згинального моменту і поперечної сили в перерізах I і II від заданого нерухомого навантаження. Результати порівняти з даними аналітичного розрахунку.

## 1.1 Розрахунок багатопрогонової балки на зовнішнє навантаження

Розрахунок балки починають із побудови поверхової схеми (рисунок 1.1, б). Для цього умовно по шарнірах (точки *B*, *C*, *H*) розбиваємо балку на окремі прогони. Балки, що мають два чи три зв'язки з землею (*A-B*, *H-L*), є головними балками, тобто балками нижнього поверху поверхової схеми. Інші балки встановлені поверхами вище (другорядні балки). Кожна балка являє собою однопрогонову балку, завантажену зовнішнім навантаженням. Розрахунок багатопрогонової балки починають із найвищого поверху. Балку верхнього поверху розраховують тільки на навантаження, яке прикладене до цього поверху. Усі інші балки

розраховують на навантаження, яке прикладене до цієї балки, і навантаження, яке передано з розташованих вище балок. Навантаження, прикладене до верхніх балок, передається на нижні балки за допомогою опорних реакцій (рисунок 1.1, в), взятих із протилежним знаком.

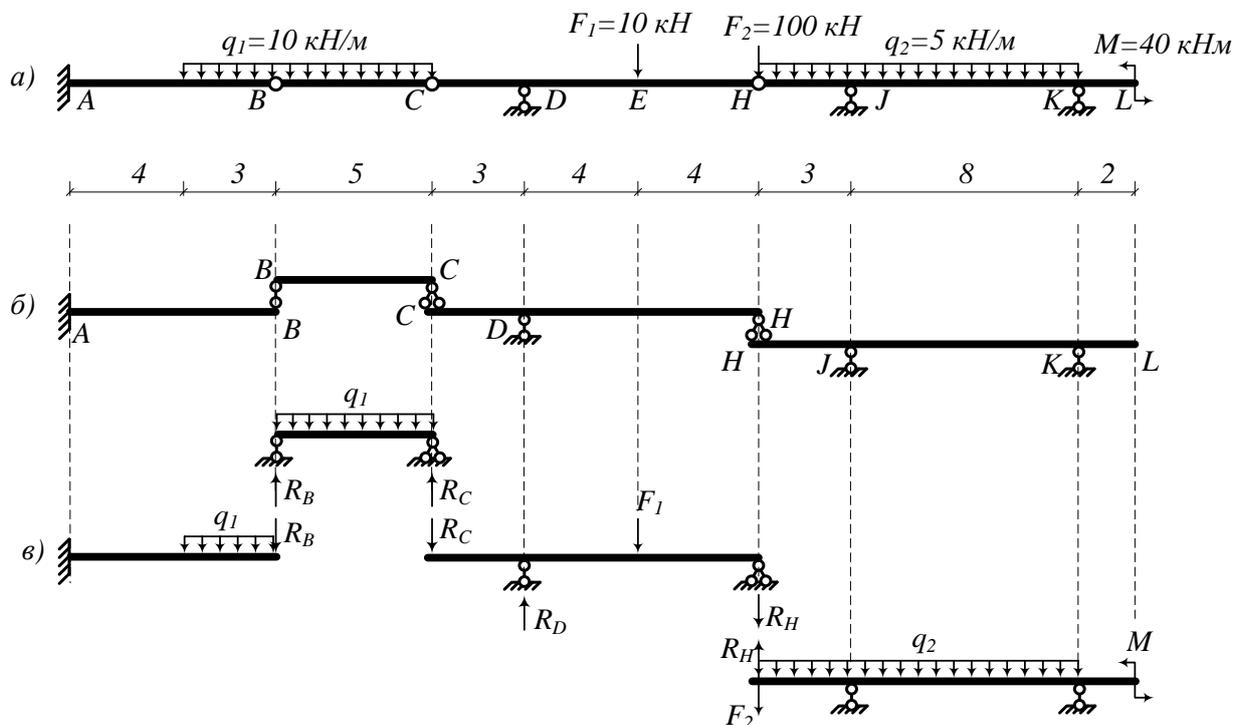


Рисунок 1.1 – Розрахункова схема багатопрогонової балки

Для побудови епюр внутрішніх зусиль розглянемо кожну балку окремо.

### Балка В-С

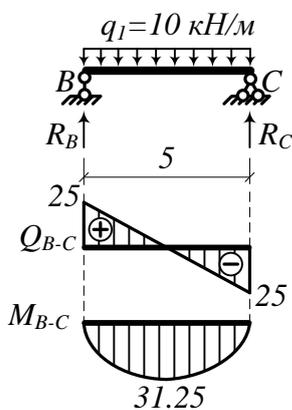


Рисунок 1.2

Визначаємо реакції в опорах:

$$\sum Y = 0: R_B = R_C = \frac{q_1 \cdot 5}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25 \text{ кН}.$$

Використовуючи метод перерізів, визначаємо зусилля в характерних точках балки:

$$Q_B = R_B = 25 \text{ кН}, \quad Q_C = R_C = -25 \text{ кН};$$

$$M_B = 0, \quad M_C = 0, \quad M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{10 \cdot 5^2}{8} = 31.25 \text{ кН}.$$

### Балка А-В

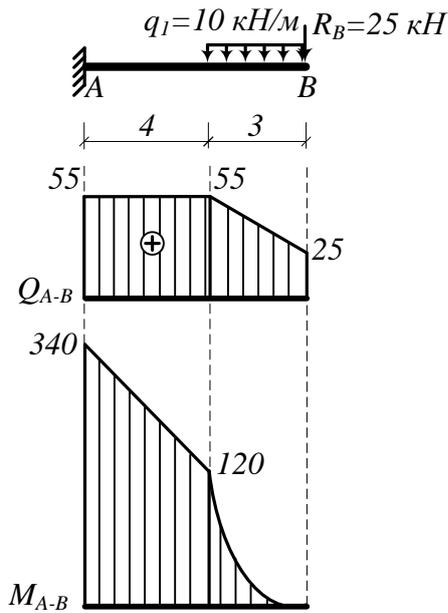


Рисунок 1.3

Навантаження, прикладене до балки А-В, буде складатися з навантаження  $q_1$  і реакції  $R_B$ , що прикладена з напрямком вниз (на верхній балці реакція  $R_B$  спрямована вгору). Визначаємо зусилля в точках:

$$Q_B = R_B = 25 \text{ кН} .$$

$$Q_{N,A} = R_B + q \cdot 3 = 25 + 10 \cdot 3 = 55 \text{ кН} .$$

$$M_B = 0 .$$

$$M_N = -R_B \cdot 3 - q_1 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = -25 \cdot 3 - 10 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = -120 \text{ кНм} .$$

$$M_A = -R_B \cdot 7 - q_1 \cdot 3 \cdot \left( \frac{3}{2} + 4 \right) = -25 \cdot 7 - 10 \cdot 3 \cdot \left( \frac{3}{2} + 4 \right) = -340 \text{ кНм} .$$

### Балка С-Н

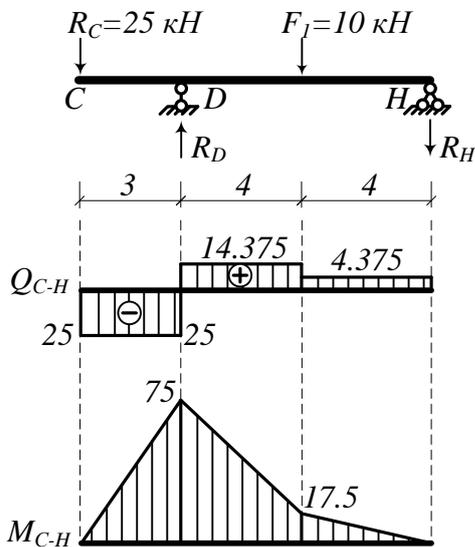


Рисунок 1.4

Зовнішній вплив буде складатися з сили  $F_1$  і реакції  $R_C$ , прикладеної з протилежним знаком. Визначаємо реакції в опорах:

$$\sum M_D = 0: R_C \cdot 3 - F \cdot 4 + R_H \cdot 8 = 0,$$

$$R_H = \frac{-25 \cdot 3 + 10 \cdot 4}{8} = -4.375 \text{ кН} .$$

$$\sum M_H = 0: R_C \cdot 11 - R_D \cdot 8 + F \cdot 4 = 0,$$

$$R_D = \frac{25 \cdot 11 + 10 \cdot 4}{8} = 39.375 \text{ кН} .$$

Виконуємо перевірку реакцій:

$$\sum Y = 0: -25 + 39.375 - 10 - 4.375 = 0, \quad -39.375 + 39.375 .$$

Визначаємо зусилля в точках:

$$Q_C = -R_C = -25 \text{ кН}, \quad Q_D^{\text{ле}} = -R_C = -25 \text{ кН}. \quad Q_D^{\text{пр}} = -R_C + R_D = -25 + 39.375 = 14.375 \text{ кН}.$$

$$Q_H = R_H = 4.375 \text{ кН}, \quad Q_E^{\text{пр}} = R_H = 4.375 \text{ кН}. \quad Q_E^{\text{ле}} = R_H + F_1 = 4.375 + 10 = 14.375 \text{ кН}.$$

$$M_C = 0, \quad M_D = -R_C \cdot 3 = -25 \cdot 3 = -73 \text{ кНм}.$$

$$M_H = 0, \quad M_E = -R_H \cdot 4 = -4.375 \cdot 4 = -17.5 \text{ кНм}.$$

### Балка H-L

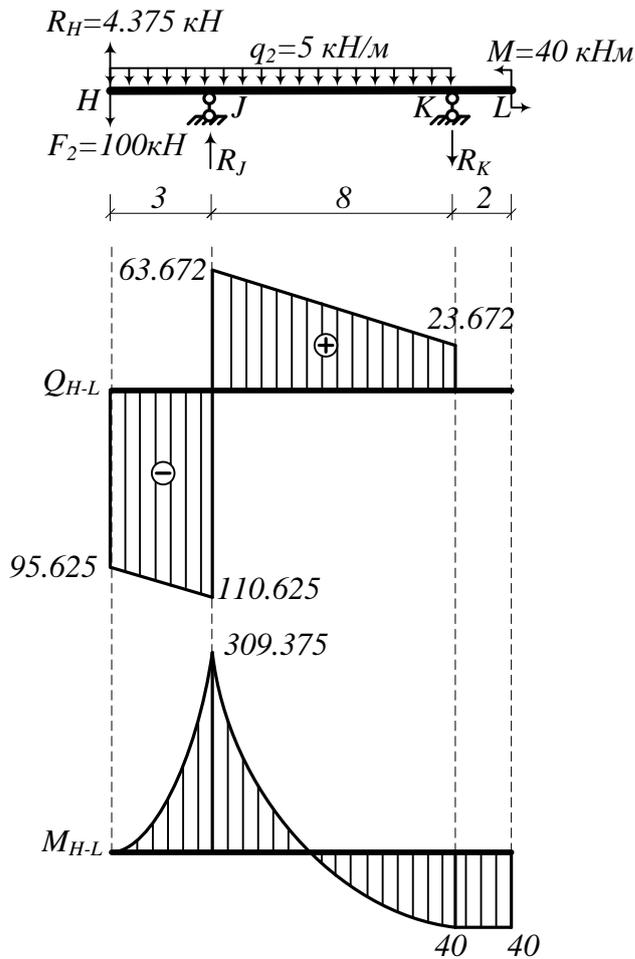


Рисунок 1.5

$$R_J = \frac{-4.375 \cdot 11 + 100 \cdot 11 + 5 \cdot 11 \cdot 5.5 + 40}{8} = 174.297 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum Y = 0: \quad 4.375 - 100 - 5 \cdot 11 + 174.297 - 23.762 = 0, \\ 178.672 - 178.672 = 0.$$

Визначаємо зусилля в точках:

Реакцію  $R_H$  прикладаємо до балки H-L з напрямком вгору, оскільки на вище розташованій балці D-H вона спрямована вниз.

Визначаємо реакції в опорах:

$$\sum M_J = 0: -R_H \cdot 3 + F_2 \cdot 3 - q_2 \times \\ \times 11 \cdot \left( \frac{11}{2} - 3 \right) + R_K \cdot 8 + M = 0, \\ R_K = \frac{4.375 \cdot 3 - 100 \cdot 3 + \\ + 5 \cdot 11 \cdot 2.5 - 40}{8} = -23.672 \text{ кН}.$$

$$\sum M_K = 0: -R_H \cdot 11 + F_2 \cdot 11 - \\ -R_J \cdot 8 + q_2 \cdot 11 \cdot \frac{11}{2} + M = 0,$$

$$Q_H = R_H - F_2 = 4.375 - 100 = -95.625 \text{ кН},$$

$$Q_J^{ле6} = R_H - F_2 - q_2 \cdot 3 = 4.375 - 100 - 5 \cdot 3 = -110.625 \text{ кН}.$$

$$Q_J^{np} = R_H - F_2 - q_2 \cdot 3 + R_J = 4.375 - 100 - 5 \cdot 3 + 174.297 = 63.672 \text{ кН}.$$

$$Q_L = 0, \quad Q_K^{np} = 0, \quad Q_K^{ле6} = R_K = 23.672 \text{ кН}.$$

$$M_H = 0, \quad M_{L,K} = M = 40 \text{ кНм}.$$

$$M_J = R_H \cdot 3 - F_2 \cdot 3 - q_2 \cdot 3 \cdot 1.5 = 4.375 \cdot 3 - 100 \cdot 3 - 5 \cdot 3 \cdot 1.5 = -309.375 \text{ кНм}.$$

Побудовані в такий спосіб ділянки епюр внутрішніх зусиль збираємо разом і отримуємо остаточні епюри поперечних сил і згинальних моментів (рисунок 1.6).

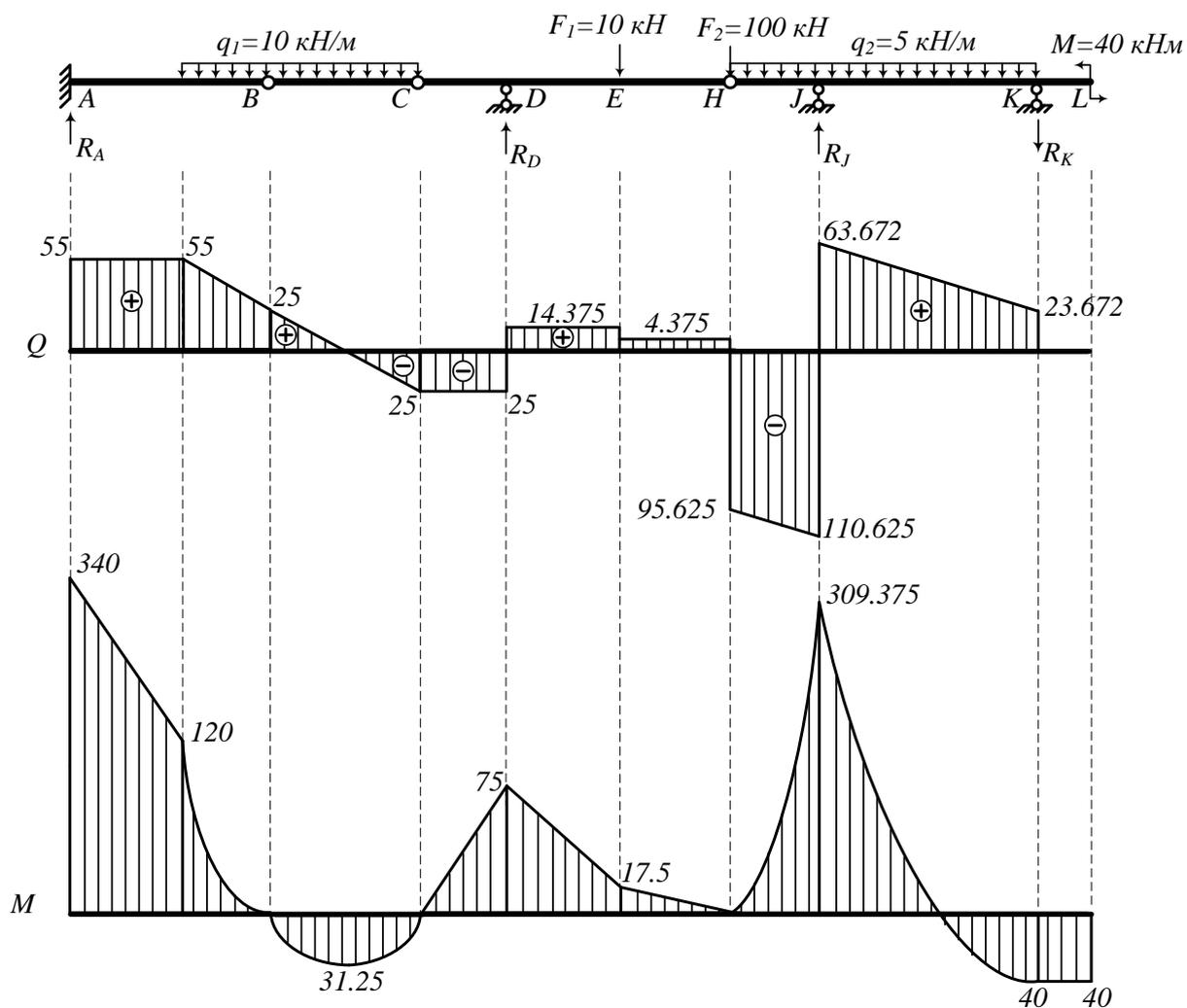


Рисунок 1.6 – Остаточні епюри поперечних сил і згинальних моментів

Виконуємо статичну перевірку:

$$\begin{aligned}\sum Y = 0: \quad R_A - q_1 \cdot 8 + R_D - F_1 - F_2 - q_2 \cdot 11 + R_J - R_K &= 0, \\ 55 - 10 \cdot 8 + 39.375 - 10 - 100 - 5 \cdot 11 + 174.297 - 23.672 &= 0, \\ 268.672 - 268.672 &= 0.\end{aligned}$$

Оскільки рівність виконана, система знаходиться в рівновазі.

## **1.2 Розрахунок багатопрогонової балки на рухоме навантаження**

Розрахунок багатопрогонової балки на рухоме навантаження починають із побудови поверхової схеми. Спочатку будуємо лінію впливу для балки, якій належить переріз чи опорна реакція, розглядаючи її як однопрогонову балку. Потім лінію впливу поширюємо на інші балки, що лежать вище розглянутої. У межах другорядної балки лінія впливу являє собою пряму лінію, що сполучає крайню ординату сусідньої основної балки і нуль під протилежною опорою другорядної балки. Отже, над усіма шарнірами, що з'єднують однопрогонові балки, лінія впливу має переломи (рисунок 1.7).

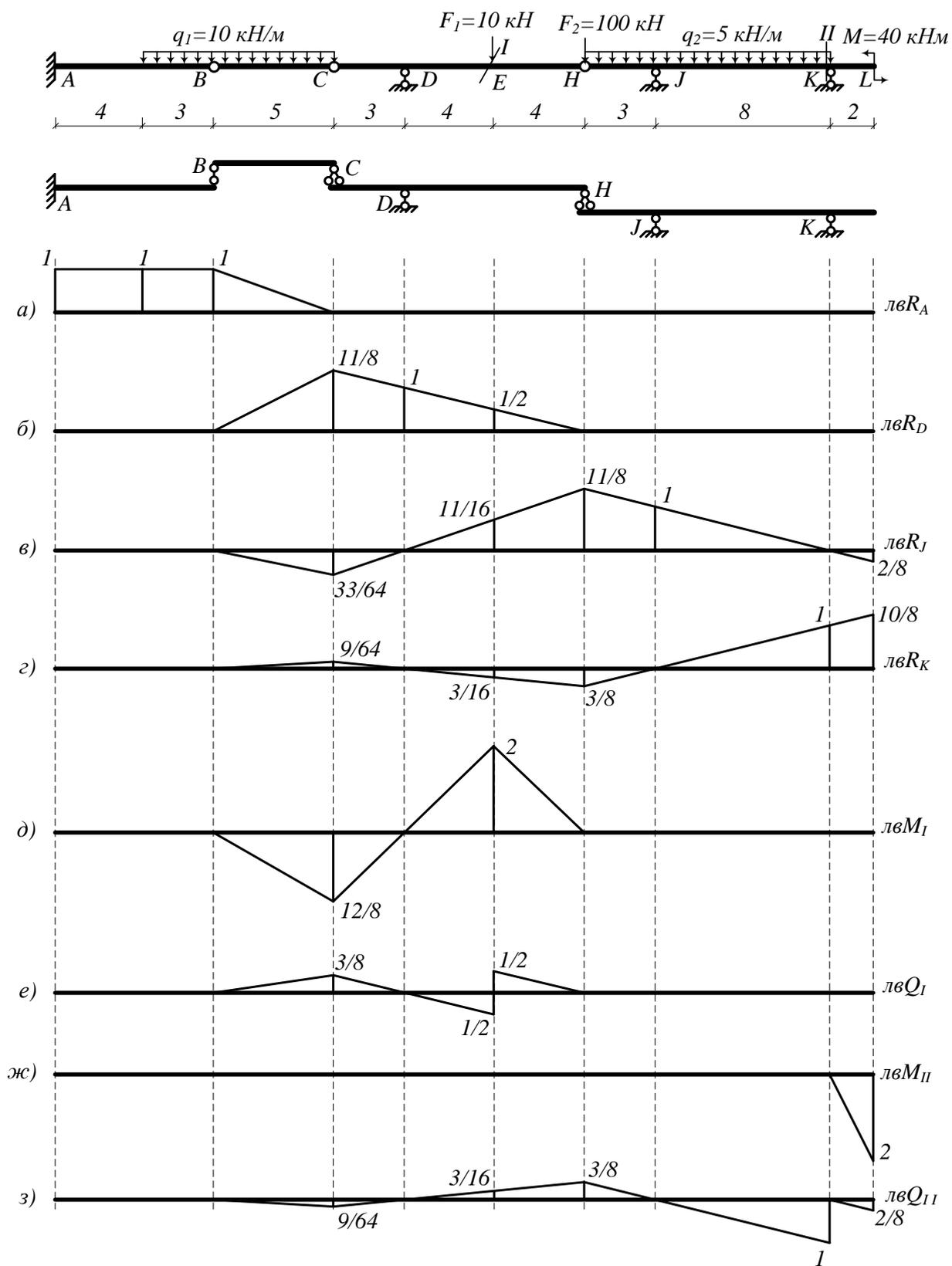


Рисунок 1.7 – Лінії впливу опорних реакцій, згинальних моментів і поперечних сил у багатопрогоновій балці

### Лінія впливу $R_D$

Вантаж на ділянці D-H. Початок координат приймаємо в точці D.

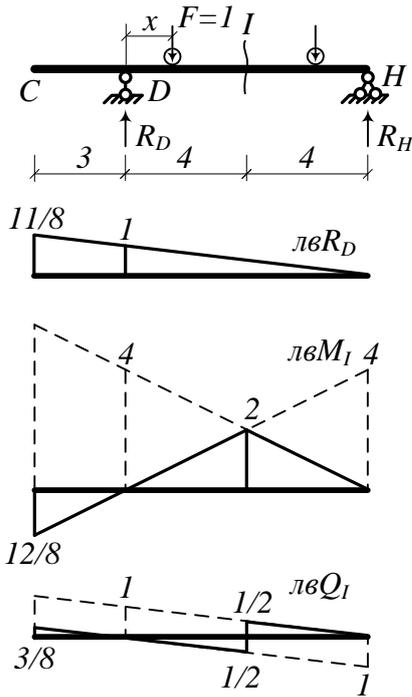


Рисунок 1.8

$$\sum M_H = 0: R_D \cdot 8 - F \cdot (8 - x) = 0,$$

$$0 \leq x \leq 8,$$

$$R_D = \frac{1 \cdot (8 - x)}{8} = \begin{cases} x=0: R_D = 1, \\ x=8: R_D = 0. \end{cases}$$

На базовій лінії під точкою D відкладаємо ординату 1, під протилежною опорою (точка H) – ординату 0 і з'єднуємо дві ординати прямою лінією. Ординату в точці C визначаємо з подібності трикутників.

Побудовану для окремої балки лінію впливу переносимо на багатопрогонову балку і поширюємо її на інші балки (рисунок 1.7, б). Одиничний вантаж перекочується на балку J-K. У поперковій схемі балка D-H спирається на балку J-K. Вплив із нижньої балки не передається на балку, що лежить вище, отже, ординати лінії впливу на ділянці J-K дорівнюють нулю.

Одиничний вантаж перекочується на балку B-C. На поперковій схемі балка D-H знаходиться нижче балки B-C. Вплив із верхньої балки передається на балку, що лежить нижче.

Одиничний вантаж перекочується на балку A-B. На поперковій схемі балка A-B знаходиться нижче балки B-C, тобто вплив від одиничного вантажу не передається на балку B-C і тим самим не діє і на балку D-H. Отже, на ділянці A-B ординати дорівнюють нулю. З'єднуємо нульову ординату в точці B з ординатою в точці C.

### *Лінія впливу $M_I$ (рисунок 1.8)*

Будуючи лінії впливу, розглядаємо положення вантажу ліворуч і праворуч від перерізу.

*Вантаж ліворуч.* Складаємо рівняння моментів для правої частини балки.

$$M_I^{пр.сил} = R_H \cdot 4, \quad лв M_I = лв R_H \cdot 4.$$

Лінія впливу моменту в перерізі  $I$ , коли вантаж перебуває зліва від перетину, повторює лінію впливу реакції  $R_H$ , усі ординати якої помножені на постійне число 4.

На базовій лінії пунктиром будуємо лінію впливу  $R_H$  (одиниця під точкою  $H$  і нуль під точкою  $D$ ) і всі її ординати збільшуємо в чотири рази. На цій лінії виділяємо ділянку зліва від перерізу, тобто ділянку, де знаходиться вантаж.

*Вантаж праворуч.* Складаємо рівняння моментів для лівої частини балки.

$$M_I^{лев.сил} = R_D \cdot 4, \quad лв M_I = лв R_D \cdot 4.$$

Лінія впливу моменту в перерізі  $I$ , коли вантаж перебуває праворуч від перерізу, дорівнює лінії впливу реакції  $R_D$ , усі ординати якої помножені на постійне число 4.

На базовій лінії пунктиром будуємо лінію впливу  $R-D$  (одиниця під точкою  $D$  і нуль під точкою  $H$ ) і всі її ординати збільшуємо в чотири рази. На цій лінії виділяємо ділянку праворуч від перерізу, тобто ділянку, де знаходиться вантаж.

Інші ординати визначаємо з подібності трикутників.

Переносимо лінію впливу на балку і поширюємо на інші ділянки (рисунок 1.7,  $\delta$ ).

### **Лінія впливу $Q_I$** (рисунок 1.8)

*Вантаж ліворуч.* Складаємо рівняння поперечної сили для правої частини балки.

$$Q_I^{np.cил} = -R_H, \quad лв Q_I = лв R_H \cdot (-1).$$

Лінія впливу поперечної сили в перерізі  $I$ , коли вантаж перебуває зліва від перерізу, дорівнює лінії впливу реакції  $R_H$ , усі ординати якої помножені на мінус одиницю.

На базовій лінії пунктиром будуємо лінію впливу  $R_H$  (одиниця під точкою  $H$  і нуль під точкою  $D$ ). Знак мінус показує на те, що лінію впливу  $R_H$  необхідно розгорнути симетрично вниз відносно базової лінії. На цій лінії виділяємо ділянку зліва від перерізу.

*Вантаж праворуч.* Складаємо рівняння поперечної сили для лівої частини балки.

$$Q_I^{лев.cил} = R_D, \quad лв Q_I = лв R_D.$$

Лінія впливу поперечної сили в перерізі  $I$ , коли вантаж перебуває праворуч від перерізу, дорівнює лінії впливу реакції  $R_D$ .

На базовій лінії пунктиром будуємо лінію впливу  $R_D$  (одиниця під точкою  $D$  і нуль під точкою  $H$ ) і на ній виділяємо ділянку праворуч від перерізу.

Переносимо лінію впливу на балку і поширюємо на інші ділянки (рисунок 1.7, e).

