№3151

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

з розділу дисципліни
"*ВИЩА МАТЕМАТИКА*"

Харків – 2011

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 10 березня 2009 р., протокол № 6.

Методичні вказівки присвячені двом розділам курсу вищої математики: вступ в аналіз і комплексні числа, та охоплюють такі теми: побудова графіків, обчислення границь, неперервність функцій, точки розриву та їх класифікація; дії з комплексними числами в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах, добування кореня з комплексного числа.

Методичні вказівки містять 8 завдань з названих тем по 30 варіантів у кожному, наведено зразки виконання завдань.

Методичні вказівки призначені для студентів загально-технічних спеціальностей усіх форм навчання.

Укладачі:

проф. О.О. Стрельнікова,
доц. В.В. Науменко

Рецензент

доц. А.О. Дрогаченко

ЗМІСТ

Вступ	4
Теоретичні питання	4
Варіанти завдань	5
Завдання 1	5
Завдання 2	6
Завдання 3	10
Завдання 4	11
Завдання 5	12
Завдання 6	12
Завдання 7	13
Завдання 8	14
Теоретичні відомості та зразки виконання завдань	15
Побудова графіків функцій за допомогою трансформацій	15
Обчислення границь	19
Застосування еквівалентних до обчислення границь	24
Перша визначна границя та її застосування	25
Друга визначна границя та її застосування	27
Неперервність функцій та точки розриву першого роду	28
Розриви неперервності другого роду. Асимптоти графіка функції	30
Алгебраїчна форма комплексного числа	35
Розв’язання квадратних рівнянь з від’ємним дискримінантом	36
Тригонометрична та показникова форми комплексного числа	37
Добування кореня *n*–го степеню з комплексного числа	42
Список літератури	44

ВСТУП

Методичні вказівки присвячені одному з розділів курсу вищої математики – «Вступу до математичного аналізу». Контрольна робота 2 з вищої математики для студентів-заочників є перевіркою знань з цього розділу і охоплює такі теми:

1 Функція дійсної змінної. Елементарні функції, їхні властивості і графіки.

2 Теорія границь. Застосування границь до дослідження функцій.

3 Неперервність функцій. Точки розриву та їх класифікація.

4 Комплексні числа і дії над ними в алгебраїчній, показниковій і тригонометричній формах. Формула Муавра, добування коренів з комплексного числа.

Вказівки містять питання за програмою цього розділу, список навчальної літератури, основні теоретичні відомості, приклади розв'язання задач із розгорнутими поясненнями і варіанти завдань.

Вказівки рекомендовані студентам як заочної, так і денної форм навчання.

Номери варіантів індивідуальних завдань видаються викладачем. Робота, що містить виконаний чужий варіант завдань, не зараховується.

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1 Основні елементарні функції і їхні графіки. Графіки функцій, здобутих найпростішими перетвореннями основних елементарних.

2 Границя функції у точці та на нескінченності. Нескінченно малі і нескінченно великі величини і їхні властивості. Еквівалентні функції, застосування еквівалентних величин до обчислення границь.

3 Перша і друга визначні границі. Число **е**, натуральний логарифм.

4 Неперервність функцій. Точки розриву, їхня класифікація. Неперервність елементарних функцій.

5 Комплексні числа і їхнє зображення на комплексній площині. Алгебраїчні дії над комплексними числами. Модуль і аргумент.

6 Показникова і тригонометрична форми комплексного числа, формула Ейлера, піднесення до цілого степеня. Формула Муавра.

7. Добування кореня з комплексного числа.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Задано функцію $y=f(x)$. Потрібно:

а) побудувати графік $y=f(x)$;

б) за допомогою трансформацій цього графіка побудувати графіки таких функцій: $y_1=f(ax)$, $y_2=f(-ax)$, $y_3=f(x/a)$, $y_4=f(x+b)$, $y_5=f(x-b)$, $y_6=Af(x)$, $y_7= -Af(x)$, $y_8=f(x)+B$, $y_9=f(x)-B$.

№	$f(x)$	*a*	*b*	*A*	*B*
1	$\sqrt{x}$	2	1	0.5	1
2	x^3	0.5	2	2	-1
3	2^x	2	2	2	1
4	log_2x	0.5	1	3	-1
5	$log_{0.5}x$	2	2	0.5	-2
6	0.5^x	0.5	2	1.5	2
7	$\sqrt{x}$	2	-1	2	-2
8	x^3	0.5	-2	2	1
9	2^x	2	2	0.5	-2
10	log_2x	0.5	1	3	-1
11	0.5^x	2	2	2	2
12	$log_{0.5}x$	0.5	2	0.5	-1
13	$\sqrt{x}$	2	-1	1.5	1
14	x^3	0.5	-2	2	2
15	2^x	2	2	3	-2
16	log_2x	0.5	-1	3	-2
17	0.5^x	2	2	2	1
18	$log_{0.5}x$	0.5	-2	2	1
19	$\sqrt{x}$	2	-1	0.5	-1
20	x^3	0.5	1	1.5	2
21	2^x	2	-2	2	2

22	$log_2 x$	0.5	-1	2	-2
23	0.5^x	2	-1	3	2
24	$log_{0.5} x$	0.5	2	0.5	-1
25	$\sqrt{x}$	2	-1	2	-1
26	x^3	0.5	2	2	2
27	2^x	2	-2	3	-1
28	$log_2 x$	0.5	1	3	2
29	0.5^x	2	-2	2	-1
30	$\sqrt{x}$	0.5	2	1.5	2

Завдання 2. *Обчислити границі.*

1 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x+2}{4x^2+12}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{(x+2)\operatorname{tg}3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+1}\right)^{2x+6}$.

2 а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-7x+12}{(x-4)(x+2)}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+3x^2-2x}{5x^4-x^3+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x^2}{3(\sqrt[3]{1-x^2}-1)}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x+3}$.

3 а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+12x-64}{(x-4)(x+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x^4+1}{x^4-x^3+2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{(x+4)\operatorname{tg}3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^{2x+9}$.

4 а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-12x+35}{(x-5)(2x+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x}}{(x-3)(x+2)}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{-2x^2-x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(x-2)\dfrac{e^{5x}-1}{\arcsin 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+9}{x-5}\right)^{3x+1}$.

5 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{(x-1)(x+2)}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{5+2x}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3+x^2-1}{2x^3+3x^2+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x^2}-1}{9x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x-4}\right)^{3x+2}$.

6 а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{(x-2)(5x+6)}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{14-x}}{(x-5)(x+1)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^3+x^2+1}{-3x^4-x^3+x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\operatorname{tg}2x}{\sqrt{1-x^2}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{5}{x}}$.

7 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{3x-2}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^3+1}{x^4-2x^2+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)(\sqrt[3]{1-3x^2}-1)}{(x+2)\sin 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x}$.

8 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{x(x+4)}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x}-3}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-3x+2}{2x^2+4x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\cos 2x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{4x-1}$.

9 а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-9x+8}{(x-8)(x+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x}-4}{x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x+1}{2x^4+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos 2x}{(\sqrt{1-3x}-1)(3x+1)}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x+3}$.

10 а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{(x-2)(x+2)}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{1+x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3+5}{-x^5+x^2+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2x\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{5x+1}$.

11 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{(x-1)(x+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+1}{5x^4-x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{e^{2x^2}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+3}\right)^{x}$.

12 а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{x+2}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x^3-2x^2}{9x^4-2x^3+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 9x}{\operatorname{tg} 2x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{x}$.

