УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ

ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

В.І. Храбустовський, Ю.С. Шувалова

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ

Конспект лекцій з дисципліни
«*ВИЩА МАТЕМАТИКА*»

Частина 2
РЯДИ, ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ
КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Харків – 2013

Храбустовський В.І., Шувалова Ю.С. Спеціальні розділи. Ч. 2. Ряди, елементи теорії функцій комплексної змінної: Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2013. – 46 с.

Конспект лекцій призначено для вивчення (у тому числі і самостійного) таких розділів вищої математики: ряди та елементи теорії функцій комплексної змінної (числові та функціональні ряди (зокрема степеневі), їх застосування, аналітичні функції, ряди Лорана, особливі точки). Конспект лекцій містить багато прикладів, що може допомогти студенту при виконанні домашніх завдань з наведених розділів. Для більш глибокої проробки цих розділів можна використати наведену літературу.

Рекомендовано для студентів факультету АТЗ денної форми навчання. Конспект може бути також використаний студентами загальнотехнічних спеціальностей.

Іл. 8, бібліогр.: 12 назв.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 11 жовтня 2010 р., протокол № 2.

Рецензент

д-р фіз.-мат. наук В.Д. Гордєвський (ХНУ)

1 ЧИСЛОВІ РЯДИ

Для вивчення цього розділу потрібно знати теорію границь, комплексні числа й елементарні функції комплексного змінного [7, 12].

1.1 Основні визначення і властивості

Нехай дана нескінченна послідовність комплексних чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Вираз

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1.1}$$

називається *числовим рядом*, а доданки $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ – *членами цього ряду*.

Тобто числовий ряд – це нескінченна сума чисел. Буде показано нижче, що ряди застосовуються для обчислення багатьох величин, зокрема значень функцій, визначених інтегралів, розв'язків диференціальних рівнянь.

Коротко ряд (1.1) записується так*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Ряд вважається заданим, коли відоме правило, за яким для довільного номера n можна записати відповідний член ряду. Частіш за все «загальний член» u_n ряду (1.1) задається формулою $u_n = f(n)$.

Приклад 1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{n^2+1}$. Тут загальний член $u_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$. Тобто цей ряд має вигляд

$$\frac{2\cdot 1}{1^2+1} + \frac{2\cdot 2}{2^2+1} + \frac{2\cdot 3}{3^2+1} + \ldots = 1 + \frac{4}{5} + \frac{6}{10} + \ldots . \square$$

---

* Зауважимо, що (скінченна або нескінченна) сума не залежить від позначення індексу сумування, тобто $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k = \sum\limits_{i=p}^{q} a_i$, $\sum\limits_{n=p}^{\infty} u_n = \sum\limits_{k=p}^{\infty} u_k$.

Приклад 1.2. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9}+\ldots$. Тут загальній член $u_n=\frac{n+1}{2n+1}$, тобто цей ряд можна записати так:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}. \ \square$$

Оскільки до вивчення розділу «Ряди» ми мали справу лише зі скінченними сумами, то нескінченній сумі (1.1) потрібно надати сенс. Для цього введемо часткові суми ряду (1.1).

Суму n перших членів ряду (1.1) позначимо $S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$ та назвемо n*-ю частковою сумою ряду*. Розглянемо послідовність часткових сум:

$S_1=u_1$,

$S_2=u_1+u_2$,

$\ldots$

$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$,

$\ldots$

Визначення. Якщо існує скінченна границя послідовності часткових сум ряду (1.1)

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

то ряд (1.1) називається *збіжним*, число S називається його *сумою* і записується

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S.}$$

Якщо границя $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не існує або дорівнює нескінченності, то ряд (1.1) називають *розбіжним.* Розбіжний ряд скінченної суми не має.

Як правило, неможливо дослідити ряд на збіжність за визначенням, оскільки складно знайти формулу для S_n. Одним з небагатьох прикладів, коли це можливо, є нескінченна геометрична прогресія.

Приклад 1.3. **Нескінченна геометрична прогресія**. Так називається ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots. \qquad (1.2)$$

Число q називаєься знаменником геометричної прогресії. Для ряду (1.2) n-на часткова сума дорівнює

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

1) Якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a}{1 - q}$, тобто в цьому випадку нескінченна геометрична прогресія (1.2) збігається.

2) Якщо $|q| \ge 1$, то ряд (1.2) розбігається. Це твердження пропонуємо довести самостійно. Отже,

при $\lvert q\rvert < 1$ геометрична прогресія (1.2) збігається, її сума $S = \frac{a}{1-q}$;
при $\lvert q\rvert \ge 1$ геометрична прогресія (1.2) розбігається.

Як було зазначено вище, для більшості рядів знаходити формули для S_n складно, тому не завжди можна обчислити суму $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ збіжного ряду. Однак, якщо відомо, що ряд збігається, то можна вважати, що

$$S \approx u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_n, \text{. для достатньо великих } n. \qquad (1.3)$$

Ряд $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$ називається *залишком* ряду (1.1). Для збіжного ряду (1.1) його *залишок* дорівнює різниці $R_n = S - S_n$ між сумою ряду та його відповідною частковою сумою. У цьому випадку $|R_n| = |S - S_n|$ дорівнює *похибці* від заміни суми ряду його n-ю частковою сумою. Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S - S_n) = S - S = 0$, якщо ряд збіжний. Тобто дійсно можна наближено обчислити суму *збіжного* ряду, взявши достатню кількість його перших членів.

Властивості збіжних рядів аналогічні деяким властивостям (але не всім) скінченних сум.

Властивості збіжних рядів

1) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n$ теж збігається і $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Доведення. Позначимо S_n часткову суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а S_n' – ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n$. Маємо $S_n' = \lambda u_1 + \lambda u_2 + \ldots + \lambda u_n = \lambda S_n$. Тому $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n = \lim_{n\to\infty} S_n' = \lim_{n\to\infty} \lambda S_n = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. □

2) Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігаються, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ теж збігається, та $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n)$.

3) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається або розбігається, то відповідно збігається або розбігається і ряд, який утворено з даного шляхом дописування або відкидання будь-якої скінченної кількості членів.

Отже, при дослідженні ряду на збіжність можна «ігнорувати» будь-яку скінченну кількість його членів, а саме ряди, які відрізняються скінченною кількістю членів, збігаються або розбігаються одночасно.

Пропонуємо довести властивості 2,3 самостійно. З властивості 3 випливає наслідок.

Наслідок. Якщо ряд збігається, то збігається й будь-який його залишок, та навпаки.

Для застосування формули (1.3) або властивостей 1-3 велике значення має необхідність установити збіжність ряду. Правила, за якими встановлюється збіжність або розбіжність ряду (без обчислення часткових сум) називаються ознаками.

1.2 Необхідна ознака збіжності ряду. Гармонічний ряд

Теорема 1.1. **Необхідна ознака збіжності ряду**. Якщо ряд (1.1) збігається, то його загальний член прямує до нуля, коли $n \to \infty$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \textit{збігається} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

Доведення. Маємо

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = S_{n-1} + u_n,$$
$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Якщо ряд збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$.

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = S - S = 0. \square$$

З доведеної *необхідної ознаки збіжності ряду* випливає

Наслідок. Достатня ознака розбіжності ряду. Якщо загальний член ряду не прямує до нуля, коли $n \to \infty$, то ряд розбігається.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \textit{розбігається}}$$

Приклад 1.4. Для ряду

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{22} + \frac{3}{32} + \ldots + \frac{n}{10n+2} + \ldots$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{10n+2} = \dfrac{1}{10} \neq 0$, тобто не виконана необхідна ознака збіжності ряду. Тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{10n+2}$ розбігається. □

Важливо пам'ятати, що необхідна умова збіжності ряду $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ не є достатньою, як показує приклад.

Приклад 1.5. Гармонічний ряд. Так називається[*] ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

Тут $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, тобто необхідна умова збіжності виконана, проте *гармонічний ряд розбігається*. Дійсно, розглянемо часткову суму S_{2m} та згрупуємо її доданки

$$S_{2m} = 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{2\text{ äî äàí êè}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{4\text{ äî äàí êè}}+\ldots\underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right)}_{2^m\text{ äî äàí ê³â}} \ge$$

$$\ge 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots\left(\frac{1}{2^m}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right)=$$

$$=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{m\text{ äî äàí ê³â}}=1+\frac{m}{2}\underset{m\to\infty}{\to}\infty \Rightarrow \lim_{m\to\infty} S_{2m}=\infty. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n=\infty. \ \square$$

1.3 Достатні ознаки збіжності і розбіжності рядів з додатними членами

Ознака порівняння. Нехай

$$0 \le u_n \le v_n \qquad (1.4)$$

для достатньо великих n, тоді:

а) якщо ряд з «більшими членами» $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, то ряд з «меншими членами» $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ теж збігається;

[*] Назва ряду пояснюється тим, що кожний його член, окрім першого, є середнім гармонічним сусідніх, наприклад, $u_2=\frac{1}{2}$, $u_4=\frac{1}{4}$ і $u_3=\frac{2}{\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_4}}=\frac{2}{2+4}=\frac{1}{3}$.