### **Лінія впливу $M_{II}$** (рисунок 1.9)

*Вантаж ліворуч.* Розглядаємо консольну частину балки.  $M_{II}^{np.cил} = 0$ .

*Вантаж праворуч.* За такого положення вантажу так само зручніше розглядати праву консольну частину.

$$M_{II}^{np.cил} = -1 \cdot x, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad M_{II} = \begin{cases} x=0: & M_{II} = 0, \\ x=2: & M_{II} = -2. \end{cases}$$

На базовій лінії відкладаємо значення ординат і з'єднуємо прямою лінією. Переносимо лінію впливу на балку і поширюємо на інші ділянки (рисунок 1.7, ж).

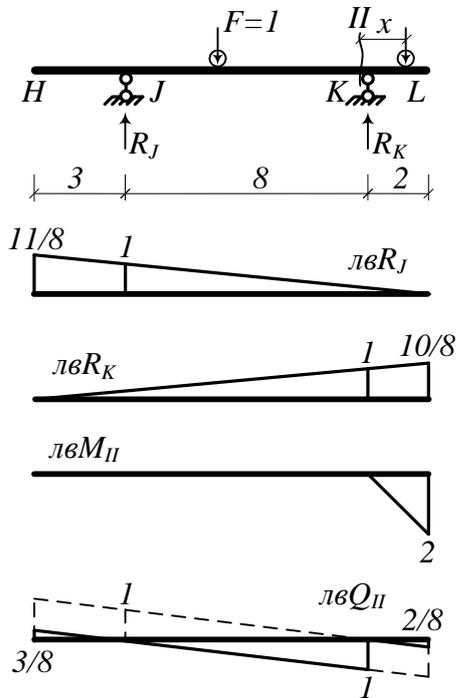


Рисунок 1.9

### Лінія впливу $R_J$ (рисунок 1.9)

Вантаж на ділянці  $J-K$ . Початок координат приймаємо в точці  $J$ .

$$\sum M_K = 0: R_J \cdot 8 - F \cdot (8 - x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 8,$$

$$R_J = \frac{1 \cdot (8 - x)}{8} = \begin{cases} x=0: & R_J = 1, \\ x=8: & R_J = 0. \end{cases}$$

### Лінія впливу $R_K$ (рисунок 1.9)

$$\sum M_J = 0: R_K \cdot 8 - F \cdot x = 0, \quad 0 \leq x \leq 8,$$

$$R_K = \frac{1 \cdot x}{8} = \begin{cases} x=0: & R_K = 0, \\ x=8: & R_K = 1. \end{cases}$$

Переносимо лінії впливу реакцій на балку і поширюємо на інші ділянки (рисунок 1.7, в, г).

### Лінія впливу $Q_{II}$ (рисунок 1.9)

Вантаж ліворуч. Складаємо рівняння поперечної сили для правої частини балки.

$$Q_{II}^{пр.сил} = -R_K.$$

На базовій лінії пунктиром будуємо  $l_{vR_K}$ , усі ординати якої помножені на мінус одиницю, і виділяємо ділянку зліва від перерізу.

Вантаж праворуч. Складаємо рівняння поперечної сили для лівої частини балки.

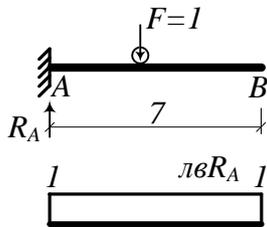
$$Q_{II}^{лев.сил} = R_J.$$

На базовій лінії пунктиром будуємо лінію впливу  $R_A$  і на ній виділяємо ділянку праворуч від перерізу.

Переносимо лінію впливу на балку і поширюємо на інші ділянки (рисунок 1.7, з).

### **Лінія впливу $R_A$** (рисунок 1.10)

Вантаж на ділянці  $A-B$ .



$$\sum Y = 0: R_A - F = 0, \quad R_A = 1.$$

Рисунок 1.10

Усі ординати лінії впливу реакції  $R_A$  дорівнюють одиниці, незалежно від положення рухомого вантажу. Переносимо лінію впливу на балку і поширюємо на інші ділянки (рисунок 1.7, а).

## **1.3 Визначення внутрішніх зусиль у багатопрогоновій балці по лініях впливу**

Внутрішнє зусилля по лініях впливу визначають за формулою

$$S_i = \pm \sum F_i y_i \pm \sum q_i \omega_i \pm \sum M_i \operatorname{tg} \alpha_i,$$

де  $F_i$  – величина зосередженої сили, силу приймають зі знаком плюс, якщо вона спрямована зверху вниз;

$y_i$  – значення ординати лінії впливу під заданою силою, знак ординати приймаємо по лінії впливу (ординату, розташовану над базовою лінією, вважають додатною, під базовою лінією – від'ємною);

$q_i$  – величина рівномірно розподіленого навантаження, розподілене навантаження приймають зі знаком плюс, якщо воно спрямовано зверху вниз;

$\omega_i$  – площа лінії впливу, розташована під рівномірно розподіленим навантаженням, знак площі приймаємо по лінії впливу;

$M_i$  – величина зосередженого моменту, зосереджений момент приймають зі знаком плюс, якщо він спрямований за годинниковою стрілкою;

$tg\alpha_i$  – тангенс кута нахилу лінії впливу до горизонталі в місці прикладання зосередженого моменту, тангенс додатний, якщо функція лінії впливу зростаюча, від'ємний – функція спадна.

$$R_A = q_1 \cdot (1 \cdot 3) + q_1 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \right) = 10 \cdot 1 \cdot 3 + 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 = 55 \text{ кН}.$$

$$R_D = q_1 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{8} \cdot 5 \right) + F_1 \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{8} \cdot 5 + 10 \cdot \frac{1}{2} = 39.375 \text{ кН}.$$

$$R_J = q_1 \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{33}{64} \cdot 5 \right) + F_1 \cdot \frac{11}{16} + F_2 \cdot \frac{11}{8} + q_2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{8} \cdot (3+8) \right) + (-M) \cdot \left( -\frac{2}{8} / 2 \right) = -10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{33}{64} \cdot 5 + 10 \cdot \frac{11}{16} + 100 \cdot \frac{11}{8} + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{8} \cdot 11 + 40 \cdot \frac{2}{8 \cdot 2} = 174.2969 \text{ кН}.$$

$$R_K = q_1 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{64} \cdot 5 \right) + F_1 \cdot \left( -\frac{3}{16} \right) + F_2 \cdot \left( -\frac{3}{8} \right) + q_2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 3 \right) + q_2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \right) + (-M) \cdot \left( \frac{10}{8} / (8+2) \right) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{64} \cdot 5 - 10 \cdot \frac{3}{16} - 100 \cdot \frac{3}{8} - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 3 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 - 40 \cdot \frac{10}{8 \cdot 10} = -23.6719 \text{ кН}.$$

$$M_I = q_1 \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{8} \cdot 5 \right) + F_1 \cdot 2 = -10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{8} \cdot 5 + 10 \cdot 2 = -17.50 \text{ кНм}.$$

$$Q_I^{neg} = q_1 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 5 \right) + F_1 \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 5 + 10 \cdot \frac{1}{2} = 14.375 \text{ кН}.$$

$$Q_{II}^{np} = q_1 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 5 \right) + F_1 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 5 - 10 \cdot \frac{1}{2} = 4.375 \text{ кН}.$$

$$M_{II} = -M \cdot \left( -\frac{2}{2} \right) = 40 \cdot \frac{2}{2} = 40 \text{ кНм}.$$

$$\begin{aligned}
Q_{II} &= q_1 \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{64} \cdot 5 \right) + F_1 \cdot \frac{3}{16} + F_2 \cdot \frac{3}{8} + q_2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 3 \right) + \\
&+ q_2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \right) + (-M) \cdot \left( -\frac{2}{8} / 2 \right) = -10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{64} \cdot 5 + 10 \cdot \frac{3}{16} + \\
&+ 100 \cdot \frac{3}{8} + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 3 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 + 40 \cdot \frac{2}{8 \cdot 2} = 23.6719 \text{ кН}.
\end{aligned}$$

## Тестові запитання для самоконтролю

1 Назвіть одну з переваг багатопрогонової статично визначної балки порівняно з нерозрізною.

2 Яку загальну кількість шарнірів треба ввести, щоб перетворити нерозрізну балку в статично визначну багатопрогонову балку?

3 За якою формулою обчислюють кількість ступенів свободи багатопрогонової статично визначної балки?

4 Перетворюючи нерозрізну балку в багатопрогонову статично визначну балку, яким правилом постановки шарнірів не можна користуватися?

5 Для чого, розраховуючи багатопрогонову статично визначну балку, застосовують поверхову схему?

6 Яке твердження про взаємодію балок поверхової схеми є хибним?

7 Із якого поверху починають розраховувати багатопрогонову статично визначну балку?

8 Що треба зробити, щоб передати навантаження з одного поверху балки на інший?

9 Як називають балку поверхової схеми, що має два чи три опорних зв'язки?

10 Як називають балку поверхової схеми, що має один опорний зв'язок чи не має опорних зв'язків?

11 Який принцип використовують для отримання формули визначення внутрішніх сил по лініях впливу від нерухомого навантаження?

- 12 Яку властивість має прямолінійна ланка лінії впливу?
- 13 Яке навантаження називають еквівалентним?
- 14 Від чого залежить величина еквівалентного навантаження для трикутної лінії впливу для заданого навантаження?
- 15 Що показує ордината лінії впливу?
- 16 Яку розмірність має ордината лінії впливу згинального моменту?
- 17 Яку розмірність має ордината лінії впливу поперечної сили?
- 18 Назвіть формулу для визначення по лінії впливу величини згинального моменту від заданої системи зосереджених сил.

## 2 РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНОЇ РАМИ МЕТОДОМ СИЛ

**Завдання 2.** Розрахувати плоску статично невизначну раму за методом сил від дії зовнішнього навантаження (рисунок 2.1).

*План розв'язання*

- 1 Визначити міру статичної невизначності.
- 2 Вибрати основну систему.
- 3 Побудувати в основній системі епюри згинальних моментів від одиничних невідомих і зовнішнього навантаження.
- 4 Скласти систему канонічних рівнянь.
- 5 Визначити коефіцієнти і вільні члени системи канонічних рівнянь і перевірити правильність обчислень.
- 6 Розв'язати систему та перевірити правильність розрахунку.
- 7 Побудувати епюру згинальних моментів у заданій статично невизначній рамі і перевірити її правильність.
- 8 Побудувати епюри поперечних і поздовжніх сил у заданій статично невизначній рамі і перевірити, чи правильні вони.

### 2.1 Визначення ступеня статичної невизначності

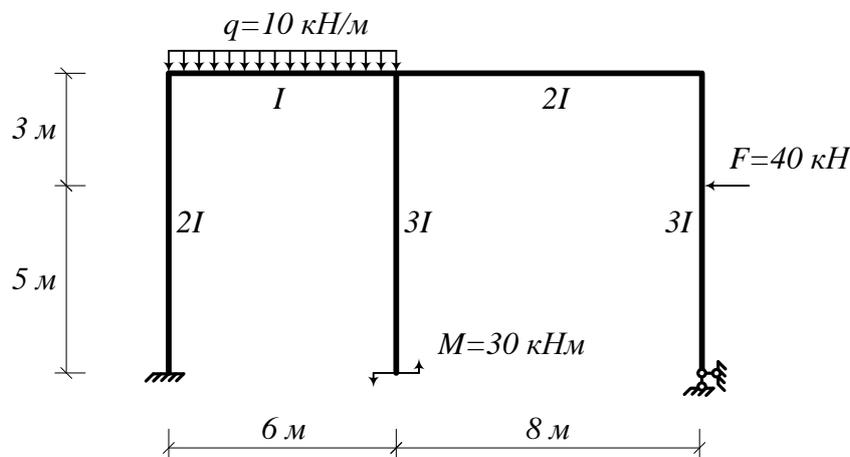


Рисунок 2.1 – Розрахункова схема статично невизначної рами

Ступінь статичної невизначності визначаємо виходячи з поняття замкнутого контуру (рисунок 2.2).

$$L = 3K - III,$$

де  $K$  – кількість замкнутих контурів;

$III$  – кількість простих шарнірів.

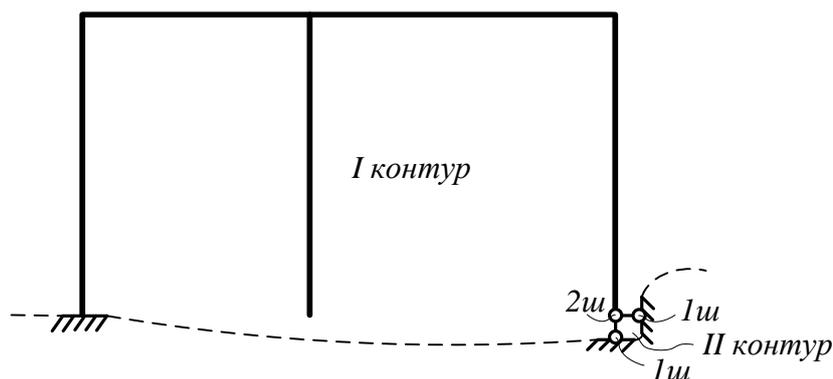


Рисунок 2.2 – Визначення ступеня статичної невизначності

Умовно проводимо лінію землі, з'єднуючи між собою опори. Рама і земля дають перший контур, другий контур утворюють стрижні шарнірно-нерухомої опори і земля. Шарнірно-нерухома опора містить чотири простих шарніри (середній шарнір подвійний, оскільки з'єднує три диски – стрижень рами і два стрижні опори).

$$L = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

Розглянута рама двічі статично невизначна або має два зайвих зв'язки.

## 2.2 Вибір основної системи

Основну систему отримаємо із заданої розрахункової схеми, відкидаючи умовно зайві зв'язки. Зв'язки необхідно відкидати так, щоб система залишалася геометрично незмінною. Крім того, для вибору

основної системи необхідно дотримуватися таких умов: епюри згинальних моментів (одиночні та вантажні), побудовані в основній системі, повинні мати якомога більше нульових ділянок; кількість обчислень, пов'язаних із визначенням коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь, має бути мінімальною. Оскільки задана рама двічі статично невизначна, то відкидаємо два зв'язки і замінюємо їх невідомими реакціями  $X_1$  і  $X_2$ .

Розглянемо декілька варіантів основної системи. Перший варіант (рисунок 2.3, а) – відкидаємо момент у закріпленні і горизонтальний зв'язок у шарнірно-нерухомій опорі. Другий варіант (рисунок 2.3, б) – відкидаємо вертикальний і горизонтальний зв'язки в шарнірно-нерухомій опорі. Третій варіант (рисунок 2.3, в) – відкидаємо момент у закріпленні та додаємо шарнір між середньою стійкою і правим ригелем, тобто відкидаємо зв'язок, який перешкоджає їхньому взаємному повороту.

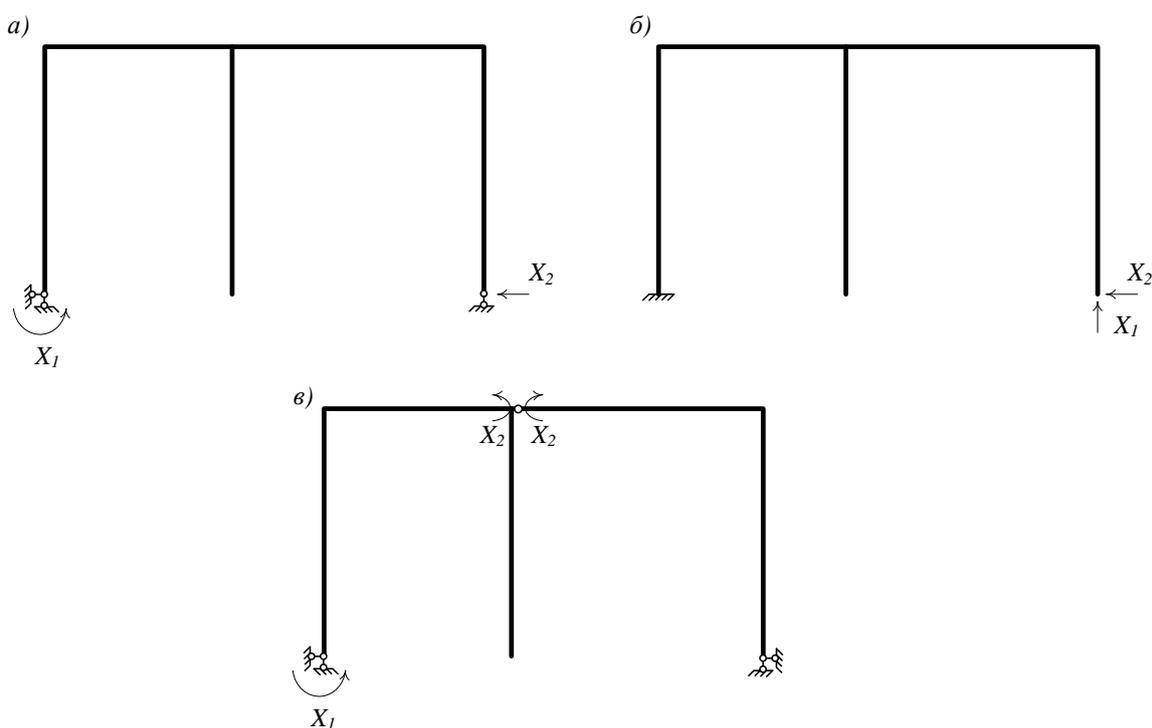


Рисунок 2.3 – Варіанти основної системи

Для поданих варіантів основних систем, використовуючи метод перерізів, правило знаків для згинальних моментів і принцип незалежності

дії сил, будуюмо одиничні (від  $X_1 = 1$  і  $X_2 = 1$ ) і вантажні (від зовнішнього навантаження) епюри моментів (рисунки 2.4-2.9).

**Варіант 1**

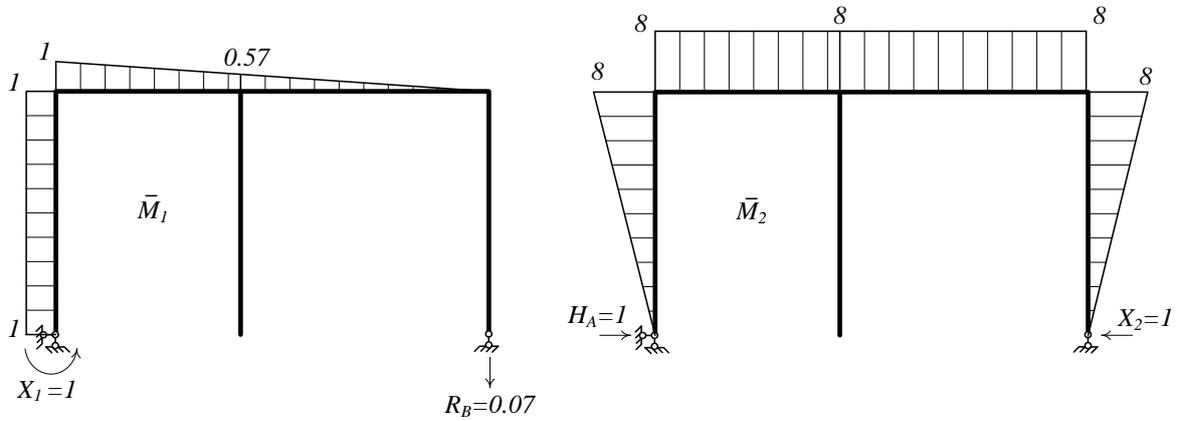


Рисунок 2.4 – Одиничні епюри моментів

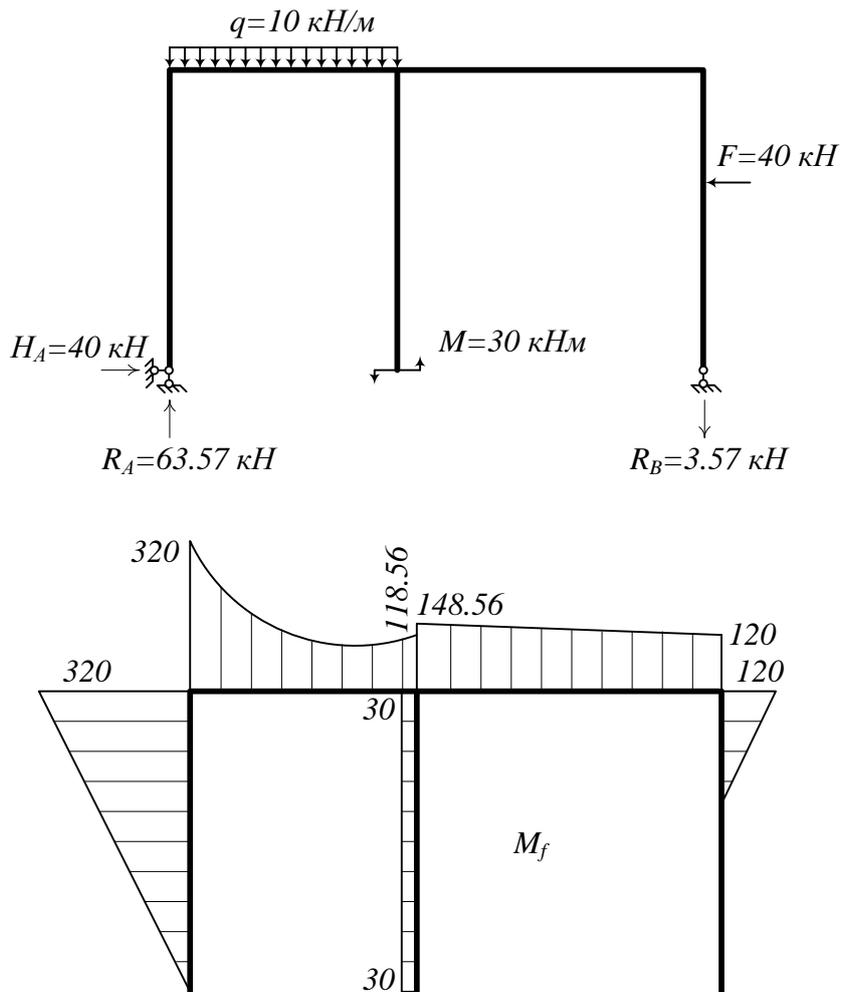


Рисунок 2.5 – Вантажна епюра моментів

**Варіант 2**

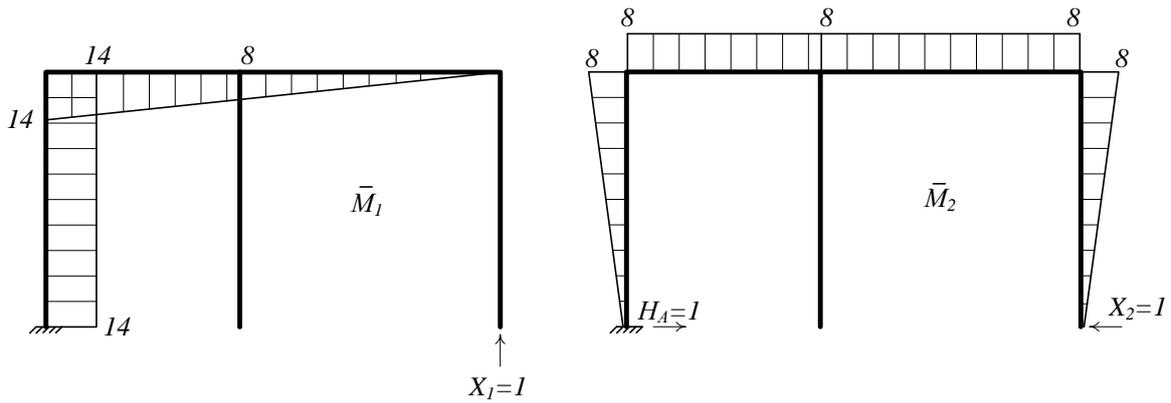


Рисунок 2.6 – Одиничні епюри моментів

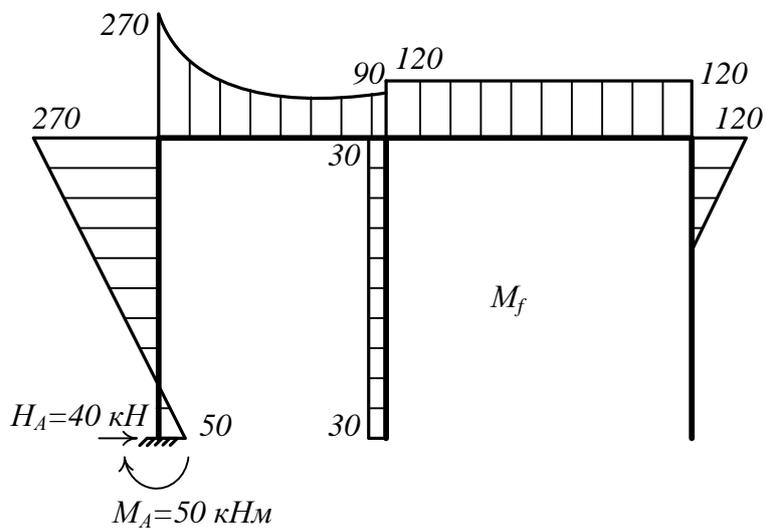


Рисунок 2.7 – Вантажна епюра моментів

**Варіант 3**

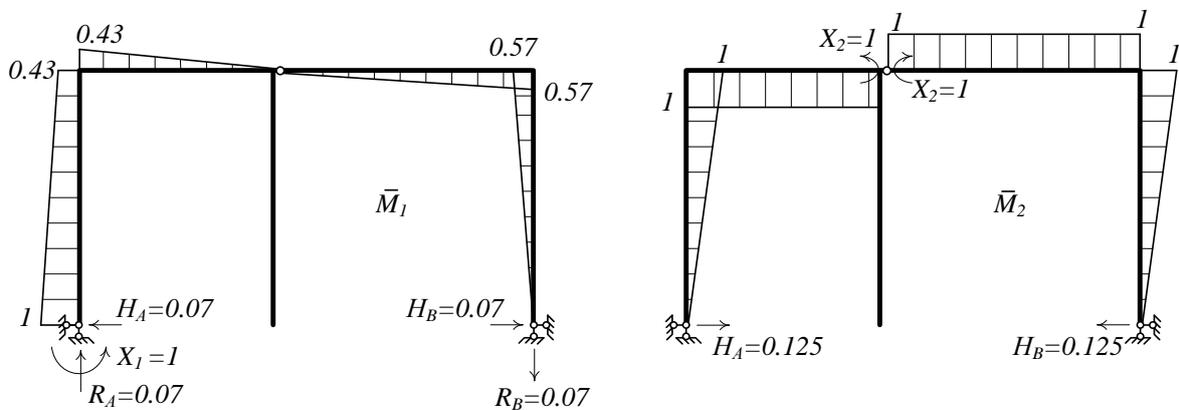


Рисунок 2.8 – Одиничні епюри моментів

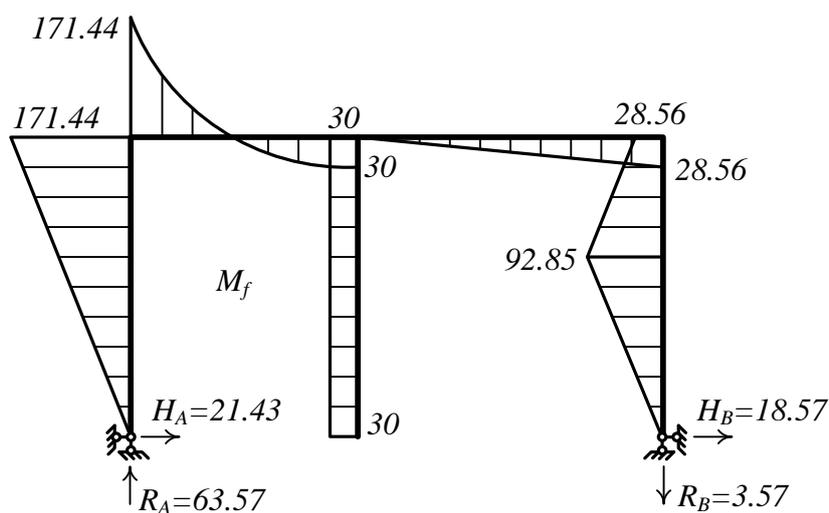


Рисунок 2.9 – Вантажна епюра моментів

Аналізуючи епюри, можна сказати, що найбільш явну раціональну систему виділити не можна. Одиничні епюри варіантів 1 і 2 ідентичні та, на відміну від варіанта 3, мають ділянки з нульовими координатами. Вантажна епюра варіанта 1 складається з простих фігур. Для подальшого розрахунку приймаємо перший варіант основної системи.