13 а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-x-15}{(x-3)(x+2)}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{(x-2)(x-3)}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{10}-x^9+x^2}{3x^{11}-x^8}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{x}$.

14 а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+x^4-2}{-2x^5+3x^4+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1+3x)}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$.

15 а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)(2x+5)}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x}}{(x-3)(x+2)}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3+x^2-1}{2x^4+3x^2+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x\cos 5x}{x^2(x+4)}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{x+2}$.

16 а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+4x-7}{4x^2-3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x+3}-3}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-5x+4}{4x^2-2x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln(1+3x)\,\mathrm{tg}\,2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{2x}$.

17 а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+6x^2+5x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{\sqrt{1+2x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+3x}{3x^4+3x^3+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-1}{\sin 2x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x+3}$.

18 а) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{4x^2-12x-16}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x^4+1}{x^4-x^3+2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\arcsin 3x}{\ln(1+3x)\cdot\mathrm{tg}\,2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x+3}$.

19 а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x^2-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+2}{x^4-3x+5}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+2)(e^{5x}-1)}{arc\,\mathrm{tg}\,3x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}(1+4x)^{2/x+3}$.

20 а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+7x+3}{x^2-2x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{4+2x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x+3}{5x^3+7x^2+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5(e^{7x}-1)}{\arcsin 9x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2-4}$.

21 а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^2+1}{6x^4-x^3+5x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1-2x}-1)\sin 3x}{1-\cos^2 5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x-2}$.

22 а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{3x-2}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-7x^2+1}{x^4-3x^2+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,5x^2(e^{3x}-1)}{\sin(x^3/2)}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2-3}$.

23 а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-4x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-\sqrt{3x+4}}{x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x+3}{4x^2-5x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{(x^2-x)\operatorname{tg}3x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+3}{x+3}\right)^{1-2/x}$.

24 а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+8x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{5-x}-3}{\sqrt{1-2x}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+12x-3}{2x^2+3x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{ctg}3x}{\sin 3x^2}\right)(e^{2x}-1)$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+4}\right)^{x+3}$.

25 а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{7-x}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+6}{3-2x^3-4x^5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\arcsin 2x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{3+2/x}$.

26 а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-3x^2+4}{-2x^4-x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{arctg}(x/2)}{1-\cos 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{3x}+1}\right)^{5/\sqrt{x}}$.

27 а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+3x-9}{x^2-3x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2}{9x-2x^3+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x^2}{2\ln(1+2x)\operatorname{arctg}3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{4-5x}$.

28 а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{(x-3)(x+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{6}}{x^2+2x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^7-x^3+x}{10+3x^5-x^7}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos 5x}{\operatorname{tg}3x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+5}\right)^{x+2}$.

29 а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2+5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{3x+4}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2-5}{1+2x-2x^3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{x\operatorname{arctg}2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+x}{2x^2-1}\right)^{2x-3}$.

30 а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-8x-16}{x^2-6x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2\sqrt{4+x}-\sqrt{1-x}}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x^3-1}{x^2+3x^3+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{3x}-1)\cdot \operatorname{tg} 2x}{\sqrt{1-3x}-1}$;   д). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-4x}{x^2+3}\right)^{5-x}$.

Завдання 3. Функція $f(x)$ є заданою різними аналітичними виразами для різних областей зміни незалежної змінної. Потрібно побудувати графік $f(x)$. Виходячи з графіка, визначити наявність точок розриву $f(x)$ та їх тип.

1) $f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ якщо } x\le -1 \\ x^2+1, \text{ якщо } -1<x\le 1 \\ 3-x, \text{ якщо } x>1 \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ якщо } x<-1 \\ x^2+1, \text{ якщо } -1\le x<1 \\ -x+3, \text{ якщо } x\ge 1 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ якщо } x\le 0 \\ (x-1)^2, \text{ якщо } 0\le x<2 \\ 3-x, \text{ якщо } x\ge 2 \end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), \text{ якщо } x\le -1 \\ x^3, \text{ якщо } -1<x<0 \\ x, \text{ якщо } x\ge 0 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} x+4, \text{ якщо } x<-1 \\ x^2+2, \text{ якщо } -1\le x<1 \\ 2x, \text{ якщо } x\ge 1 \end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ якщо } x\le 0 \\ 1-x^2, \text{ якщо } 0<x\le 1 \\ x-1, \text{ якщо } x>1 \end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases} -(x+1)^2, \text{ якщо } x<-1 \\ (x+1), \text{ якщо } -1\le x<0 \\ 3x, \text{ якщо } x\ge 0 \end{cases}$ 8) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, \text{ якщо } x<0 \\ x^3+2, \text{ якщо } 0\le x<1 \\ 3x, \text{ якщо } x\ge 1 \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} -2x, \text{ якщо } x\le 0 \\ x^2+1, \text{ якщо } 0<x\le 2 \\ 2x+1, \text{ якщо } x>2 \end{cases}$ 10) $f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ якщо } x<0 \\ x^2, \text{ якщо } 0\le x<2 \\ 2x, \text{ якщо } x>1 \end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases} -3x-2, \text{ якщо } x<-1 \\ x^2+1, \text{ якщо } -1\le x<1 \\ 2x, \text{ якщо } x\ge 1 \end{cases}$ 12) $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ якщо } x\le 0 \\ (x+1)^2, \text{ якщо } 0<x\le 2 \\ 4-x, \text{ якщо } x>2 \end{cases}$

13) $f(x)=\begin{cases} \cos x, \text{ якщо } x\le 0 \\ x^2+1, \text{ якщо } 0<x<1 \\ x, \text{ якщо } x\ge 1 \end{cases}$ 14) $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ якщо } x\le 0 \\ (x-2)^2, \text{ якщо } 0<x<2 \\ x-2, \text{ якщо } x\ge 2 \end{cases}$

15) $f(x)=\begin{cases}-2x+1, \text{ якщо } x<0\\ \cos x, \text{ якщо } 0\le x<\pi\\ 2-x, \text{ якщо } x\ge\pi\end{cases}$

16) $f(x)=\begin{cases}1-x, \text{ якщо } x<-1\\ x^2+1, \text{ якщо } -1\le x<2\\ 2x-3, \text{ якщо } x\ge 2\end{cases}$

17) $f(x)=\begin{cases}3x+4, \text{ якщо } x\le -1\\ 2x^2, \text{ якщо } -1\le x<1\\ 2x-1, \text{ якщо } x\ge 1\end{cases}$

18) $f(x)=\begin{cases}-2x+4, \text{ якщо } x\le \text{-}2\\ -x^3, \text{ якщо } -2<x\le 1\\ x-2, \text{ якщо } x>1\end{cases}$

19) $f(x)=\begin{cases}-x^2, \text{ якщо } x\le 0\\ \operatorname{tg} x, \text{ якщо } 0\le x<\pi/4\\ 2, \text{ якщо } x\ge \pi/4\end{cases}$

20) $f(x)=\begin{cases}x, \text{ якщо } x\le 1\\ (x-2)^2, \text{ якщо } 1<x<3\\ 6-x, \text{ якщо } x\ge 3\end{cases}$

21) $f(x)=\begin{cases}-x, \text{ якщо } x\le 0\\ x^2, \text{ якщо } 0<x\le 2\\ x+1, \text{ якщо } x>2\end{cases}$

22) $f(x)=\begin{cases}3x+4, \text{ якщо } x<-1\\ x^2-2, \text{ якщо } -1\le x<2\\ x, \text{ якщо } x\ge 2\end{cases}$