б) якщо ряд з «меншими членами» $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається, то ряд з «більшими членами» $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ теж розбігається.

Доведення. Нехай $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $S'_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

Доведення пункту «а»:

оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, то існує $\lim_{n\to\infty} S'_n = S'$. З іншого боку, $0 \le u_n \le v_n \Rightarrow S_n \le S'_n < S'$. Оскільки u_n додатні, то S_n монотонно зростає й обмежена числом S'. Тому за теоремою Вейєрштрасса існує $\lim_{n\to\infty} S_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається.

Доведення пункту «б» пропонуємо провести самостійно. □

Оскільки для використання доведеної ознаки порівняння потрібно перевірити виконання нерівності (1.4), що в багатьох випадках є досить складною задачею, то, як правило, використовується

Гранична ознака порівняння. Нехай $u_n > 0,\ v_n > 0$ для достатньо великих n та існує границя $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ не рівна нулю або нескінченності, тобто $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} A v_n$. Тоді обидва ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

При застосуванні ознак порівняння даний ряд найчастіше порівнюють з нескінченною геометричною прогресією (див. підрозділ 1.1) або з рядом Діріхле. *Рядом Діріхле* називається ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

який розбігається при $\alpha \le 1$ та збігається при $\alpha > 1$.*

* Доведення цього факту буде наведено далі.

Наприклад, ряд Діріхле $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots$ розбігається, оскільки тут $\alpha=\frac{1}{3}\le 1$.

Отже, для застосування граничної ознаки порівняння загальний член даного ряду намагаються замінити еквівалентним йому виразом при $n\to\infty$ виду Aq^n або $A\frac{1}{n^\alpha}$. При цьому користуються еквівалентністю таких величин при $\varepsilon\to 0$:

$\sin\varepsilon\sim\varepsilon;$	$a^\varepsilon-1\sim\varepsilon\ln a;$	$e^\varepsilon-1\sim\varepsilon;$	$arctg\varepsilon\sim\varepsilon;$	$1-\cos\varepsilon\sim\frac{\varepsilon^2}{2};$
$tg\varepsilon\sim\varepsilon;$	$\log_a(1+\varepsilon)\sim\frac{\varepsilon}{\ln a};$	$\ln(1+\varepsilon)\sim\varepsilon;$	$\arcsin\varepsilon\sim\varepsilon;$	$(1+\varepsilon)^m-1\sim m\varepsilon;$

Крім того, використовують, ще

$\boxed{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\underset{x\to\infty}{\sim}a_nx^n}$ і формулу Стірлінга $\boxed{n!\underset{n\to\infty}{\sim}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$

Приклад 1.6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{2n^2-1}$.

Тут $u_n=\frac{5n+3}{2n^2-1}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{5n}{2n^2}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{5}{2n}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{5}{2}\cdot v_n$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармонічний, то він розбігається (див. підрозділ 1.2), а тому за граничною ознакою порівняння даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{2n^2-1}$ теж розбігається. □

Приклад 1.7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2^n}$.

Тут $u_n=\sin\frac{1}{2^n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{2^n}=v_n$. Оскільки нескінченна геометрична прогресія $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ має знаменник $q=\frac{1}{2},|q|<1$, то вона збігається. Отже, за граничною ознакою порівняння даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^n}$ теж збігається. □

Приклад 1.8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} tg\sqrt{\frac{n^2+1}{4n^3+2n^2-4}}$. Цю вправу пропонуємо робити самостійно.

Ознака Даламбера. Нехай $u_n > 0$ для достатньо великих n та існує границя $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l \le \infty$, тоді:

- ✓ якщо $l < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається;
- ✓ якщо $l > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається.

Зауваження. При $l = 1$ ознака Даламбера відповіді не дає. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ може як збігатися, так і розбігатися.

Ознака Коші радикальна. Нехай $u_n \ge 0$ для достатньо великих n та існує границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$, тоді:

- ✓ якщо $l < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається;
- ✓ якщо $l > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається.

Зауваження. При $l = 1$ ознака Коші радикальна відповіді не дає. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ може як збігатися, так і розбігатися.

Приклад 1.9. Дослідимо на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{2n+1}}$.

Застосуємо ознаку Даламбера: $u_n = \frac{n!}{2^{2n+1}}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)+1}} : \frac{n!}{2^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!2^{2n+1}}{2^{2n+3}n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{2^2} = \infty .$$

Оскільки $l=\infty>1$, то за ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{2n+1}}$ розбігається. □

Приклад 1.10. Дослідимо на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Застосуємо радикальну ознаку Коші: $u_n=\left(\frac{n}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ .$$

Оскільки $l=\frac{1}{\sqrt{3}}<1$, то за радикальною ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$ збігається. □

Ознака Коші інтегральна. Нехай $u_n\geq 0$ для достатньо великих n та $u_n=f(n)$, де $f(x)$ неперервна незростаюча функція для достатньо великих $x>0$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ та інтеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад 1.11. **Ряд Діріхле**. Так називається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, який часто застосовується при дослідженні рядів на збіжність або розбіжність за допомогою ознак порівняння. Дослідимо його на збіжність при $\alpha>0$* за допомогою інтегральної ознаки Коші**.

Тут $u_n=\frac{1}{n^{\alpha}}=f(n)$, де функція $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$

Як відомо, інтеграл

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx\quad \begin{matrix}\textit{збігається при } \alpha>1\\ \textit{розбігається при } \alpha\leq 1\end{matrix}\ .$$

---

* При $\alpha\leq 0$ для ряду Діріхле не виконано необхідну умову збіжності рядів, і тому цей ряд при $\alpha\leq 0$ розбігається.

** Ознаки Даламбера та радикальна Коші для ряду Діріхле відповіді не дають.

Тому і ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ збігається при $\alpha > 1$ та розбігається при $\alpha \le 1$. □

1.4 Ряд Лейбніца

Якщо знаки членів ряду чергуються,

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ , \qquad a_n > 0,$$

то такий ряд називають рядом Лейбніца.

Приклад 1.12. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$ є рядом Лейбніца.

Ознака Лейбніца.* Якщо для ряду Лейбніца $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$:

1) a_n монотонно не зростає, тобто $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \ldots$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то цей ряд збігається і його сума $S \le a_1$. Звідки похибка від заміни суми ряду його частковою сумою $\left|S - S_n\right| \le a_{n+1}$.

Приклад 1.13. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ на збіжність та обчислити його суму з точністю 0,1.

Ряд $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ є рядом Лейбніца. Тут

1) $a_n = \frac{1}{n^2}$ монотонно не зростає, оскільки $1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \ldots$.;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Отже, за ознакою Лейбніца ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ збігається.

---
* Доведення збіжності ряду Лейбніца при умовах 1, 2 буде наведено нижче.

Обчислимо наближено суму ряду

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots\approx \underline{1-0,25+0,11}-0,0625+\ldots.$$

Отже, $S\approx 1-0,25+0,11=1,14$, похибка $\left|S-1,14\right|\le a_4=0,0625<0,1.$□

1.5 Ознаки збіжності і розбіжності рядів з довільними членами. Абсолютна та умовна збіжність

Визначення. Кажуть, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *збігається абсолютно*, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$.

Теорема 1.2. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається абсолютно, то він збігається.

Приклад 1.14. Дослідити на абсолютну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2}{n\sqrt{n}}$.

Ряд з модулів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n^2}{n\sqrt{n}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin n^2\right|}{n\sqrt{n}}$. Для цього ряду $u_n=\frac{\left|\sin n^2\right|}{n\sqrt{n}}\le\frac{1}{n^{3/2}}=v_n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ збігається, як ряд Діріхле з $\alpha=\frac{3}{2}>1$. Отже, за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n^2}{n\sqrt{n}}\right|$ збігається. Тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2}{n\sqrt{n}}$ збігається абсолютно. □

Для дослідження на абсолютну збіжність часто використовують нижче подані ознаки Даламбера та Коші.

Ознака Даламбера. Нехай існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l \le \infty$, тоді:

- ✓ якщо $l < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ збігається абсолютно;
- ✓ якщо $l > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ розбігається.

Ознака Коші радикальна. Нехай існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = l$, тоді:

- ✓ якщо $l < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ збігається абсолютно;
- ✓ якщо $l > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ розбігається.

Приклад 1.15. Дослідити на абсолютну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(1+i)^n}$.

Тут $u_n = \dfrac{n}{(1+i)^n}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{(1+i)^{n+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{(1+i)^{n+1}} : \frac{n}{(1+i)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{(1+i)n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{2}n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Отже, за ознакою Даламбера ряд збігається абсолютно. □

Визначення. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ розбігається, кажуть що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *збігається умовно*.

Приклад 1.16. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$.

Цей ряд збігається за ознакою Лейбніца (див. приклад 1.13).

Ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є гармонічним рядом, який розбігається.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ збігається умовно. □

Як і для скінченних сум, для абсолютно збіжних рядів «від переставлення місцями доданків сума не змінюється».

Теорема 1.3. Якщо ряд абсолютно збігається, то при будь-якому перестановленні його членів його сума не змінюється.

