*ISSN 2311-0872 Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка», випуск 39, 2023. С. 18-26*

*Оригінальна стаття*
*https://doi.org/10.26565/2311-0872-2022-37-02*
*УДК 535.37.421*

**О. В. КАЗАНКО** н. с.
e-mail: a_kazanko@i.ua ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-9202-8008
**О. Є. ПЄНКІНА,** старший викл.
e-mail: penkina@kart.edu.ua ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-9804-6685
*Український державний університет залізничного транспорту, 61001,м. Харків, майдан Фейєрбаха, 7, Україна*

# АНАЛІЗ ТА МЕТОДОЛОГІЯ ВИЗНАЧЕННЯ НОРМИ ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ ЯК ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД У СКАЛЯРНОМУ ДОБУТКУ В СПЕКТРАЛЬНІЙ ПРОБЛЕМІ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ ДЛЯ ФОТОННОГО ОДНОВИМІРНОГО КРИСТАЛА

**Актуальність**. Останні десятиріччя (приблизно з 90-х років XX-го сторіччя) спостерігається стрімкий розвиток фотоніки. Тому, у першу чергу, злободенність теперішньої роботи пов’язана з актуальністю дифракційних задач для структур оптичного діапазону (фотонних кристалів). Задача про обчислення норми власних функцій проблеми Штурма-Ліувілля, зокрема, виникає при розв’язанні хвильових рівнянь методом розділення змінних, а також при здійсненні переходу від однієї повної до іншої повної ортогональної системи (при зведенні до спільного базису – метод Фур’є). Крім того значущість роботи справедливо пов’язувати з можливістю отримати аналітичну залежність, яка дає явний зв’язок між нормою та самою власною функцією. У роботі вибудовується підхід до визначення норми власних функцій спектральної проблеми Штурма-Ліувілля для двошарового нескінченного одновимірного фотонного кристала. В основу даного підходу покладається граничний перехід у відповідному скалярному добутку. Невизначеність, що виникає при граничному переході, розкривається за допомогою правила Лопіталя.
**Мета роботи** – спростити отримане раніше граничне перетворення норми (перетворення, яке безпосередньо виникає при здійсненні граничного переходу у відповідному скалярному добутку). Досягається, головним чином, внаслідок того, що вдається знайти такий розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (це неоднорідне рівняння отримується взяттям похідної від спектрального рівняння за спектральним параметром), котре задовольняє квазіциклічним умовам на періоді (умовам Флоке). Також автори мали на меті поставити наголос на перевагах теперішнього підходу до обчислення норми, адже останній дає зв’язок між нормою та самою власною функцією у явному вигляді.
**Матеріали та методи.** Інтеграл, що визначає норму (точніше, скалярний добуток) береться на кінцевому проміжку, тому неоднорідне рівняння, що виникає за Лопіталем, розв’язується на кінцевому проміжку, тобто розв’язок цього неоднорідного рівняння відшукується як розв’язок граничної задачі з граничними умовами – умовами Флоке. Спектральне же рівняння в проблемі Штурма-Ліувілля розв’язується на необмеженому інтервалі $(-\infty, +\infty)$, тому для того, щоб вписатися в умови самоспряженості, застосовується метод матриць перенесення (transfer matrix method).
**Результати.** Було підібрано такий розв’язок, який задовольняє квазіциклічним умовам на періоді (умовам Флоке). Зазначений розв’язок вибирається з множини усеможливих розв’язків неоднорідного диференціального рівняння, яке за Лопіталем, виникає при граничному переході. В наслідок підстановки цього розв’язку вихідне граничне перетворення норми спрощується.
**Висновки**. Інтерес до перетворення норми, отриманого у наслідок здійснення граничного переходу в відповідному скалярному добутку, справедливо пов’язувати з реалізованою можливістю отримати залежність між нормою та самою власною функцією в аналітичному вигляді. Основна увага приділяється випадку, коли вдається досягти виконання умов Флоке, при отримані розв’язку неоднорідного рівняння, потрібного для знаходження похідної у зв’язку з правилом Лопіталя. У такому разі граничне перетворення норми спрощується.
**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** фотонний кристал, розсіяння електромагнітних хвиль, норма функції, скалярний добуток, проблема Штурма-Ліувілля, власні функції.

**Як цитувати:** Казанко ОВ, Пєнкіна ОЄ. Аналіз та методологія визначення норми власних функцій як граничний перехід у скалярному добутку в спектральній проблемі Штурма-Ліувілля для фотонного одновимірного кристала. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2023;39:18-26. https://doi.org/10.26565/2311-0872-2023-39-02

**In cites:** Kazanko OV, Penkina OE. Analysis and methodology of determining the norm of eigenfunctions as a limit transition in the scalar product in the spectral Stourm-Louvile problem for a photonic one-dimensional crystal. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series “Radio Physics and Electronics”. 2023; 39:18-26. (In Ukrainian). https://doi.org/10.26565/2311-0872-2023-39-02

## ВСТУП

Визначення норми власних функцій спектральної проблеми Штурма-Ліувілля, серед іншого, представляється важливою задачею у зв'язку із розв'язанням хвильових рівнянь методом розділення змінних. Також необхідність у визначені норми виникає при переході від однієї повної ортогональної системи функцій до іншої повної ортогональної системи функцій у Фур'є-розкладеннях [1]. В деяких випадках зручно або потрібно побудувати ортонормовану систему власних функцій для чого, звісно, потрібно мати норму.

Важко переоцінити вагомість промислової електроніки у сучасну добу інформаційних технологій. Зрозуміло, що подальший розвиток цієї галузі людської діяльності неможливий без розвитку її елементної бази. Тому, як наслідок, різні фізико-технічні аспекти функціонування окремих (найпростіших) електронних пристроїв продовжують залишатися предметом наукового інтересу [2].