23) $f(x)=\begin{cases}x+2, \text{ якщо } x<1\\ 3x^2-2, \text{ якщо } 1\le x<2\\ 2x+6, \text{ якщо } x\ge 2\end{cases}$

24) $f(x)=\begin{cases}x^3+8, \text{ якщо } x<-2\\ 2-2x, \text{ якщо } -2\le x<2\\ x^2-1, \text{ якщо } x\ge 2\end{cases}$

25) $f(x)=\begin{cases}x+3, \text{ якщо } x\le 0\\ 4-x^2, \text{ якщо } 0<x<2\\ 2-x, \text{ якщо } x\ge 2\end{cases}$

26) $f(x)=\begin{cases}-x, \text{ якщо } x\le -2\\ 5-x^2, \text{ якщо } -2<x\le 1\\ 2x, \text{ якщо } x>1\end{cases}$

27) $f(x)=\begin{cases}3x+1, \text{ якщо } x<0\\ x^2+1, \text{ якщо } 0\le x\le 1\\ 1, \text{ якщо } x>1\end{cases}$

28) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, \text{ якщо } x\le 1\\ 2x, \text{ якщо } 1<x\le 2\\ 2+x, \text{ якщо } x>2\end{cases}$

29) $f(x)=\begin{cases}x^3, \text{ якщо } x\le -1\\ x-1, \text{ якщо } -1<x<1\\ 5-x, \text{ якщо } x\ge 1\end{cases}$

30) $f(x)=\begin{cases}x-3, \text{ якщо } x\le 0\\ x+1, \text{ якщо } 0<x<4\\ 3+\sqrt{x}, \text{ якщо } x\ge 4\end{cases}$

Завдання 4. Задана функція $f(x)$. Знайти точки перетину її графіка з осями координат, точки розриву, рівняння асимптот та інтервали знакосталості. За допомогою отриманих даних побудувати ескіз графіка.

1) $\frac{(x-2)(x+3)}{x+1}$; 2) $\frac{(x-4)(x+1)}{2x-7}$; 3) $\frac{(x-2)(x+3)}{2x+1}$; 4) $\frac{x-3}{(x+1)(x-4)}$;

5) $\frac{(x-2)(2x+3)}{x+1}$; 6) $\frac{(x+2)(x+3)}{2x+1}$; 7) $\frac{x-2}{(x+2)(x-4)}$; 8) $\frac{(x-2)(x+3)}{2x+3}$;

9) $\frac{(x-3)(2x+3)}{x-1}$; 10) $\frac{(x-2)(x+3)}{3x+1}$; 11) $\frac{(x-2)(x+3)}{x+4}$; 12) $\frac{(x-1)(x+3)}{x+2}$;

13) $\frac{x+3}{(x+1)(x+5)}$; 14) $\frac{(x-2)(x+5)}{x+3}$; 15) $\frac{(x+1)(x-3)}{2x+1}$; 16) $\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$;

17) $\frac{x+3}{(x-1)(x+5)}$; 18) $\frac{(x-2)(x-4)}{2x+5}$; 19) $\frac{(x+2)(x+3)}{x+1}$; 20) $\frac{(x-2)(x+3)}{x+1}$;

21) $\frac{(x-2)(2x+3)}{x-4}$; 22) $\frac{x+2}{(x-1)(x+4)}$; 23) $\frac{(x-2)(x+3)}{2x-3}$; 24) $\frac{(x-2)(2x+3)}{x+1}$;

25) $\frac{x+2}{(x+1)(x-5)}$; 26) $\frac{(2x-1)(x+3)}{x+1}$; 27) $\frac{(3x-1)(x+3)}{x+4}$;

28) $\frac{2x-3}{(x+2)(x+5)}$; 29) $\frac{(x+4)(2x+3)}{x+1}$; 30) $\frac{(x-3)(2x+3)}{x-1}$

Завдання 5. Подати в алгебраїчній формі вираз $w=\frac{z_1}{z_2}+m\,z_3$, виходячи з таблиці.

№	*m*	*z₁*	*z₂*	*z₃*		№	*m*	*z₁*	*z₂*	*z₃*
1	2	3+4i	2-3i	3+i		16	-1	2+i	3-i	1-i
2	3	2-3i	3+5i	2-3i		17	-2	3-2i	2+3i	2+2i
3	-3	3-i	2-i	-1-i		18	-3	2+5i	-3-2i	3-i
4	2	4+2i	3-2i	2+3i		19	2	-3-2i	-1-2i	2+2i
5	-1	3-i	4+3i	1-3i		20	-2	2-5i	1+i	3-i
6	2	-3-2i	-1+2i	2+i		21	3	3+4i	3-2i	2-3i
7	3	-2+4i	3+2i	1-2i		22	-3	2-3i	2+3i	3-3i
8	2	4-3i	2-i	3-2i		23	2	3-2i	-2-2i	2+2i
9	-2	3-2i	1+i	-3-i		24	3	-2+5i	-3-3i	1-2i
10	2	3+4i	2+i	2+i		25	-2	3+4i	3+2i	3-i
11	2	-3-2i	2-3i	4-i		26	-1	-2-i	3-2i	3+i
12	--3	3+5i	3+3i	1-4i		27	-2	-3-2i	2+2i	1-i
13	-2	-3-i	1-i	2-3i		28	-3	2+i	3-3i	2+i
14	2	3+2i	2-3i	3+2i		29	-2	3-4i	-1-2i	3-2i
15	3	-2-i	4+i	-2-2i		30	-3	2+3i	-2+3i	2+2i

Завдання 6. Знайти комплексні корені квадратного рівняння та зробити перевірку для кореня з від'ємною

уявною частиною. Розкласти квадратний тричлен на лінійні множники.

1) $x^2-4x+8=0$; 2) $x^2+8x+25=0$; 3) $x^2-2x+37=0$;
4) $x^2+8x+41=0$; 5) $x^2-12x+40=0$; 6)$x^2-10x+29=0$;
7) $x^2+2x+26=0$; 8) $x^2-6x+25=0$; 9) $x^2-10x+50=0$;
10) $x^2+8x+52=0$; 11) $x^2+6x+18=0$; 12) $x^2-2x+17=0$;
13) $x^2+10x+26=0$; 14) $x^2-6x+45=0$; 16) $x^2-10x+61=0$;
16) $x^2-4x+40=0$; 17) $x^2+8x+17=0$; 18) $x^2+4x+29=0$;
19) $x^2-2x+5=0$; 20) $x^2+6x+10=0$; 21) $x^2-8x+20=0$;
22) $x^2+10x+34=0$; 23) $x^2-4x+20=0$; 24) $x^2+4x+5=0$;
25) $x^2-6x+13=0$; 26) $x^2+2x+10=0$; 27) $x^2-10x+41=0$;
28) $x^2+12x+45=0$; 29) $x^2+4x+13=0$; 30) $x^2-8x+17=0$.