Для умовно збіжних рядів це не так, як показує

Теорема Рімана. Якщо ряд збігається умовно, то завжди можна так переставити його члени, що сума ряду буде дорівнювати будь-якому наперед заданому числу, в тому числі і $\pm\infty$.

Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 1.17. Члени умовно збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ переставимо так, що сума його стане у 2 рази меншою, а саме, за кожним додатним членом поставимо два від’ємні.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\left(\underbrace{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}-\frac{1}{8}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}-\frac{1}{12}\right)+\cdots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right).\square$$

У разі, коли збіжність не вдається довести за теоремою 1.2, пробують застосувати ознаки Діріхле або Абеля.

Ознака Діріхле. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}A_nB_n$ збігається, якщо:

1) часткові суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ обмежені, тобто

$$\exists M>0\,\forall N\left|\sum_{n=1}^{N}a_n\right|\le M\,;$$

2) послідовність B_n монотонно прямує до нуля.

Приклад 1.18. **Доведення ознаки Лейбніца**. Нехай для ряду Лейбніца $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ виконані умови ознаки Лейбніца, а саме:

1) a_n монотонно не зростає, тобто $a_n \geq a_{n+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Застосуємо для цього ряду ознаку Діріхле. Тут $A_n = (-1)^{n+1}$, $B_n = a_n$. Часткові суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ обмежені: $\left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\right| \leq 1$, послідовність B_n монотонно прямує до нуля, отже, за ознакою Діріхле цей ряд збігається. □

Приклад 1.19. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{in\alpha}}{n}$**.**

Нехай $A_n = e^{in\alpha}, B_n = \dfrac{1}{n}$.

$\sum_{n=1}^{N} e^{in\alpha} = e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + e^{3i\alpha} + \ldots + e^{Ni\alpha}$ – геометрична прогресія з першим членом $a = e^{i\alpha}i$, із знаменником $q = e^{i\alpha}$. Тому

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\alpha}\right| = \left|a\frac{q-1}{q^n-1}\right| = \left|\frac{e^{ni\alpha}-1}{e^{i\alpha}-1}\right| \leq \frac{\left|e^{ni\alpha}\right|+1}{\left|e^{i\alpha}-1\right|} = \frac{2}{\left|\cos\alpha + i\sin\alpha - 1\right|} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(\cos\alpha-1)^2 + (\sin\alpha)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1 + \sin^2\alpha}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}} = \frac{2}{\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Таким чином, якщо $\alpha \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$, то часткові суми ряду $\sum_{k=1}^{\infty} A_n = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\alpha}$ обмежені, а оскільки $B_n = \dfrac{1}{n}$ монотонно спадає до нуля, то за ознакою Діріхле ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\alpha}}{n}$ збігається при $\alpha \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

При $\alpha = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ маємо $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in2\pi m}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n2\pi m + i\sin n2\pi m}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонічний ряд, який розбігається. □

Зауваження про оцінку деяких часткових сум. При використанні ознаки Діріхле часто потрібно оцінити часткові суми $\sum_{n=1}^{N} e^{in\alpha}$, $\sum_{n=1}^{N}\sin n\alpha$, $\sum_{n=1}^{N}\cos n\alpha$. Як було показано вище, $\left|\sum_{n=1}^{N} e^{inx}\alpha\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$, $\alpha \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, звідси випливає для $\alpha \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sin n\alpha\right| = \left|\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{N} e^{in\alpha}\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{N} e^{in\alpha}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|},$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\cos n\alpha\right| = \left|\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{N} e^{in\alpha}\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{N} e^{in\alpha}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Приклад 1.20. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$.

Нехай $A_n = \sin n$, $B_n = \frac{1}{n}$.

Згідно із «зауваженням про оцінку деяких часткових сум» $\left|\sum_{n=1}^{N} A_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{N}\sin n\right| \leq \frac{1}{\sin 1/2}$ часткові суми обмежені.

$B_n = \frac{1}{n}$ монотонно прямує до 0.

Отже, за ознакою Діріхле ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ збігається.

Пропонуємо самостійно довести, що цей ряд збігається умовно. □

Ознака Абеля. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n B_n$ збігається, якщо:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ збігається;

2) послідовність B_n монотонна та обмежена.

Доведення. Оскільки послідовність B_n монотонна та обмежена, то за теоремою Вейєрштрасса існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$. Тому $\sum_{n=1}^{\infty} A_n B_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\left(B_n - B\right) + B\right] = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[B_n - B\right] + B\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, де перший ряд збігається за теоремою Діріхле, а другий за умовою 1.

Приклад 1.21. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in30^0}}{n}\operatorname{arctg} n$.

Нехай $A_n = \frac{e^{in30^0}}{n}$, $B_n = \operatorname{arctg} n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in30^0}}{n}$ збігається за ознакою Діріхле (див. приклад 1.19), послідовність $B_n = \operatorname{arctg} n$ монотонна та обмежена, отже, за ознакою Абеля ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in30^0}}{n}\operatorname{arctg} n$ збігається. □

2 ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Визначення. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots, \qquad (2.1)$$

який складається з функцій, називається *функціональним рядом*.

При кожному конкретному z ряд (2.1) перетворюється на числовий ряд, який може збігатися, а може розбігатися.

Кожне значення z, при якому ряд (2.1) збігається, називається *точкою збіжності* цього ряду. Множина D всіх точок z збіжності утворює *область збіжності*.

Сума функціонального ряду є функція від z, яка визначена на області збіжності ряду. Позначимо її $S(z)$.

Приклад 2.1. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots$ – нескінченна геометрична прогресія із знаменником $q = z$. Він збігається при $|q| = |z| < 1$, і його сума $S(z) = \dfrac{1}{1-z}$. При $|q| = |z| \geq 1$ ряд розбігається. Отже, областю збіжності ряду є круг $|z| < 1$ з центром у точці $z = 0$ та радіусом 1. □

У загальному випадку знаходження області збіжності є складною задачею.

Позначимо $S_n(z)$ n-у часткову суму, а $R_n(z)$ – залишок ряду (2.1). Якщо ряд (2.1) збігається при деякому z, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z), \qquad \lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0.$$

Найпростішим функціональним рядом є степеневий ряд, який можна розглядати як узагальнення многочлена.

2.1 Степеневі ряди

Визначення. *Степеневим рядом* називається функціональний ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots, \qquad (2.2)$$

де c_n, z_0 – сталі. Сталі c_n називаються *коефіцієнтами степеневого ряду*.

Теорема Абеля. Для кожного степеневого ряду (2.2) існує число $0 \le R \le \infty$ таке, що ряд збігається абсолютно при $\left|z - z_0\right| < R$ та розбігається при $\left|z - z_0\right| > R$. Для $\left|z - z_0\right| = R$ ряд може як збігатися, так і розбігатися.

Круг $\left|z - z_0\right| < R$ з центром у точці z_0 називається *кругом збіжності* степеневого ряду, а R – його радіусом збіжності.

Зауваження. Якщо степеневий ряд (2.2) розглядається при дійсних $z = x$ і в ньому $z_0 = x_0$ дійсне, то круг збіжності перетворюється на інтервал збіжності $(x_0 - R; x_0 + R)$ (рисунок 2.1).

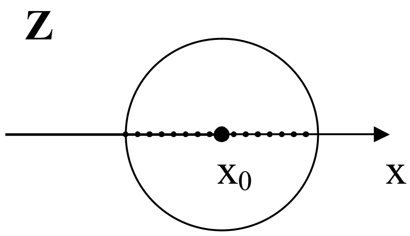

Рисунок 2.1

Наступні дві теореми містять формули, які дозволяють знайти радіус збіжності.

Теорема 2.1. Нехай існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|c_n\right|}$, тоді*

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|c_n\right|}}.} \qquad (2.3)$$

Доведення. Застосуємо до ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ радикальну ознаку Коші.

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|c_n (z - z_0)^n\right|} = \left|z - z_0\right| \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|c_n\right|} = \frac{\left|z - z_0\right|}{\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|c_n\right|}}}.$$

* Вважаємо $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$.

Отже, $l = \dfrac{|z-z_0|}{\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}} < 1$, коли $|z-z_0| < \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}} \overset{def}{=} R$. Тобто ряд (2.2) збігається абсолютно, коли $|z-z_0| < R$.

Та $l = \dfrac{|z-z_0|}{\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}} > 1$, коли $|z-z_0| > \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}} = R$. Тобто ряд (2.2) розбігається, коли $|z-z_0| > R$.

Таким чином, $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}$ – радіус збіжності. □

Теорема 2.2. Нехай існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, тоді радіус збіжності

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.} \qquad (2.4)$$

Пропонуємо довести теорему 2.2 самостійно, використовуючи ознаку Даламбера.

Приклад 2.2. Знайти радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-3)^n}{5^n}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-3)^n}{5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{5^n}(z-3)^n \Rightarrow c_n = \dfrac{1}{5^n} \Rightarrow$ за формулою (2.3) $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{5^n}}} = 5 \Rightarrow$ круг збіжності: $|z-3| < 5$. □

Приклад 2.3. Знайти радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+3i)^n}{n!}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+3i)^n}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(z+3i)^n \Rightarrow c_n = \dfrac{1}{n!} \Rightarrow$ за формулою (2.4)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty\Rightarrow$$ ряд збігається при будь-якому $z\in\mathrm{C}$. □

Приклад 2.4. Знайти радіус збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}n^{2n}(z+3i)^n$.