А втім, наріжним каменем промисловості електроніки справедливо називати напівпровідникові матеріали – матеріали, які при певних характеристиках електромагнітного випромінювання працюють як провідники, а при інших характеристиках – як діелектрики. Відтоді як було винайдено радіоприймач (Попов А. С., Росія, 1895 р.) – подія, яка ознаменувала відчутний стрибок у розвитку електроніки, електронні інтегральні системи (чипи) розроблялися, впроваджувалися, і вдосконалюватися, але, схоже, сьогодні за прогнозами багатьох учених-аналітиків, ці системи вичерпують свій потенціал працездатності, принаймні у деяких напрямках. Згадуючи емпіричний закон Мура (з 1965 р. кількість транзисторів, розміщених на кристалі інтегральної схеми, подвоюється кожні 24 місяці), наукові аналітики намагалися вказати на тенденцію, яка, так чи інакше спостерігається з 1965 р. та, по суті, передрікає границю у можливостях нарощувати працездатність електронних чипів, тимчасом як потреба у збільшенні потужностей буде залишатися відкритою. Ця обставина, мабуть, й просувала загальну наукову думку в напрямок до необхідності працювати над пошуками нових радикальних технічних рішень.

Отож, фотоні кристали стають своєрідним аналогом напівпровідникових матеріалів (ідея фотонного кристала уперше запропонована в 1987 р., E. Yablonovitch, університет UCLA, Каліфорнія, США [2]). Багато-які аналітики передрікають стрибок в галузі мікропроцесорної техніки саме шляхом впровадження пристроїв на основі фотонних кристалів. Річ у тому, що світло має певні переваги, а саме, світло розповсюджується значно швидше ніж електроні хвилі, володіє меншим тепловим розсіянням та здатне до перемикання [2].

У теперішній роботі продовжується розвиватися підхід до визначення норми власних функцій спектральної проблеми Штурма-Ліувілля для двошарового нескінченного одновимірного фотонного кристала. В основу даного підходу покладено граничний перехід у відповідному скалярному добутку: $(u, v) \to \|u\|^2$ при $v \to u$. Першим ґрунтовним результатам у цьому напрямку передувала доволі значна робота. Один з важливих комплексів питань був пов'язаний із визначенням похідної від розв'язку спектрального рівняння за спектральним параметром. Тут ключову роль відіграла знайдена можливість розв'язати неоднорідне диференціальне рівняння, яке відповідно отримується взяттям похідної від спектрального рівняння за спектральним параметром [4]. Своєю чергою, задача про визначення похідної запотребувало пошуку інших лінійно незалежних від самої власної функції розв'язків [1]. З'ясувалось, що інші лінійно незалежні розв'язки виражаються через саму власну функцію та її похідну. У роботі [1] здійснюється вищезазначений граничний перехід $(u, v) \to \|u\|^2$ при $v \to u$, у якому розкривається невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ за правилом Лопіталя.

Головним чином, робота спрямована на дослідження отриманого раніше [1] граничного перетворення та окремих членів, що входять у таке перетворення, виявленню залежностей або незалежностей цих членів від самої власної функції. До основних результатів може бути віднесена знайдена можливість здійснити деякі подальші спрощення граничного перетворення. Цікавим, на думку авторів, видається таке перетворення, коли для $\psi_0$ – розв'язку неоднорідного диференціального рівняння, потрібного для визначення $\frac{\partial}{\partial \beta} Z_\beta$ ($Z_\beta$ – розв'язок спектрального рівняння, $\beta$ – спектральний параметр) – вдається досягти квазіциклічності, тобто $\Lambda\psi_0(z - l) = \psi_0(z)$, ($\Lambda$ – множник Флоке, $z$ – незалежна змінна, $l$ – період фотонного кристала).

## ПОСТАНОВКА ДИФРАКЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ

Будемо розглядати дифракційну задачу для двошарового нескінченного одновимірного фотонного кристала з періодом $l$. Нехай $\varepsilon_j$, $\mu_j$ – діелектрична та магнітна проникності відповідно першого й другого шарів ($j = 1, 2$), $d$ – розмір першого шару, $l - d$ – другого шару. Уведемо прямокутну декартову систему координат ZOY таким чином, щоб періодичність структури була направлена вздовж вісі OZ. Скалярне хвильове рівняння плоских монохроматичних E-поляризованих коливань для двовимірного середовища, заповненого даним кристалом, має наступний вигляд (модифіковане рівняння Гельмгольца):

$$\Delta_\mu u + k^2 \boldsymbol{n}^2 u = 0, \quad (1)$$

тут $\Delta_\mu = \mu\nabla\frac{1}{\mu}\nabla$ – модифікований оператор Лапласа, $u = u(z, y)$ – шукана скалярна функція, $z, y \in(-\infty, +\infty)$, $\boldsymbol{n}(z) = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – коефіцієнт заломлення – кусково-стала функція, $\varepsilon = \varepsilon(z)$ – діелектрична проникність, $\mu = \mu(z)$ – магнітна проникність – кусково-сталі:

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & z \in (\frac{d}{2}-l+ml,\ -\frac{d}{2}+ml] \\ \varepsilon_2, & z \in (-\frac{d}{2}+ml,\ \frac{d}{2}+ml] \end{cases},\ \mu(z) = \begin{cases} \mu_1, & z \in (\frac{d}{2}-l+ml,\ -\frac{d}{2}+ml] \\ \mu_2, & z \in (-\frac{d}{2}+ml,\ \frac{d}{2}+ml] \end{cases},$$

$m$ – ціле, $l$ – період шаруватого середовища, $k = \frac{\omega}{c}$ – хвильове число, $\omega$ – циклічна частота плоского монохроматичного коливання, $c$ – швидкість світла у порожнечі [5].