Завдання 7. Записати в алгебраїчній формі вираз:

1) $\dfrac{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^7\left(-\sqrt{3}+3i\right)^{11}}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{16}}$; 2) $\dfrac{(2-2i)^8\left(-1+i\sqrt{3}\right)^9}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{20}}$;

3) $\dfrac{(2+2i)^5\left(-\sqrt{3}+i\right)^{10}}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^9}$; 4) $\dfrac{(4-4i)^{11}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^9\left(1+i\sqrt{3}\right)^{13}}$; 5) $\dfrac{(-1+i)^{21}\left(\sqrt{3}+i\right)^{20}}{(-2-2i)^{25}}$;

6) $\dfrac{(2\mathrm{e}^{i\pi})^{11}\left(3+i\sqrt{3}\right)^{15}}{\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)^{17}(2-2i)^{13}}$; 7) $\dfrac{(1-i)^{29}\left(-\sqrt{3}+i\right)^{17}}{\left(2+i2\sqrt{3}\right)^{10}(2i)^{11}}$; 8) $\dfrac{(2+2i)^{10}\left(\sqrt{3}-3i\right)^8}{\left(4\sqrt{3}-4i\right)^9}$;

9) $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{31}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^{10}(-2+2i)^{11}}$; 10) $\dfrac{(1+i)^{13}\left(\sqrt{3}+i\right)^{13}}{(-2i)^{25}}$; 11) $\dfrac{(-\sqrt{3}+i)^{20}(1+i)^{21}}{\left(3+i\sqrt{3}\right)^{19}}$;

12) $\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^7(2-2i)^9}{\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{17}}$; 13) $\dfrac{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{13}\left(1+i\sqrt{3}\right)^9}{\left(-2\sqrt{3}-2i\right)^{11}}$;

14) $\dfrac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{15}\left(3-i\sqrt{3}\right)^{20}}{\left(\sqrt{3}-i\sqrt{3}\right)^{16}(2i)^{27}}$; 15) $\dfrac{(1+i)^{13}\left(\sqrt{3}+i\right)^{13}}{(-2i)^{25}}$;

16) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^5(-2-2i)^7}{\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^{11}}$; 17) $\dfrac{(24i)^4\left(1-i\sqrt{3}\right)^6}{(1+i)^5\left(-3-i\sqrt{3}\right)^8}$; 18) $\dfrac{(-4i)^4\left(1-i\sqrt{3}\right)^9}{(1+i)^{12}\left(\sqrt{3}+i\right)^{11}}$;

19) $\dfrac{(2+2i)^{17}\left(-1-i\sqrt{3}\right)^9}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{29}}$; 20) $\dfrac{(2+2i)^{21}}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{20}\left(\sqrt{3}+i\right)^{19}}$;

21) $\dfrac{\left(-\sqrt{3}+i\right)^{12}(1-i)^{15}}{(2+2i)^{14}}$; 22) $\dfrac{(4\,e^{i\pi})^{11}\left(3-i\sqrt{3}\right)^{12}}{\left(\sqrt{3}-i\sqrt{3}\right)^{10}(2+2i)^{15}}$; 23) $\dfrac{(-1+i)^{9}\left(\sqrt{3}-i\right)^{12}}{\left(2-i2\sqrt{3}\right)^{11}(2i)^{-5}}$;

24) $\dfrac{(-2+2i)^{16}\left(\sqrt{3}+3i\right)^{12}}{\left(4\sqrt{3}+4i\right)^{13}}$; 25) $\dfrac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{37}}{(2+2i)^{11}\left(\sqrt{3}-i\right)^{15}}$;

26) $\dfrac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{17}\left(-\sqrt{3}-3i\right)^{6}}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{16}}$; 27) $\dfrac{\left(-3+i\sqrt{3}\right)^{17}(-1+i)^{12}}{\left(3+i\sqrt{3}\right)^{22}(3i)^{7}}$;

28) $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{11}(2+2i)^{9}}{\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{21}}$; 29) $\dfrac{\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{13}\left(1-i\sqrt{3}\right)^{11}}{\left(2\sqrt{3}+2i\right)^{15}}$;

30) $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{27}\left(3-i\sqrt{3}\right)^{20}}{(2-2i)^{11}\left(-\sqrt{3}+i\right)^{7}}$.

Завдання 8. Знайти всі значення кореня n-го степеня з комплексного числа. Зобразити отримані значення на комплексній площині. Зробити перевірку для одного з них.

1) $\sqrt{2\sqrt{3}-2i}$; 11) $\sqrt[6]{32-i32\sqrt{3}}$; 21) $\sqrt[5]{32i}$;

2) $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$; 12) $\sqrt[3]{-4+i4\sqrt{3}}$; 22) $\sqrt[4]{-16i}$;

3) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{-16+16i}}$; 13) $\sqrt{-2\sqrt{3}+2i}$; 23) $\sqrt[3]{-8}$;

4) $\sqrt[4]{8-8i}$; 14) $\sqrt{2\sqrt{2}++i2\sqrt{2}}$; 24) $\sqrt[3]{-2+2i}$;

5) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{16}}$; 15) $\sqrt[5]{\dfrac{32}{i}}$; 25) $\sqrt[5]{-i}$;

6) $\sqrt[3]{16-16i}$; 16) $\sqrt{-2-2i}$; 26). $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$;

7) $\sqrt[5]{-\sqrt{3}-i}$; 17) $\sqrt[5]{-32i}$; 27) $\sqrt[6]{-64}$;

8) $\sqrt[6]{\sqrt{3}-i}$; 18) $\sqrt[4]{8\sqrt{2}-i8\sqrt{2}}$; 28) $\sqrt[5]{\sqrt{3}-i}$;

9) $\sqrt[3]{-4-i4\sqrt{3}}$; 19) $\sqrt{\dfrac{16}{1+i\sqrt{3}}}$; 29) $\sqrt[3]{-27i}$;

10) $\sqrt[4]{\dfrac{-81+81i}{32}}$; 20) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{8-8i}}$; 30) $\sqrt[3]{-27}$.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ЗРАЗКИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

Тут наведено зразки виконання завдань. Для більш повного засвоєння матеріалу перед кожним завданням подано назву теми, до якої це завдання відноситься, основні теоретичні відомості, що необхідні для його виконання. У наведеному зразку подано необхідні коментарі та зауваження, в яких обговорені різні особливості і варіації, що виникають в окремих варіантах. Їх не обов'язково відтворювати при виконанні завдання.

Побудова графіків функцій за допомогою трансформацій

Під трансформаціями графіка будемо розуміти його зсуви, розтягування та стискання уздовж осей координат.

Припустимо, що маємо графік деякої довільної функції $y=f(x)$. Тоді

I Графік функції $y=f(ax)$ можна отримати з графіка функції $y=f(x)$ діленням абсцис останнього на число a. Це твердження має такі наслідки:

- якщо $a>1$, графік функції $y=f(ax)$ отримуємо з графіка функції $y=f(x)$ стисканням останнього в a рази до осі *ОУ* вздовж осі *ОХ;*
- якщо $0<a<1$, графік функції $y=f(ax)$ отримуємо з графіка функції $y=f(x)$ розтягуванням останнього в $1/a$ рази від осі *ОУ* вздовж осі *ОХ*;
- якщо $a<0$, спочатку потрібно побудувати $f(|a|x)$, а потім зробити дзеркальне відбиття відносно осі *ОУ*.

II Графік функції $f(x+b)$ можна отримати зсувом графіка $f(x)$ вздовж осі *ОХ* на b одиниць праворуч ($b<0$) або ліворуч ($b>0$).

III Графік функції $Af(x)$ можна отримати з графіка функції $y=f(x)$ множенням ординат останього на число A, тобто:

- розтягуванням графіка $f(x)$ в A рази уздовж осі *ОУ* відносно осі *ОХ*, якщо $A>1$;

- стисканням графіка $f(x)$ в $1/A$ рази уздовж осі *ОУ*, якщо $0< A <1$;

- дзеркальним відбиттям графіка $y=|A|f(x)$ відносно осі *ОХ*, якщо $A<0$.