$\sum_{n=1}^{\infty}n^{2n}(z+3i)^n\Rightarrow c_n=n^{2n}\Rightarrow$ за формулою (2.3)

$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\Rightarrow$ ряд збігається тільки в точці $z=z_0=-3i$. □

Приклад 2.5. Знайти радіус збіжності ряду $1-z^2+z^4-z^8+\ldots$.

У цьому випадку жодна з границь у формулах (2.3), (2.4) не існує, оскільки $c_1=c_3=c_5=\ldots=0$. Але аналогічно прикладу 2.1 $R=1$. □

У загальному випадку, якщо жодна з границь (2.3), (2.4) не існує, то радіус збіжності знаходять безпосередньо за допомогою ознаки Даламбера або Коші.

Приклад 2.6. Знайти радіус збіжності і зобразити круг збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(z+1{,}5-2i\right)^{2n}}{\left(3-4i\right)^n}$.

Застосуємо ознаку Коші

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{\left(z+1{,}5-2i\right)^{2n}}{\left(3-4i\right)^n}\right|}=\left|\frac{\left(z+1{,}5-2i\right)^2}{\left(3-4i\right)}\right|=\frac{\left|z+1{,}5-2i\right|^2}{5}.$$

Ряд збігається абсолютно, якщо $l=\frac{\left|z+1{,}5-2i\right|^2}{5}<1\Rightarrow\left|z+1{,}5-2i\right|<\sqrt{5}$, і розбігається при $l=\frac{\left|z+1{,}5-2i\right|^2}{5}>1\Rightarrow\left|z+1{,}5-2i\right|>\sqrt{5}$

$\Rightarrow R=\sqrt{5}$ (центр круга збіжності $z_0=-1{,}5+2i$). Круг збіжності ряду зображено на рисунку 2.2. □

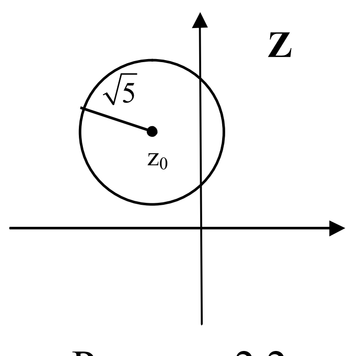

Рисунок 2.2

Властивості степеневих рядів

1 Сума степеневого ряду є неперервною функцією в крузі збіжності.

2 Степеневий ряд можна почленно диференціювати (скільки завгодно разів) усередині круга збіжності. Тобто

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n\left(z-z_0\right)^n\right)'.$$

При цьому радіус збіжності ряду не змінюється*.

3 Степеневий ряд можна почленно інтегрувати по будь-якому шляху L, який цілком лежить у крузі збіжності. Тобто

$$\int_L \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int_L c_n\left(z-z_0\right)^n dz.$$

При цьому радіус збіжності ряду не змінюється**.

---

* Похідна $f'(z)$ функції комплексної змінної $f(z)$ визначається аналогічно звичайній похідній, а саме $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$. Тому для похідної від функції комплексної змінної зберігаються правила диференціювання . Можна показати, що також зберігається таблиця похідних. Зокрема $((z-z_0)^n)'=n(z-z_0)^{n-1}$. Також зберігається **теорема про диференційованість елементарних функцій.** Якщо елементарна функція визначена в точці z_0 і деякому її околі, то вона диференційована в точці z_0.

** Інтеграл $\int\limits_L f(z)dz$ функції комплексної змінної $f(z)$ визначається аналогічно звичайному визначеному інтегралу, а саме $\int\limits_L f(z)dz = \lim\limits_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum\limits_k f(\varsigma_k)\Delta z_k$, де $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ (рисунок 2.3).

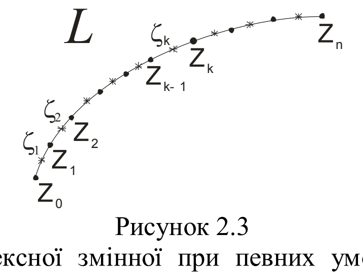

Рисунок 2.3

Для елементарних функцій комплексної змінної при певних умовах має місце формула Ньютона-Лейбніца. Зокрема $\int\limits_{AB}(z-z_0)^n dz = \left.\dfrac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}\right|_{z=A}^{B}, n\in Z, n\neq -1$..

4 Знаходження коефіцієнтів степеневого ряду, коли відома його сума. Нехай $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = f(z),\ |z-z_0|<R.$ Тоді

$$\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.} \tag{2.5}$$

2.2 Аналітичні функції. Ряд Тейлора

Визначення. Функція $f(z)$, яка є сумою степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ у деякому крузі з центром z_0 називається *аналітичною в точці* z_0 *функцією.*

Визначення. Функція називається *аналітичною в області*, якщо вона аналітична в кожній точці цієї області.

Нехай $f(z)$ нескінченно диференційована в точці z_0. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

називається рядом Тейлора функції $f(z)$. (При $z_0 = 0$ цей ряд називається рядом Маклорена).

З властивостей 2, 4 степеневого ряду випливає, що аналітична в точці z_0 функція є нескінченно диференційованою у цій точці та є сумою свого ряду Тейлора у деякому околі точки z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\ . \tag{2.6}$$

Як буде доведено нижче, має місце

Теорема про зв'язок між диференційованістю та аналітичністю функцій. Функція $f(z)$ аналітична у точці z_0, якщо вона диференційована у деякому околі цієї точки.

Тому зокрема (див. виноску на стор. 24) має місце

Наслідок 1. Теорема про аналітичність елементарних функцій. Елементарна функція аналітична в точці, якщо вона визначена в цій точці та деякому її околі**.**

Наслідок 2. За властивістю 2 степеневих рядів для функції комплексного змінного з існування похідної в околі точки z_0 випливає існування похідної будь-якого порядку в околі цієї точки.

Теорема Тейлора. Функція $f(z)$, яка аналітична в крузі $\left|z - z_0\right| < R$, однозначно розкладається в цьому крузі у свій ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n , \tag{2.7}$$

коефіцієнти якого визначаються формулою (2.5).

Правило знаходження радіуса збіжності ряду Тейлора функції $f(z)$, яка аналітична в точці z_0: радіус збіжності дорівнює відстані від точки z_0 до найближчої особливої точки функції $f(z)$ [11, с. 221]*.

Приклад 2.7. Функція $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ нескінченно диференційована для будь-яких дійсних x, але її ряд Тейлора

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots \tag{2.8}$$

розбігається при $\left|x\right| \geq 1$. Тобто ліва частина формули (2.8) існує для будь-яких дійсних x, а права лише при $\left|x\right| < 1$. Причину цього неможливо зрозуміти залишаючись на дійсній осі. Але перехід у комплексну площину показує, що на колі $\left|z\right| = 1$ лежать точки $z = \pm i$, в яких функція $f(z) = \infty$ (див. рисунок 2.4). Отже за правилом знаходження радіуса збіжності ряду Тейлора $R = 1$. □

Приклад 2.8. Знайти радіус збіжності ряду $\ln\dfrac{z^2 - 4z + 5}{z^2 + 2z + 5} = c_0 + c_1(z - 0,3i) + c_2(z - 0,3i)^2 + \ldots$

Знайдемо точки розриву функції $f(z) = \ln\dfrac{z^2 - 4z + 5}{z^2 + 2z + 5}$.

---

* Грубо кажучи, R дорівнює відстані до найближчої точки «нескінченності» функції $f(z)$ або найближчої точки «розгалуження». Про ізольовані особливі точки аналітичної функції див. нижче.

$$z^2-4z+5=0; \qquad z^2+2z+5=0;$$
$$z_1=2+i,\ z_2=2-i. \qquad z_3=-1+2i,\ z_4=-1-2i.$$

Отже, з рисунка 2.5 видно, що найближчою до $z_0=0,3i$ точкою розриву є точка z_1 або точка z_3. Оскільки $|z_1-z_0|=|2+i-0,3i|=2,11$, а $|z_3-z_0|=|-1+2i-0,3i|\approx 1,97$, то найближчою виявляється точка $z_3=-1+2i$ та за правилом знаходження радіуса збіжності ряду Тейлора $R=|z_3-z_0|\approx 1,97$.□

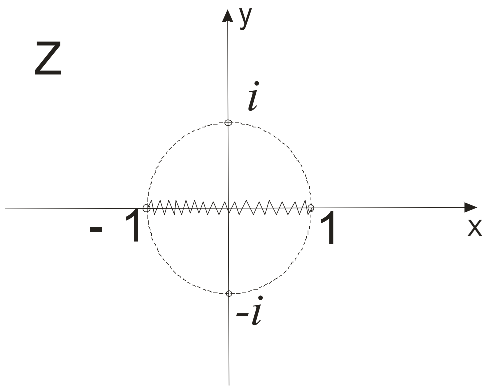

Рисунок 2.4

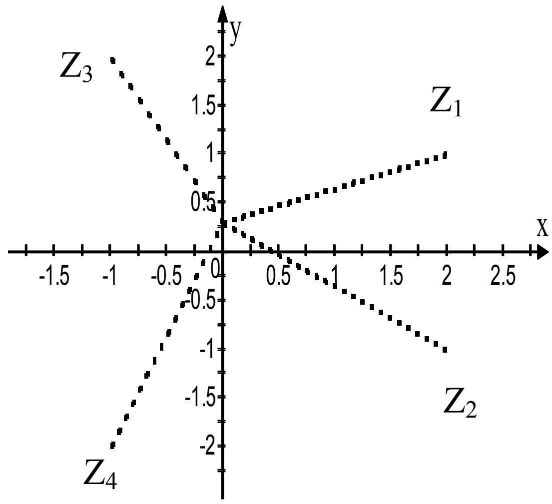

Рисунок 2.5

2.3 Розкладання основних елементарних функцій у степеневі ряди

Розкладання функції $f(z)$ у степеневий ряд дозволяє наближено замінювати функцію многочленом. Така заміна використовується у багатьох випадках, як то обчислення інтегралів, розв'язання диференціальних рівнянь тощо.