Згідно з методом розділення змінних, загальний розв'язок рівняння (1) представляється у вигляді ряду Фур'є

$$u = \sum_{n}^{\infty} Y_{\beta_n} Z_{\beta_n}\ , \tag{2}$$

де $Y_{\beta_n} = Y_{\beta_n}(y)$ – розв'язок звичайного лінійного диференціального рівняння 2-го порядку $\ddot{Y}_{\beta_n} + \beta_n^2 Y = 0$, має вигляд, $Y_{\beta_n}(y) = C_{\beta_n} e^{\beta_n y} + D_{\beta_n} e^{-\beta_n y}$, $C_{\beta_n}$, $D_{\beta_n}$ – довільні константи, $\{Z_{\beta_n}\}_{n=0,\pm1,\ldots}$ – повна ортогональна система функцій, причому, $Z_{\beta_n} = Z_{\beta_n}(z)$ задовольняє рівнянню $\mu(\frac{1}{\mu}\dot{Z}\dot{)} + (k^2\boldsymbol{n}^2 + \beta_n^2)Z = 0$ [6].

Як відомо, побудова повної ортогональної системи функцій, кожен елемент якої задовольняє лінійному диференціальному рівнянню 2-го порядку – проблема Штурма-Ліувілля – може здійснюється шляхом розв'язання наступної спектральної проблеми

$$\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z,$$

де $\beta$ – спектральний параметр, $\mathrm{L}Z \equiv \mu(\frac{1}{\mu}\dot{Z}\dot{)} + k^2\boldsymbol{n}^2 Z$ – лінійний диференціальний оператор 2-го порядку [6].

## ОГЛЯД

У теперішній роботі розглядається спектральна проблема Штурма-Ліувілля у зв'язку із розв'язанням хвильового рівняння (1) методом розділення змінних. Власні функції відшукуються як елементи гільбертового функціонального простору зі скалярним добутком

$$(u, v) = \int_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\mu} u\bar{v}\, \mathrm{dz}\ ,$$

тут $\mu = \mu(z)$ – магнітна проникність – періодична кусково-стала функція. Позначимо цей простір через H. Торкнемося деяких питань розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля. Взагалі кажучи, строге математичне обґрунтування умов розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля є предметом доволі чималої теорії [6-8]. Зокрема, обґрунтування ортогональності та повноти розв'язків проблеми Штурма-Ліувілля стає можливим завдяки залученню таких понять як простір Гільберта, самоспряженість та цілком неперервність (компактність) лінійного оператору, соболєва диференційованість. Говорячи про розв'язність проблеми Штурма-Ліувілля, варто також згадати теореми Гільберта-Шмідта та Стєклова [6-8]. Зупинимось коротко на одному із перелічених аспектів розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля – умова самоспряжені диференціального оператора L. Отож, за визначенням, маємо:

$$(\mathrm{L}u, v) = (u, \mathrm{L}v),$$

$u, v \in \mathrm{H}_0$. Диференціальний оператор L буде самоспряженим (симетричним) у просторі функцій $u \in \mathrm{H}_0$ таких, що $\frac{1}{\mu}\dot{u}$ – неперервна, $\Lambda u(z - l) = u(z)$, $\Lambda\bar{\Lambda} = 1$ ($\Lambda$ – деяке невідоме комплексне число). Позначимо цей простір через $\mathrm{H}_0$. Але чи буде рівняння $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z$ мати розв'язки в $\mathrm{H}_0$? Існування розв'язків у просторі $\mathrm{H}_0$ передбачається теоремою Флоке [7-8]. Теорема Флоке для лінійного диференціального рівняння з періодичними коефіцієнтами (рівняння Хіла) передрікає існування розв'язку такого, що $\Lambda u(z - l) = u(z)$, $\Lambda$ – множник Флоке [7-8]. Проте, взагалі кажучи, число $\Lambda$ за теоремою Флоке виявляється залежним від спектрального параметра $\beta$: $\Lambda = \Lambda_\beta$. Втім, добре відомо, що досягти бажаної незалежності від параметра $\beta$ (досягти самоспряженості оператору L) вдається з наступних міркувань. Річ у тому, що оператор, який розв'язку $u(z)$ ставить у відповідність розв'язок $u(z - l)$ є лінійним оператором, що діє у двовимірному просторі розв'язків диференціального рівняння $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z$ [9], тож, задається квадратною матрицею 2-го порядку, а шукані множники Флоке $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ виявляються власними числами такої квадратної матриці. Отже, $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ можуть відшукуватися шляхом розв'язання квадратного рівняння. Своєю чергою, теорема Вієта (для квадратного рівняння) дозволяє пов'язати добуток цих власних чисел $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ та підібрати їх так, щоб виконувалась рівність $\Lambda = \Lambda_1 = \overline{\Lambda_2}$, $\Lambda_1\Lambda_2 = 1$.

У багатьох роботах [7-8, 10-14], зокрема, роботі [12] підтримується та розвивається методика (transfer matrix method, abr. TMM), що дозволяє вказати множники Флоке $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ саме такими які забезпечуватимуть самоспряженість диференціального оператора L у просторі функцій $H_0$. Використовуючи нормальну систему фундаментальних розв'язків $u_1$, $u_2$, автори роботи [12] будують матрицю оператору $\mathrm{T}: u(z) \ \to u(z-l)$, ($u$ – розв'язок спектрального рівняння $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z$) та розглядають власні числа $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ як на розв'язки квадратного рівняння $\det(\mathrm{T} - \Lambda\mathrm{I}) = 0$ (I – одинична матриця, $\Lambda = \Lambda_\beta$, $\mathrm{T} = \mathrm{T}_\beta$). Внаслідок того, що система фундаментальних розв'язків $u_1$, $u_2$ є нормальною системою, вільний член квадратного рівняння $\det(\mathrm{T} - \Lambda\mathrm{I}) = 0$ виявляється рівним одиниці. Тож, $\Lambda_1\Lambda_2 = 1$ (теорема Вієта). Далі, покладається $\Lambda_{1,2} = e^{\pm iKl}$, $K$ – блохівське хвильове число, тобто невідома $\Lambda$ фіксується й тепер вважається відомою $\Lambda = \Lambda_{1,2}$, а значення спектрального параметра $\beta$ такі, що $\det(\mathrm{T}_\beta - \Lambda_{1,2}\mathrm{I}) = 0$ вважаються шуканими. Оцим значенням спектрального параметра $\beta = \beta_n$ $(n = 0, \pm 1, ...)$ відповідають $Z_{\beta_n}$ – розв'язки спектрального рівняння $\mathrm{L}Z = -\beta_n^2 Z$, та оскільки $\Lambda_1 = \overline{\Lambda_2}$, $\Lambda_1\Lambda_2 = 1$, то розв'язки $Z_{\beta_n}$ є власними функціями диференціального оператору L у просторі $H_0$.