### 2.3 Система канонічних рівнянь

Умову еквівалентності основної і заданої систем записують у вигляді системи канонічних рівнянь. Кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, отже, система складатиметься з двох рівнянь.

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \Delta_{1f} = 0 \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \Delta_{2f} = 0 \end{cases}$$

де  $X_1, X_2$  – невідомі методу сил;

$\delta_{ij}$  – одиничні коефіцієнти системи канонічних рівнянь методу сил, переміщення в основній системі за напрямком відкинутих зв'язків, викликані реакціями зв'язків, що дорівнюють одиниці;

$\Delta_{iF}$  – вільні члени системи канонічних рівнянь методу сил, переміщення в основній системі за напрямком відкинутих зв'язків, які викликані зовнішнім навантаженням.

## 2.4 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь

Коефіцієнти і вільні члени системи рівнянь являють собою переміщення, які визначають за методом Мора. Інтеграл, що входить у формулу Мора, обчислюють за правилом Верещагіна

$$\delta_{ij} = \frac{y_i \omega_j}{EI},$$

де  $y_i$  – ордината під центром ваги криволінійної епюри, взята на прямолінійній епюрі;

$\omega_j$  – площа криволінійної епюри;

$EI$  – жорсткість поперечного перерізу, або за формулою Сімпсона-Карнаухова

$$\delta_{ij} = \frac{l}{6EI} (M_i^{лев} \cdot M_j^{лев} + 4 \cdot M_i^{cp} \cdot M_j^{cp} + M_i^{np} \cdot M_j^{np}),$$

де  $l$  – довжина ділянки;

$M_i^{лев}, M_j^{лев}, M_i^{cp}, M_j^{cp}, M_i^{np}, M_j^{np}$  – ординати епюр на початку, у середині та наприкінці ділянки.

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 + \frac{6}{6} \left( 1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1+0.57}{2} \cdot \frac{1+0.57}{2} + 0.57 \cdot 0.57 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.57 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.57 \right] = \frac{8.223}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 + 8 \cdot 6 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 \right) = \frac{782.222}{EI};$$

$$\delta_{21} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 + 8 \cdot 6 \cdot \frac{1+0.57}{2} + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.57 \right) = \frac{62.80}{EI};$$

$$\Delta_{1f} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_f}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{320}{2} + \frac{6}{6} \left( 1 \cdot 320 + 4 \cdot \frac{1+0.57}{2} \times \frac{320+118.56}{2} + 0.57 \cdot 118.56 \right) - \frac{10 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1+0.57}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0.57 \cdot \left( 120 + \frac{2}{3} \cdot 28.56 \right) \right] = \frac{1733.324}{EI};$$

$$\Delta_{2f} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_f}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 320 + 8 \cdot 6 \cdot \frac{320+118.56}{2} - \frac{10 \cdot 6^3}{12} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{148.56+120}{2} + \frac{3}{6 \cdot 3} \left( 8 \cdot 120 + 4 \cdot \frac{8+5}{2} \times \frac{120}{2} + 0.5 \right) \right] = \frac{17215.733}{EI}.$$

## 2.5 Перевірка правильності визначення коефіцієнтів і вільних членів

Для виконання перевірки будемо сумарну одиничну епюру моментів (рисунок 2.10):

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2.$$

У характерних точках підсумовуємо ординати епюр з урахуванням знака і відкладаємо з боку більшої ординати.

Виконуємо універсальну перевірку:

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{EI} ds = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{12} + \delta_{21}.$$

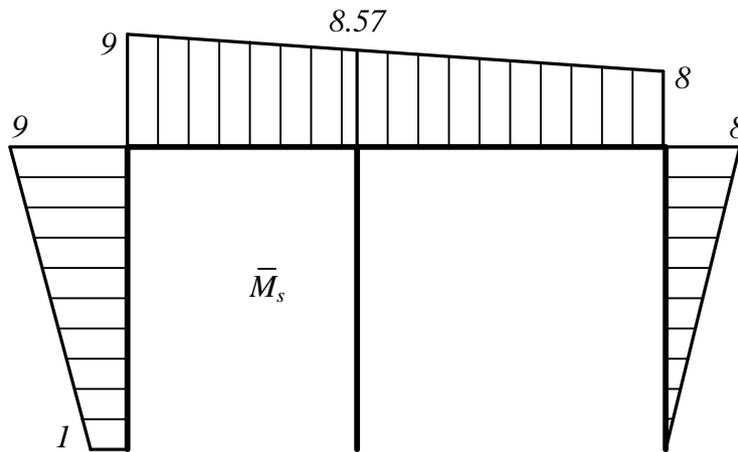


Рисунок 2.10 – Сумарна одинична епюра

Обчислюємо ліву частину формули:

$$\begin{aligned} \delta_{ss} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{EI} ds = & \frac{1}{EI} \left[ \frac{8}{6 \cdot 2} \left( 1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1+9}{2} \cdot \frac{1+9}{2} + 9 \cdot 9 \right) + \right. \\ & + \frac{6}{6} \left( 9 \cdot 9 + 4 \cdot \frac{9+8.57}{2} \times \frac{9+8.57}{2} + 8.57 \cdot 8.57 \right) + \\ & + \frac{8}{6 \cdot 2} \left( 8.57 \cdot 8.57 + 4 \cdot \frac{8.57+8}{2} \cdot \frac{8.57+8}{2} + 8 \cdot 8 \right) + \\ & \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 \right] = \frac{916.045}{EI}. \end{aligned}$$

Обчислюємо праву частину формули:

$$\delta_{ss} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{12} + \delta_{21} = \frac{8.22}{EI} + \frac{782.22}{EI} + \frac{62.80}{EI} + \frac{62.80}{EI} = \frac{916.045}{EI}.$$

Порівнюючи ліву і праву частини, бачимо, що рівність виконана, отже, коефіцієнти системи канонічних рівнянь визначені правильно. Якщо результати не співпали, необхідно виконати порядкову перевірку, тобто перевірити окремо коефіцієнти кожного рівняння. Проілюструємо це.

Перевіримо коефіцієнти першого рівняння:

$$\delta_{1s} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_s}{EI} ds = \delta_{11} + \delta_{12}.$$

Обчислюємо ліву частину формули:

$$\delta_{1s} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_s}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{9+1}{2} + \frac{6}{6} \left( 1 \cdot 9 + 4 \cdot \frac{1+0.57}{2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{9+8.57}{2} + 0.57 \cdot 8.57 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0.57 \cdot \left( 8 + \frac{2}{3} \cdot 0.57 \right) \right] = \frac{71.023}{EI}.$$

Обчислюємо праву частину формули:

$$\delta_{1s} = \delta_{11} + \delta_{12} = \frac{8.22}{EI} + \frac{62.8}{EI} = \frac{71.023}{EI}.$$

Рівність правої і лівої частини доводить те, що коефіцієнти першого рівняння визначені правильно.

Аналогічно перевіряємо коефіцієнти другого рівняння:

$$\delta_{2s} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_s}{EI} ds = \delta_{22} + \delta_{21}.$$

Перевіряємо правильність обчислення вільних членів:

$$\Delta_{sf} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_f}{EI} ds = \Delta_{1f} + \Delta_{2f}.$$

Обчислюємо ліву частину виразу:

$$\Delta_{sf} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_f}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 320 \cdot 8 \cdot \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot 8 \right) + \frac{6}{6} (320 \cdot 9 + \right. \\ \left. + 4 \cdot \frac{320 + 118.56}{2} \cdot \frac{9 + 8.57}{2} + 118.56 \cdot 8.57 \right) - \frac{10 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{9 + 8.57}{2} + \\ \left. + \frac{8}{6 \cdot 2} \left( 148.56 \cdot 8.57 + 4 \cdot \frac{148.56 + 120}{2} \times \frac{8.57 + 8}{2} + 120 \cdot 8 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 3 \cdot \left( 5 + \frac{2}{3} \cdot 3 \right) \right] = \frac{18949.057}{EI}.$$

Обчислюємо праву частину:

$$\Delta_{sf} = \Delta_{1f} + \Delta_{2f} = \frac{1733.32}{EI} + \frac{17215.73}{EI} = \frac{18949.057}{EI}.$$

Рівність правої і лівої частини доводить те, що вільні члени системи канонічних рівнянь визначені правильно.

## 2.6 Розв'язання системи канонічних рівнянь

Розв'язуємо систему канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} X_1 \cdot 8.223 + X_2 \cdot 62.8 + 1733.324 = 0 \\ X_1 \cdot 62.8 + X_2 \cdot 782.222 + 17215.733 = 0 \end{cases}.$$

У результаті отримуємо

$$\begin{cases} X_1 = -110.3919 \text{кН} \\ X_2 = -13.1460 \text{кН} \end{cases}.$$

## 2.7 Побудова епюри моментів у заданій статично невизначній системі

Побудова остаточної епюри моментів:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_f.$$

Тобто необхідно підсумувати ординати виправлених одиничних (рисунок 2.11) і вантажної (рисунок 2.12) епюр моментів у характерних точках з урахуванням знака ординат.

Виправлені епюри ( $M_1 X_1$ ,  $M_2 X_2$ ) отримуємо множенням ординат одиничних епюр на відповідне значення невідомих ( $X_1$ ,  $X_2$ ).

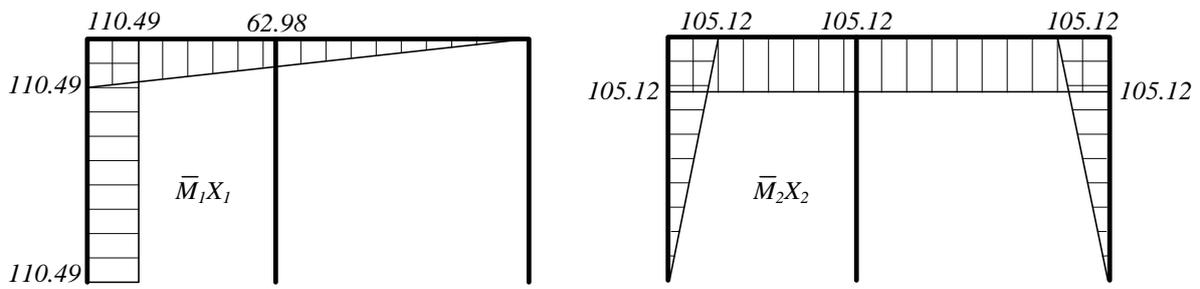


Рисунок 2.11 – Виправлені одиничні епюри моментів

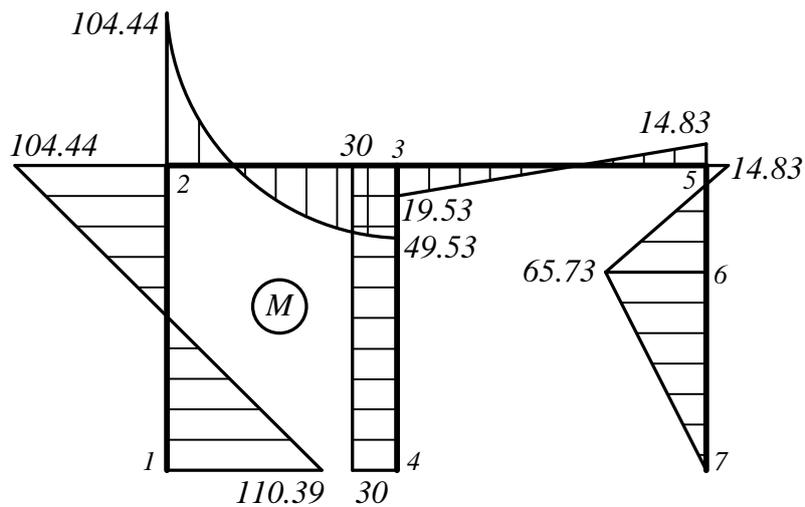


Рисунок 2.12 – Остаточна епюра моментів

## 2.8 Перевірка правильності побудови епюри $M$

Перевіряємо рівновагу у вузлах. Для цього вирізаємо вузли (рисунок 2.13) і складаємо рівняння моментів  $\sum M_{y3} = 0$ .

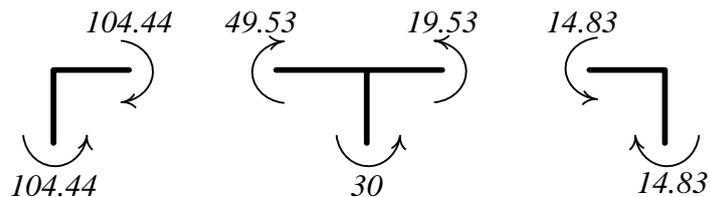


Рисунок 2.13 – Перевірка рівноваги у вузлах

Виконуємо деформаційну перевірку. Якщо еюра моментів побудована правильно, має бути виконана така умова: результат перемноження остаточної еюри моментів на будь-яку з одиничних чи сумарну має дорівнювати нулю.

$$\sum \int \frac{M\bar{M}_s}{EI} ds = 0.$$

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M\bar{M}_s}{EI} ds = & \frac{1}{EI} \left[ \frac{8}{6 \cdot 2} \left( -1 \cdot 110.49 - 4 \cdot \frac{1+9}{2} \cdot \frac{110.39 - 104.44}{2} + \right. \right. \\ & + 9 \cdot 104.44 \left. \right) + \frac{6}{6} \left( 9 \cdot 104.44 + 4 \cdot \frac{9+8.57}{2} \cdot \frac{104.44 - 49.53}{2} - 8.57 \cdot 49.53 \right) - \\ & - \frac{10 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{9+8.57}{2} + \frac{8}{6 \cdot 2} \left( -8.57 \cdot 19.53 - 4 \cdot \frac{8.57+8}{2} \cdot \frac{19.53 - 14.83}{2} + \right. \\ & + 8 \cdot 14.83 \left. \right) + \frac{3}{6 \cdot 3} \left( 8 \cdot 14.83 - 4 \cdot \frac{8+5}{2} \cdot \frac{65.73 - 14.83}{2} - 5 \cdot 65.73 \right) - \\ & \left. - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 65.73 \right] = \frac{0.06}{EI}. \end{aligned}$$

## 2.9 Побудова еюри поперечних сил $Q$

Розрахункову еюру поперечних сил (рисунок 2.14) будують за допомогою еюри моментів із використанням залежності

$$Q = Q^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l},$$

де  $Q^0$  – балочна поперечна сила, поперечна сила від зовнішнього навантаження;

$M_n, M_{n-1}$  – величини згинальних моментів на кінцях розглянутої ділянки.

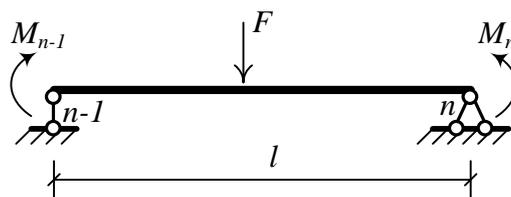
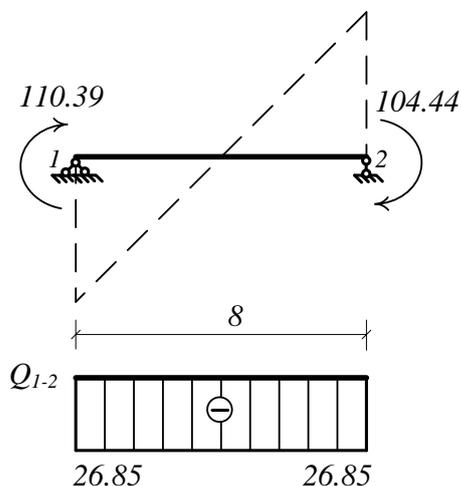


Рисунок 2.14 – Визначення поперечної сили

Кожен елемент рами розглядаємо як балку на двох опорах, завантажену опорними моментами і зовнішнім навантаженням (якщо зовнішнє навантаження на ділянці відсутнє, то  $Q^0 = 0$ ).

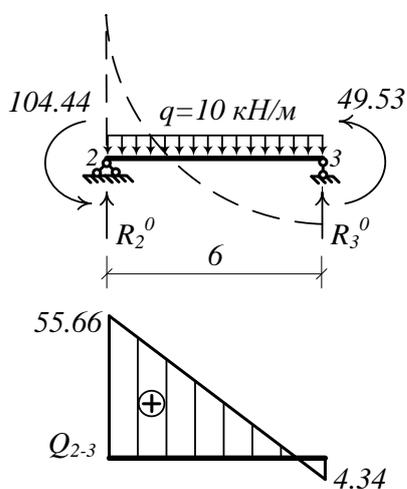
### Ділянка 1-2



$$Q_{1-2} = \frac{-104.44 - 110.39}{8} = -26.85 \text{ кН}.$$

Рисунок 2.15

### Ділянка 2-3



Визначаємо балочні реакції:

$$R_2^0 = R_3^0 = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30 \text{ кН}.$$

Обчислюємо поперечні сили в точках 2 і 3:

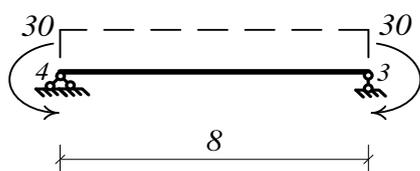
$$Q_2^0 = R_2^0 = 30 \text{ кН}, \quad Q_3^0 = -R_3^0 = -30 \text{ кН},$$

$$Q_2 = 30 + \frac{49.53 + 104.44}{6} = 55.66 \text{ кН},$$

$$Q_3 = -30 + \frac{49.53 + 104.44}{6} = -4.34 \text{ кН}.$$

Рисунок 2.16

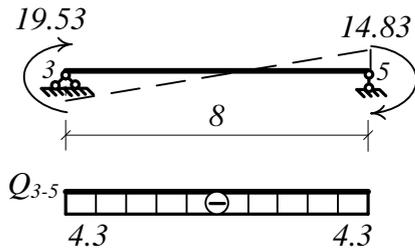
### Ділянка 3-4



$$Q_{3-4} = \frac{-30 + 30}{8} = 0.$$

Рисунок 2.17

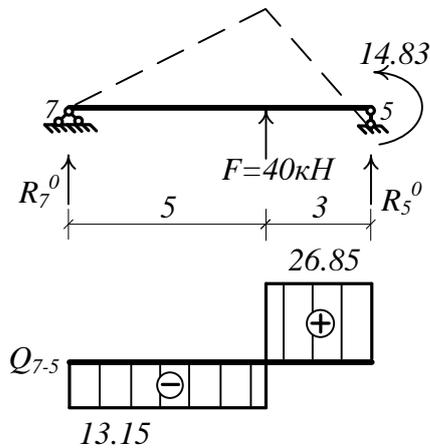
**Ділянка 3-5**



$$Q_{3-5} = \frac{-14.83 - 19.53}{8} = -4.3 \text{ кН}.$$

Рисунок 2.18

**Ділянка 5-7**



Визначаємо балочні реакції:

$$\sum M_5 = 0: R_7^0 = \frac{40 \cdot 3}{8} = 15 \text{ кН},$$

$$\sum M_7 = 0: R_5^0 = \frac{40 \cdot 5}{8} = 25 \text{ кН}.$$

Обчислюємо поперечні сили в точках 7 і 5:

$$Q_7^0 = -R_7^0 = -15 \text{ кН},$$

Рисунок 2.19

$$Q_5^0 = R_5^0 = 25 \text{ кН}, \quad Q_7 = -15 + \frac{14.83 - 0}{8} = -13.15 \text{ кН},$$

$$Q_5 = 25 + \frac{14.83 - 0}{8} = 26.85 \text{ кН}.$$

Розрахункова епюра поперечних сил у заданій статично невизначній системі показана на рисунку 2.20.

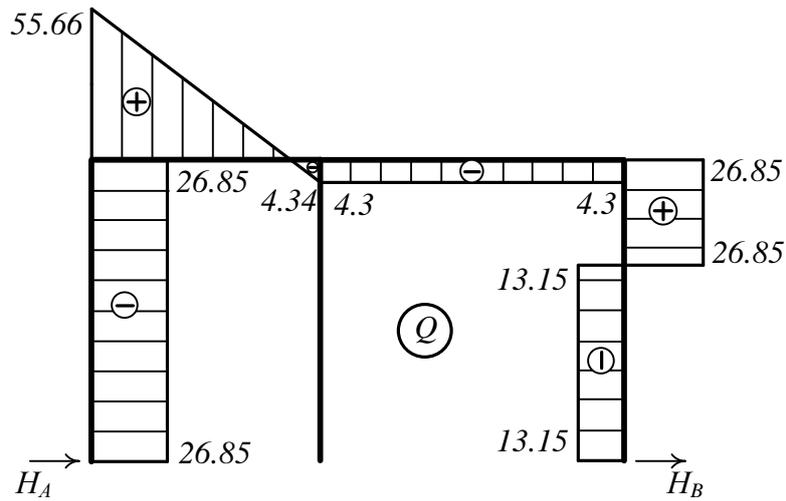
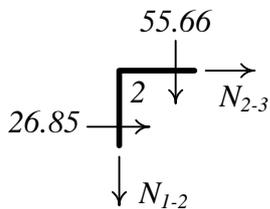


Рисунок 2.20 – Епюра поперечних сил

## 2.10 Побудова епюри поздовжніх сил $N$

Епюру поздовжніх сил будемо способом вирізання вузлів з епюри  $Q$  і складанням рівнянь рівноваги  $\sum Y = 0$ ,  $\sum X = 0$ .

### Вузол 2

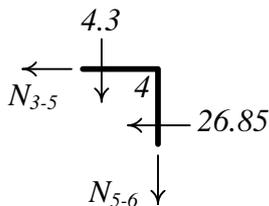


$$\sum X = 0: N_{2-3} + 26.85 = 0, N_{2-3} = -26.85 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0: -N_{1-2} - 55.66 = 0, N_{1-2} = -55.66 \text{ кН}.$$

Рисунок 2.21

### Вузол 5

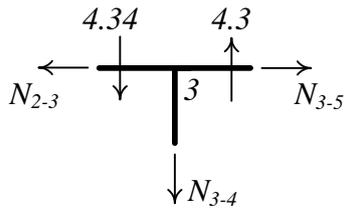


$$\sum X = 0: -N_{3-5} - 26.85 = 0, N_{3-5} = -26.85 \text{ кН}$$

$$\sum Y = 0: -N_{5-6} - 4.3 = 0, N_{5-6} = -4.3 \text{ кН}.$$

Рисунок 2.22

### Вузол 3



$$\sum X = 0: -N_{2-3} + N_{3-5} = 0,$$

$$-26.85 + 26.85 = 0.$$

$$\sum Y = 0: -N_{3-4} - 4.34 + 4.3 = 0, N_{3-4} \approx 0.$$

Рисунок 2.23

Розрахункова епюра поздовжніх сил у заданій статично невизначній системі показана на рисунку 2.24.

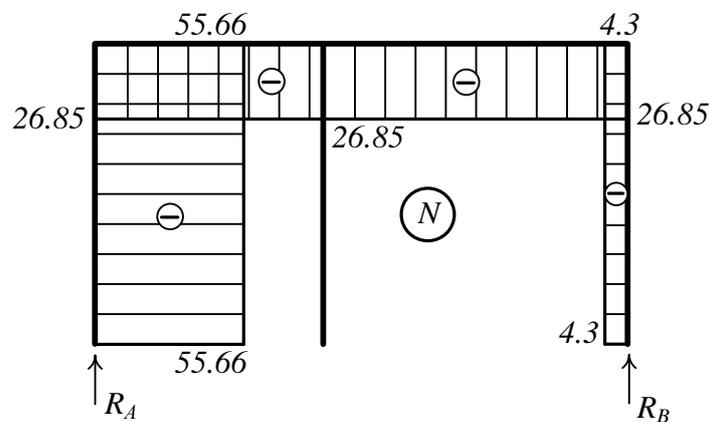


Рисунок 2.24 – Епюра поздовжніх сил

### 2.11 Перевірка правильності побудови епюр $Q$ і $N$

Відсікаємо раму від опорних закріплень і розглядаємо її рівновагу за дії зовнішнього навантаження і опорних реакцій. Величини і напрямки реакцій приймаємо з епюр  $Q$  і  $N$  (рисунок 2.25).

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0: 26.85 + 13.15 - 40 = 0, 40 - 40 = 0,$$

$$\sum Y = 0: 55.66 - 10 \cdot 6 + 4.3 = 0, 59.96 - 60 \approx 0.$$

Оскільки рівняння виконані, система знаходиться в рівновазі.

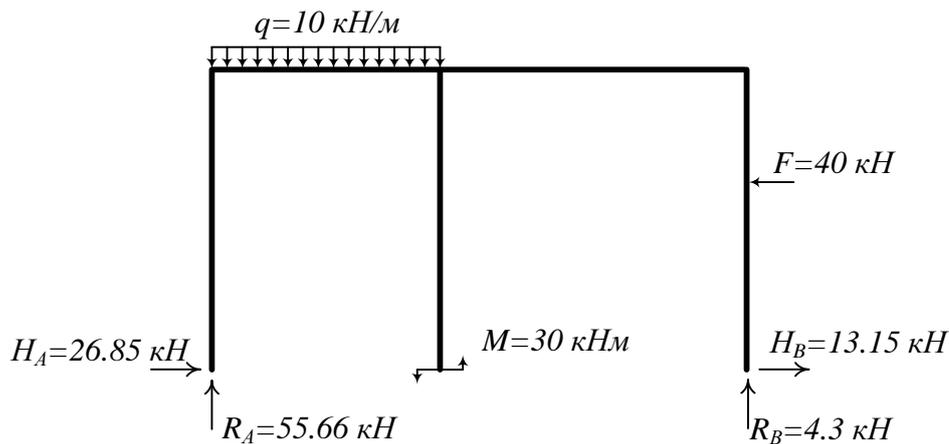


Рисунок 2.25 – Перевірка умови рівноваги рами

### Тестові запитання для самоконтролю

- 1 Коли розраховують статично невизначні системи за схемою методу сил?
- 2 За якою формулою визначають ступінь статичної невизначності рам для розрахунків за методом сил?
- 3 Як отримують основну систему за методом сил?
- 4 Як обчислюють коефіцієнти канонічних рівнянь за методом сил?
- 5 Чи можна довести, що коефіцієнти системи канонічних рівнянь з однаковими індексами, завжди додатні?
- 6 Як найбільш повно перевірити правильність обчислення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь за методом сил?
- 7 Яку перевірку використовують для контролю правильності визначення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь методу сил?
- 8 Як перевірити правильність визначення вільних членів системи канонічних рівнянь методу сил?
- 9 На підставі чого найпростіше обчислити внутрішні сили в статично невизначній системі?
- 10 Як перевірити правильність побудови епюри згинальних моментів у статично невизначній системі?

- 11 Коли остаточно епіюра моментів побудована правильно?
- 12 Коли остаточно епіюра поперечних сил побудована правильно?
- 13 Що називають переміщенням?
- 14 Що означає перший індекс у позначенні переміщення?
- 15 Що означає другий індекс у позначенні переміщення?
- 16 Які переміщення системи називають можливими?
- 17 Яку роботу зовнішніх сил називають дійсною?
- 18 Коли роботу зовнішніх сил називають можливою?
- 19 Коли теорема Бетті про взаємність можливих робіт є дійсною?
- 20 Що треба прикласти в одиничному стані для визначення лінійного переміщення за методом Мора?
- 21 Що означає від'ємне значення переміщення, отриманого за формулою Мора?
- 22 Як треба брати ординату для обчислення інтеграла Мора із застосуванням правила Верещагіна?
- 23 У якому випадку обчислення інтеграла Мора із застосуванням правила Сімпсона-Карнаухова дає його точне значення?
- 24 Чому не можна застосувати безпосередньо формулу Мора для визначення переміщень від дії температури?