- ***Показникова функція*** e^z

Функція $f(z)=e^z$ визначена для будь-яких z. Отже, вона аналітична у всій комплексній площині. Оскільки

$$f^{(n)}(z)=\left(e^z\right)^{(n)}=e^z,$$

то $f^{(n)}(0)=e^0=1$, тому за теоремою Тейлора і за правилом знаходження радіуса збіжності ряду Тейлора

$$\boxed{e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad 0\le |z|<\infty.} \qquad (2.9)$$

• ***Гіперболічні функції*** $\mathrm{sh}z$ ***та*** $\mathrm{ch}z$

На підставі (2.9) маємо

$$\mathrm{sh}z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots\right)-\left(1+(-z)+\frac{(-z)^2}{2!}+\frac{(-z)^3}{3!}+\frac{(-z)^4}{4!}+\ldots\right)\right).$$

Отже,

$$\boxed{\mathrm{sh}z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad 0\le |z|<\infty.} \quad (2.10)$$

Формулу

$$\boxed{\mathrm{ch}z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad 0\le |z|<\infty} \quad (2.11)$$

пропонуємо отримати самостійно.

• ***Тригонометричні функції*** $\sin z$ ***та*** $\cos z$

Використовуючи формули (2.10), (2.11) та формули Ейлера, отримуємо розкладання у степеневий ряд функцій $\sin z$ та $\cos z$:

$\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\mathrm{ch}iz=1+\dfrac{(iz)^2}{2!}+\dfrac{(iz)^4}{4!}+\dfrac{(iz)^6}{6!}+\ldots+\dfrac{(iz)^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ і тому

$$\boxed{\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\quad 0\le |z|<\infty.} \quad (2.12)$$

Формулу

$$\boxed{\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad 0 \le |z| < \infty} \quad (2.13)$$

пропонуємо довести самостійно.

Ми бачимо, що функції $\mathrm{sh}z$, $\sin z$ та $\mathrm{ch}z$, $\cos z$ розкладаються відповідно за непарними та парними степенями змінної z. Це є окремим випадком загального твердження. *Непарні та парні функції розкладаються в ряд Маклорена відповідно за непарними та парними степенями* z.

- ***Біноміальний ряд***

Так називається ряд Маклорена функції $f(z) = (1+z)^{\alpha}$.

Маємо $f(0) = 1$, та оскільки

$$f'(z) = \alpha(1+z)^{\alpha-1}, \ f''(z) = \alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}, \ \ldots$$
$$\ldots, f^{(n)}(z) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n-1)(1+z)^{\alpha-n}, \ldots.,$$

то $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$, $\ldots, f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n-1), \ldots.$

Тому ряд має вигляд

$$\boxed{\begin{aligned}(1+z)^{\alpha} &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)z^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)z^n}{n!} + \ldots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)z^n}{n!}, \quad |z| < 1.\end{aligned}} \quad (2.14)$$

При натуральному α ряд перетворюється у відоме скінченне розкладання за формулою бінома Ньютона, оскільки при $\alpha = m \in \mathrm{N}$ $f^{(m+j)}(0) = 0, \ j \ge 1$.

Приклад 2.9. При $\alpha = -1$ одержуємо добре відому суму нескінченної геометричної прогресії із знаменником $q = -z$.

$$\frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} = 1 - z + \frac{-1(-2)z^2}{2!} + \ldots + \frac{-1(-2)(-3)\ldots(-1-n+1)z^n}{n!} + \ldots =$$
$$= 1 - z + z^2 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1. \ \square \quad (2.15)$$

Приклад 2.10. При $\alpha = \dfrac{1}{2}$ маємо

$$\sqrt{1+z} = (1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}z + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})z^2}{2!} + \ldots + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(\frac{3}{2}-n)z^n}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}z - \frac{z^2}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot z^3}{2\cdot 4\cdot 6}\ldots + (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-3)z^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} + \ldots |z| < 1. \square$$

Приклад 2.11. При $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ маємо

$$\frac{1}{\sqrt{1+z}} = (1+z)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})z^2}{2!} + \ldots + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\ldots(\frac{1}{2}-n)z^n}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^2 + \ldots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}z^n + \ldots, \qquad |z| < 1. \ \square \quad (2.16)$$

- ***Логарифмічна функція*** $\ln(1+z)$

Оскільки

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{d\tau}{1+\tau} = \int_0^z \left[1 - \tau + \tau^2 + \ldots + (-1)^n\tau^n + \ldots\right]d\tau =$$

$$= \int_0^z 1d\tau - \int_0^z \tau d\tau + \int_0^z \tau^2 d\tau + \ldots + \int_0^z (-1)^n\tau^n d\tau + \ldots =$$

$$= \tau\Big|_0^z - \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^z + \frac{\tau^3}{3}\Big|_0^z + \ldots + (-1)^n\frac{\tau^{n+1}}{n+1}\Big|_0^z + \ldots = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

то

$$\boxed{\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1.} \quad (2.17)$$

- ***Обернені тригонометричні функції***

$$\boxed{\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}, \quad |z| < 1.} \quad (2.18)$$

$$\boxed{\operatorname{arcctg} z = \frac{\pi}{2} - z + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \ldots = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{2n-1}, \quad |z| < 1.} \quad (2.19)$$

$$\boxed{\arcsin z = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^5}{5} + \ldots +, \qquad |z| < 1.} \quad (2.20)$$

$$\boxed{\arccos z = \frac{\pi}{2} - z - \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^5}{5} - \ldots -, \qquad |z| < 1.} \quad (2.21)$$

Формули (2.18), (2.20) доводяться аналогічно формулі (2.17). Наприклад, (2.18) випливає з того, що

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \int_0^z \left[1 - \tau^2 + \tau^4 + \ldots + (-1)^n \tau^{2n} + \ldots\right] d\tau .$$

Формули (2.19) та (2.21) випливають із урахуванням того, що $\operatorname{arctg} x + \operatorname{acctg} x = \frac{\pi}{2}$ та $\arcsin x + \arccos = \frac{\pi}{2}$.

2.4 Методи розкладання елементарних функцій у степеневі*

- ***Зведення до однієї з функцій (2.9)-(2.21)***

Приклад 2.12

$$\ln(3+z) = \ln 3(1+\frac{z}{3}) = \ln 3 + \ln(1+\frac{z}{3}) = \ln 3 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{18} + \frac{z^3}{81} + \ldots, \quad |z| < 3. \square$$

- ***Диференціювання та інтегрування***

Приклад 2.13

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots\right)' = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots, \quad |z| < 1. \square$$

Зазначимо, що це розкладання можна також отримати з формули (2.14) при $\alpha = -2$.

Прикладом методу інтегрування степеневого ряду для одержання розкладання у степеневий ряд елементарної функції є доведення формул (2.17), (2.18).