Говорячи про повноту системи $Z_{\beta_n}$ $(n = 0, \pm 1, ...)$, природно напрошується запитання: з якої властивості оператору L випливає повнота системи $Z_{\beta_n}$, або, чи випливає повнота системи $Z_{\beta_n}$ із вищесказаного (ортогональність системи $Z_{\beta_n}$ випливає безпосередньо з умови самоспряженості). На цей рахунок треба зазначити наступне. Перше, повнота є ключовою концепцією, яка лежить на шляху до розуміння того, що у (2) отримується саме загальний розв'язок рівняння (1), а не частковий. Друге, зробити висновок про повноту й ортогональність системи $Z_{\beta_n}$ у просторі $H_0$ можна, посилаючись на спектральну теорію лінійних операторів – в рамках цієї теорії доводяться теореми про ортогональність та повноту системи власних функцій лінійних операторів з певними властивостями. І, насамкінець, зазначмо, що диференціальний оператор (необов'язково оператор L) не є обмеженим лінійним оператором. Тому безпосереднє застосування спектральної теорії до обґрунтування повноти системи $Z_{\beta_n}$ стрічає труднощі. Хоча повнота є ключовою концепцією у методі побудови загального розв'язку рівняння (1) у вигляді (2), більш глибоке осмислення цієї властивості власних функцій потребує щонайменше залучення окремого математичного апарату. Тож, умова самоспряженості є лише складовою умовою розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля, іншою мовою, повнота безпосередньо не випливає з умови $(\mathrm{L}u, v) = (u, \mathrm{L}v)$, $u, v \in H_0$.

В підсумку, у роботі [12] здійснюється перехід від дисперсійного рівняння $\det(\mathrm{T}_\beta - \Lambda_{1,2}\mathrm{I}) = 0$ до системи двох наступних еквівалентних рівнянь (теорема Вієта) $\Lambda_1\Lambda_2 = 1$, $\Lambda_1 + \Lambda_2 = -a(\beta)$, де $a(\beta)$ є другим членом квадратного рівняння. Звідки маємо залежність від спектрального параметра $\beta$:

$$2\cos Kl = u_1(z_0 - l) + \dot{u}_2(z_0 - l), \tag{3}$$

де K – блохівське хвильове число, $u_1$, $u_2$ – нормальна система розв'язків, тобто $u_1(z_0) = 1$, $\dot{u}_1(z_0) = 0$, $u_2(z_0) = 0$, $\dot{u}_2(z_0) = 1$, $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} u_1|_{z_0-l} & u_2|_{z_0-l} \\ \frac{1}{\mu}\dot{u}_1|_{z_0-l} & \frac{1}{\mu}\dot{u}_2|_{z_0-l} \end{pmatrix}$ – матриця перенесення (матриця оператору T).

Дисперсійне рівняння (3) пов'язує умови розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля з множниками Флоке $\Lambda_{1,2} = e^{\pm iKl}$ і ($K$ – блохівське хвильове число), тобто зазначені незалежні від спектрального параметра $\beta$ множники Флоке $\Lambda_{1,2}$, за даним методом (ММП), остаточно визначають простір $H_0$ – простір, на якому диференціальний оператор L є самоспряженим – з одного боку, а з іншого боку теорема Флоке відповідає на поставлене раніше запитання: чи буде рівняння $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z$ мати розв'язки в $H_0$. З урахуванням виведеного дисперсійного рівняння (3) побудованого функціонального простору $H_0$ проблема Штурма-Ліувілля записується у наступному вигляді:

$$\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z, \ Z \in H_0. \tag{4}$$

Спектральне рівняння у проблемі (3) еквівалентно наступному однорідному диференціальному рівнянню (рівняння Хіла):

$$(\frac{1}{\mu}\dot{Z})^{\cdot} + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu} Z = 0\,, \tag{5}$$

тут $\varsigma_\beta^2(z) = k^2\boldsymbol{n}^2(z) + \beta^2$.

Втім, постає природне питання, чому саме ці умови $\Lambda u(z - l) = u(z)$ мають бути вибрані для розв'язання вихідної дифракційної задачі? Адже, наприклад, однорідні умови Діріхле $u\left(\frac{d}{2}\right), u\left(\frac{d}{2} - l\right) = 0$ або прості циклічні умови $u(z - l) = u(z)$, також забезпечують самоспряженість диференціального оператора L, а отже приводять до розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля (4) та, як наслідок, до існування розв'язків хвильового рівняння (1) у вигляді (2). Річ у тому, що ці умови можуть використовуватися на кінцевих проміжках. У цьому випадку дослідник має змогу пожертвувати диференціальними якостями розв'язку при виході на границю. Звісно, що такої змоги немає у разі, коли мова йде про розв'язання диференціального рівняння на нескінченому проміжку. Тому застосовують підхід (ММП) з використанням лінійного оператору, що розв'язку $u(z)$ ставить у відповідність розв'язок $u(z-l)$, будують матрицю цього оператору з подальшими пошуками власних чисел $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ таких, що $\Lambda_1, = \overline{\Lambda_2}$, $\Lambda_1\Lambda_2 = 1$.