### 3 РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНОЇ РАМИ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ

**Завдання 3.** Розрахувати плоску статично невизначну раму (рисунок 3.1) методом переміщень від дії зовнішнього навантаження.

*План розв'язання*

- 1 Визначити кількість невідомих.
- 2 Вибрати основну систему.
- 3 Побудувати в основній системі епюри згинальних моментів від одиничних невідомих і зовнішнього навантаження.
- 4 Скласти систему канонічних рівнянь.
- 5 Визначити коефіцієнти і вільні члени системи канонічних рівнянь і перевірити правильність обчислень.
- 6 Розв'язати систему та перевірити правильність розрахунку.
- 7 Побудувати епюру згинальних моментів у заданій статично невизначній рамі і перевірити її правильність.
- 8 Побудувати епюри поперечних і поздовжніх сил у заданій статично невизначній рамі і перевірити їхню правильність.

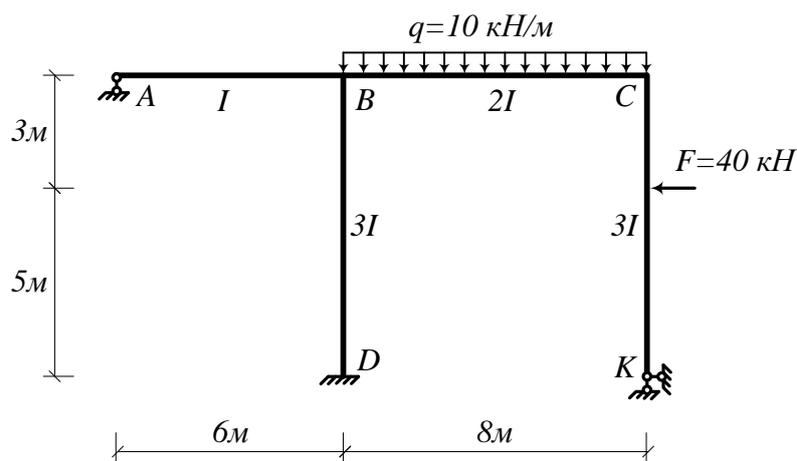


Рисунок 3.1 – Розрахункова схема статично невизначної системи

### 3.1 Визначення ступеня кінематичної невизначеності

Загальну кількість невідомих незалежних переміщень вузлів рами визначаємо за формулою

$$n = n_y + n_d,$$

де  $n_y$  – кількість можливих кутових переміщень;

$n_d$  – кількість можливих лінійних переміщень.

У розглянутій рамі значення  $n_y$  дорівнює кількості жорстких вузлів без урахування опорних вузлів  $n_y = 2$  (вузли  $B$  і  $C$ ).

Для визначення кількості лінійних невідомих  $n_d$  необхідно замінити задану систему шарнірно-стрижневою схемою (рисунок 3.2) введенням повних шарнірів у всі жорсткі вузли (точки  $B$  і  $C$ ) і опорні закріплення (точка  $D$ ).

Кількість лінійних переміщень вузлів системи дорівнює кількості стрижнів, які необхідно ввести в шарнірно-стрижневу схему, щоб перетворити її на геометрично незмінну. Аналізуючи шарнірно-стрижневу систему, бачимо, що вузли  $A$ ,  $B$ ,  $C$  можуть переміщуватися по горизонталі.

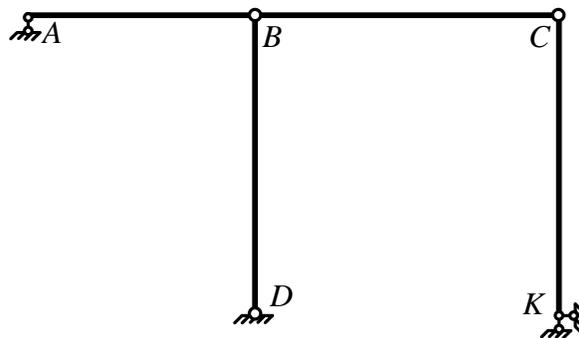


Рисунок 3.2 – Шарнірно-стрижнева система

Кількість незалежних лінійних переміщень визначаємо за формулою

$$n_d = III - 3K = 13 - 3 \cdot 4 = 1,$$

де  $III$  – кількість усіх простих одиночних шарнірів;

$K$  – кількість замкнених контурів, включаючи землю.

Щоб обмежити переміщення цих вузлів, додаємо один горизонтальний стрижень.

Загальна кількість невідомих переміщень дорівнює

$$n = 2 + 1 = 3.$$

### 3.2 Основна система методу переміщень

Основну систему (рисунок 3.3) отримуємо введенням в усі жорсткі вузли плаваючих закріплень (вузли  $B$  і  $C$ ) і постановкою додаткових стрижнів (вузол  $A$ ), що перешкоджають лінійним переміщенням вузлів. За основні невідомі методу переміщень приймаємо кутові ( $Z_1, Z_2$ ) і лінійні ( $Z_3$ ) переміщення вузлів.

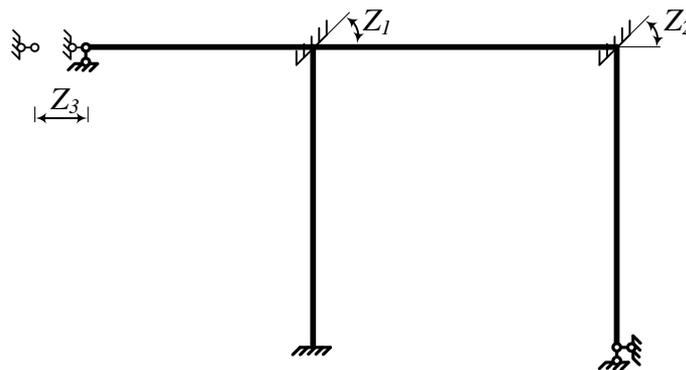


Рисунок 3.3 – Основна система методу переміщень

### 3.3 Система канонічних рівнянь

Основна система відрізняється від заданої додатковими зв'язками. У введених закріпленнях виникають реактивні моменти, у додаткових стрижнях – реактивні зусилля. Реактивні моменти і реактивні зусилля можна обернути на нуль, якщо повернути закріплення на кути, що дорівнюють дійсним поворотам вузлів, і змістити вузли так, щоб їхні лінійні переміщення дорівнювали переміщенням, що виникають у заданій системі. Математичний запис цього факту виражено системою канонічних рівнянь. Кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих переміщень, отже, система складатиметься з трьох рівнянь

$$\begin{cases} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + R_{1f} = 0 \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{21} + R_{2f} = 0, \\ Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + R_{3f} = 0 \end{cases}$$

де  $Z_i$  – невідомі методу переміщень;

$r_{ij}$  – коефіцієнти системи канонічних рівнянь методу переміщень; реактивні моменти (зусилля) у введених защемленнях (у додаткових зв'язках) від повороту (лінійного переміщення) зв'язку на одиницю;

$R_{if}$  – вільні члени системи канонічних рівнянь методу переміщень; реактивні моменти (зусилля) у зв'язках, викликані зовнішнім навантаженням.

Для визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь будуємо одиничні (рисунки 3.4, 3.5) і вантажну (рисунок 3.6) епюри моментів. Епюри будують із використанням таблиць стандартних рішень (додаток А).

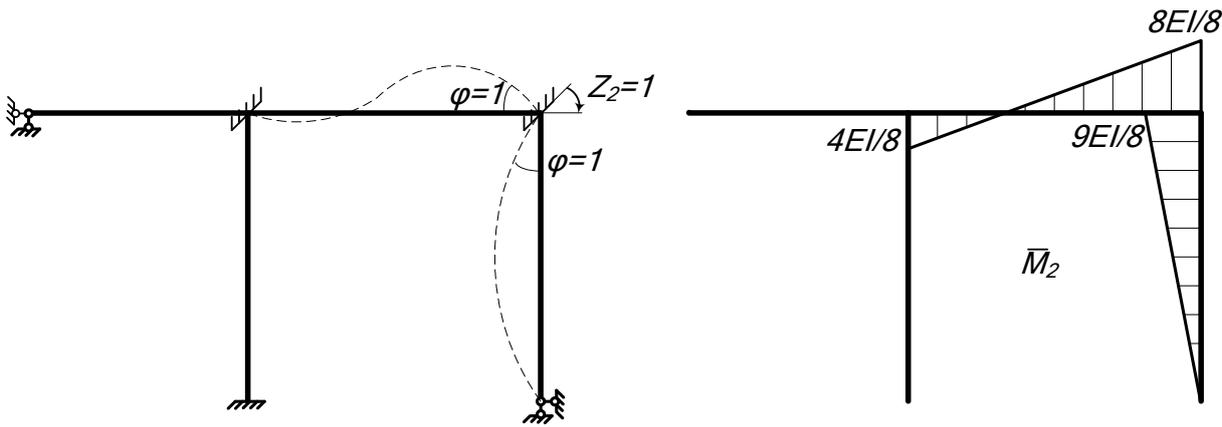
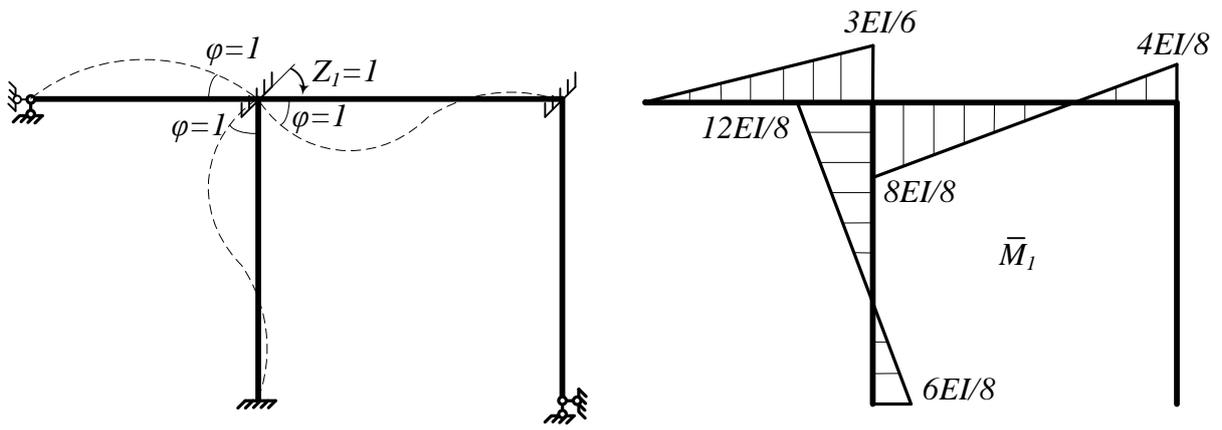


Рисунок 3.4 – Схеми деформування стрижнів і одиничні епюри моментів

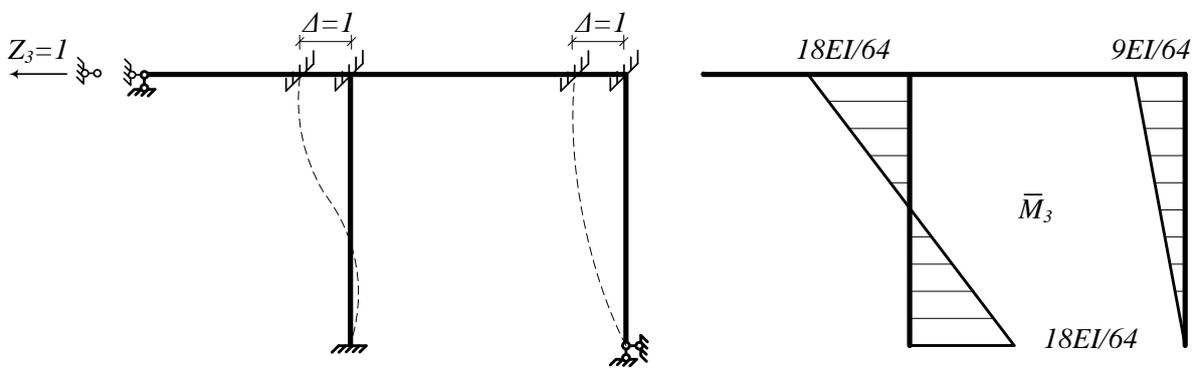


Рисунок 3.5 – Схем деформування стрижнів і одиничні епюри моментів

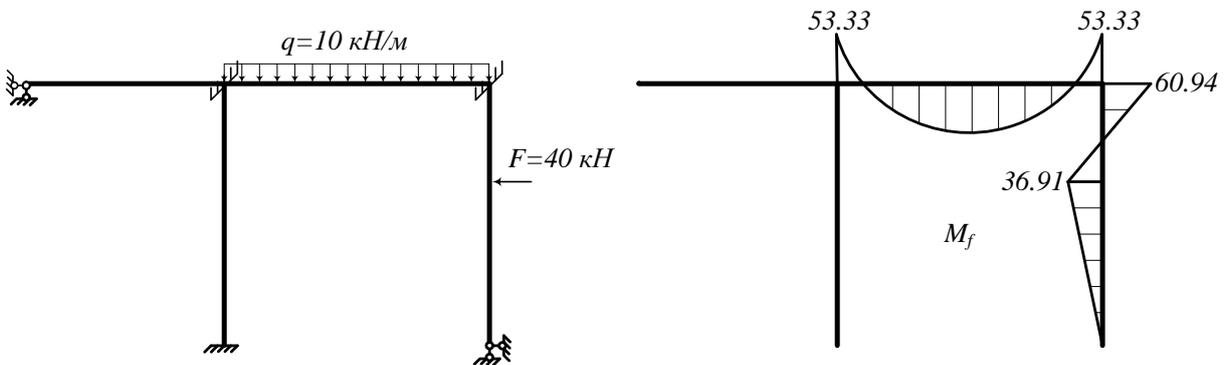


Рисунок 3.6 – Вантажна епюра моментів

### 3.4 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь

Для визначення коефіцієнтів використовуємо статичний спосіб. Коефіцієнти і вільні члени, які являють собою реактивні моменти у введених закріпленнях, визначаємо вирізанням вузлів і складанням рівнянь рівноваги  $\sum M_y = 0$ .

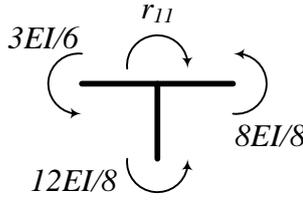
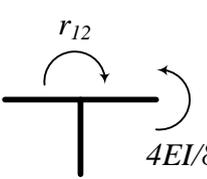
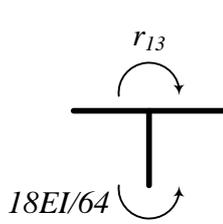
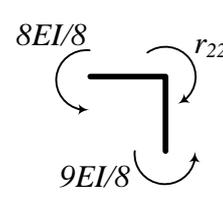
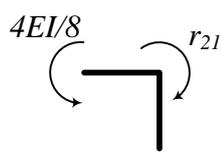
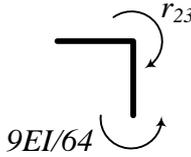
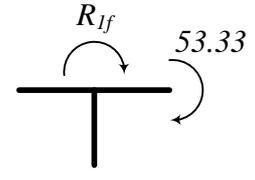
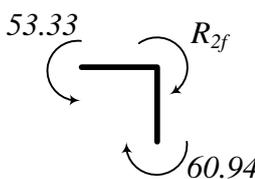
Коефіцієнти і вільні члени, які являють собою реактивні зусилля в додаткових стрижнях, визначаємо за допомогою перерізів, які відсікають раму або частину рами від опор, і складання рівнянь рівноваги  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$ . У розсічених стрижнях одиничних і вантажних епюр моментів визначаємо величини поперечних сил (рисунок 3.7) за формулою

$$Q = Q^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l},$$

де  $Q^0$  – балочна поперечна сила, поперечна сила від зовнішнього навантаження;

$M_n, M_{n-1}$  – величини згинальних моментів на кінцях розглянутої ділянки.

Кожен елемент рами розглядаємо як балку на двох опорах (рисунок 3.7), завантажену опорними моментами і зовнішнім навантаженням (якщо зовнішнє навантаження на ділянці відсутнє, то  $Q^0 = 0$ ). Для визначення  $Q$  враховують знак згинального моменту.

 $r_{11} = \frac{3EI}{6} + \frac{12EI}{8} + \frac{8EI}{8} = 3EI$	 $r_{12} = \frac{4EI}{8} = 0.5EI$	 $r_{13} = \frac{18EI}{64} = 0.281EI$
 $r_{22} = \frac{8EI}{8} + \frac{9EI}{8} = 2.125EI$	 $r_{21} = \frac{4EI}{8} = 0.5EI$	 $r_{23} = \frac{9EI}{64} = 0.141EI$
 $R_{1f} = -53.33 \text{ кНм}$	 $R_{2f} = 53.33 - 60.94 = -7.61 \text{ кНм}$	

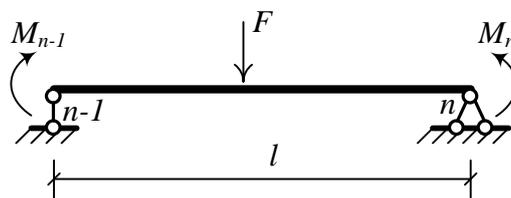
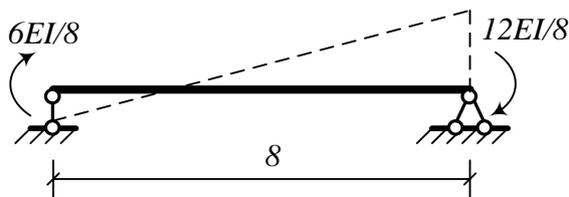


Рисунок 3.7 – Визначення поперечної сили

Проілюструємо на прикладі однієї ділянки епюри  $M_l$  (ліва стійка) (рисунок 3.8):



$$Q = -\frac{\frac{12EI}{8} - \frac{6EI}{8}}{8} = -0.070EI.$$

Рисунок 3.8

Оскільки поперечну силу отримано зі знаком «мінус», то силу відносно розтину направляємо проти годинникової стрілки (за правилом знаків поперечних сил) (рисунок 3.9).

	$r_{33} = 0.070EI + 0.018EI = 0.088EI$
	$r_{31} = 0.281EI$
	$r_{32} = 0.141EI$
	$R_{3f} = -32.62 \text{ кН}$

Рисунок 3.9

Для перевірки правильності обчислення реактивних зусиль і моментів із різними індексами використовуємо рівність  $r_{ik} = r_{ki}$ . Як бачимо з наданого розрахунку,  $r_{12} = r_{21}$ ,  $r_{13} = r_{31}$ ,  $r_{23} = r_{32}$ , отже, вони визначені правильно.

Розв'язуємо систему канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} 3EIZ_1 + 0.5EIZ_2 + 0.281EIZ_3 - 53.33 = 0 \\ 0.5EIZ_1 + 2.125EIZ_2 + 0.141EIZ_3 - 7.61 = 0 \\ 0.281EIZ_1 + 0.141EIZ_2 + 0.088EIZ_3 - 32.62 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} Z_1 = -\frac{23.6324}{EI} \\ Z_2 = -\frac{22.8954}{EI} \\ Z_3 = \frac{482.8291}{EI} \end{cases}.$$

### 3.5 Побудова епюри моментів $M$ у заданій статично невизначній системі

Побудову остаточної епюри моментів виконують за формулою

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \bar{M}_3 Z_3 + M_f.$$

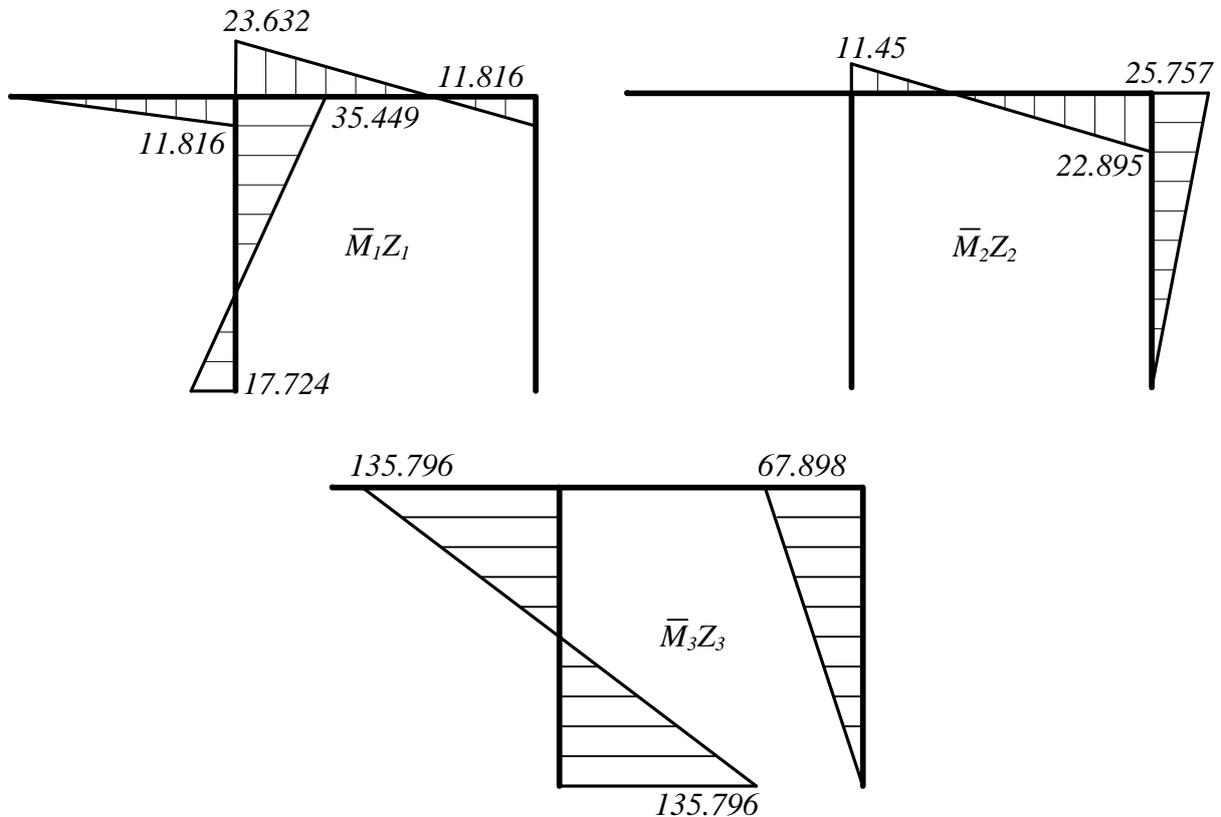


Рисунок 3.10 – Виправлені епюри моментів

Остаточну епюру моментів отримуємо підсумовуванням ординат у характерних точках одиничних виправлених і вантажної епюри моментів (рис. 3.10, 3.11). Виправлені епюри отримуємо множенням ординат одиничних епюр на відповідне значення невідомих ( $Z_1, Z_2, Z_3$ ).

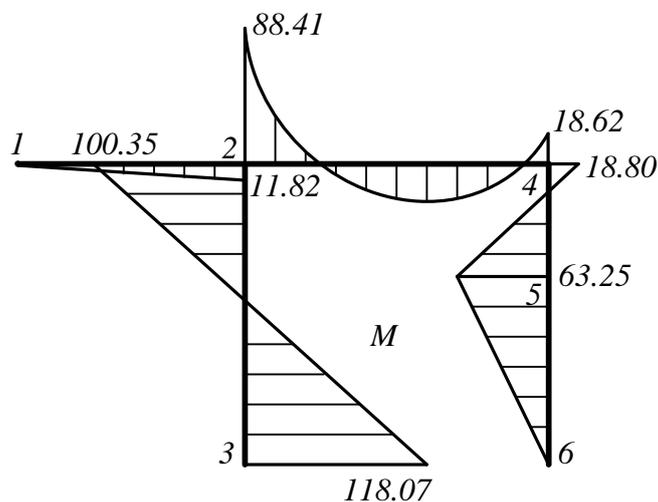


Рисунок 3.11 – Остаточна епюра моментів

Перевіряємо рівновагу у вузлах. Для цього вирізаємо вузли (рисунок 3.12) і складаємо рівняння моментів  $\sum M_{уз} = 0$ .

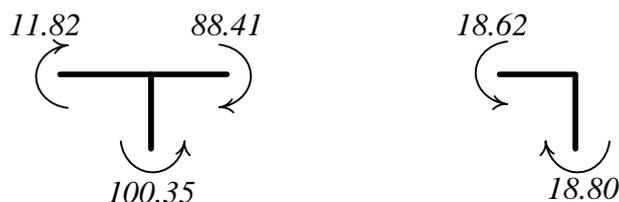


Рисунок 3.12 – Рівновага вузлів

Рівність моментів у вузлах забезпечена.

Так само виконуємо наступну перевірку: результат перемноження остаточної епюри моментів на будь-яку з одиничних чи сумарну, побудованих в основній системі методу сил (рисунок 3.13), має дорівнювати нулю.

$$\Delta_{MM_i^*} = \sum \int \frac{M\bar{M}_i^*}{EI} ds = 0.$$

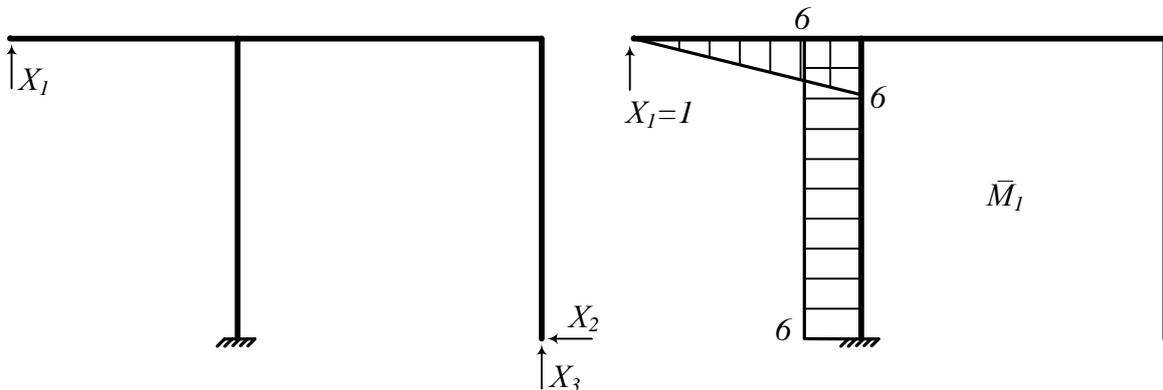


Рисунок 3.13 – Основна система та одинична еюра моментів методу сил

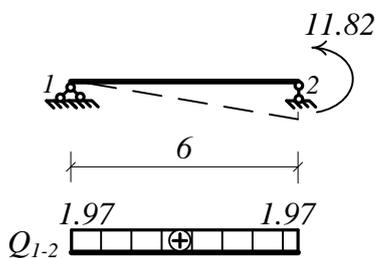
$$\Delta_{MM_i^*} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 11.82 + \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{100.35 - 118.07}{2} \right) = \frac{0.08}{EI}.$$

### 3.6 Побудова еюри поперечних сил $Q$

Розрахункову еюру поперечних сил будують за допомогою еюри моментів із використанням залежності

$$Q = Q^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l}.$$

*Ділянка 1-2*



$$Q_{1-2} = \frac{11.82}{8} = 1.97 \text{ кН}.$$

Рисунок 3.14

**Ділянка 2-3**

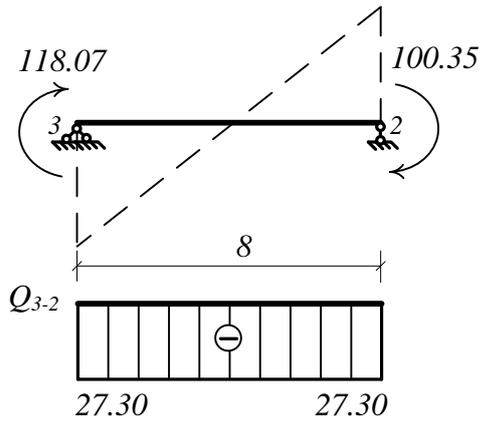


Рисунок 3.15

$$Q_{3-2} = \frac{-100.35 - 118.07}{8} = -27.30 \text{ кН}.$$

**Ділянка 2-4**

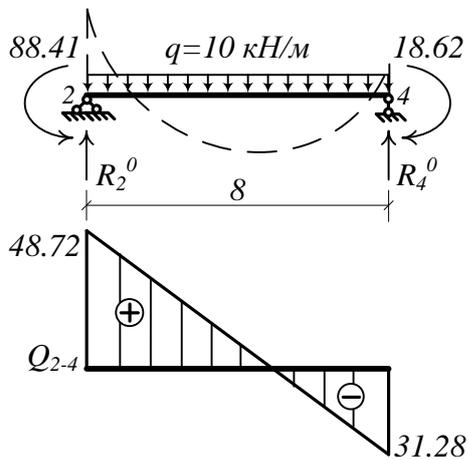


Рисунок 3.16

Визначаємо балочні реакції:

$$R_2^0 = R_4^0 = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40 \text{ кН}.$$

Обчислюємо поперечні сили в точках 2 і 4:

$$Q_2^0 = R_2^0 = 40 \text{ кН}, \quad Q_4^0 = -R_4^0 = -40 \text{ кН},$$

$$Q_2 = 40 + \frac{-18.62 - 88.41}{8} = 48.72 \text{ кН},$$

$$Q_4 = -40 + \frac{-18.62 - 88.41}{8} = -31.28 \text{ кН}.$$

**Ділянка 6-4**

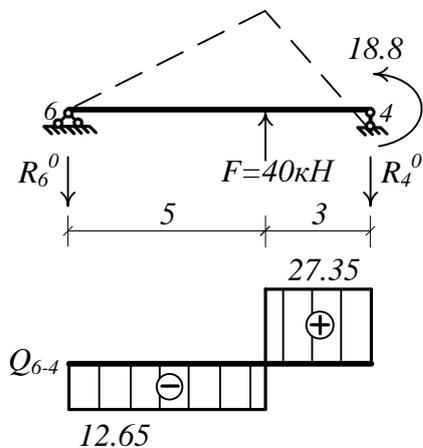


Рисунок 3.17

Визначаємо балочні реакції:

$$\sum M_6 = 0: R_4^0 = \frac{40 \cdot 5}{8} = 25 \text{ кН},$$

$$\sum M_4 = 0: R_6^0 = \frac{40 \cdot 3}{8} = 15 \text{ кН}.$$

Обчислюємо поперечні сили в точках 6 і 4:

$$Q_6^0 = R_6^0 = -15 \text{ кН},$$

$$Q_4^0 = R_4^0 = 25 \text{ кН},$$

$$Q_6 = -15 + \frac{18.8}{8} = -12.65 \text{ кН}, \quad Q_4 = 25 + \frac{18.8}{8} = 27.35 \text{ кН}.$$

Остаточна еюра поперечних сил наведена на рисунку 3.18.