* Інші методи див., наприклад [8]

- ***Множення степеневих рядів***

Приклад 2.14

$$\frac{\ln(1+z)}{(1+z)}=\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots\right)\left(1-z+z^2-z^3+\ldots\right)=$$

$$=z+z^2(-\frac{1}{2}-1)+z^3(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1)+\ldots=$$

$$=z-(1+\frac{1}{2})z^2+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})z^3-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})z^4+\ldots,\ \ |z|<1.\ \square$$

- ***Розкладання на найпростіші дроби***

Приклад 2.15

$$\frac{z+1}{(z-1)^2(z-2)}=\frac{A}{(z-1)^2}+\frac{B}{(z-1)}+\frac{C}{(z-2)},\text{ де}$$

$$A=\left.\frac{z+1}{z-2}\right|_{z=1}=-2;\ \ B=\left.\left(\frac{z+1}{z-2}\right)'\right|_{z=1}=-3;\ \ C=\left.\frac{z+1}{(z-1)^2}\right|_{z=2}=3.$$

Отже,

$$\frac{z+1}{(z-1)^2(z-2)}=-\frac{2}{(1-z)^2}-\frac{3}{z-1}+\frac{3}{z-2}=-\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{3}{1-z}-\frac{3}{2}\frac{1}{(1-z/2)}=$$

$$=-2(1+2z+3z^2+4z^3+\ldots)+3(1+z+z^2+\ldots)-\frac{3}{2}(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\ldots)=$$

$$=-\frac{1}{2}+z(-4+3-\frac{3}{4})+z^2(-6+3-\frac{3}{8})+\ldots,\qquad |z|<1.\ \square$$

- ***Використання формул Ейлера***

Приклад 2.16

$$e^z\cos z=e^z(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2})=\frac{e^{z(1+i)}+e^{z(1-i)}}{2}=\left[1\pm i=\sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\right]=\frac{e^{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}z}}+e^{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}z}}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}z}+\frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}z}\right)^2}{2!}+\ldots+1+\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}z}+\frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}z}\right)^2}{2!}+\ldots)=$$

$$=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^k}{k!}(e^{i\frac{\pi}{4}z}+e^{-i\frac{\pi}{4}z})z^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^k}{k!}\cos\frac{\pi k}{4}\cdot z^k,\quad |z|<\infty.\square$$

2.5 Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

• ***Наближене обчислення значень функцій***

Приклад 2.17. Обчислимо $\frac{1}{e}$ з точністю $0{,}01$. За формулою (2.9) при $z=-1$ маємо

$$\frac{1}{e}=e^{-1}\approx 1-1+\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{(-1)^4}{4!}+\frac{(-1)^5}{5!}+\ldots=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\ldots$$

– це ряд Лейбніца. Оскільки $\frac{1}{5!}<0{,}01$, то за теоремою Лейбніца $\frac{1}{e}\approx 0{,}375$ з точністю $0{,}01$. □

Приклад 2.18. Наближене обчислення коренів.

Обчислимо $\sqrt[3]{5}$ з точністю 0,01. Для цього скористаємося формулою (2.14). Вона справедлива при $|z|<1$, отже,

$$\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{\frac{125}{27}\cdot\frac{27}{25}}=\frac{5}{3}(1+0{,}08)^{\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}(1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}08+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}0{,}08^2+\ldots)=$$

$$=\frac{5}{3}(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{100}-\frac{2}{3^2 2!}\cdot\frac{8^2}{100^2}+\ldots).$$

Маємо ряд Лейбніца (починаючи з другого доданка) *. Оскільки $\left|\sqrt[3]{5}-\frac{5}{3}(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{100})\right|<\frac{5}{3}(\frac{2}{3^2 2!}\cdot\frac{8^2}{100^2})<0{,}01$, то за теоремою Лейбніца $\sqrt[3]{5}\approx 1{,}71$ з точністю $0{,}01$. □

• ***Наближене обчислення визначених інтегралів***

---

* Якщо діяти простіше: $\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{8-3}=2\sqrt[3]{1-\frac{3}{8}}$, то при розкладанні у біноміальний ряд (2.9) при $\alpha=\frac{1}{3}, z=-\frac{3}{8}$ ми одержимо ряд з від'ємними членами. Отже, застосувати теорему Лейбніца для оцінки похибки не можливо. Для оцінки похибки в такому випадку потрібно застосовувати інші достатньо складні методи.

Приклад 2.19. Обчислимо з точністю 0,01 інтеграл Френеля $\int_0^x \cos t^2 dt$ при $x = 0,5$.

$$\int_0^{0,5} \cos\sqrt{t}dt = \int_0^{0,5} (1 - \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{4!} - \ldots)dt = t - \frac{t^2}{2\cdot 2!} + \frac{t^3}{3\cdot 4!} - \ldots\Big|_0^{0,5} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2\cdot 2\cdot 2!} + \frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 4!} - \ldots$$

Оскільки ми маємо ряд Лейбніца і $\frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 4!} = \frac{1}{516} < 0,01$, то за теоремою Лейбніца $\int_0^{0,5} \cos\sqrt{t}dt \approx \frac{7}{16}$ з точністю 0,01. □

- ***Наближене розв'язання диференціальних рівнянь (ДР)***

Приклад 2.20. Розв'яжемо наближено задачу Коші

$$y' = 1 + y^2,\ y(-1) = 2.$$

Припустимо, що її розв'язок розкладається у степеневий ряд за степенями $(x-(-1))$*. За формулою (2.6) цей ряд має вигляд

$$y(x) = y(-1) + \frac{y'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{y''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \ldots. \qquad (2.22)$$

Підставимо у (2.22) $y(-1) = 2$ та $y'(-1) = 1 + y(-1)^2 = 1 + 2^2 = 5$, а також продиференціюємо обидві частини рівняння

$$\left(y'\right)' = \left(1 + y^2\right)' \Rightarrow y'' = 2yy' \Rightarrow y''(-1) = 2y(-1)y'(-1) = 2\cdot 2\cdot 5 = 20$$

і ще раз

$$\left(y''\right)' = \left(2yy'\right)' \Rightarrow y''' = 2y'y' + 2yy'' \Rightarrow y'''(-1) = 2(y'(-1))^2 + 2y(-1)y''(-1) =$$
$$= 2\cdot 5^2 + 2\cdot 2\cdot 20 = 130.$$

---

* Питання збіжності рядів, які виникають при розв'язанні ДР таким методом, ми тут не досліджуємо

Отже, маємо розв’язок

$$y(x) \approx 2 + \frac{5}{1!}x + \frac{20}{2!}x^2 + \frac{130}{3!}x^3 = 2 + 5x + \frac{65}{3}x^3 . \square$$

2.6 Ряди Лорана

Узагальненням степеневого ряду є ряд Лорана, який на відміну від степеневого ряду може містити $(z - z_0)$ як у додатному, так і у від’ємному степені.

Ряд

$$\ldots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad (2.23)$$

називається *рядом Лорана*, а ряди

$$\frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots \quad (2.24)$$

та

$$c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots \quad (2.25)$$

відповідно його *головною та правильною частинами*.

Якщо в ряді Лорана (2.23) головна частина (2.24) відсутня, то він перетворюється у степеневий ряд (2.2).

Знайдемо область збіжності ряду Лорана. Його правильна частина (2.25) це степеневий ряд, який збігається у крузі $|z - z_0| < R$.

У головній частині (2.24) зробимо заміну $w = \dfrac{1}{z - z_0}$, одержимо степеневий ряд $c_{-1}w + c_{-2}w^2 + \ldots$, який збігається в крузі $|w| \le R_1$. Тому ряд (2.24) збігається при $\dfrac{1}{|z - z_0|} < R_1$. Отже, головна частина збігається при $|z - z_0| > \dfrac{1}{R_1} = r$.

Ряд Лорана збігається там, де збігаються одночасно його правильна й головна частини. Таким чином, областю збіжності ряду Лорана є кільце $0 \le r < |z - z_0| < R \le \infty$ (рисунок 2.6).

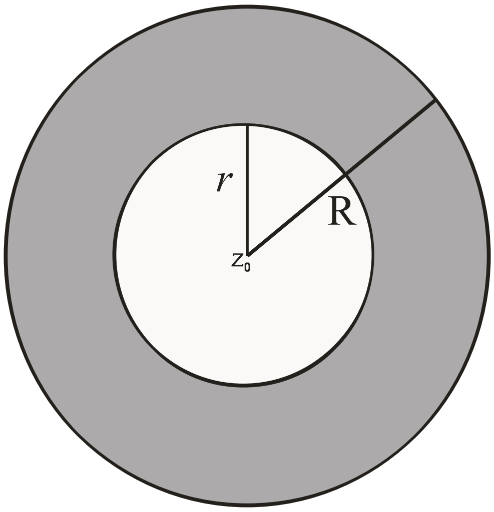

Рисунок 2.6

У будь-якій точці кільця збіжності сума ряду Лорана є аналітичною функцією. Справедливе також і зворотне твердження (яке є узагальненням теореми Тейлора).

Теорема Лорана. Однозначна та аналітична у кільці $r < |z - z_0| < R$ функція $f(z)$ розкладається у ряд Лорана (2.23), який збігається у цьому кільці.

2.7 Деякі прийоми розкладання функцій у ряд Лорана

На відміну від степеневих рядів для коефіцієнтів рядів Лорана функції $f(z)$ не існує простих формул типу (2.5). Тому розкладання в ряд Лорана часто здійснюється шляхом зведення до розкладання у степеневий ряд.

Приклад 2.21. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z) = \dfrac{z^2 + 3}{z - 2}$ за степенями $z - 2$.