За визначенням, норма функції $u$ є $(u,u) = \|u\|^2$, тож, маємо

$$\|Z_{\beta_n}\|^2 = \int_{\frac{d}{2}\text{-}l}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\mu}|Z_{\beta_n}|^2\,dz = \int_{\frac{d}{2}\text{-}l}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\mu} Z_{\beta_n}\overline{Z_{\beta_n}}\,dz.$$

Нехай $Z_{\beta_n}$ – власна функція, що відповідає значенню спектрального параметра $\beta_n$, та нехай $Z_\beta$ – розв'язок спектрального рівняння $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z$ (при $\beta = \beta_n$ функція $Z_\beta$ є власною функцією), тоді ($Z_\beta$, $Z_{\beta_n}$) $\to \|Z_{\beta_n}\|^2$, при $\beta \to \beta_n$. Для скалярного добутку двох будь-яких функцій $Z_\rho$, $\mathrm{V}_\gamma$, що є розв'язками спектрального рівняння $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z$, яким відповідають значення спектрального параметра $\beta = -\rho^2$ та $\beta = -\gamma^2$, можливе перетворення, вільне від знаку інтеграла [1]:

$$(Z_\rho, \mathrm{V}_\gamma) = \int_{\frac{d}{2}\text{-}l}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\mu} Z_\rho \overline{\mathrm{V}_\gamma}\,dz = \frac{1}{\gamma^2-\rho^2}\left(\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\rho\overline{\mathrm{V}_\gamma} - Z_\rho\frac{1}{\mu}\overline{\dot{\mathrm{V}}_\gamma}\right)\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}},$$

тут $\mu = \mu(z)$ – магнітна проникність – кусково-стала функція. Застосовуючи останнє перетворення до функцій $Z_\beta$, $Z_{\beta_n}$, матимемо,

$$(Z_\beta, Z_{\beta_n}) = \int_{\frac{d}{2}\text{-}l}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\mu} Z_\beta\overline{Z_{\beta_n}}\,dz = \frac{1}{\beta_n^2-\beta^2}\left(\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta\overline{Z_{\beta_n}} - Z_\beta\frac{1}{\mu}\overline{\dot{Z}_{\beta_n}}\right)\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} = \frac{1}{\beta_n^2-\beta^2}\mathrm{W}_\beta\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} = \{\beta = \beta_n\} = \left[\frac{0}{0}\right],$$

або,

$$\|Z_{\beta_n}\|^2 = \lim_{\beta\to\beta_n}\frac{1}{\beta_n^2-\beta^2}\left(\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta\overline{Z_{\beta_n}} - Z_\beta\frac{1}{\mu}\overline{\dot{Z}_{\beta_n}}\right)\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} = \lim_{\beta\to\beta_n}\frac{1}{\beta_n^2-\beta^2}\mathrm{W}_\beta\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right]. \tag{6}$$

Таким чином, при переході до границі маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. У роботі [1] розвивається підхід до розкриття такої невизначеності за допомогою правила Лопіталя, згідно з яким шукана границя є відношенням границь відповідних похідних [19]. Тож, для усунення невизначеності у (6) необхідно знайти похідну чисельника $\mathrm{W}_\beta\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}}$, зокрема, похідну від $Z_\beta$ – розв'язку спектрального рівняння $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z$ за спектральним параметром $\beta$, тобто знайти $Z'_\beta = \frac{\partial}{\partial\beta}Z_\beta$ (похідна знаменника обчисляється безпосередньо: $(\beta_n^2-\beta^2)' = -2\beta$). Своєю чергою, похідна $Z'_\beta$ відшукується як розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку [1]:

$$\left(\frac{1}{\mu}\dot{\psi}\right)^{\cdot} + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\psi = -2\frac{\beta}{\mu}Z_\beta\,, \tag{7}$$

де $\psi$ – шукана функція (останнє рівняння отримується шляхом диференціювання спектрального диференціального рівняння за спектральним параметром). Загальний розв'язок $\psi$ відшукується як сума загального розв'язку рівняння (5) та деякого розв'язку (часткового) рівняння (7): $\psi = C_\beta\psi_1 + D_\beta\psi_2 + \psi_0$, $\mathrm{C}_\beta$, $D_\beta$ – скаляри, $\psi_1 = Z_\beta$, а $\psi_2$ – 2-й лінійно незалежний від $\psi_1$ розв'язок, представляється у вигляді $\psi_2 = \eta Z_\beta + \chi\dot{Z}_\beta$, тут $\eta = -\frac{1}{2}\vartheta + \eta_0$, ($\eta_0$ – константа), $\chi = \int_{-\frac{d}{2}}\vartheta$, $\vartheta$ – розв'язок рівняння

$$\left(\frac{1}{\mu}\dot{\vartheta}\right)^{\cdot} + 4\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\vartheta = 0\,, \tag{8}$$

$\psi_0 = -\frac{1}{2}\dot{\xi}Z_\beta + \xi\dot{Z}_\beta$ – частковий розв'язок рівняння (7), $\xi = \int_{-\frac{d}{2}}\phi$, $\phi$ – розв'язок рівняння

$$\left(\frac{1}{\mu}\dot{\phi}\right)^{\cdot} + 4\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\phi = 4\frac{\beta}{\mu}. \tag{9}$$