IV Графік функції $f(x)+B$ можна отримати зсувом графіка $f(x)$ уздовж осі *ОУ* на *В* одиниць угору ($B>0$) або вниз ($B<0$).

Завдання 1. Задано функцію $y=f(x)$. Потрібно:

а) побудувати графік цієї функції;

б) за допомогою трансформацій цього графіка побудувати графіки таких функцій:

$y_1=f(ax)$, $y_2=f(-ax)$, $y_3=f(x/a)$, $y_4=f(x+b)$, $y_5=f(x-b)$, $y_6=Af(x)$, $y_7= -Af(x)$, $y_8=f(x)+B$, $y_9=f(x)-B$.

Нехай $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $a=2$, $b=1$, $A=1.5$, $B= -1$.

Розв'язання: для виконання п. а) спочатку обчислимо значення наданої функції у декількох точках та запишемо їх до таблиці.

x	-8	-1	0	1	8
$\sqrt[3]{x}$	-2	-1	0	1	2

Тепер, враховуючи отримані значення, побудуємо шуканий (назвемо його **базовим**) графік функції $y=f(x)$ (див. рисунок 1, крива 0).

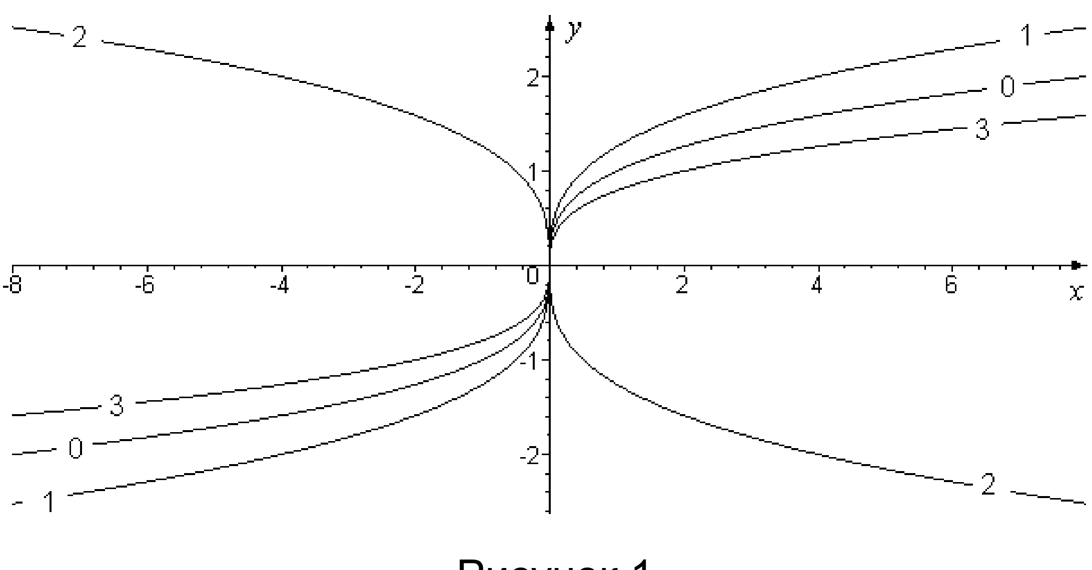

Рисунок 1

Переходимо до виконання п.б).

1) Графік функції $y_1=\sqrt[3]{2x}$ отримуємо з базового стисканням останнього у два рази до осі *OУ* вздовж осі *OX* (рисунок 1, крива 1).

2) Графік функції $y_2=\sqrt[3]{-2x}$ отримуємо з базового стисканням його у два рази до осі *OУ* вздовж осі *OX* та дзеркальним відбиттям відносно осі *OУ* або (що дасть той же результат) дзеркальним відбиттям графіка y_1 відносно *OУ* (рисунок 1, крива 2).

3) Графік функції $y_3=\sqrt[3]{\frac{x}{2}}$ отримуємо з базового розтягуванням останнього у два рази від осі *OУ* вздовж *OX* (рисунок 1, крива 3).

Для побудови подальших графіків доцільно зробити новий рисунок, на якому знову необхідно накреслити базовий графік (рисунок 2, крива 0).

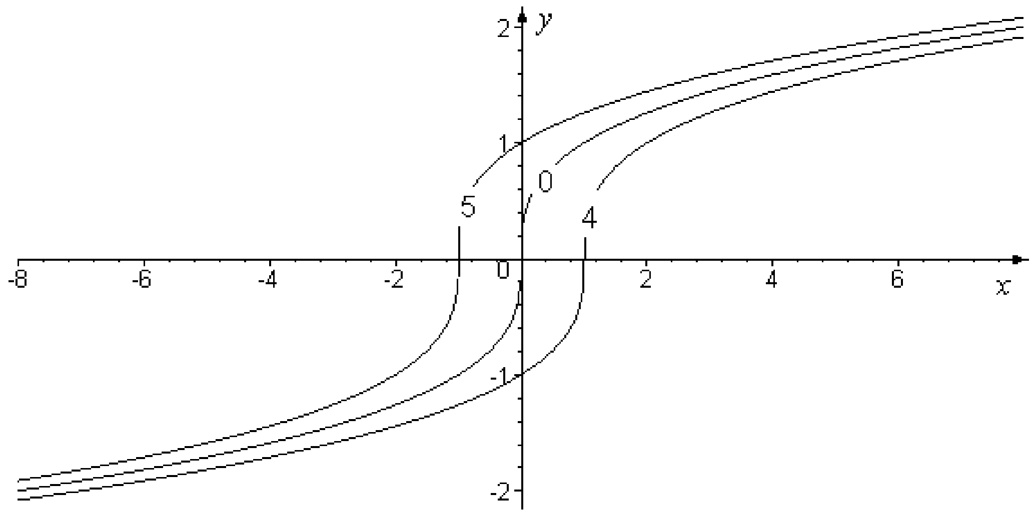

Рисунок 2

4) Графік функції $y_4=\sqrt[3]{x-1}$ отримуємо з базового зсувом остан-нього вздовж осі *OX* на одну одиницю праворуч (рисунок 2, крива 4).

5) Графік функції $y_5=\sqrt[3]{x+1}$ отримуємо з базового зсувом останнього вздовж осі *OX* на одну одиницю ліворуч (рисунок 2, крива 5).

Подальші побудови виконаємо на рисунку 3. Знову будуємо базовий графік (рисунок 3, крива 0).