Розділивши чисельник на знаменник, маємо

$$f(z)=\frac{z^2+3}{z-2}=\frac{z^2-4+7}{z-2}=z+2+\frac{7}{z-2}=\underbrace{\frac{7}{z-2}}_{\text{головна частина}}+\underbrace{6+(z-2)}_{\text{правильна частина}}.\square$$

Приклад 2.22. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z)=\cos\dfrac{z}{z+2i}$. В околі точки $z_0=-2i$, користуючись формулами (2.12), (2.13), маємо

$$f(z)=\cos\frac{z}{z+2i}=\cos\left(1-\frac{2i}{z+2i}\right)=\cos1\cos\frac{2i}{z+2i}+\sin1\sin\frac{2i}{z+2i}=$$

$$=\cos1\left(1-\frac{1}{2!}\left(\frac{2i}{z+2i}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{2i}{z+2i}\right)^4+\ldots\right)-\sin1\left(\left(\frac{2i}{z+2i}\right)-\frac{1}{3!}\left(\frac{2i}{z+2i}\right)^3+\ldots\right)=$$

$$=\underbrace{\cos1}_{c_0}-\underbrace{\frac{2i\sin1}{1!}}_{c_{-1}}\frac{1}{z+2i}-\underbrace{\frac{2^2i^2\cos1}{2!}}_{c_{-2}}\frac{1}{(z+2i)^2}+\underbrace{\frac{2^3i^3\sin1}{3!}}_{c_{-3}}\frac{1}{(z+2i)^3}+$$

$$+\underbrace{\frac{2^4i^4\cos1}{4!}}_{c_{-4}}\frac{1}{(z+2i)^4}+\ldots.\square$$

Приклад 2.23. Розкласти у ряд Лорана за степенями z функцію $f(z)=\dfrac{1}{z^2-z-2}$.

Функція $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$ неаналітична лише в точках $z_1=-1,\ z_2=2$.

Отже, є три кільця з центром у $z_0=0$, де функція аналітична: $K_1:0\le|z|<1;\ \ K_2:\ 1<|z|<2;\ \ K_3:2<|z|<\infty$ (рисунок 2.7).

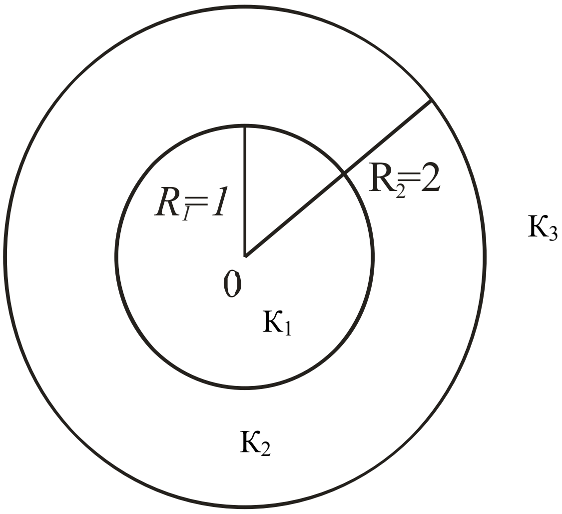

Рисунок 2.7

Розкладемо $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$ на найпростіші дроби

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)}=\frac{A}{(z+1)}+\frac{B}{(z-2)}\Rightarrow$$

$$A=\left.\frac{1}{(z-2)}\right|_{z=-1}=-\frac{1}{3};\qquad B=\left.\frac{1}{(z+1)}\right|_{z=2}=\frac{1}{3}.$$

Отже, $$f(z)=\frac{-1/3}{(z+1)}+\frac{1/3}{(z-2)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+2}.$$

Розглянемо далі кожний дріб окремо та скористаємося формулою (2.15) для суми нескінченної геометричної прогресії.

В кільці $K_1:|z|<1$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{1+z}=\begin{bmatrix} q=z \\ |q|=|z|<1 \end{bmatrix}=1-z+z^2-z^3+\ldots;$$

$$\frac{1}{(z-2)}=\frac{1}{-2(1-\frac{z}{2})}=\begin{bmatrix} q=\dfrac{z}{2} \\ |q|=\left|\dfrac{z}{2}\right|<\dfrac{1}{2}<1 \end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\ldots\right);.$$

Отже, в кільці K_1 маємо ряд Лорана

$$f(z)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+2}=-\frac{1}{3}\left(1-z+z^2-z^3+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\ldots\right)\right)=$$

$$=\underbrace{\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2}\right)}_{c_0}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^2}\right)}_{c_1}z+\underbrace{\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^3}\right)}_{c_2}z^2+\underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^4}\right)}_{c_3}z^3+\ldots$$

Зауважимо, що це розкладання містить тільки правильну частину ряду.

У кільці $K_2: 1<|z|<2$

$$\frac{1}{(z+1)}=\frac{1}{z}\frac{1}{(1+\frac{1}{z})}=\begin{bmatrix} q=\dfrac{1}{z} \\ |q|=\left|\dfrac{1}{z}\right|<1 \end{bmatrix}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2-\left(\frac{1}{z}\right)^3+\ldots\right);$$

$$\frac{1}{(z-2)}=\frac{1}{-2(1-\frac{z}{2})}=\begin{bmatrix} q=\dfrac{z}{2} \\ |q|=\left|\dfrac{z}{2}\right|<1 \end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\ldots\right);.$$

Отже, в кільці K_2 маємо ряд Лорана

$$f(z)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+2}\frac{1}{(z+1)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2-\left(\frac{1}{z}\right)^3+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\ldots\right)\right)=$$

$$=\ldots+\underbrace{\frac{1}{3}}_{c_{-4}}\cdot\frac{1}{z^4}\underbrace{-\frac{1}{3}}_{c_{-3}}\cdot\frac{1}{z^3}+\underbrace{\frac{1}{3}}_{c_{-2}}\cdot\frac{1}{z^2}\underbrace{-\frac{1}{3}}_{c_{-1}}\cdot\frac{1}{z}\underbrace{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}_{c_0}\underbrace{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}}_{c_1}z\underbrace{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}}_{c_2}z^2\underbrace{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}}_{c_3}z^3-\ldots$$

Це розкладання має і правильну, і головну частини.

Ряд Лорана у кільці $K_3: 2<|z|<\infty$ пропонуємо отримати самостійно. □

2.8 Зв'язок рядів Лорана і Фур'є

Розкладемо в ряд Фур'є в комплексній формі функцію $f(t)$, яка задана на $[-\pi;\pi)$:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{int}=\left[e^{int}=z\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n=g(z).$$

Висновок. Ряд Фур'є в комплекній формі функції $f(t)$, $t\in[-\pi;\pi)$ - це ряд Лорана функції $g(z)=f(t)$, де $z=e^{it}$ лежить на одиничному колі $|z|=1$.

Приклад 2.24. Розкласти функцію $f(t)=\dfrac{1}{3-2\cos x+\sin x}$ в ряд Фур’є, використовуючи зв'язок рядів Фур’є та Лорана.

$$\frac{1}{3-2\cos x+\sin x}=\begin{bmatrix} e^{iz}=z, \\ \cos x=\dfrac{z+1/z}{2},\ \sin x=\dfrac{z-1/z}{2i}\end{bmatrix}=\frac{2z}{(-2-i)z^2+6z-2+i}=$$

$$=\frac{2z}{(-2-i)(z-(2-i))(z-(2-i)/5)}=\frac{2(-2+i)}{5}\left(\frac{5/4}{z-(2-i)}-\frac{1/4}{z-(2-i)/5}\right)\boxed{=}$$

аналогічно прикладу 2.22 розкладаємо в ряд Лорана в кільці, яке містить одиничне коло:

$$\left|\frac{2-i}{5}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}}<|z|<\sqrt{5}=|2-i|$$

$$\boxed{=}\frac{2(-2+i)}{5}\left(-\frac{5/4}{2-i}\frac{1}{1-z/(2-i)}-\frac{1/4}{z}\frac{1}{1-(2-i)/5z}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2-i}+\left(\frac{z}{2-i}\right)^2+\left(\frac{z}{2-i}\right)^3+\ldots\right)+\frac{2-i}{10z}\left(1+\frac{2-i}{5z}+\left(\frac{2-i}{5z}\right)^2+\left(\frac{2-i}{5z}\right)^3+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\left((2+i)z+\frac{2-i}{z}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2}\left((2+i)^2z^2+\frac{(2-i)^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^3}\left((2+i)^3z^3+\frac{(2-i)^3}{z^3}\right)+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\left(2\cdot\frac{z+1/z}{2}-\frac{z-1/z}{2i}\right)+\frac{1}{5^2}\left(3\cdot\frac{z^2+1/z^2}{2}-4\cdot\frac{z^2-1/z^2}{2i}\right)+$$

$$+\frac{1}{5^3}\left(2\cdot\frac{z^3+1/z^3}{2}-11\cdot\frac{z^3-1/z^3}{2i}\right)+\ldots=$$

$$=\left[\frac{z^n+1/z^n}{2}=\cos nx;\frac{z^n-1/z^n}{2i}=\sin nx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cos x-\frac{1}{5}\sin x+\frac{3}{5^2}\cos 2x-\frac{4}{5^2}\sin 2x+\frac{2}{5^3}\cos 3x-\frac{11}{5^3}\sin 3x+\ldots$$

2.9 Ізольовані особливі точки

Визначення. Точка z_0 називається *ізольованою особливою* точкою функції $f(z)$, якщо існує таке R, що в кільці $0<|z-z_0|<R$ функція $f(z)$ аналітична, але в самій точці z_0 вона такою не є.

За поводженням $f(z)$ поблизу точки z_0 розрізняють три типи ізольованих особливих точок.