У роботі [1] здійснюється граничний перехід $(Z_\beta, Z_{\beta_n}) \to \|Z_{\beta_n}\|^2$ при $\beta \to \beta_n$ й, таким чином, отримується аналітична формула для норми власної функцій проблеми Штурма-Ліувілля:

$$\|Z_{\beta_n}\|^2 = -\frac{1}{2\beta_n}\left\{D_{\beta_n}\left(\frac{1}{\mu}\dot{\eta} - \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\chi\right)\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} - \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\mu}\dot{\phi} + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\xi\right)\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}}\right\}\left|Z_{\beta_n,\frac{d}{2}}\right|^2, \tag{10}$$

тут $\mu = \mu(z)$ – магнітна проникність – кусково-стала функція, $\eta$, $\chi$, $\phi$, $\xi$ – функції, що входять до складу $\psi_2$ – лінійно незалежного від $Z_\beta$ розв'язку та $\psi_0$ – часткового розв'язку рівняння (7), через який виражається похідна $Z'_\beta = \frac{\partial}{\partial\beta} Z_\beta$, $D_{\beta_n}$ – константа – може знаходитися з умови, що $\Lambda Z'_\beta(z-l) = Z'_\beta(z)$, $\Lambda$ – множник Флоке.

## ОСНОВНА ЧАСТИНА

Перетворимо член $\frac{1}{\mu}\dot{\eta} - \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\chi$, що входить у (10), інтегруючи рівняння (8):

$$-\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\int_{-\frac{d}{2}}^{z}\vartheta(\tau)d\tau = \frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\dot{\vartheta} - \frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\dot{\vartheta}\Big|_{-\frac{d}{2}}.$$

Тобто, з урахуванням $\chi = \int_{-\frac{d}{2}}\vartheta$, маємо

$$\left(\frac{1}{\mu}\dot{\eta} - \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\chi\right)\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\mu}\dot{\vartheta} + \frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\dot{\vartheta} - \frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\dot{\vartheta}\Big|_{-\frac{d}{2}}\right)\Bigg|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\dot{\vartheta}\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}}.$$

Далі, інтегруючи рівняння (9), аналогічно, перетворюється член $\frac{1}{2}\frac{1}{\mu}\dot{\phi} + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\xi$:

$$\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\int_{-\frac{d}{2}}^{z}\phi(\tau)\,d\tau = -\frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\dot{\phi} + \frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\dot{\phi}\Big|_{-\frac{d}{2}} + \frac{\beta}{\mu}\left(z + \frac{d}{2}\right),$$

тобто,

$$-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\mu}\dot{\phi} + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\xi\right)\Bigg|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} = -\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\mu}\dot{\phi} - \frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\dot{\phi} + \frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\dot{\phi}\Big|_{-\frac{d}{2}} + \frac{\beta_n}{\mu}\left(z + \frac{d}{2}\right)\right)\Bigg|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\dot{\phi}\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} - \frac{\beta}{\mu}\left(z + \frac{d}{2}\right)\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}}.$$

Таким чином, норма власної функції спектральної проблеми Штурма-Ліувілля для фотонного одновимірного кристала набуває вигляду:

$$\|Z_{\beta_n}\|^2 = -\frac{1}{2\beta_n}\left\{D_{\beta_n}\frac{1}{\mu}\dot{\vartheta}\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} - \frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\dot{\phi}\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} - \frac{\beta_n}{\mu}\left(z + \frac{d}{2}\right)\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}}\right\}\left|Z_{\beta_n,\frac{d}{2}}\right|^2, \tag{11}$$

Знайдемо константу $D_{\beta_n}$ з умови, що похідна від розв'язку $Z_\beta$ за спектральним параметром $\beta$ задовольняє умові Флоке:

$$\Lambda Z'_\beta(z-l) = Z'_\beta(z),$$

$$\Lambda Z'_\beta\Big|_{\frac{d}{2}-l} = Z'_\beta\Big|_{\frac{d}{2}} \Leftrightarrow C_\beta\underbrace{\left(Z_\beta\Big|_{\frac{d}{2}} - \Lambda Z_\beta\Big|_{\frac{d}{2}-l}\right)}_{=0} + D_\beta\left(\psi_2\Big|_{\frac{d}{2}} - \Lambda\psi_2\Big|_{\frac{d}{2}-l}\right) = -\left(\psi_0\Big|_{\frac{d}{2}} - \Lambda\psi_0\Big|_{\frac{d}{2}-l}\right),$$

або,

$$D_{\beta=\beta_n} = -\frac{\psi_0\Big|_{\frac{d}{2}} - \Lambda\psi_0\Big|_{\frac{d}{2}-l}}{\psi_2\Big|_{\frac{d}{2}} - \Lambda\psi_2\Big|_{\frac{d}{2}-l}}.$$

Звідки видно, що існування розв'язку $\psi_0$, який задовольнятиме умові $\Lambda\psi_0(z-l) = \psi_0(z)$, приводить до обернення в нуль константи $D_\beta$: $D_\beta = 0$ (при умові $\Lambda\psi_2(z-l) \neq \psi_2(z)$), тож, граничне перетворення (11) спрощується та набуває вигляду:

$$\|Z_{\beta_n}\|^2 = \frac{1}{2\beta_n}\left\{\frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\dot{\phi}\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} + \frac{\beta_n}{\mu}\left(z + \frac{d}{2}\right)\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}}\right\}\left|Z_{\beta_n,\frac{d}{2}}\right|^2, \tag{12}$$

де $\phi$ – розв'язок граничної задачі для неоднорідного рівняння (9) з граничними умовами $\phi\left(\frac{d}{2} - l\right) = \phi(\frac{d}{2})$, $\xi\left(\frac{d}{2} - l\right) = \xi(\frac{d}{2})$, $\xi = \int_{-\frac{d}{2}}\phi$. Розв'язок $\phi$ існує як розв'язок граничної задачі для неоднорідного лінійного диференціального рівняння 2-го порядку [9], причому, існування цього розв'язку можливе для будь-якого значення спектрального параметра $\beta$. Варто, однак, зазначити, що суттєвим є вибір проміжку інтегрування – $\left(\frac{d}{2} - l,\ \frac{d}{2}\right)$. Кінці проміжку припадають на границю розділу середовищ кристала. Зрозуміло, що $\Lambda\psi_0\left(\frac{d}{2} - l\right) = \psi_0(\frac{d}{2}) \Leftrightarrow \phi\left(\frac{d}{2} - l\right) = \phi(\frac{d}{2}),\ \xi\left(\frac{d}{2} - l\right) = \xi(\frac{d}{2}) \Leftrightarrow D_{\beta_n} = 0$ (Λ – множник Флоке).