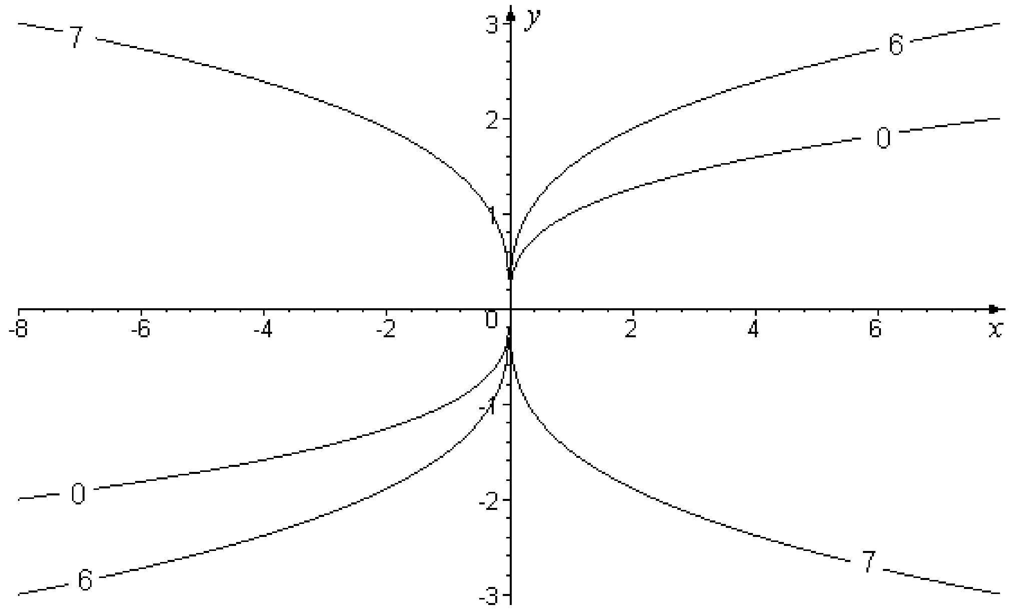

Рисунок 3

6) Графік функції $y_6=1{,}5\sqrt[3]{x}$ отримуємо з базового розтягуван-ням останнього у півтора рази вздовж осі *OУ* (рисунок 3, крива 6).

7) Графік функції $y_7= -1{,}5\sqrt[3]{x}$ отримуємо з базового розтягуванням останнього у півтора рази вздовж осі *OУ* та дзеркальним відбиттям відносно осі *OX* (або дзеркальним відбиттям відносно осі *OX* графіка y_6) (рисунок 3, крива 7).

Подальші побудови виконаємо на рисунку 4.

8) Графік функції $y_8=\sqrt[3]{x}-1$ отримуємо з базового зсувом останнього на одну одиницю вниз (рисунок 4, крива 8).

9) Графік функції $y_9=\sqrt[3]{x}+1$ отримуємо з базового зсувом останнього на одну одиницю вгору (див. рисунок 4, крива 9).

Зауваження: Для контролю правильності трансформацій доцільно перевірити, чи співпадають значення функцій (1-9) на графіках з тими, що можуть бути отримані при обчисленні за відповідними формулами для якого-небудь одного значення аргументу, наприклад, $x=1$.

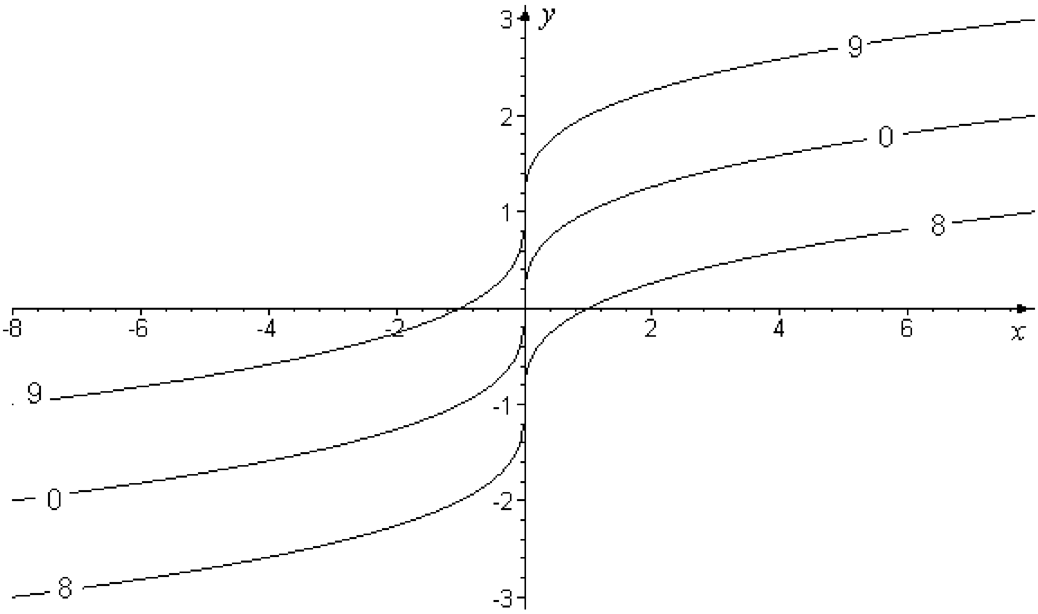

Рисунок 4

Обчислення границь

Точне визначення поняття границі наведено у підручниках. Нагадаємо його зміст.

Запис $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ (*A* – деяке число, a – деяке значення незалежної змінної x), спрощено кажучи, означає таку поведінку функції $f(x)$ поблизу значення $x=a$: чим ближче наближається x до a, тим менша різниця між значеннями $f(x)$ та числом *A*. Ця різниця буде менша від як завгодно малого наперед заданого числа для усіх x, достатньо близьких до a.

Запис $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ означає, що функція $f(x)$ поблизу $x = a$ необмежено збільшує свої значення, тобто буде мати значення, більші будь-яке число, якщо *x* достатньо близький до числа a.

Зауважимо, що значення $x=a$ може не належати до області визначення функції.

Записи $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = A$ або $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$ мають аналогічний сенс, але вважається , що *x* наближається до нескінченно-віддаленої точки, інакше кажучи, необмежено віддаляється від точки x =0.

Обчислення границь проводиться за правилами, які можна розбити на декілька груп:

I) Функція $f(x)$ називається неперервною у точці $x = a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. З цього випливає, що при обчисленні границі неперервної функції не виникає жодних труднощів. Замість обчислення границі достатньо обчислити $f(a)$. **Неперервністю володіють усі елементарні функції в усіх внутрішніх точках їх області визначення.** Неперервними є також будь-які їх алгебраїчні комбінації та суперпозиції. Це на практиці означає, що коли ми маємо справу із „звичайною” функцією $f(x)$ і можемо обчислити $f(a)$, тоді $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Приклади:

$$\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8; \qquad \lim_{x\to 1} \sin x = \sin 1; \qquad \lim_{x\to 0} \ln\cos x = \ln\cos 0 = \ln 1 = 0;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 3\cos 2x}{x+4} = \frac{0^2 + 3\cos 0}{0+4} = \frac{3}{4};$$

Із змісту поняття границі виходить також, що границя сталої величини дорівнює самій сталій, тобто $\lim\limits_{x\to a} C = C$, наприклад, $\lim\limits_{x\to 4} 6 = 6$.

II) Спосіб, що описано вище, не дає результату у випадках, коли неможливе обчислення значення $f(a)$. Така ситуація створюється насамперед, коли при обчисленні цього значення виникає ділення на 0 (як відомо, така операція заборонена правилами арифметики). Неможливе обчислення також $f(a)$ у випадку $x \to \infty$, адже нескінченність не є числом!

Користуючись визначенням границі у таких ситуаціях, можна отримати такі результати, які можна підтвердити графіками відповідних функцій:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim_{x\to\infty} x = \infty}$$

та їх аналоги

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^\alpha} = \infty; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0; \quad \lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty},$$

де $\alpha>0$ – довільне число.

Узагальнимо ці рівності.

Нехай α(x), β(x), f(x), F(x), G(x) – довільні функції, про які відомо таке:

$\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$ – функції, що називають нескінченно малими;

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A,\quad A\neq 0,$

$\lim\limits_{x\to a} F(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to a} G(x)=\infty$ – функції, які називають нескінченно великими.