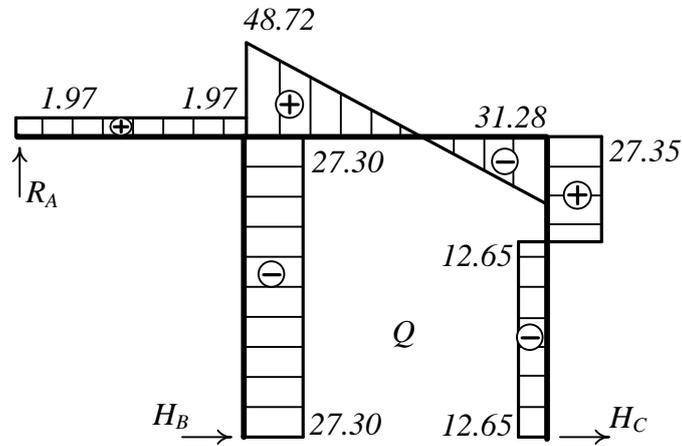
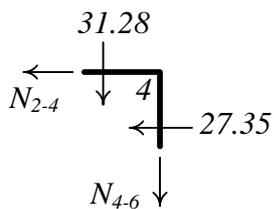


Рисунок 3.18 – Остаточна еюра поперечних сил

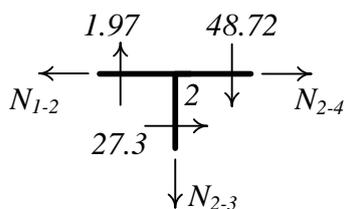
### 3.7 Побудова еюри поздовжніх сил $N$

Еюру поздовжніх сил  $N$  будують на підставі еюри  $Q$  вирізанням вузлів і з розгляданням їхньої рівноваги (рисунок 3.19).



$$\sum X = 0: -N_{2-4} - 27.35 = 0, \quad N_{2-4} = -27.35 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0: -N_{4-6} - 31.28 = 0, \quad N_{4-6} = -31.28 \text{ кН}.$$



$$\sum X = 0: -N_{1-2} + 27.3 + N_{2-4} = 0, \quad N_{1-2} = 0,$$

$$\sum Y = 0: -N_{2-3} - 48.72 + 1.97 = 0,$$

$$N_{2-3} = -46.75 \text{ кН}.$$

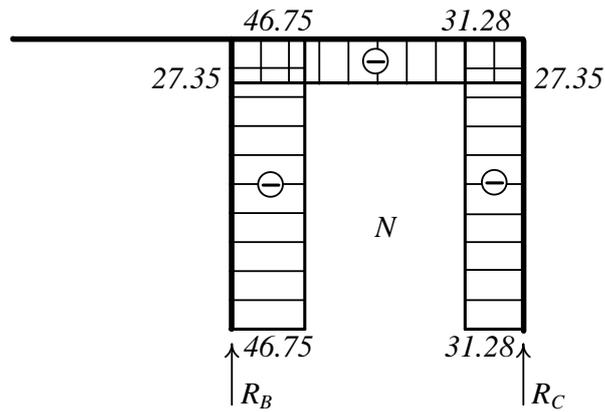


Рисунок 3.19 – Остаточна епюра поздовжніх сил

Виконуємо статичну перевірку рівноваги заданої системи (рисунок 3.20). Величини та напрямки реакцій приймаємо з епюр  $Q$  і  $N$ .

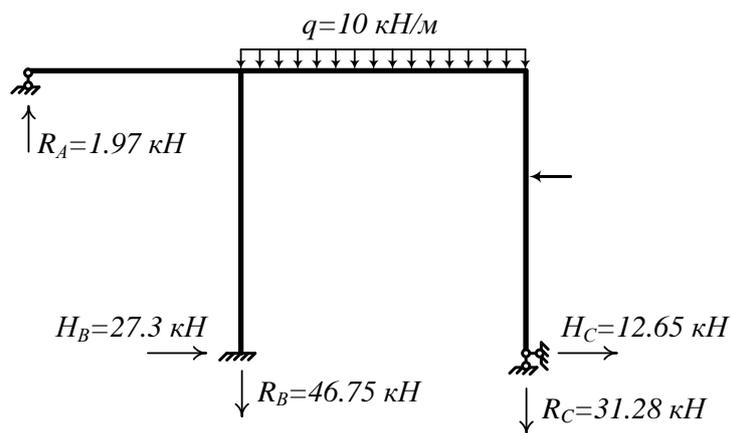


Рисунок 3.20 – Перевірка рівноваги системи

$$\sum X = 0: 27.3 + 12.65 - 40 = 0, \quad 40.5 - 40 \approx 0,$$

$$\sum Y = 0: 1.97 - 10 \cdot 8 + 46.75 + 31.28 = 0, \quad 80 - 80 = 0.$$

Оскільки рівняння виконані, система знаходиться в рівновазі.

## Тестові запитання для самоконтролю

- 1 Коли розрахунок статично невизначних стрижневих систем вважають таким, що проведений за методом переміщень?
- 2 Які величини беруть як невідомі в методі переміщень?
- 3 Чому дорівнює ступінь кінематичної невизначності для заданої системи?
- 4 Яка з основних систем методу переміщень для наведеної статично невизначної рами є правильною?
- 5 Чому рівняння для визначення невідомих у методі переміщень називають канонічними?
- 6 Як найпростіше обчислити значення коефіцієнтів канонічних рівнянь за методом переміщень?
- 7 Перерахуйте правильні вирази для обчислення коефіцієнтів канонічних рівнянь методу переміщень.
- 8 На підставі якої теореми встановлюють взаємність коефіцієнтів канонічних рівнянь у методі переміщень?
- 9 Як можна побудувати в основній системі за методом переміщень епюри згинальних моментів від одиничних значень невідомих і заданого навантаження?
- 10 Про що свідчить рівновага вузлів епюри згинальних моментів у рамі, отриманій у результаті розрахунку системи за методом переміщень?
- 11 Яка перевірка епюри згинальних моментів у рамі є найбільш повною?
- 12 Який підхід можливий у методі переміщень для побудови епюри поперечних сил?
- 13 Який вигляд має канонічне рівняння для розрахунку системи з одним ступенем кінематичної невизначності на дію температури?

14 Що можна сказати про внутрішні сили для розрахунку системи методом переміщень на дію температури?

15 Який вигляд має канонічне рівняння для розрахунку системи з одним ступенем кінематичної невизначеності на задані переміщення опор?

16 Що можна сказати про невідомі методу переміщень для розрахунку системи на задані переміщення опор?

17 Що можна сказати про внутрішні сили для розрахунку системи методом переміщень на задані переміщення опор?

18 Що треба прикласти в одиничному стані для визначення лінійного переміщення за методом Мора?

19 Що означає від'ємне значення переміщення, отриманого за формулою Мора?

20 Як треба брати ординату для обчислення інтеграла Мора із застосуванням правила Верещагіна?

21 Коли остаточна епюра моментів побудована правильно?

22 Коли остаточна епюра поперечних сил побудована правильно?

## 4 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧНОЇ ФЕРМИ

**Завдання 4.** Розрахувати статично визначну ферму (рисунок 4.1) від дії рухомого і нерухомого навантаження. Визначити зусилля в стрижнях і побудувати лінії впливу.

*План розв'язання*

1 Визначити зусилля в позначених стрижнях від нерухомого навантаження.

2 У позначених стрижнях побудувати лінії впливу.

3 Визначити зусилля по лініях впливу від нерухомого навантаження.

4 Порівняти величини зусиль, що визначені по лініях впливу, з отриманими для аналітичного розрахунку.

### 4.1 Розрахунок ферми на нерухоме навантаження

Розглянемо ферму, завантажену системою зосереджених сил.

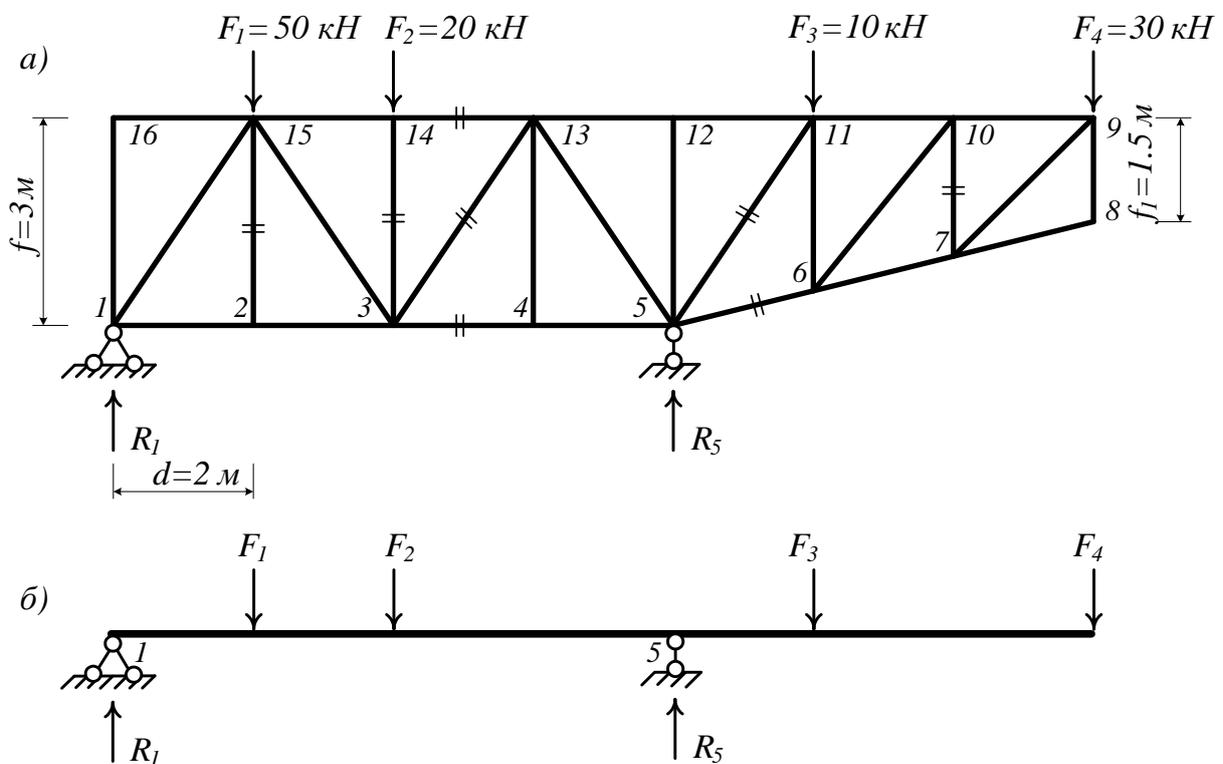


Рисунок 4.1 – Розрахункова схема ферми

Визначаємо опорні реакції, що виникають від дії зовнішнього навантаження. Слід зазначити, що вертикальні реакції у фермі від зовнішнього навантаження визначають так само як і в балці того самого прогону (рисунок 4.1, б). Складемо рівняння моментів відносно опор (точки 1 і 5):

$$\sum M_1 = 0: -F_1 \cdot d - F_2 \cdot 2d + R_5 \cdot 4d - F_3 \cdot 5d - F_4 \cdot 7d = 0,$$

$$R_5 = \frac{F_1 \cdot d + F_2 \cdot 2d + F_3 \cdot 5d + F_4 \cdot 7d}{4d} = \frac{50 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 30 \cdot 7}{4} = 87.5 \text{ кН}.$$

$$\sum M_5 = 0: F_1 \cdot 3d + F_2 \cdot 2d - R_1 \cdot 4d - F_3 \cdot d - F_4 \cdot 3d = 0,$$

$$R_1 = \frac{F_1 \cdot 3d + F_2 \cdot 2d - F_3 \cdot d - F_4 \cdot 3d}{4d} = \frac{50 \cdot 3 + 20 \cdot 2 - 10 - 30 \cdot 3}{4} = 22.5 \text{ кН}.$$

Перевіряємо правильність визначення реакцій. Складемо суму проєкцій сил на вісь  $Y$ :

$$\sum Y = 0: R_1 - F_1 - F_2 + R_5 - F_3 - F_4 = 0,$$

$$87.5 - 50 - 20 + 22.5 - 10 - 30 = 0, \quad 110 - 110 = 0.$$

Перевірка виконана, тобто реакції визначено правильно.

Загальний спосіб визначення зусиль у фермі полягає в тому, щоб розрізанням її на частини отримати кілька незалежних один від одного рівнянь статки.

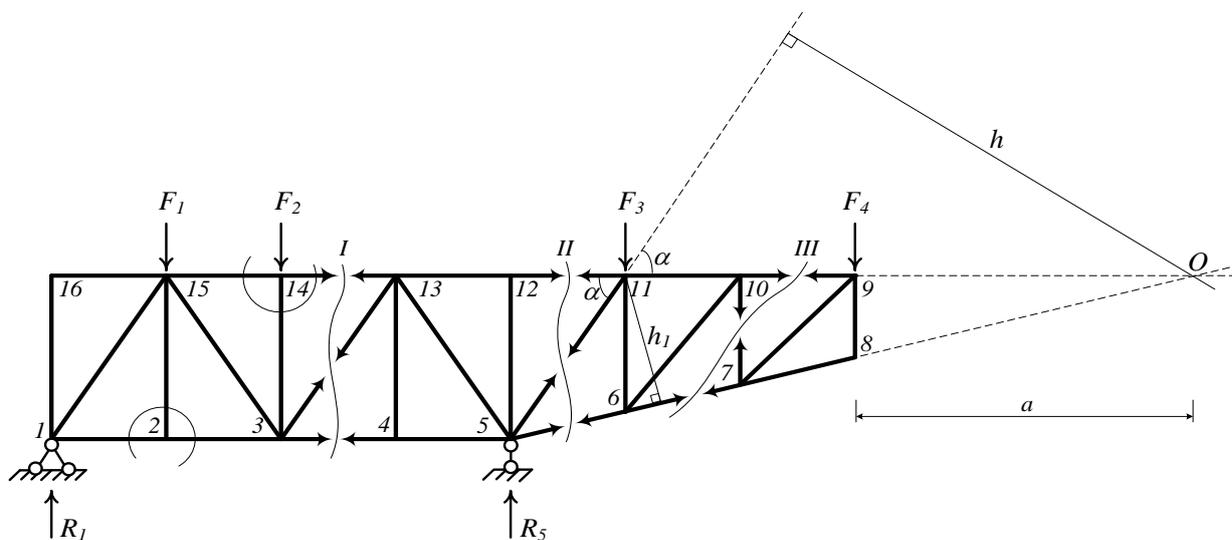


Рисунок 4.2 – Схема розрізання

Одним із найпростіших способів отримання рівнянь є проведення таких розрізів (рисунок 4.2), кожен із яких відсікає від ферми по одному вузлу (спосіб вирізання вузлів).

### Стрижень $N_{2-15}$

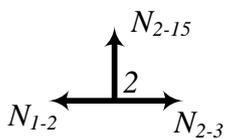


Рисунок 4.3

Щоб визначити зусилля в стрижні  $N_{2-15}$ , вирізаємо вузол 2. Задаємося додатним напрямком зусиль. Припустимо, що вони спрямовані від вузла, тобто розтягнуті. Складаємо рівняння:

$$\sum Y = 0: N_{2-15} = 0.$$

### Стрижень $N_{14-3}$

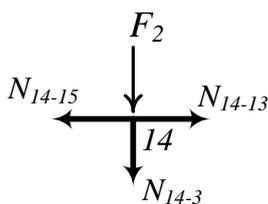


Рисунок 4.4

Щоб визначити зусилля в стрижні  $N_{14-3}$ , вирізаємо вузол 14 і складаємо рівняння:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0: -N_{14-3} - F_2 &= 0, \\ N_{14-3} &= -F_2 = -50 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Спосіб вирізання вузлів використовують зазвичай у вузлах, де сходяться два стрижні, або вузлах, у яких стрижні сходяться під прямим кутом.

Розглянемо такий спосіб визначення зусиль у стрижнях ферми – спосіб моментної точки.

### Стрижні $N_{3-4}$ , $N_{14-13}$ , $N_{3-13}$

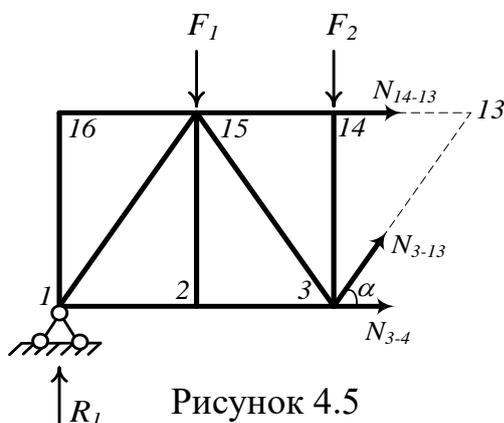


Рисунок 4.5

Щоб визначити зусилля в стрижнях  $N_{3-4}$ ,  $N_{14-13}$ ,  $N_{3-13}$ , необхідно розрізати їх і розглянути рівновагу або правої, або лівої частини ферми. Розсічені стрижні замінюємо зусиллями і спрямовуємо їх до перерізу. Знайдемо зусилля в стрижні  $N_{3-4}$ .

Для вибору рівняння рівноваги розглянемо всі три випадки:

$$\sum Y = 0, \sum X = 0, \sum M = 0.$$

У разі проєкції всіх сил на вісь  $Y$  стрижень  $N_{3-4}$  проєктований у точку. Складемо рівняння сил відносно осі  $X$ :  $\sum X = 0: N_{3-4} + N_{3-13} \cdot \cos \alpha + N_{14-13} = 0$ . У такий спосіб отримали рівняння з трьома невідомими.

Залишається рівняння моментів. Визначаємо моментну точку, відносно якої будемо записувати рівняння рівноваги. Зазначимо, що моментна точка знаходиться на перехрещенні лінії дії двох інших розсічених стрижнів ( $N_{14-13}$  та  $N_{3-13}$ ) – це точка  $I3$ .

$$\begin{aligned} \sum M_{13}^{\text{лев.сил}} &= 0: N_{3-4} \cdot 3 + F_2 \cdot 2 + F_1 \cdot 4 - R_1 \cdot 6 = 0, \\ N_{3-4} &= \frac{R_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 2 - F_1 \cdot 4}{3} = \frac{22.5 \cdot 6 - 20 \cdot 2 - 50 \cdot 4}{3} = -35 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Визначимо зусилля в стрижні  $N_{14-13}$ . Запишемо рівняння моментів відносно точки  $3$  (точка перерізу стрижнів  $N_{3-4}$  і  $N_{3-13}$ ).

$$\begin{aligned} \sum M_3^{\text{лев.сил}} &= 0: -N_{14-13} \cdot 3 + F_1 \cdot 2 - R_1 \cdot 4 = 0, \\ N_{14-13} &= \frac{F_1 \cdot 2 - R_1 \cdot 4}{3} = \frac{50 \cdot 2 - 22.5 \cdot 4}{3} = 3.33 \text{ кН}. \end{aligned}$$

За такого способу визначення зусиль у перерізі може бути і більше трьох стрижнів із невідомими зусиллями, якщо всі невідомі, крім одного, перехрещуються в одній точці.

Розглянемо ще один окремий випадок визначення зусиль, коли з трьох стрижнів два паралельні один одному (*спосіб проєкцій*). Оскільки стрижні  $N_{14-13}$  і  $N_{3-4}$  паралельні один одному, тобто не мають точки перерізу, то зусилля в стрижні  $N_{3-13}$  визначимо, записавши рівняння рівноваги відносно осі  $Y$ :

$$\sum Y^{\text{лев.сил}} = 0: N_{3-13} \cdot \sin \alpha - F_2 - F_1 + R_1 = 0, \quad \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0.832,$$



Щоб визначити зусилля в стрижні  $N_{5-11}$ , необхідно знайти точку перерізу стрижнів  $N_{5-6}$  і  $N_{11-12}$  – точка  $O$ . З цієї точки до лінії дії стрижня  $N_{5-11}$  відновлюємо перпендикуляр  $h$ .

Величину  $a$  (відстань до точки  $O$ ) визначаємо з подібності трикутників  $9-O-8$  і  $10-O-7$ ,  $a=6$  м. Величину  $h$  визначимо з трикутника  $11-C-O$ ,  $h=8.32$  м. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum M_O^{np.cul} = 0: N_{11-5} \cdot h + F_3 \cdot 10 + F_4 \cdot 6 = 0,$$

$$N_{11-5} = \frac{-F_3 \cdot 10 - F_4 \cdot 6}{h} = \frac{-10 \cdot 10 - 30 \cdot 6}{8.32} = -33.65 \text{ кН.}$$

### Стрижень $N_{10-7}$

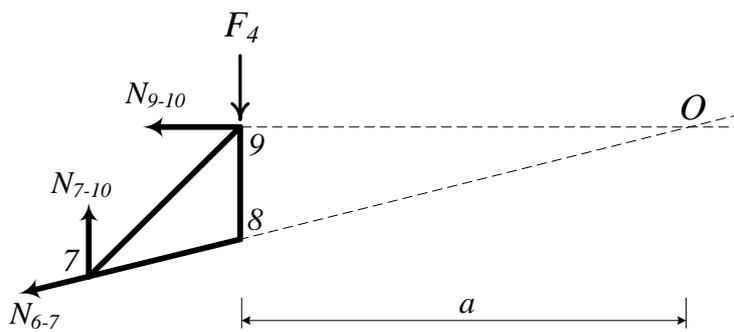


Рисунок 4.7

Складаємо рівняння рівноваги моментів відносно точки  $O$ :

$$\sum M_O^{np.cul} = 0:$$

$$-N_{7-10} \cdot 8 + F_4 \cdot 6 = 0,$$

$$N_{7-10} = \frac{F_4 \cdot 6}{8} = \frac{30 \cdot 6}{8} = 22.5 \text{ кН.}$$

## 4.2 Розрахунок ферми на рухоме навантаження

Для заданих стрижнів побудуємо лінії впливу від одиничного зосередженого рухомого вантажу.

Будуємо лінії впливу реакцій. Вантаж перебуває на ділянці  $16-12$ . Початок координат приймаємо в точці  $1$ . Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum M_5 = 0: -R_1 \cdot 8 + F \cdot (8-x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 8,$$

$$R_1 = \frac{F \cdot (8-x)}{8} = \begin{cases} x=0, & R_1 = \frac{1 \cdot 8}{8} = 1; \\ x=8, & R_1 = 0. \end{cases}$$

Проводимо базову лінію, під точкою  $I$  відкладаємо ординату, яка дорівнює  $l$ , під точкою  $5 - 0$  і ці дві ординати з'єднуємо прямою лінією через усю довжину ферми (рисунок 4.8, *а*).

Аналогічно будуємо лінію впливу другої реакції (рисунок 4.8, *б*).

$$\sum M_1 = 0: R_5 \cdot 8 - F \cdot x = 0, \quad 0 \leq x \leq 8,$$

$$R_5 = \frac{F \cdot x}{8} = \begin{cases} x=0, & R_1 = \frac{1 \cdot 0}{8} = 0; \\ x=8, & R_1 = 1. \end{cases}$$

Для побудови ліній впливу зусиль у фермах розглядаємо рівновагу вузлів і частин ферми. Рухоме навантаження прикладаємо до вантажного поясу.

За допомогою способу перерізів записуємо рівняння рівноваги відсіченої частини ферми в разі положення рухомого одиничного вантажу ліворуч і праворуч від розсіченої панелі (панель між найближчими від проведеного перерізу вузлами поясу, по якому рухається вантаж). У результаті отримуємо рівняння правої і лівої прямої лінії впливу. У межах розсіченої панелі прямі з'єднуємо перехідною прямою.

### **Стрижень $N_{13-14}$**

*Вантаж зліва від перерізу* (вантаж перебуває на ділянці  $16-14$ ). Моментна точка – точка  $3$ . Розсічена панель –  $14 - 13$ . Розглядаємо рівновагу правої від перерізу частини ферми:

$$\sum M_3^{np.cul} = 0: N_{14-13} \cdot 3 + R_5 \cdot 4 = 0,$$

$$N_{14-13} = \frac{-R_5 \cdot 4}{3}, \quad лвN_{14-13} = лвR_5 \cdot (-1.33)$$

Лінія впливу зусилля  $N_{14-13}$  дорівнює лінії впливу реакції  $R_5$ , усі ординати якої помножені на число  $-1.33$ . На базовій лінії пунктиром проводимо отриману лінію впливу і виділяємо на ній ділянку, де зараз знаходиться вантаж (від точки  $16$  до точки  $14$ ) (рисунок 4.8, *в*).