## ВИСНОВКИ

Інтерес до методики знаходження норми, як наслідок граничного переходу у відповідному скалярному добутку (граничне перетворення), справедливо авторами пов'язується з можливістю отримати аналітичну залежність між шуканою нормою та самою власною функцією. Основна увага у роботі приділяється випадку, коли $\psi_0$ – розв'язок неоднорідного рівняння, потрібного для знаходження похідної за правилом Лопіталя, задовольняє квазіциклічним умовам на періоді (умовам Флоке), тобто $\Lambda\psi_0(z - l) = \psi_0(z)$, (Λ – множник Флоке). Причому, існування цього розв'язку $\psi_0$ показується, не залучаючи розв'язок відповідного однорідного рівняння. У такому разі граничне перетворення норми спрощується.

Отже, шукана норма представляється у вигляді добутку, один з множників якого, являє собою такий член $\left|Z_{\beta_n}(\frac{d}{2})\right|^2$. Інший множник не залежить від власної функції. Така обставина, своєю чергою, наводить на думку, що, взагалі кажучи, власна функція $Z_{\beta_n}$ не обертається в нуль при $z = \frac{d}{2}+ml$ ($m$ – ціле). Змінивши границі інтегрування з $(\frac{d}{2} - l,\ \frac{d}{2}]$ на $(-\frac{d}{2}, -\frac{d}{2}+l]$, за аналогією, дістаємось висновку, що власна функція $Z_{\beta_n}$ не обертається в нуль також й при $z = -\frac{d}{2}+ml$ ($m$ – ціле). Тож, виведена аналітична залежність наводить на думку, що власна функція $Z_{\beta_n}$ закономірно не обертається в нуль на межі розподілу середовищ фотонного кристала. Це, мабуть, означає, що для даного значення спектрального параметра $\beta_n$ існує одна та лише одна власна функція $Z_{\beta_n}$ (кратність власного числа дорівнює 1). Хоча, взагалі кажучи, у випадку лінійного диференціального оператора 2-го порядку одному власному числу може відповідати не більше двох лінійно незалежних власних функцій.

## КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. Казанко ОВ, Пєнкіна ОЄ. (2021). Норма власних функцій одновимірного фотонного кристала. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка», 35*, 91-99.
2. Yablonovitch E. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. Phys. Rev. Lett. 1987; 58(20): 2059-2062.
3. Кожем'яко ВП., Іванов ОА, Іванов І. А. Перспективи застосування фотонних кристалів у сучасних системах обробки даних //Наукові праці ВНТУ, № 4, Інформаційні технології та комп'ютерна техніка 2012 р.
4. Казанко ОВ, Пєнкіна ОЄ. Диференціювання дисперсійного рівняння у дифракційній задачі для необмеженого двовимірного шаруватого середовища. //Експериментальні та теоретичні дослідження у сучасних науках.: Збірник наукових праць "Логос" з матеріалами наук.-практ. конференції. Краків, Польща: Європейська наукова платформа; 2019. 36-42 с.
5. Казанко ОВ, Пєнкіна ОЄ. Диференціювання поперечних розв'язків хвильового рівняння по повздовжньому хвильовому числу в дифракційній задачі для необмеженого періодичного шаруватого середовища з метаматеріалом. Збірник наукових праць "Логос" (ΛΌГОΣ); 2020. 126-130 с.
6. Маркович БМ. Рівняння математичної фізики: навчальний посібник – Львів: Видавництво політехніки, 2010 – 384 с.
7. Eastham MSP. The spectral theory of periodic differential equations. Edinburg: Scottish Academic Press; 1975.
8. Winkler S, Magnus W, Hill's Equation. New York, London, Sydney: Interscience Publisher a division John Wiley & Sons; 1996.
9. Самойленко А М Перестюк М О, Парасюк ІО. Диференціальні рівняння: підручних для студентів матем. Спец-ей пособие, 2-ге видання – Київ: Либідь, 2003 – 301 с.
10. Yariv A, Yeh P "Optical waves in crystals" – A Wiley inteprieses Publicatuon, New York: Jon Wiley & Sons, 1987 – 616 p.
11. Yakubovich V. A. and Starzhinskii V. M., Linear Differential Equations with Periodic Coefficients (Wiley, New York) 1975.
12. Morozov GV, Sprung DWL. Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystals. EPL (Europhysics Letters). 2011 Nov 22; 96(5): 54005. https://doi.org/10.1209/0295-5075/96/54005
13. Sprung DWL, Wu H, Martorell J. Scattering by a finite periodic potential. Am. J.Phys. 1993; 61:1118.