Тоді можна зробити висновки відносно алгебраїчних комбінацій таких функцій:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=0,\qquad \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{F(x)}=0,\qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\alpha(x)}=\infty,\qquad \lim_{x\to a}\frac{F(x)}{\alpha(x)}=\infty,$$

$$\lim_{x\to a} f(x)F(x)=\infty,\qquad \lim_{x\to a} F(x)G(x)=\infty,\qquad \lim_{x\to a} F(x)+f(x)=\infty,$$

$$\lim_{x\to a} F(x)+\alpha(x)=\infty,$$

Символічно ці правила можна сформулювати так:

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{A}{\infty}=0,\quad \dfrac{0}{\infty}=0,\quad \dfrac{A}{0}=\infty,\quad \dfrac{\infty}{0}=\infty,\quad A\,\infty=\infty,\\ \infty\,\infty=\infty,\quad \infty+A=\infty,\quad \infty+0=\infty,\quad A\neq 0\end{array}}$$

або словами:

– якщо у знаменнику дробу стоїть нескінченно велика, а у чисельнику ні, то границею буде число нуль;

– якщо у знаменнику дробу стоїть нескінченно мала, а у чисельнику ні, то границею буде нескінченість;

– якщо один з множників є нескінченно великою, а другий **не** є нескінченно малою, то добуток буде нескінченним;

– якщо один з доданків є нескінченно великою, а другий ні, то сума буде нескінченною (коли обидва доданки нескінченно великі, то значення мають їх знаки; якщо вони різні, нескінченості можуть „погаситися”).

Приклади: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3}{x^2-4}=\left(\dfrac{2^3}{0}\right)=\infty;\quad \lim\limits_{x\to\infty}3x^2\cdot(3+5x^4)=(\infty\infty)=\infty$.

III) Випадки, які можна символічно позначити як

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{\infty}{\infty},\quad \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{0}{0},\quad \lim_{x\to a}\alpha(x)F(x)=0\infty,\quad \lim_{x\to a}F(x)-G(x)=\infty-\infty$$

називаються невизначеностями. У них результат не можна передбачити заздалегідь, він буде залежати від конкретного вигляду функцій $\alpha(x),\beta(x),F(x),G(x)$. Обчислення границь саме у таких випадках і є предметом теорії границь, і саме вони наведені у завданні 2.

Загальна схема виконання завдань з обчислення границь полягає у наступному. Спочатку пересвідчуємося, що дійсно маємо справу з невизначеністю, потім виконуємо деякі тотожні перетворення, після яких виникає ситуація, описана в п. I або II, що і дозволяє обчислити границю.

Завдання 2а. *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-5x+6}$

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-5x+6}=\left(\frac{2\cdot 2^2-3\cdot 2-2}{2^2-5\cdot 2+6}=\frac{0}{0}\right)$.

Значення наданої функції при x=2 не існує, виразу 0/0 неможливо дати жодного числового значення, маємо невизначеність типу 0/0. Щоб знайти границю, необхідно зробити тотожні перетворення квадратних тричленів, що знаходяться у чисельнику та знаменнику алгебраїчного дробу за тотожністю $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1,x_2 - корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, які знаходяться за формулою $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

У наведеному прикладі маємо:

- для чисельника $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3^2-8}}{4}=\frac{3\pm 1}{4}$,

тобто x_1=*2*, x_2= - *0.5*, отже, $2x^2-3x+1=2(x-2)(x+0.5);$

- для знаменника $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}$,

тобто $x_1=2, x_2=3,$ отже, $x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$

Підставимо нові вирази в умову та отримаємо

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x+0{,}5)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x+0{,}5)}{(x-3)}=\frac{2(2+0{,}5)}{2-3}=\frac{5}{-1}=-5.$$

Коментар: Однаковий множник чисельника та знаменника *(x–2)* скорочується; значення одержаного виразу можна обчислити (на відміну від початкового) при *x=2* за допомогою неперервності.

Завдання 2б. Обчислити границю

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}=\frac{\sqrt{6+3}-3}{3-3}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Розв'язання: Безпосередня підстановка числа 3 у вираз приводить до ділення 0/0, тобто до неможливості обчислення його значення при $x=3$.

Коментар: Ідея розв'язку цього прикладу ґрунтується на тому, щоб спочатку тотожними перетвореннями перевести множники, що при x=3 перетворюються на 0, з ірраціонального типу до раціонального.

Домножимо чисельник та знаменник дробу на спряжений вираз $(\sqrt{2x+3}+3)$, після чого скористуємося тотожністю $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$.

Коментар: Таким чином, отримаємо раціональний вираз $-2(3-x)$, який скоротиться з виразом *(x-3)* у знаменнику, що дасть можливість провести обчислення отриманого дробу при *x=3*.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)}{(3-x)(\sqrt{2x+3}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)}{(3-x)(\sqrt{2x+3}+3)}=$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(3-x)(\sqrt{2x+3}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{-2}{\sqrt{2x+3}+3}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}.$$

Коментар: Якщо ірраціональності, що перетворюються на 0, знаходяться і у чисельнику і у знаменнику початкового дробу, тоді таке домноження на спряжений вираз потрібно зробити для кожного з них.

Завдання 2в. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2-4}{x^3+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Коментар: Обчислити значення наданої функції у граничній точці неможливо, оскільки нескінченність не є числом, крім того, можна довести, що і чисельник і знаменник прямують до нескінченності.

Розв'язання: Винесемо за дужки у чисельнику та знаменнику старші степені змінної *x* та проведемо скорочення. Таким чином отримаємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2-4}{x^3+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(3-5/x\ -4/x^3)}{x^3(1+5/x^3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-5/x\ -4/x^3}{1+5/x^3}=3.$$

Коментар: У чисельнику вираз $(3-5/x-4/x^2)$ $\quad$ *при* $\quad x\to\infty$ наближається до числа 3, оскільки другий та третій його доданки прямують до 0, якщо $x\to\infty$. З такої ж причини вираз у дужках знаменника прямує до 1.

Розглянемо другий метод розв'язання прикладів такого типу.

Застосування еквівалентних до обчислення границь

Кажуть, що нескінченно малі або нескінченно великі функції $f(x)$ та $f_1(x)$ еквівалентні при $x\to a$ (позначається $f(x)\sim f_1(x)$ при $x\to a$), якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)/f_1(x)=1$. Застосування еквівалентних до обчислення границь ґрунтується на такій їх властивості: якщо $f(x)\sim f_1(x)$, а $g(x)\sim g_1(x)$, тоді $\lim\limits_{x\to a}f(x)/g(x)=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)/g_1(x)$. Інакше кажучи, при обчисленні границь відношення функцій може бути замінене на відношення еквівалентних (які, як правило, мають більш простий вигляд), що приводить до спрощення початкового дробу $f(x)/g(x)$ та можливості обчислення його границі. Аналогічна властивість має місце для добутку функцій $f(x)$ та $g(x)$: $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)g_1(x)$.

Відомо, що багаточлен n–го степеню при $x \to \infty$ є еквівалентним одночлену, який співпадає із старшим його степенем, тобто

$$\boxed{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \sim a_0 x^n \qquad \text{якщо} \qquad x \to \infty .}$$

Повертаючись до поданого прикладу, розв'яжемо його таким способом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2-4}{x^3+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{matrix}3x^3-5x^2-4\sim 3x^3\\ x^3+5\sim x^3\end{matrix}\ (x\to\infty)\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^3}=3\lim_{x\to\infty}1=3 .$$

Відповіді співпали.