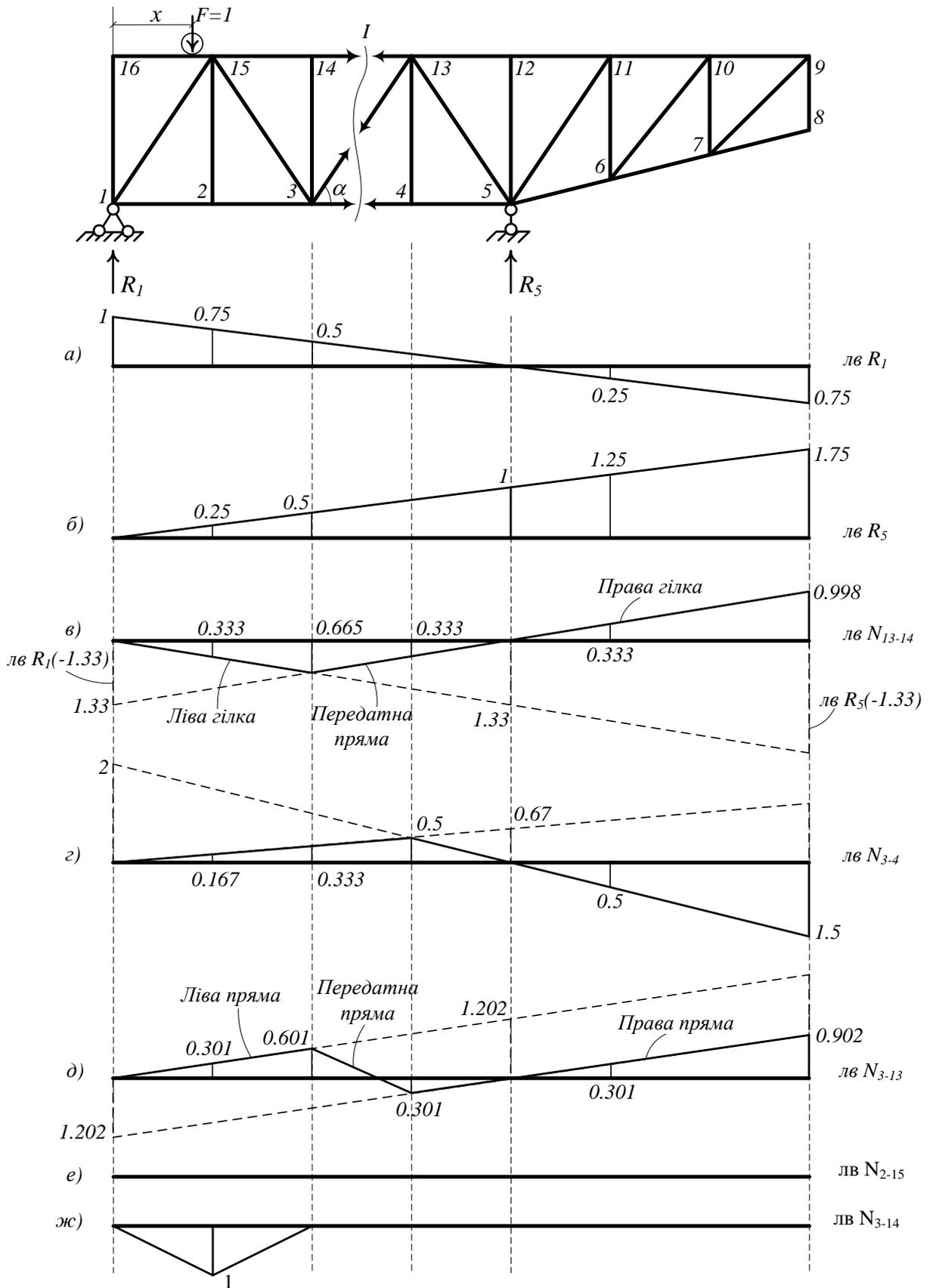


Рисунок 4.8 – Лінії впливу

*Вантаж праворуч від перерізу* (вантаж перебуває на ділянці 13-9).  
 Моментна точка – точка 3. Розсічена панель – 14 - 13. Розглядаємо рівновагу лівої від перерізу частини ферми:

$$\sum M_3^{лев.сил} = 0: -N_{14-13} \cdot 3 - R_1 \cdot 4 = 0,$$

$$N_{14-13} = \frac{-R_1 \cdot 4}{3}, \quad лвN_{14-13} = лвR_1 \cdot (-1.33).$$

Пунктиром проводимо лінію впливу  $R_1$ , усі ординати якої помножені на число  $-1.33$ , і на цій лінії виділяємо ділянку, де зараз знаходиться вантаж (від точки 13 до точки 9) (рисунок 4.8, в). Дві отримані прямі лінії впливу з'єднуємо між собою перехідною прямою.

### ***Стрижень $N_{3-4}$***

*Вантаж зліва від перерізу* (вантаж перебуває на ділянці 16-14).  
 Моментна точка – точка 13. Розсічена панель – 14 - 13. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum M_{13}^{пр.сил} = 0: -N_{3-4} \cdot 3 + R_5 \cdot 2 = 0,$$

$$N_{3-4} = \frac{R_5 \cdot 2}{3}, \quad лвN_{3-4} = лвR_5 \cdot 0.667.$$

Пунктиром проводимо лінію впливу  $R_5$ , усі ординати якої помножені на число  $0.667$ , і виділяємо на ній ділянку, де зараз знаходиться вантаж (від точки 16 до точки 14) (рисунок 4.8, г).

*Вантаж праворуч від перерізу* (вантаж перебуває на ділянці 13 - 9).  
 Моментна точка – точка 13. Розсічена панель 14 - 13. Розглядаємо рівновагу лівої частини ферми:

$$\sum M_{13}^{лев.сил} = 0: N_{3-4} \cdot 3 - R_1 \cdot 6 = 0,$$

$$N_{3-4} = \frac{-R_1 \cdot 6}{3}, \quad лвN_{3-4} = лвR_1 \cdot 2.$$

Пунктиром проводимо лінію впливу  $R_1$ , усі ординати якої помножені на число 2, і на цій лінії виділяємо ділянку, де зараз знаходиться вантаж (від точки 13 до точки 9) (рисунок 4.8, з).

### **Стрижень $N_{3-13}$**

*Вантаж зліва від перерізу* (вантаж перебуває на ділянці 16 - 14). Розсічена панель 14 - 13. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum Y^{np.cил} = 0: -N_{3-13} \cdot \sin \alpha + R_5 = 0, \quad \sin \alpha = 0.832,$$

$$N_{3-13} = \frac{R_5}{0.832}, \quad лвN_{14-13} = лвR_5 \cdot 1.202.$$

Пунктиром проводимо лінію впливу і виділяємо на ній ділянку, де зараз знаходиться вантаж (рисунок 4.8, д).

*Вантаж праворуч від перерізу* (вантаж перебуває на ділянці 13 - 9). Розсічена панель 14 - 13. Розглядаємо рівновагу лівої частини ферми:

$$\sum Y^{лев.cил} = 0: N_{3-13} \cdot \sin \alpha + R_1 = 0,$$

$$N_{3-13} = \frac{-R_1}{\sin \alpha}, \quad лвN_{3-13} = лвR_1 \cdot (-1.202).$$

Пунктиром проводимо лінію впливу і виділяємо ділянку, де зараз знаходиться вантаж (рисунок 4.8, д).

За допомогою способу вирізання вузлів розглядаємо рівновагу вирізаного вузла в разі положення вантажу у вузлі і поза вузлом. Отримані ординати лінії впливу з'єднуємо прямими лініями.

### **Стрижень $N_{2-15}$**

Лінію впливу цього стрижня будемо, використовуючи метод вирізання вузлів. Вирізаємо вузол 2 і розглядаємо положення вантажу у вузлі і поза вузлом. Оскільки вантажним є верхній пояс ферми, то за будь-якого положення рухомого вантажу зусилля в стрижні дорівнює нулю, тобто лінія впливу має нульові ординати (рисунок 4.8, е).

### **Стрижень $N_{2-14}$**

Вирізаємо вузол 14.

Вантаж у вузлі (точка 14):

$$\sum Y = 0: -N_{2-14} - 1 = 0, \quad N_{2-14} = -1.$$

Вантаж поза вузлом (вантаж на ділянках 16 - 15, 13 - 9):

$$\sum Y = 0: N_{2-14} = 0.$$

На базовій лінії відкладаємо значення ординат і з'єднуємо їх прямою лінією (рисунок 4.8, ж).

Тепер розглянемо, як побудовані лінії впливу для консольної частини ферми. За будь-якого положення рухомого вантажу завжди розглядають рівновагу консольної частини споруди.

### **Стрижень $N_{5-11}$**

Вантаж зліва від перерізу (вантаж на ділянці 16 - 12). Моментна точка – точка  $O$ . Розсічена панель 11 - 12. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum M_O^{np.cил} = 0: N_{5-11} \cdot h = 0, \quad h = 8.32 м, \quad N_{5-11} = 0.$$

Лінія впливу на ділянці 16 - 12 має ординати, що дорівнюють нулю (рисунок 4.9, а).

Вантаж праворуч від перерізу (вантаж на ділянці 11 - 9). Моментна точка – точка  $O$ . Розсічена панель 11 - 12. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum M_O^{np.cил} = 0: N_{5-11} \cdot h + 1 \cdot x = 0, \quad N_{5-11} = \frac{-1 \cdot x}{h}.$$

Розглянемо положення вантажу в характерних точках.

$$\text{Вантаж у точці 11: } x = 10 м, \quad N_{5-11} = \frac{-1 \cdot 10}{8.32} = -1.202.$$

Вантаж у точці 9:  $x = 6\text{ м}$ ,  $N_{5-11} = \frac{-1 \cdot 6}{8.32} = -0.721$ .

На базовій лінії відкладаємо значення ординат і з'єднуємо їх прямою лінією (рисунок 4.9, а).

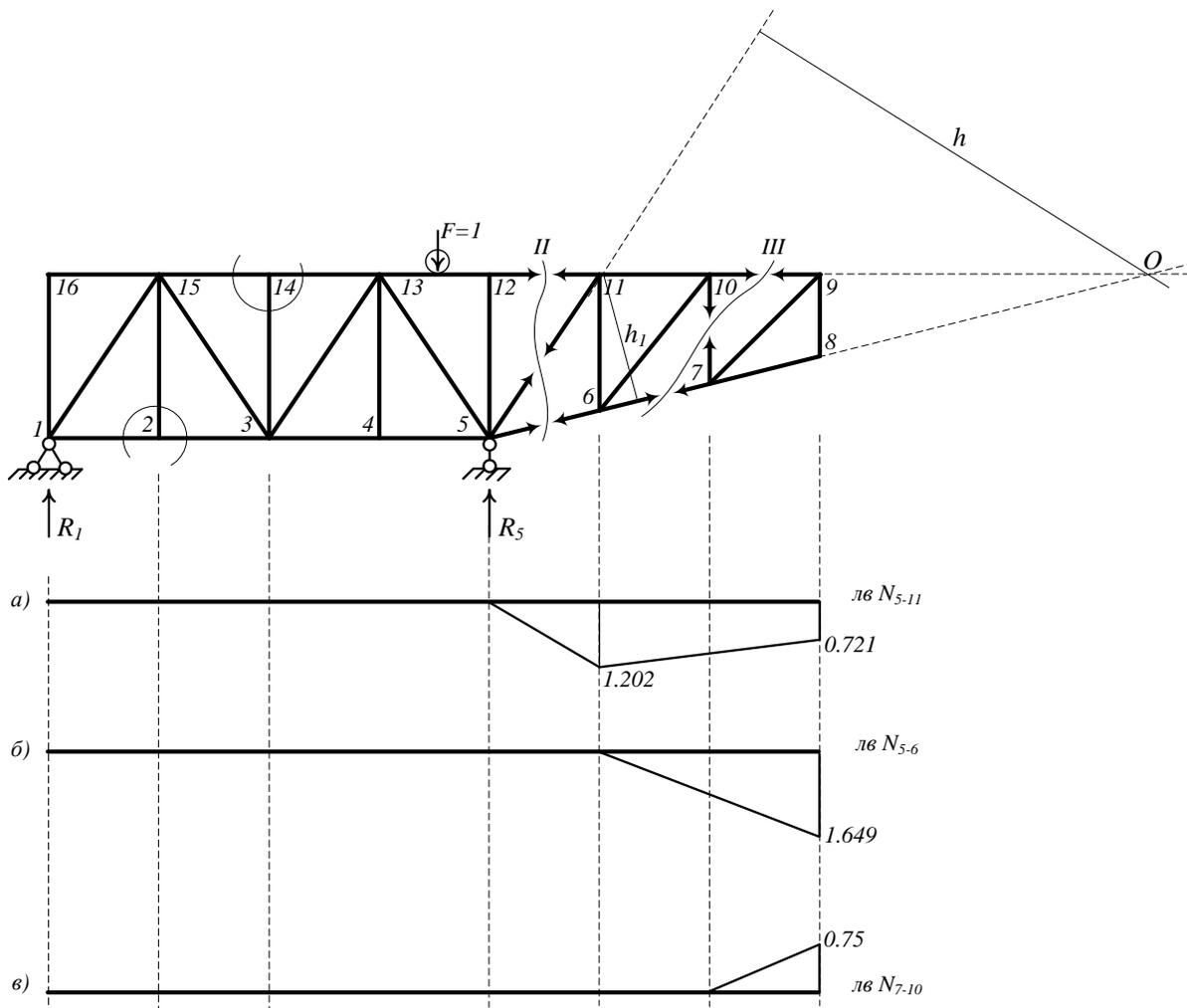


Рисунок 4.9 – Лінії впливу

### Стрижень $N_{5-6}$

Вантаж зліва від перерізу (вантаж на ділянці 16 - 12). Моментна точка – точка 11. Розсічена панель 11 - 12. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum M_O^{np.cul} = 0: N_{5-6} \cdot h_1 = 0, \quad h_1 = 2.425 \text{ м}, \quad N_{5-6} = 0.$$

Лінія впливу на ділянці 16 - 12 має ординати, що дорівнюють нулю (рисунок 4.9, б).

*Вантаж праворуч від перерізу* (вантаж на ділянці 11 - 9). Моментна точка – точка 11. Розсічена панель 11 - 12. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum M_O^{np.cul} = 0: -N_{5-6} \cdot h_1 - 1 \cdot x_1 = 0, \quad N_{5-6} = \frac{-1 \cdot x_1}{h_1}.$$

Розглянемо положення вантажу в характерних точках.

$$\text{Вантаж у точці 11: } x = 0, \quad N_{5-6} = \frac{-1 \cdot 0}{2.425} = 0.$$

$$\text{Вантаж у точці 9: } x = 4\text{м}, \quad N_{5-6} = \frac{-1 \cdot 4}{2.425} = -1.649.$$

На базовій лінії відкладаємо значення ординат і з'єднуємо їх прямою лінією (рисунок 4.9, б).

#### **Стрижень $N_{7-10}$**

*Вантаж зліва від перерізу* (вантаж на ділянці 16 - 10). Розсічена панель 10 - 9. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum M_O^{np.cul} = 0: -N_{7-10} \cdot (a + d) = 0, \quad N_{7-10} = 0.$$

Лінія впливу на ділянці 16 - 10 має ординати, що дорівнюють нулю (рисунок 4.9, в).

*Вантаж праворуч від перерізу* (вантаж знаходиться в точці 9). Моментна точка – точка O. Розсічена панель 10 - 9. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum M_O^{np.cul} = 0: -N_{7-10} \cdot (a + d) + 1 \cdot a = 0,$$

$$N_{5-6} = \frac{1 \cdot a}{a + d} = \frac{6}{6 + 2} = 0.75.$$

На базовій лінії відкладаємо значення ординат і з'єднуємо їх прямою лінією (рисунок 4.9, в).

### 4.3 Визначення внутрішніх зусиль у стрижнях ферми по лініях впливу

Внутрішні зусилля в стрижнях ферми по лініях впливу визначають за формулою

$$N = \pm \sum F_i y_i ,$$

де  $F_i$  – величина зовнішнього навантаження;

$y_i$  – значення ординат ліній впливу під заданими силами.

У формулі силу приймають зі знаком плюс, якщо вона спрямована зверху вниз. Знак ординати приймаємо по лінії впливу. Ординати, розташовані над базовою лінією, вважають додатними, під базовою лінією – від’ємними.

$$R_1 = 50 \cdot 0.75 + 20 \cdot 0.5 + 10 \cdot (-0.25) + 30 \cdot (-0.75) = 22.5 \text{ кН} .$$

$$R_5 = 50 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.5 + 10 \cdot 1.25 + 30 \cdot 1.75 = 87.5 \text{ кН} .$$

$$N_{13-14} = 50 \cdot (-0.333) + 20 \cdot (-0.665) + 10 \cdot 0.333 + 30 \cdot 0.998 = 3.32 \text{ кН} .$$

$$N_{3-4} = 50 \cdot 0.167 + 20 \cdot 0.333 + 10 \cdot (-0.5) + 30 \cdot (-1.5) = -34.99 \text{ кН} .$$

$$N_{3-13} = 50 \cdot 0.301 + 20 \cdot 0.601 + 10 \cdot 0.301 + 30 \cdot 0.902 = 57.14 \text{ кН} .$$

$$N_{5-11} = 10 \cdot (-1.202) + 30 \cdot (-0.721) = -33.65 \text{ кН} .$$

$$N_{5-6} = 30 \cdot (-1.649) = -49.47 \text{ кН} .$$

$$N_{7-10} = 30 \cdot 0.75 = 22.5 \text{ кН} .$$

$$N_{2-5} = (50 + 20 + 10 + 30) \cdot 0 = 0 .$$

$$N_{3-14} = 50 \cdot (-1) = -50 \text{ кН} .$$

### Тестові запитання для самоконтролю

- 1 Формула для визначення кількості ступенів свободи в плоских фермах.
- 2 Що називають фермою?

- 3 Як може діяти навантаження на ферму?
- 4 Як забезпечено вузлове передавання навантаження у фермах залізничних мостів?
- 5 Що таке прогін ферми?
- 6 Що таке панель ферми?
- 7 Що таке висота ферми?
- 8 Які стрижні ферми називають поясними?
- 9 Які стрижні ферми відносять до решітки?
- 10 Які типи решіток відносять до простих?
- 11 До якого типу решітки належить напіврозкісна решітка?
- 12 Який пояс ферми називають вантажним?
- 13 Чому реакції опор у фермі називають балочними?
- 14 Коли для визначення внутрішніх сил у фермі можна застосовувати спосіб вирізання вузла?
- 15 Коли для визначення внутрішніх сил у фермі можна застосовувати спосіб моментної точки?
- 16 Коли для визначення внутрішніх сил у фермі можна застосовувати спосіб проєкцій?
- 17 Вкажіть тип решітки, де застосовано способи складних і подвійних перерізів.
- 18 Що треба робити, щоб зменшити внутрішні сили в поясах ферми?
- 19 Що треба робити, щоб зменшити внутрішні сили в розкосах ферми з паралельними поясами?
- 20 Що називають шпренгелем?
- 21 Що дає застосування шпренгелів?
- 22 Які шпренгелі називають одноярусними?
- 23 Які шпренгелі називають двоярусними?
- 24 Скільки різновидів стрижнів має місце у фермах з одноярусними шпренгелями?

25 Який додатковий тип стрижнів має місце у фермах із двоярусними шпренгелями?

26 Як можна визначити внутрішню силу в стрижні ферми, який належить одночасно основній фермі і шпренгелю?

27 Як можна визначити внутрішню силу в стрижні ферми, який належить шпренгелю, у випадку, коли не можна скористатися методом перерізів?

28 Чому ординати ліній впливу внутрішніх сил у стрижнях ферми між її вузлами змінюються за лінійним законом?

29 Як побудувати лінію впливу в стрижнях ферми зі шпренгельною решіткою, коли стрижень належить основній фермі?

30 Як побудувати лінію впливу в стрижнях ферми зі шпренгельною решіткою, коли стрижень належить шпренгелю?

31 Як побудувати лінію впливу в стрижнях ферми, що неоднаково працюють із їздою по верхньому і нижньому поясах ферми?

32 Що таке стрижень ферми, який належить одночасно основній фермі і шпренгелю?

33 Що таке стрижень ферми, який належить основній фермі?

34 Що таке стрижень ферми, який належить шпренгелю?

35 Формула для визначення по лінії впливу величини поздовжньої сили від заданої системи зосереджених сил.

36 Які внутрішні зусилля виникають у перерізах стрижнів ферми за вузлового передавання навантаження?

37 Якої деформації зазнають стрижні ферми за вузлового передавання навантаження?

38 Як визначають зусилля у стрижнях ферми?

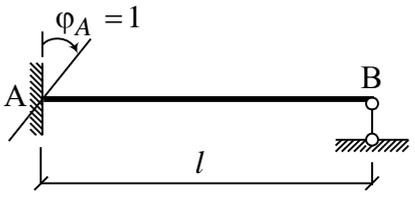
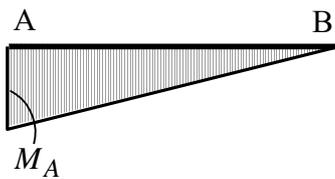
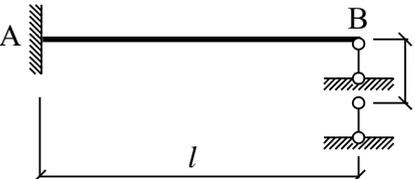
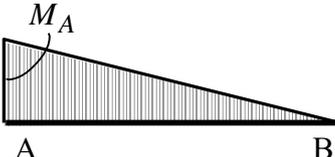
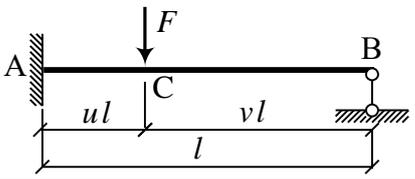
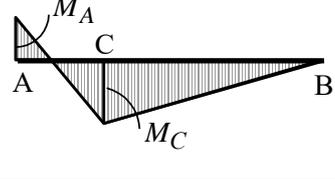
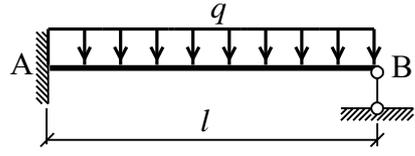
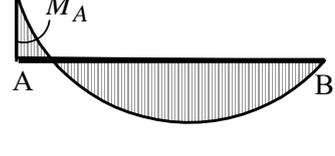
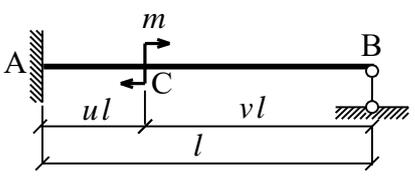
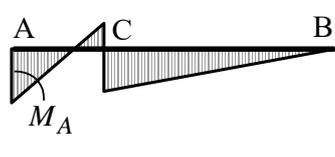
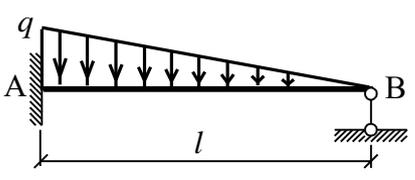
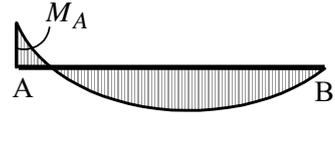
39 Формула для визначення кількості ступенів свободи в просторових фермах.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

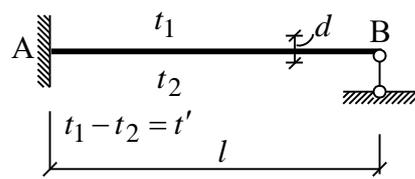
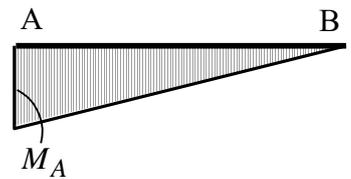
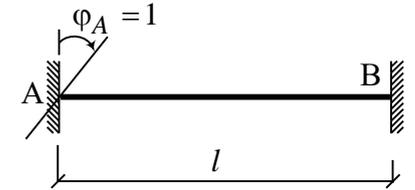
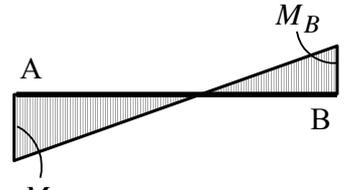
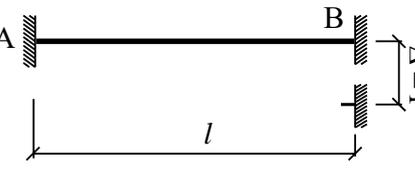
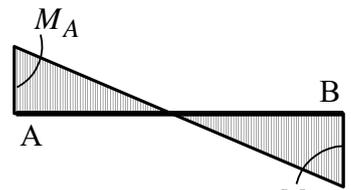
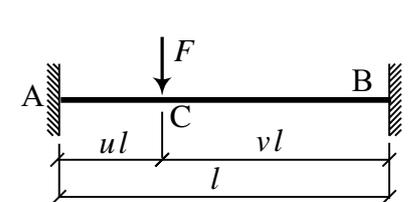
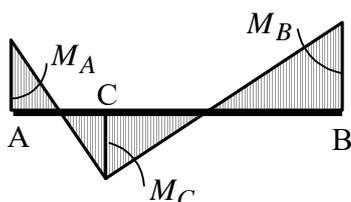
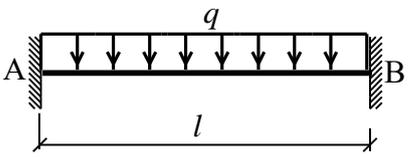
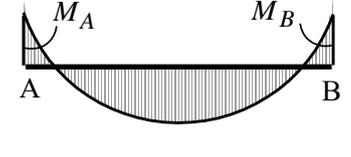
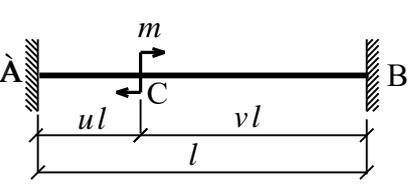
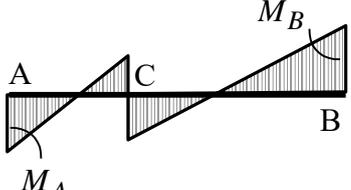
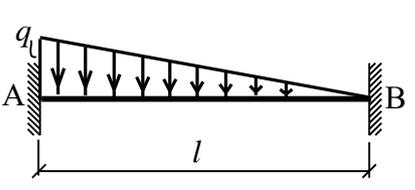
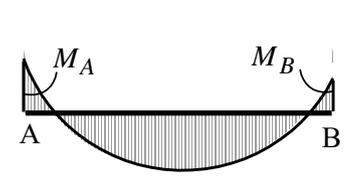
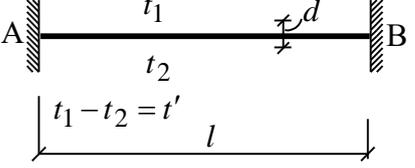
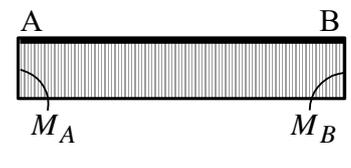
- 1 Перельман Є. Й. Будівельна механіка. Ч. 1: Основи теорії. Київ: Вища школа, 2016. 352 с.
- 2 Саврук М. П. Будівельна механіка: конспект лекцій. Львів: Видавництво НУ «ЛП», 2020. 180 с.
- 3 Сухоруков О. В. Будівельна механіка. Ч. 2: Системи з однією та кількома ступенями вільності. Київ: Арістей, 2018. 296 с.
- 4 Москаленко В. В. Теоретичні основи будівельної механіки. Харків: ХНУБА, 2019. 240 с.
- 5 Єсипенко В. А. Будівельна механіка. Теорія пружності і пластичності. Київ: КНУБА, 2014. 280 с.
- 6 Слуханов А. М. Будівельна механіка: Нелінійні задачі. Дніпро: НМетАУ, 2016. 198 с.
- 7 Батин І. П. Метод скінченних елементів у будівельній механіці. Харків: ХНУБА, 2019. 216 с.
- 8 Лабораторний практикум з опору матеріалів та будівельної механіки: навч. посіб. / Г. Л. Ватуля, Є. І. Галагура, І. В. Калашніков, Д. Г. Петренко. Вид. 2-ге. Харків: УкрДУЗТ, 2020. 249 с.
- 9 Студентська навчальна звітність. Текстова частина (пояснювальна записка). Загальні вимоги до побудови, викладення оформлення: метод. посіб. з держ. вимог нормоконтролю у студентській звітності. Харків: УкрДАЗТ, 2014. 54 с.