1 Якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ існує і не дорівнює нескінченності, то z_0 називають *усувною особливою точкою* функції $f(z)$.

2 Якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ існує, але дорівнює нескінченності, то z_0 називають *полюсом* функції $f(z)$.

3 Якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не існує, то z_0 називають *істотною особливою точкою* функції $f(z)$.

Приклад 2.25. $f(z)=\dfrac{z^2+3z+2}{z+1}$. При $z=-1$ $f(z)$ не визначена, тому $z=-1$ особлива точка. При $z\neq-1$

$f(z)=\dfrac{(z+1)(z+2)}{z+1}=z+2$, $\lim\limits_{z\to -1} f(z)=1$. Отже, $z=-1$ усувна особлива точка. □

Приклад 2.26. $f(z)=\dfrac{z^2}{z+2i}$. При $z=2i$ $f(z)$ не визначена, тому $z=2i$ особлива точка. $\lim\limits_{z\to -2i} f(z)=\dfrac{-4}{0}=\infty$, отже, $z=2i$ це полюс. □

Приклад 2.27. $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$. При $z=0$ $f(z)$ не визначена, тому $z=0$ особлива точка. $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ не існує. Дійсно, розглянемо дійсні $z=x$, тоді $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ не існує (рисунок 2.8). Отже, $z=0$ істотна особлива точка функції $f(z)$.□

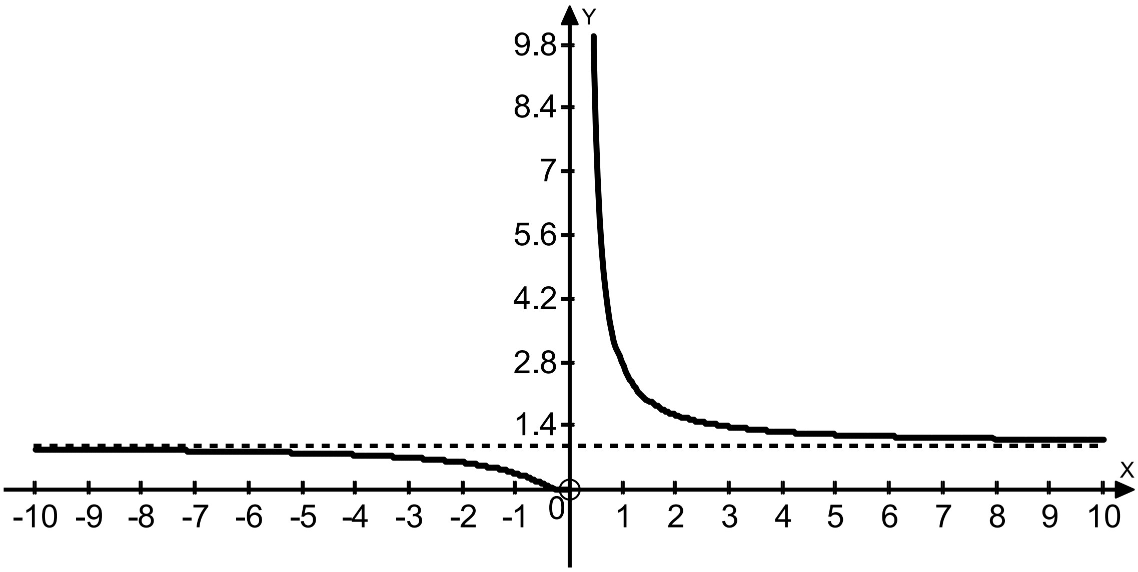

Рисунок 2.8

Нехай z_0 ізольована особлива точка функції $f(z)$, тоді $f(z)$ аналітична у кільці $0<|z-z_0|<R$. За теоремою Лорана в цьому кільці $f(z)$ розкладається у ряд Лорана (2.23).

Теорема про будову ряду Лорана в околі ізольованої особливої точки.

1 Якщо z_0 усувна особлива точка функції $f(z)$, то головна частина в ряді Лорана (2.24) відсутня.

2 Якщо z_0 полюс функції $f(z)$, то головна частина ряду Лорана (2.24) містить скінченну кількість доданків.

3 Якщо z_0 істотна особлива точка функції $f(z)$, то головна частина ряду Лорана (2.24) містить нескінченну кількість доданків.

Приклад 2.28. Ряд Лорана $ch\dfrac{1}{z}=1+\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{1}{4!z^4}+\ldots$ містить нескінченну кількість доданків у головній частині, тому $z=0$ істотна особлива точка функції $f(z)=ch\dfrac{1}{z}$. □

Визначення. Якщо z_0- полюс і головна частина ряду Лорана дорівнює

$\dfrac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\ldots+\dfrac{c_{-1}}{z-z_0}$, де $c_{-m}\neq 0$, то говорять, що *полюс* z_0 *має порядок* m.

Без розкладання у ряд Лорана порядок полюса можна знаходити за такою теоремою.

Теорема 2.3. Нехай $f(z)=\dfrac{h(z)}{g(z)}$, де $h(z), g(z)$ аналітичні в точці z_0, та

$$h(z_0)=h'(z_0)=\ldots=h^{(m-1)}(z_0)=0,\ h^{(m)}(z_0)\neq 0,$$
$$g(z_0)=g'(z_0)=\ldots=g^{(n-1)}(z_0)=0,\ g^{(n)}(z_0)\neq 0.$$

Якщо $n>m$, то z_0 - полюс $f(z)$ порядку $n-m$.

Якщо $n\leq m$, то z_0 усувна особлива точка $f(z)$.

Приклад 2.29. $f(z)=ctgz=\dfrac{\cos z}{\sin z}$**.** Особливі точки $z=k\pi,\ k\in \mathrm{Z}$**.**

$$h(k\pi)=\cos k\pi\neq 0\Rightarrow m=0,$$
$$g(k\pi)=\sin k\pi=0,\ g'(k\pi)=\cos k\pi\neq 0\Rightarrow n=1.$$

Отже, $z=k\pi,\ k\in \mathrm{Z}$ – полюси порядку $n-m=1$.□

Приклад 2.30. $f(z)=\dfrac{e^z-1}{\sin z-z}$**.** Особлива точка $z=0$**.**

$$h(0)=e^0-1=0, h'(0)=e^0\neq 0\Rightarrow m=1,$$
$$g(0)=\sin 0-0=0,\ g'(0)=\cos 0-1=0,\ g''(0)=-\sin 0=0,$$
$$g'''(0)=-\cos 0\neq 0\Rightarrow n=3.$$

Отже, $z=0$ полюс порядку $n-m=2$.□

Список літератури

1 Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1997. – 512с. – (Высшая математика). – ISBN 5-222-00215-2.

2 Вища математика: Збірник задач. Ч.2: Звичайні диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. /П.П. Овчинников, П.С. Кропив’янський, С.П. Полушкін та ін. – К.: Техніка, 2004. – 376 с. – ISBN 966-575-127-1.

3 Дубовик, В.П. Вища математика: Навч. посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вузів / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2003. – 648 с. – (Університетська бібліотека). – ISBN 966-539-320-0.

4 Давыдов Р.Н. Методические указания и задания к типовому расчету «Элементы теории функции комплексного переменного» / Р.Н. Давыдов, В.И. Храбустовский. – Харьков: ХИИТ, 1993. –30 с.

5 Козел В.А. Методические указания и задания к типовому расчету «Элементы гармонического анализа» / В.А. Козел, В.И. Храбустовский. – Харьков: ХИИТ, 1992. –30 с.

6 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – 2-е изд., перераб. – М., 1967. – 640 с.

7 Мышкис А.Д. Математика для технических вузов: Специальные курсы. Учеб. пособие / А.Д. Мышкис. – 2-е изд. – С.Пб: Лань, 2002. – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – ISBN 5-8114-0395-X.

8 Сидоров Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1982. – 488 с.

9 Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. – 2-е изд., перераб. / В.А. Болгов, Б.П. Демидович, В.А. Ефименко [и др.]; под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича – М.: Наука, 1986. – Ч. 2.– 464 с.

10 Сборник задач по математике для втузов: Специальные разделы математического анализа. – 2-е изд., перераб. /

В.А. Болгов, Б.П. Демидович, В.А. Ефименко [и др.]; под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича – М.: Наука, 1986. – Ч. 2.– 368 с.

11 Титчмарш Е.Ч. Теория функций / Е. Титчмарш; пер. с англ. В.А. Рохлина. – 2-е изд. – М.: Наука, 1980. – 463 с. – Библиогр.: с. 456-461.

12 Храбустовський В.І. Теорія функцій комплексної змінної. Методичні вказівки і завдання до розрахунково-графічної роботи з розділу дисципліни «Вища математика» / В.І. Храбустовський, О.А. Осмаєв, О.І. Удодова. – Харків: УкрДАЗТ, 2007. – 30 с.

В.І. Храбустовський, Ю.С. Шувалова

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ

Конспект лекцій з дисципліни
«*ВИЩА МАТЕМАТИКА*»

Частина 2

РЯДИ, ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ

КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Відповідальний за випуск Шувалова Ю.С.

Редактор Еткало О.О.

Підписано до друку 21.03.11 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,0. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.