14. International conference on ultrawideband and ultrashort impulse signals 2018, 9th, UWBUSIS Odarenko, Alexandr Shmat'ko, Alexandr V. Kazanko, Victiriya N. Mizernik, Natalia G. Shevchenko Surface Plasmon Polariton Resonance of Diffraction Metamaterial Grating :10.1109/UWBUSIS.2018.8519999

**REFERENCES**

1. Kazanko OV, Penkina OE. *Norm of iegnfunction of one-dimension photonic crystal*. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". 2021; 35:91-99. (In Ukrainian). https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-08
2. Yablonovitch E. *Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics*. Phys. Rev. Lett. 1987; 58(20): 2059-2062.
3. Kojemyako VP., Ivanov OA, Ivanov I.A. Prospects for the use of photonic crystals in modern data processing systems // Scientific works of VNTU, #4, Information technologies and computer equipment 2012 p.
4. Kazanko O. V., Penkina O. Y. "To differentiating dispersion equation in a diffraction problem for unlimited two-dimension media" Collection of scientific papers "Logos" ΛΌΓΟΣ, 2019, 36-42 pp.
5. Kazanko O. V., Penkina O. Y. "To differentiating shear solutions of wave equations by longitudinal wave number in a diffraction problem for unlimited band media with metamaterials" Collection of scientific papers ΛΌΓΟΣ, 2020. 126-130 pp.
6. Markovich B M. *Mathematical physics equations*: Tutorial – Lviv: Polytechnic Publishing House, 2010 – 384 p.
7. Eastham M. S. P. *The spectral theory of periodic differential equations.* Edinburg: Scottish Academic Press [distributed by Chatto & Windus, London], 1975.
8. Winkler S., Magnus W. "*Hill's Equation*" New York, London, Sydney: Interscience Publisher a division John Wiley & Sons, 1996.
9. Samoilenko A. M. Perestyuk M. O., Parasyuk I.O. Deferential equations: Tutorials for students of math. Specializations, 2-th edition – Kyiv: Libid, 2003 – 301 p.
10. Yariv A, Yeh P. *Optical waves in crystals* – A Wiley inteprieses Publicatuon, New York: Jon Wiley & Sons, 1987 – 616 p.
11. Yakubovich V. A. and Starzhinskii V. M., Linear Differential Equations with Periodic Coefficients (Wiley, New York) 1975.
12. Morozov G. V., Sprung D. W. L. «*Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystal.*» *A Letters Journal Exploring Physics, EPL, 96*, 2011: 54005:p1-p5.
13. Sprung DWL, Wu H, Martorell J. Scattering by a finite periodic potential. Am. J. Phys. 1993; 61:1118.
14. International conference on ultrawideband and ultrashort impulse signals 2018, 9th, UWBUSIS Odarenko, Alexandr Shmat'ko, Alexandr V. Kazanko, Victiriya N. Mizernik, Natalia G. Shevchenko Surface Plasmon Polariton Resonance of Diffraction Metamaterial Grating :10.1109/UWBUSIS.2018.8519999

Стаття надійшла до редакції: 6 вересня 2023 р.
Рекомендовано до друку: 11 жовтня 2023 р.

## ANALYSIS AND METHODOLOGY OF DETERMINING THE NORM OF EIGENFUNCTIONS AS A LIMIT TRANSITION IN THE SCALAR PRODUCT IN THE SPECTRAL STOURM-LOUVILE PROBLEM FOR A PHOTONIC ONE-DIMENSIONAL CRYSTAL

**O.V. Kazanko, O.E. Penkina**
*Ukrainian State University of Railway Transport*

**Relevance** The last of the decades (approximately from the 90s of the 20th century) to rapid grow of photonics. That's why, firstly, relevance this work is related to relevance diffraction problems for the structures of optics ranges (photonic crystal). The problem of calculating the norm of eigenfunctions Stourm-Louvile problem, in particular, raised when a waves equations is solved by separating variables method, as well as when making the transition from one complete to another complete orthogonal system (when reducing to a common basis – the Fourier method). In addition, the significance of this work should be associated with the possibility of obtaining an analytical dependence, which gives a clear connection between the norm and its eigenfunctions.
The paper develops an approach to determining the norm of the eigenfunctions of the spectral Stourm-Louvile problem for a two-layer infinite one-dimensional photonic crystal. This approach is based on the limiting transition in the corresponding scalar product. The uncertainty arising at the limit transition is revealed using Lopital's rule.

**The purpose of the work** – Simplify the previously obtained marginal transformation of the norm (the transformation that directly occurs when the marginal transition is carried out in the corresponding scalar product). It is achieved mainly due to the fact that it is possible to find such a solution of a linear inhomogeneous differential equation (this inhomogeneous equation is obtained by taking the derivative of the spectral equation with respect to the spectral parameter) that satisfies the quasi-cyclic conditions on the period (the Floquet conditions). Also, the authors aimed to emphasize the advantages of the current approach to the calculation of the norm, because the latter gives the connection between the norm and the eigenfunction itself in an explicit form.

**Materials and methods.** The integral defining the norm (more precisely, the scalar product) is taken on a finite interval, therefore the inhomogeneous equation arising according to Lopital's is solved on a finite interval, that is, the solution of this inhomogeneous equation is sought as a solution of a boundary value problem with boundary conditions – by the conditions of Floquet. The spectral equation in the Stourm-Louvile problem is solved on an unlimited interval (-∞, +∞), therefore, in order to fit into the conditions of self-conjugation, the transfer matrix method is used.

**Results.** A solution was chosen that satisfies quasi-cyclic conditions on the period (Floquet conditions). The specified solution is selected from the set of all possible solutions of the inhomogeneous differential equation, which, according to Lopital's, arises at the limit transition. As a result of the substitution of this solution, the original marginal transformation of the norm is simplified.

**Conclusion.** The interest in the transformation of the norm, obtained as a result of the implementation of the limit transition in the corresponding scalar product, is rightly associated with the realized possibility of obtaining the dependence between the norm and the eigenfunction itself in analytical form. The main attention is paid to the case when it is possible to achieve the fulfillment of the conditions of Floquet, when obtaining the solution of the inhomogeneous equation required for finding the derivative in connection with Lopital's rule. In this case, the marginal transformation of the norm is simplified

**KEYWORDS:** photonic crystal, scattering of electromagnetic waves, norm of function, scalar product, Sturm-Liouville problem, eigenfunctions.

The article was received by the editors: September 6 2023
The article is recommended for printing: October 11 2023