## ДОДАТОК А

### Таблиця стандартних рішень

Н о м е р	Схема стрижня і впливу на нього	Епюра моменту	Формула
1	2	3	4
1			$M_A = \frac{3EJ}{l}$
2			$M_A = \frac{3EJ}{l^2}$
3			$M_A = \frac{Fl}{2} v(1 - v^2)$ $M_C = \frac{Fl}{2} u^2 v(3 - u)$
4			$M_A = \frac{ql^2}{8}$
5			$M_A = \frac{m}{2} (3v^2 - 1)$
6			$M_A = \frac{ql^2}{15}$

Продовження додатку А

1	2	3	4
7			$M_A = \frac{3EJ\alpha t'}{2d}$
8			$M_A = \frac{4EJ}{l}$ $M_B = \frac{2EJ}{l}$
9			$M_A = M_B = \frac{6EJ}{l^2}$
10			$M_A = uv^2Fl$ $M_B = u^2vFl$ $M_C = 2u^2v^2Fl$
11			$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$
12			$M_A = mv(3u - 1)$ $M_B = mu(3v - 1)$
13			$M_A = \frac{ql^2}{20}$ $M_B = \frac{ql^2}{30}$
14			$M_A = M_B = \frac{EJ\alpha t'}{d}$

## ДОДАТОК Б

### Вихідні дані для розрахунково-графічних робіт

Завдання для розрахунково-проектувальної роботи 1

### РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧНОЇ БАГАТОПРОГОНОВОЇ БАЛКИ

Для заданого варіанта даних і розрахункової схеми балки (таблиця Б.1) потрібно:

а) намалювати в масштабі розрахункову схему балки і схему взаємодії її елементів (поверхову схему);

б) визначити всі опорні реакції багатопрогонової балки і за допомогою аналітичного методу побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів;

в) визначити всі опорні реакції багатопрогонової балки, побудувати лінії впливу їхніх значень, а для заданих перетинів (I і II) – лінії впливу поперечних сил і згинальних моментів;

г) завантажити побудовані лінії впливу заданим нерухомим навантаженням і визначити величини опорних реакцій у багатопрогоновій балці та зусилля в заданих перерізах. Результати порівняти з даними аналітичного розрахунку згідно з пунктом 2.

Таблиця Б.1 – Вихідні дані

Варіант	$F_1$	$F_2$	$q_1$	$q_2$	$M$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$
	кН		кН/м		кН	м			
1	80	120	20	30	40	32	24	28	40
2	100	80	15	20	50	36	28	32	24
3	60	100	20	25	60	24	32	28	20
4	80	60	15	30	80	40	36	32	32
5	50	80	20	30	40	28	24	28	36
6	90	60	15	25	50	20	24	32	20
7	120	90	25	20	60	28	20	32	24
8	60	80	10	15	30	36	28	20	32
9	50	90	20	10	40	20	28	24	32
10	120	60	20	30	50	24	28	20	32

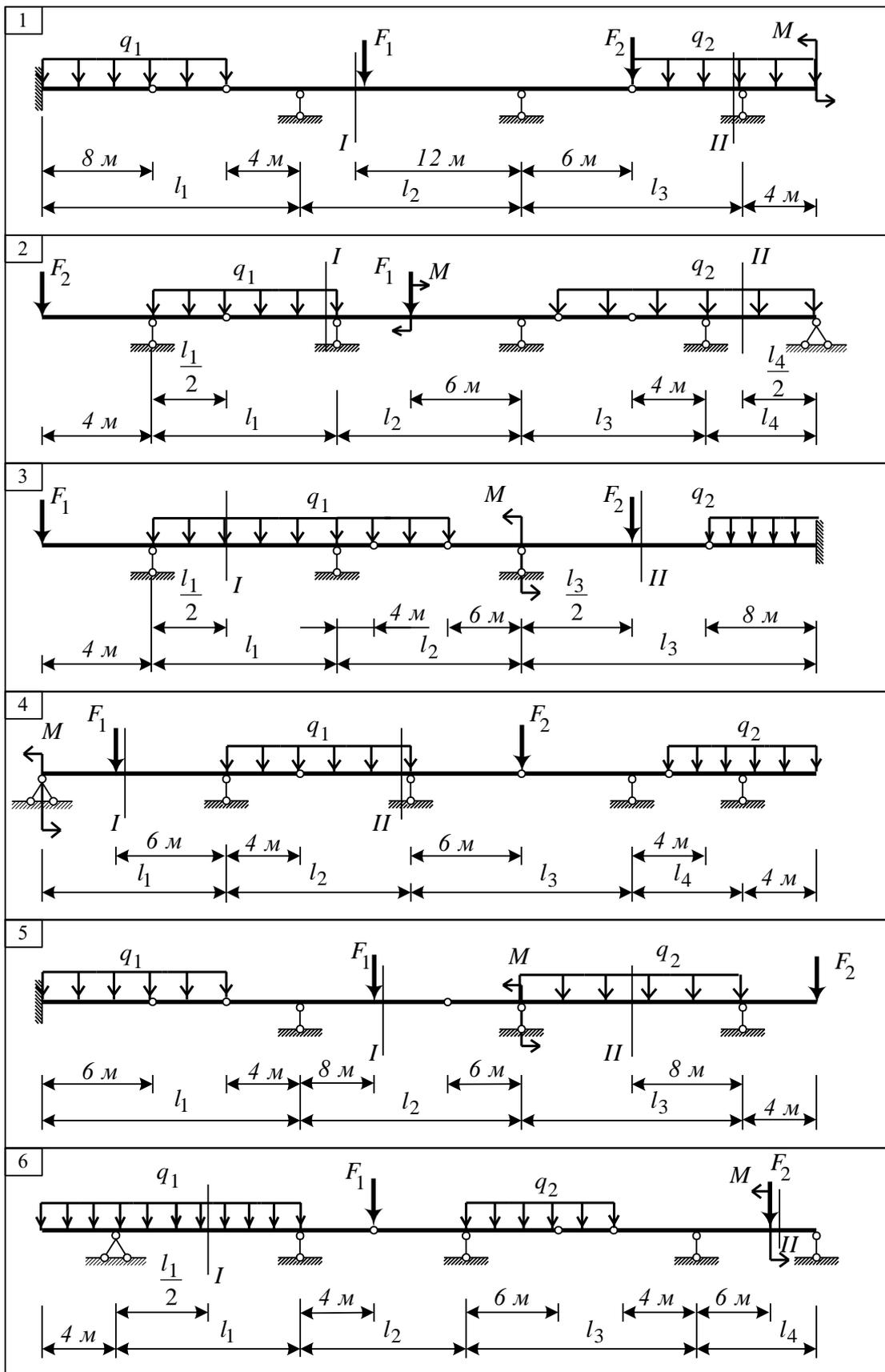


Рисунок Б.1 – Схеми багатопроговених балок

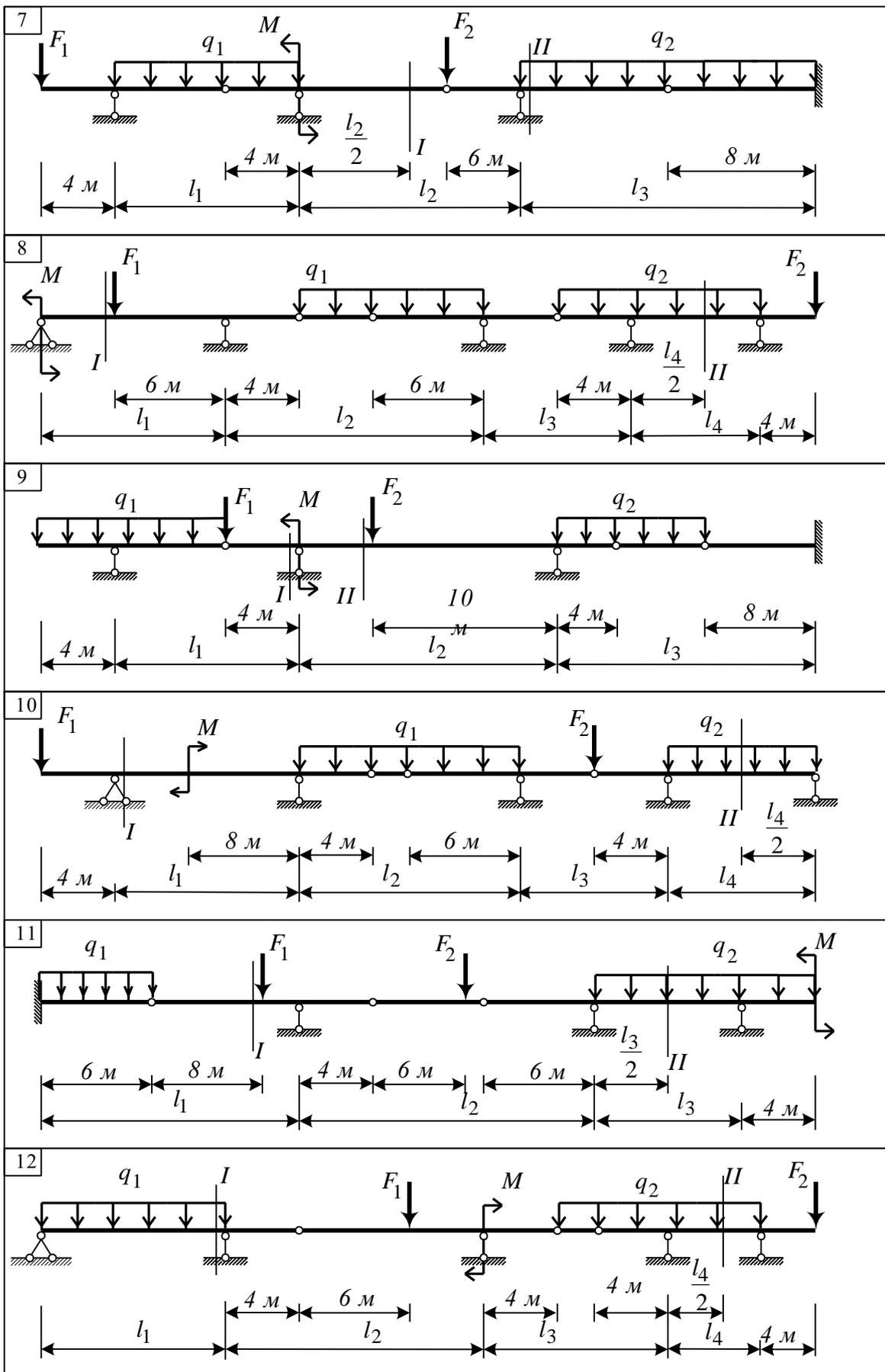


Рисунок Б.1, аркуш 2

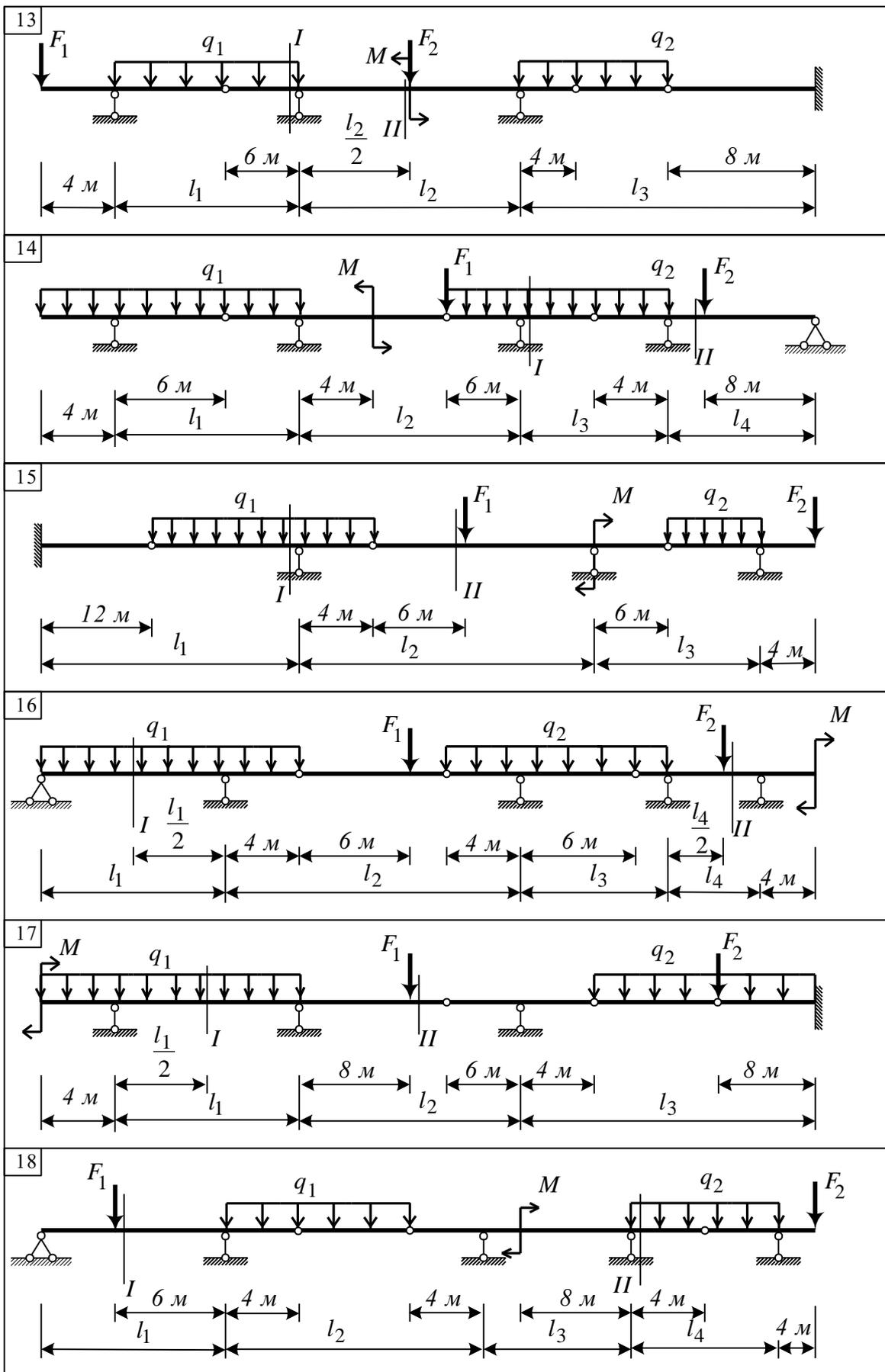


Рисунок Б.1, аркуш 3

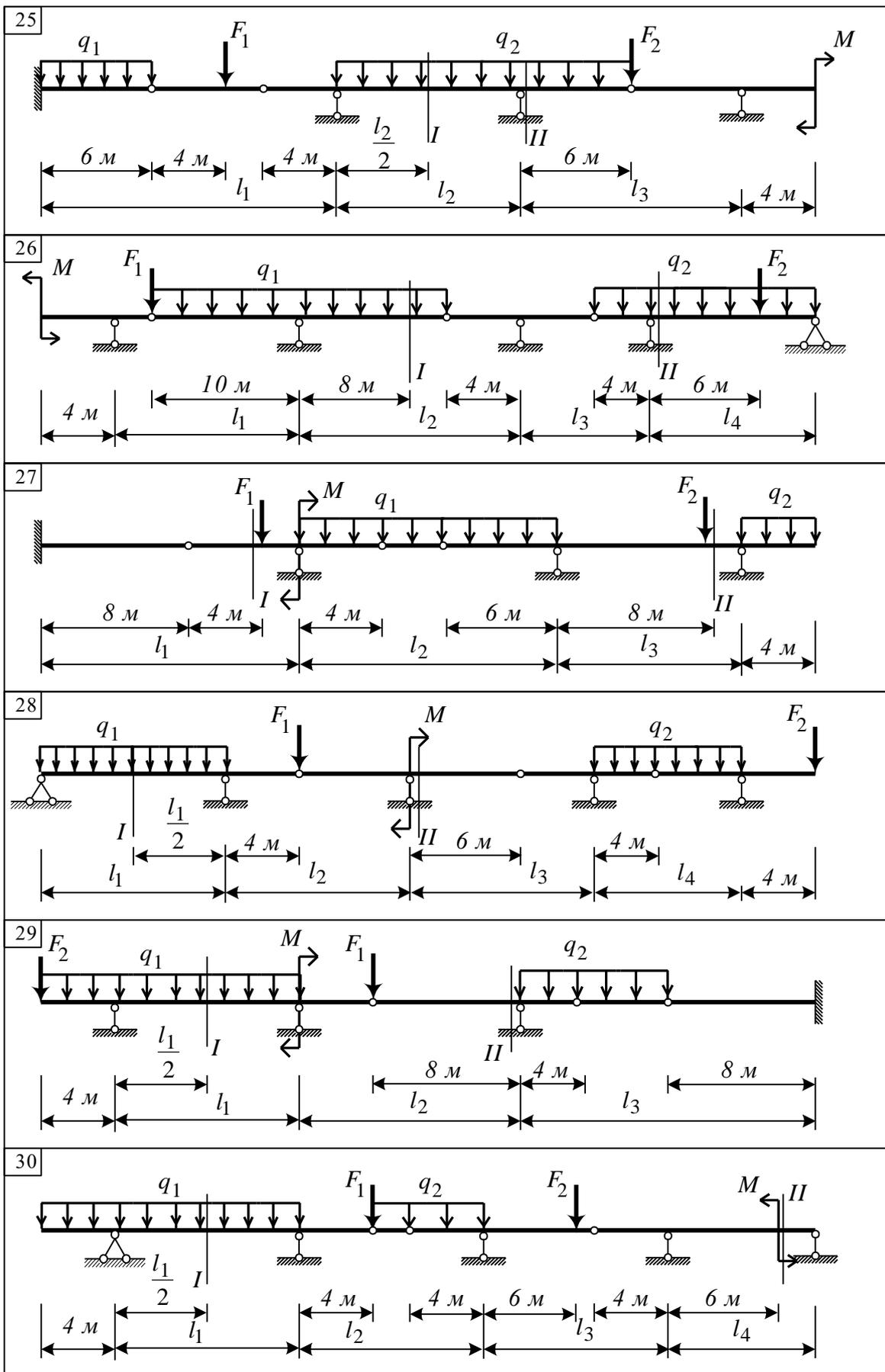


Рисунок Б.1, аркуш 4

Завдання для розрахунково-проектувальної роботи 2

**РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНОЇ РАМИ  
МЕТОДОМ СИЛ**

Для заданого варіанта вихідних даних (таблиця Б.2) і заданої розрахункової схеми сталевий плоскої статично невизначної рами потрібно:

а) у масштабі накреслити розрахункову схему рами із зазначенням усіх необхідних для розрахунку розмірів;

б) встановити ступінь статичної невизначності рами і вибрати основну систему. Скласти канонічні рівняння методу сил;

в) побудувати епюри згинальних моментів в основній системі від одиничних значень зайвих невідомих і зовнішнього навантаження;

г) використовуючи інтеграл Мора, обчислити коефіцієнти і вільні члени канонічних рівнянь, розв'язати систему цих рівнянь і зробити перевірку правильності її розв'язання;

д) побудувати епюри  $M, Q, N$  у заданій розрахунковій схемі і зробити статичні і деформаційну перевірки правильності побудованих епюр.

Таблиця Б.2 – Вихідні дані

Варіант	$F$	$M$	$q$	$l_1$	$l_2$	$h$	$\frac{J_1}{J_2}$
	кН	кНм	$\frac{\text{кН}}{\text{м}}$	м			
1	45	20	6	8	6	4	3
2	40	25	8	10	8	6	2
3	35	30	10	6	12	8	3
4	30	20	6	12	10	4	2
5	60	40	8	8	10	6	3
6	40	50	6	10	12	8	2
7	50	30	10	6	8	4	3
8	35	25	8	8	12	6	2
9	30	35	6	10	6	4	3
10	45	20	8	12	8	4	2

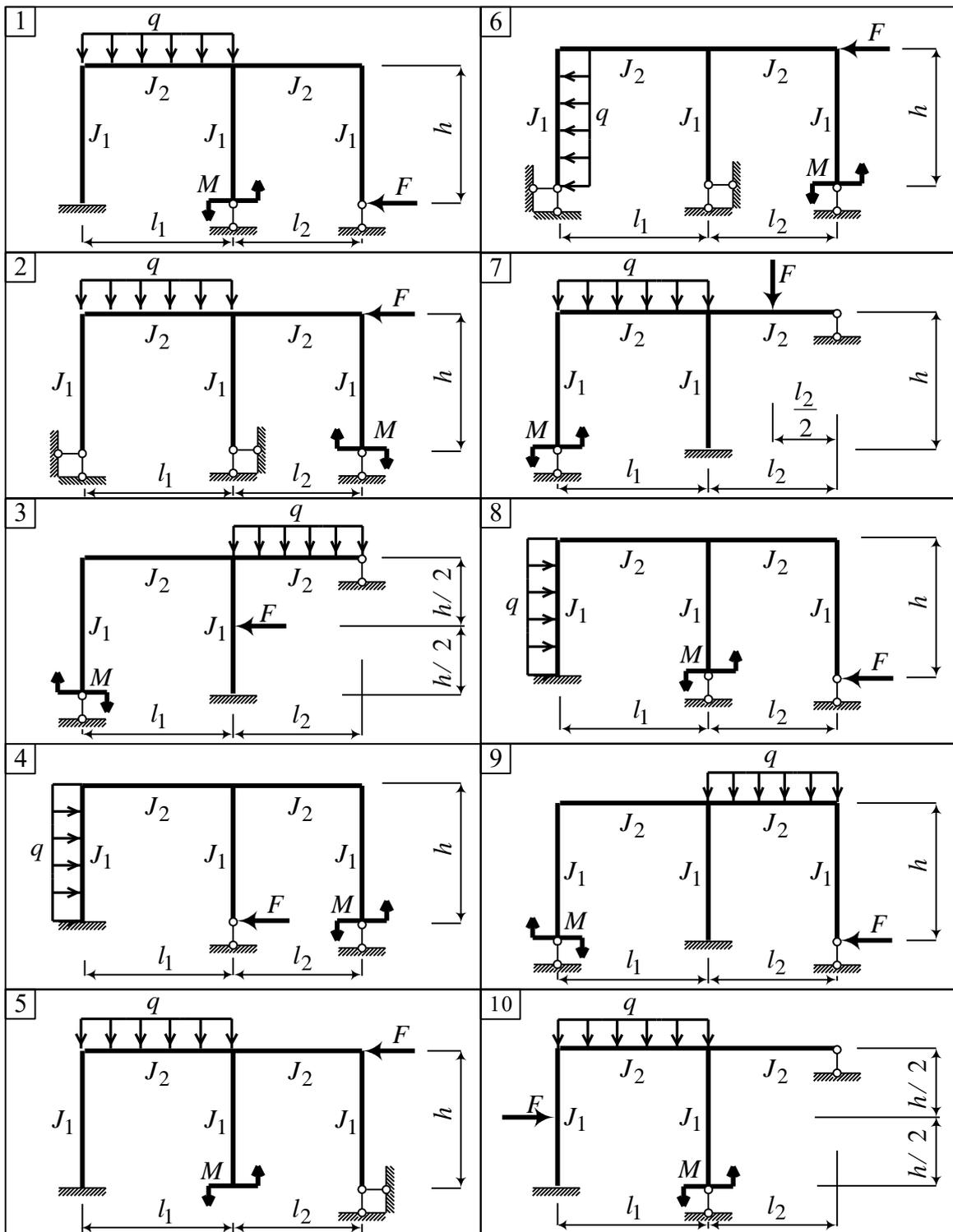


Рисунок Б.2 – Розрахункові схеми рам

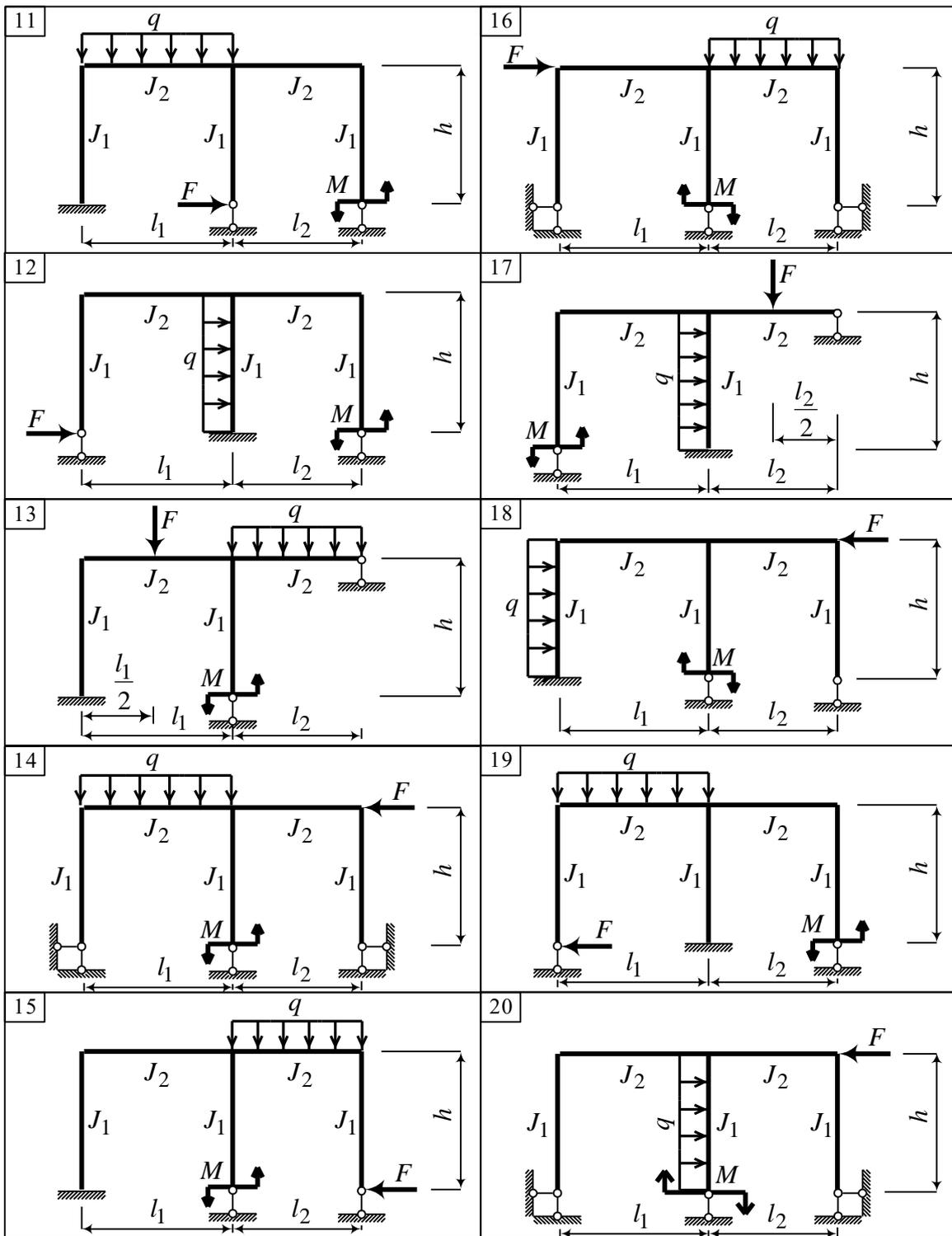


Рисунок Б.2, аркуш 2

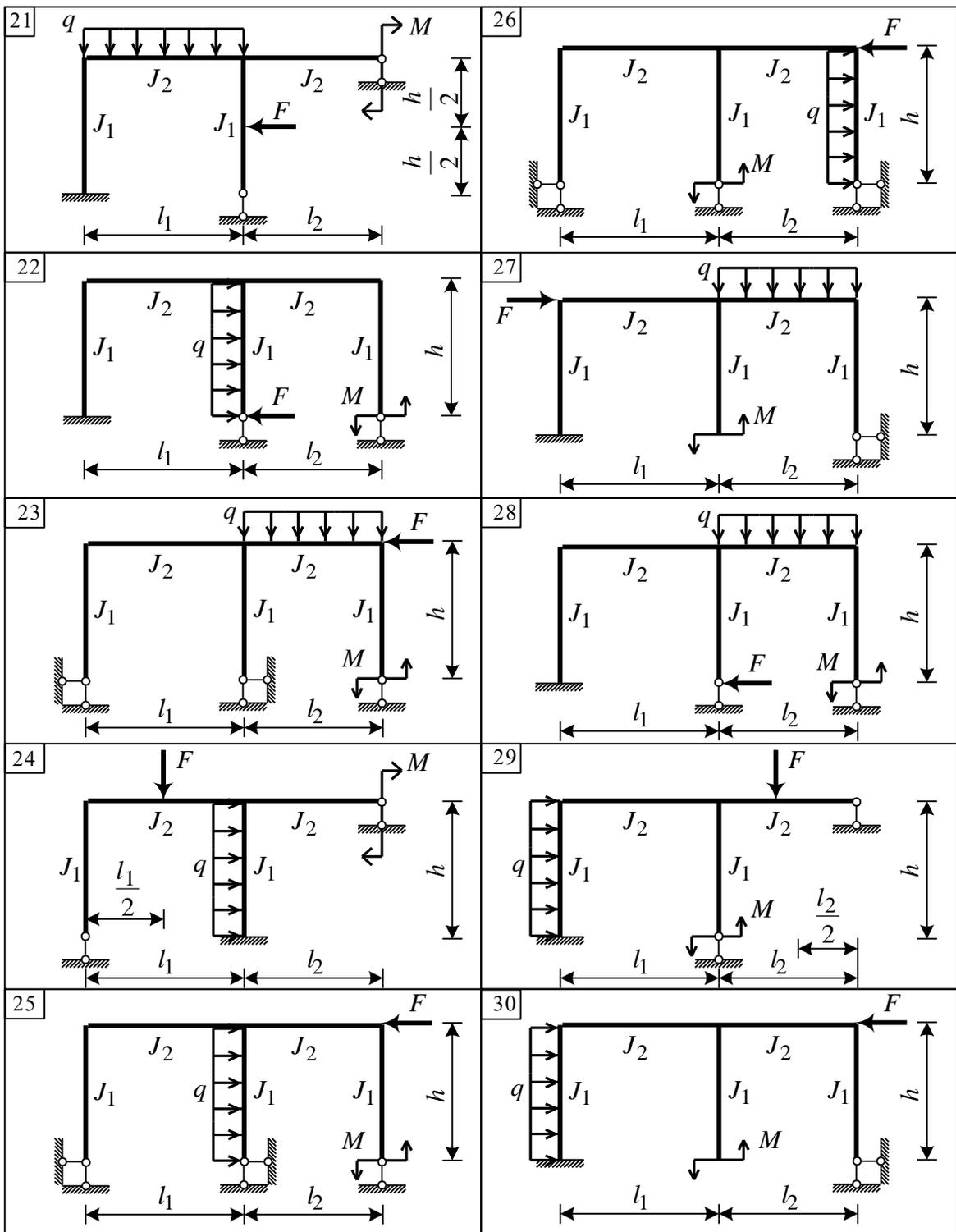


Рисунок Б.2, аркуш 3

### Завдання для розрахунково-проектувальної роботи 3

## РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНОЇ РАМИ ЗА МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Для заданого варіанта даних (таблиця Б.3) і розрахункової схеми статично невизначної рами потрібно:

а) накреслити в масштабі розрахункову схему рами із зазначенням усіх необхідних для розрахунку розмірів;

б) встановити ступінь кінематичної невизначності рами і вибрати основну систему за методом переміщень;

в) скласти канонічні рівняння за методом переміщень;

г) побудувати епюри згинальних моментів від одиничних значень переміщень і заданого навантаження;

д) використовуючи рівняння рівноваги, обчислити коефіцієнти для невідомих і вантажні коефіцієнти канонічних рівнянь;

е) вирішити систему канонічних рівнянь і перевірити розв'язки;

ж) побудувати епюри в заданій системі;

и) виконати статичні перевірки правильності побудови епюр.

Таблиця Б.3 – Вихідні дані

Варіант	$F$	$q$	$l_1$	$l_2$	$h$	$\frac{I_1}{I_2}$
	кН	кН/м	м			
1	8	4	8	10	6	2
2	7	3	6	4	5	3
3	10	4	10	6	3	2
4	12	3	8	6	4	3
5	7	4	6	8	6	2
6	8	3	10	6	5	3
7	10	4	8	4	6	2
8	12	2	6	8	5	3
9	8	3	10	4	6	2
10	10	2	8	8	4	3

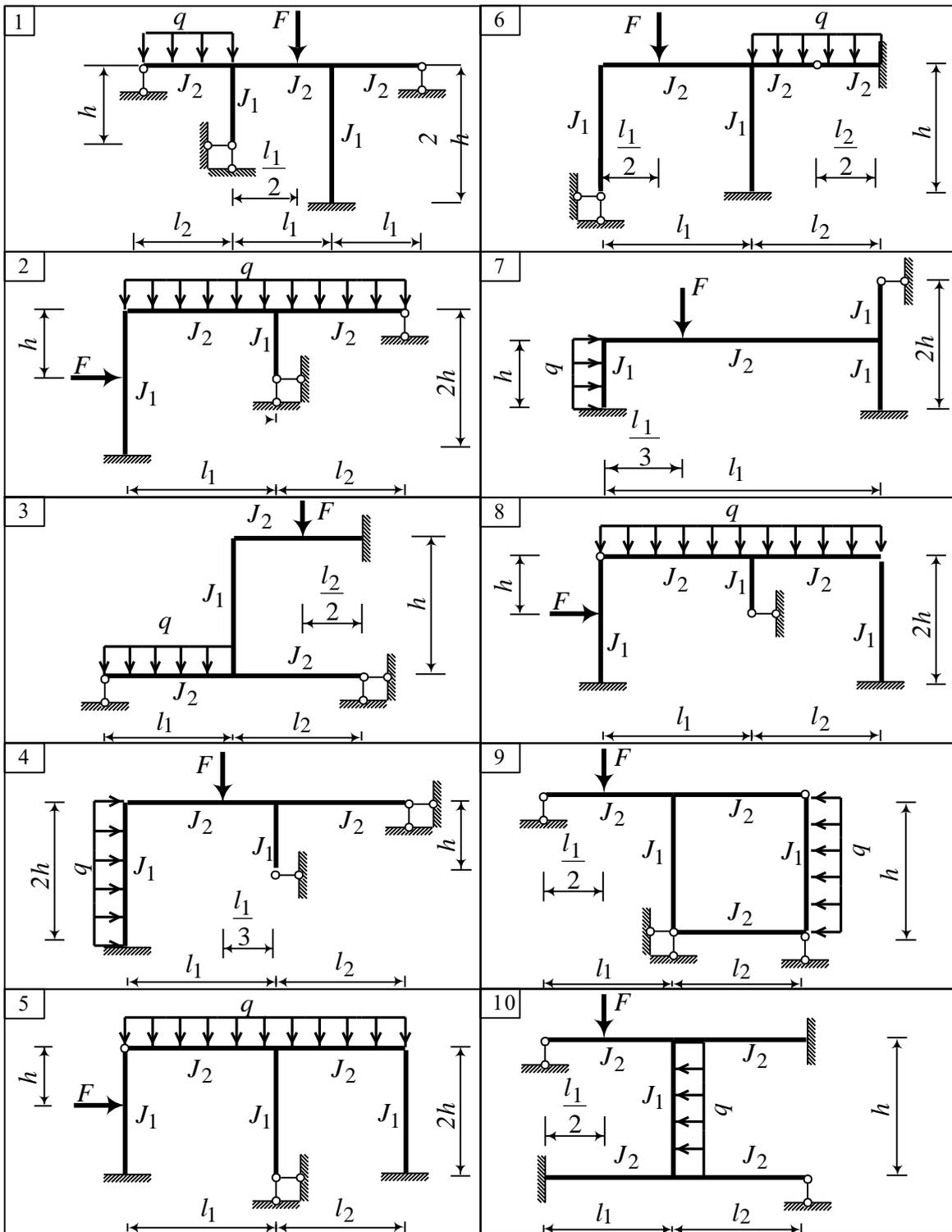


Рисунок Б.3 – Розрахункові схеми рам

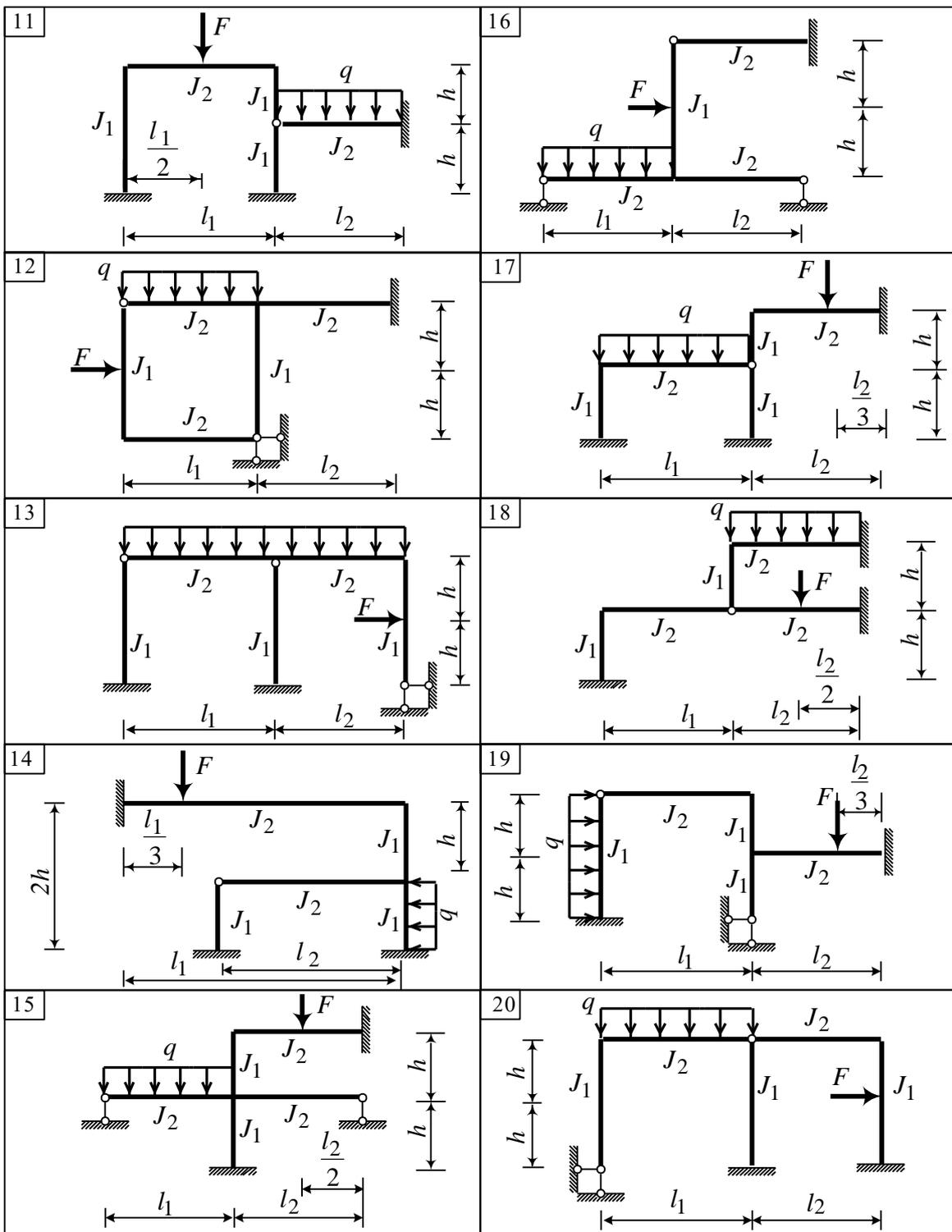


Рисунок Б.3, аркуш 2

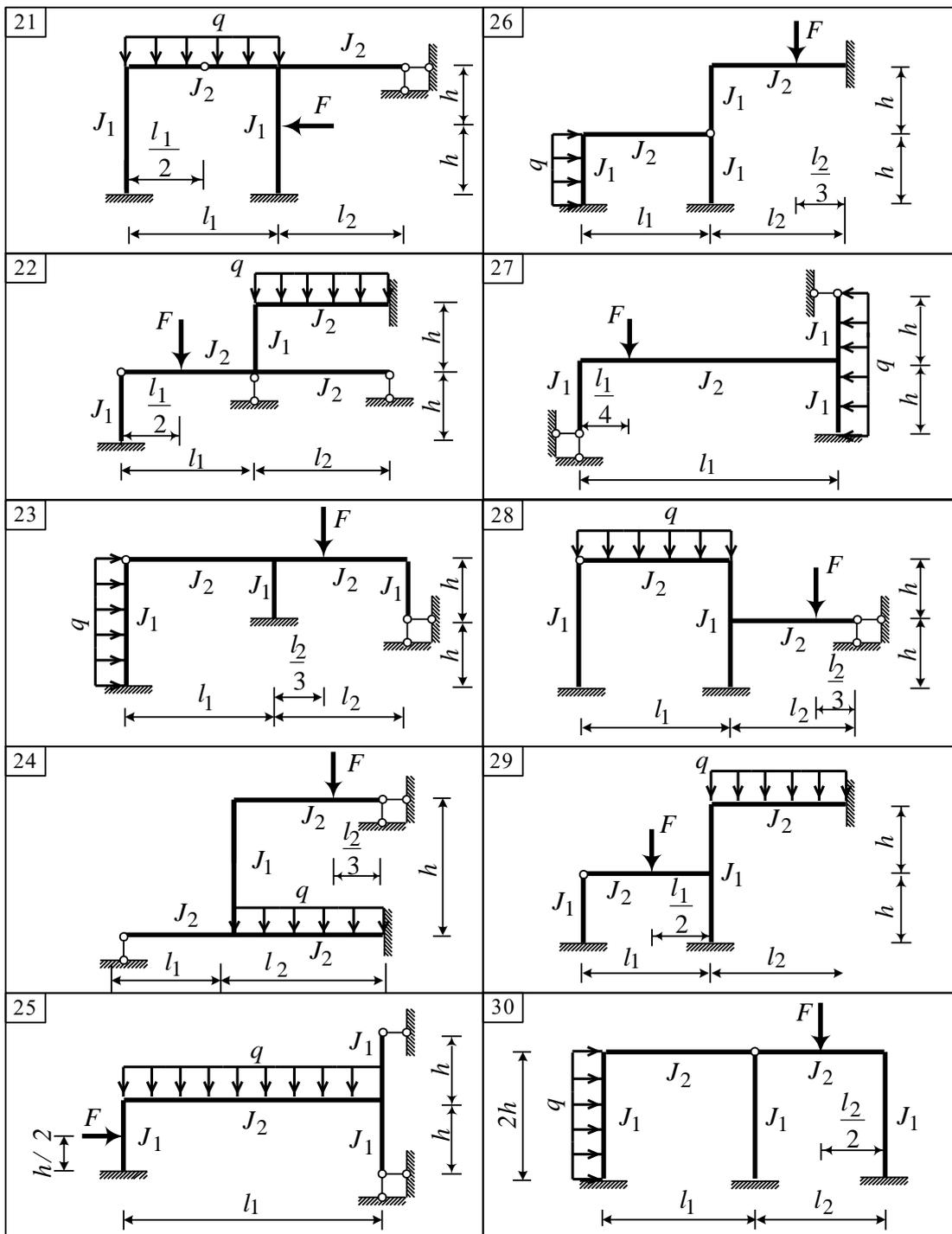


Рисунок Б.3, аркуш 3

## Завдання для розрахунково-проектувальної роботи 4

### РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ СТАТИЧНО ВИЗНАЧНОЇ ФЕРМИ

Для заданого варіанта даних і розрахункової схеми сталюї плоскї ферми потрїбно:

а) накреслити в масштабі розрахункову схему ферми із зазначенням усїх необхідних для розрахунку розмїрїв;

б) вїд дїї нерухомого навантаження визначити опорнї реакцїї і за допомогою аналітичного методу знайти поздовжнї сили в заданих стрижнях ферми;

в) побудувати лїнїї впливу опорних реакцїй і зусиль у вказаних стрижнях;

г) завантажити побудованї лїнїї впливу заданим нерухомим навантаженням і визначити опорнї реакцїї та зусилля  $N$  у заданих стрижнях ферми. Результати порївняти з даними аналітичного розрахунку.

Таблиця Б.4 – Вихїднї данї

Варїант	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$d$	$h$	Номер стрижня
	кН					м		
1	-	10	30	-	50	4	6	1-4-5-8
2	20	60	40	-	-	6	7	2-3-6-7
3	-	40	-	20	60	7	8	1-3-5-8
4	30	20	-	-	40	4	5	2-3-6-8
5	40	-	20	50	-	5	7	1-3-5-7
6	-	50	30	-	40	6	8	2-4-6-8
7	60	-	50	-	20	4	6	1-4-5-7
8	70	30	-	10	-	8	8	2-4-5-8
9	-	-	40	60	30	7	8	1-3-6-7
10	50	-	-	30	60	5	6	2-4-6-7

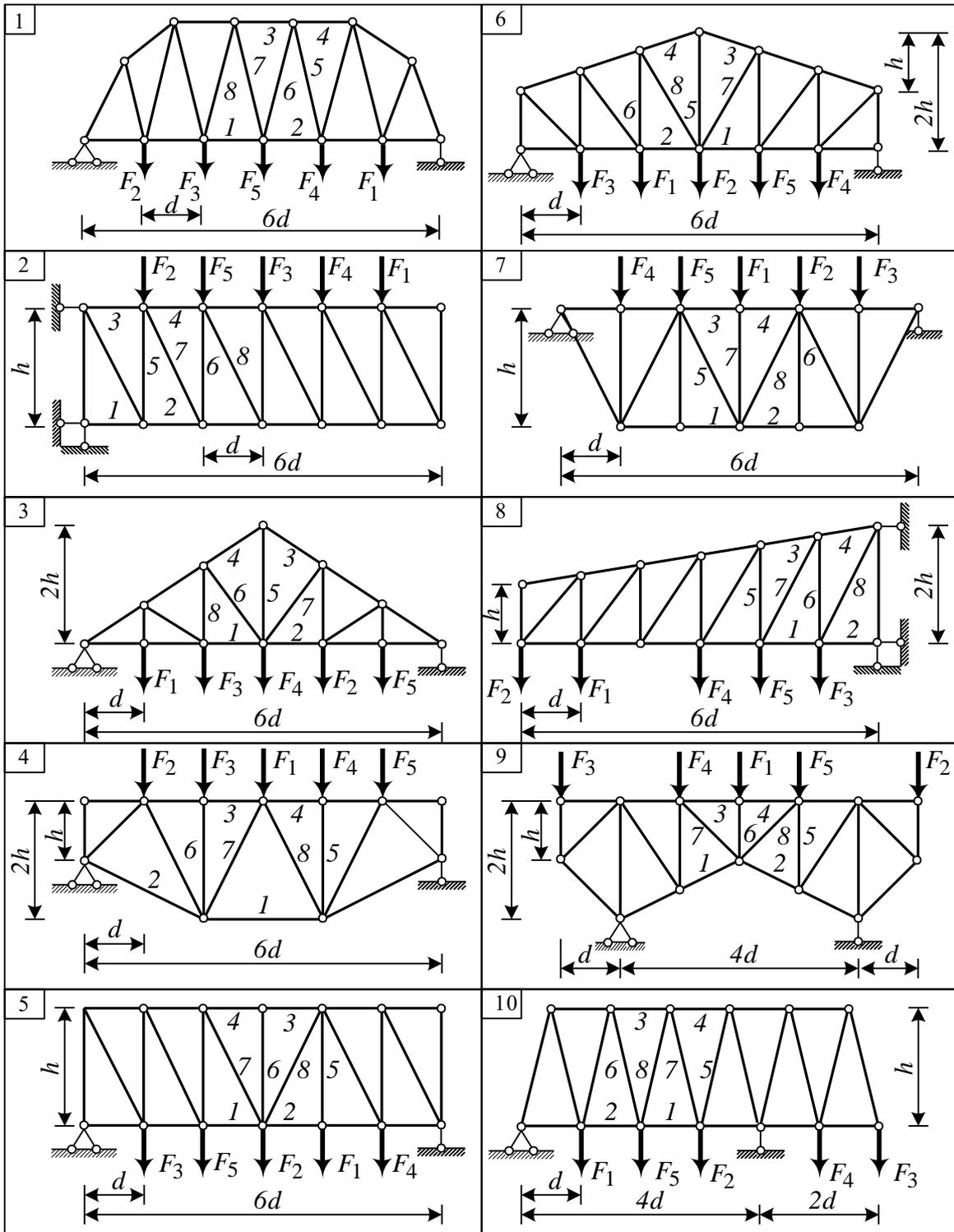


Рисунок Б.4 – Розрахункові схеми ферм

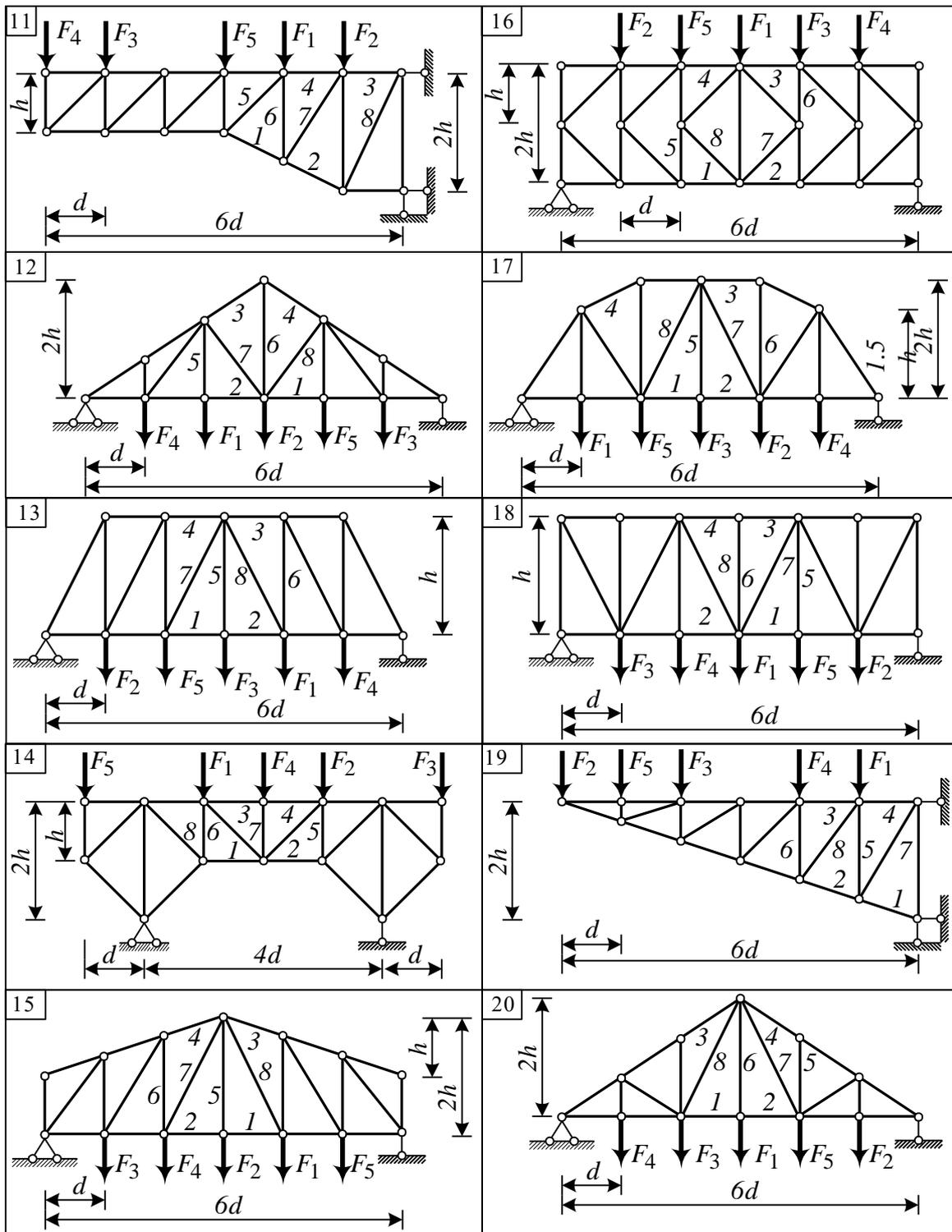


Рисунок Б.4, аркуш 2

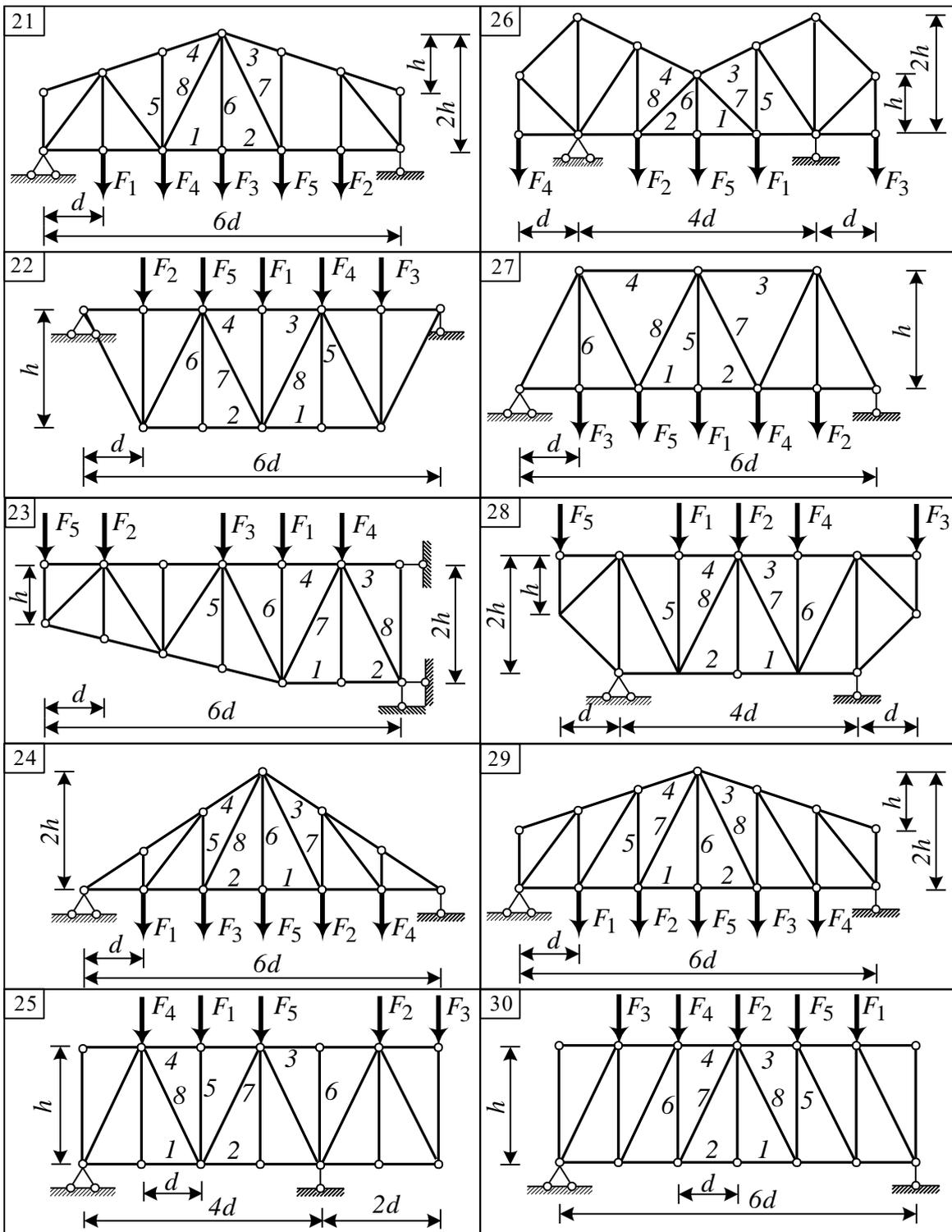


Рисунок Б.4, аркуш 3

## МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для виконання розрахунково-графічних робіт

з освітньої компоненти

«*БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА*»

2-ге видання

Відповідальний за випуск Галагуря Є. І.

Редактор Ібрагімова Н. В.

---

Підписано до друку 18.12.2025 р.

Умовн. друк. арк. 5,5. Тираж . Замовлення № .

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного  
транспорту,

61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха,7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.