Для порівняння наведемо ще такий приклад:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^2-4}{x^3+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$
$$=\left|\begin{matrix}3x^4-5x^2-4\sim 3x^4\\ x^3+5\sim x^3\end{matrix}\ (x\to\infty)\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4}{x^3}=3\lim_{x\to\infty}x=\infty .$$

Перша визначна границя та її застосування

Першою визначною називають границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Ця границя має наслідками такі еквівалентності:

$$\boxed{\sin\alpha \sim \alpha; \quad \mathrm{tg}\,\alpha \sim \alpha; \ \arcsin\alpha \sim \alpha; \ \mathrm{arctg}\,\alpha \sim \alpha; \ (1-\cos\alpha) \sim \frac{\alpha^2}{2}, \quad \text{якщо } \alpha \to 0.}$$

При застосуванні еквівалентних не обов'язково, щоб α була незалежною змінною, вона може залежати від деякого іншого аргументу x, важливо тільки, щоб $\alpha(x) \to 0$.

Завдання 2г. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,5x^2}{x\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)$.

Розв'язання: Застосуємо еквівалентності, що є наслідками першої визначної границі: $tg5x^2 \sim x^2$ і $\sin 2x \sim 2x$, та отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x^2}{x\sin 2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{x\cdot 2x}=\frac{5}{2}.$$

Наведемо ще один приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\arcsin 3x}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{\arcsin 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}1-\cos 6x\sim(6x)^2/2=18x^2\\ \arcsin 3x\sim 3x\end{matrix}\quad (x\to 0)\right|=6\cdot\lim_{x\to 0}x=6\cdot 0=0.$$

Тут показана інша **форма запису** застосування еквівалентних величин, пов'язаних з першою визначною границею.

При знаходженні границь у цьому завданні можуть стати у нагоді і такі еквівалентні:

$\sqrt[m]{1+\alpha}$ -1~$\frac{1}{m}\alpha$, або $(1+\alpha)^{\frac{1}{m}}$-1~$\frac{1}{m}\alpha$, а також $ln(1+\alpha)\sim\alpha$ та $(e^{\alpha}-1)\sim\alpha$

при $\alpha\to 0$.

Тут також не має значення, чи буде α незалежною змінною, чи вона буде залежати від деякої іншої змінної x, тобто $\alpha=\alpha(x)$, суттєвим є тільки $\alpha\to 0$.

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-1)(\sqrt[3]{1-4x^2}-1)}{ln(1-2x^4)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}e^{3x}-1\sim 3x\\ ln(1-2x^4)\sim -2x^4\\ \sqrt[3]{1-4x^2}-1\sim\dfrac{-4}{3}x^2\\ (x\to 0)\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x(-\frac{4}{3}x^2)}{-2x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}=\infty.$$

Зауваження: Еквівалентні можна вважати специфічними тотожними перетвореннями, які можна виконувати при обчисленні границь.

Друга визначна границя та її застосування

Друга визначна границя має вигляд

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \mathrm{e} \quad \text{або} \quad \lim_{\beta\to\infty}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{\beta} = \mathrm{e}\ ,}$$

де **e***=2,7182818284590...* – число Ейлера. Тут α та β можуть бути також функціями деякої змінної x. Друга визначна границя застосовується для розкриття невизначеностей типу $u(x)^{v(x)}$, якщо $u(x)\to 1$, а $v(x)\to\infty$, що умовно записують у вигляді $u(x)^{v(x)}=(1)^{\infty}$.

Завдання 2д. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{3x+6}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{3x+6} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-4}{x+2}\right)^{3x+6} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-4}}\right]^{\frac{-4}{x+2}(3x+6)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(3x+6)}{x+2}} = e^{-12};$$

Тут застосовано другу визначну границю у вигляді $\lim\limits_{\beta\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\beta}\right)^{\beta} = \mathrm{e}$, як β використано вираз $\dfrac{-4}{x+2}$.

Коментар: Спочатку тотожними перетвореннями у явному вигляді виділено величину $\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{-4}{x+2}$, потім у показнику виділено $\beta=\dfrac{x+2}{-4}$. Величина, що знаходиться у квадратних дужках, прямує згідно з основною формулою до числа **e** , показник (див. завдання 2в) - до числа -12, а сам вираз - до **e** $^{-12}$.

Наведемо ще один приклад.

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{3/x+6} = \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3x+6}{2x}} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{(\frac{3}{x}+6)2x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\frac{3}{x}+6)2x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(6+12x)} = e^{6};$$

Тут застосовано другу важливу границю у вигляді $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \mathrm{e}$, як α використано $2x$.

Неперервність функції. Точки розриву першого роду

Визначення неперервності було наведене раніше. На практиці часто користуються геометричною інтерпретацією цієї властивості, а саме: у точках, де функція $f(x)$ є неперервною, графік зображається неперервною лінією. Точки, де неперервність порушується, називаються точками розриву, графік $f(x)$ у таких точках також зазнає розриву.

Якщо різниця між значеннями праворуч і ліворуч точки розриву є скінченним числом, розрив називається розривом першого роду, або скінченним стрибком.

Для більш точного аналізу ситуації деталізуємо поняття границі.

Границя $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ називається *лівою,* вона характеризує поведінку $f(x)$ біля значення аргументу $x = a$ при $x<a$, тобто ліворуч від точки $x = a$.

Границя $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ називається *правою,* вона характеризує поведінку $f(x)$ біля значення аргументу $x = a$ при $x>a$, тобто праворуч від точки $x = a$.

Зміст цих односторонніх границь продемонстровано на рисунку 5. Тут $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$, у точці $x = a$ функція $f(x)$ має розрив типу скінченного стрибка, величина стрибка дорівнює

$$\delta = \lim_{x \to a+0} f(x) - \lim_{x \to a-0} f(x) = A_2 - A_1 .$$

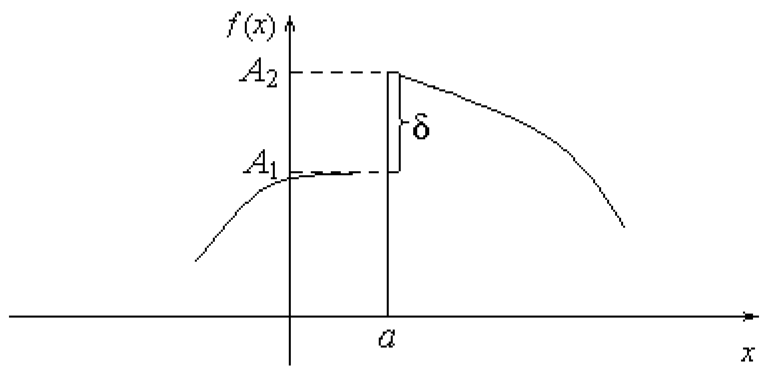

Рисунок 5

Завдання 3. Функція $f(x)$ задається різними аналітичними виразами для різних областей зміни аргументу. Потрібно побудувати графік функції. Виходячи з графіка, визначити наявність точок розриву та їх тип. При наявності розриву першого роду, обчислити величину стрибка **δ**.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3, \ \text{ÿêùî} \quad x \le 0; \\ 3-x^2, \ \text{ÿêùî} \quad 0 < x \le 2; \\ (x-4)^2, \ \text{ÿêùî} \quad x > 2. \end{cases}$$

Розв'язання: Будуємо графік функції $f(x)$ (рисунок 6) на інтервалі $(-\infty;0]$ він співпадає з прямою $y = 2x+3$, на інтервалі $(0;2]$ – з параболою $y=3-x^2$, на інтервалі $(2;\infty)$ – з параболою $(x-4)^2$.

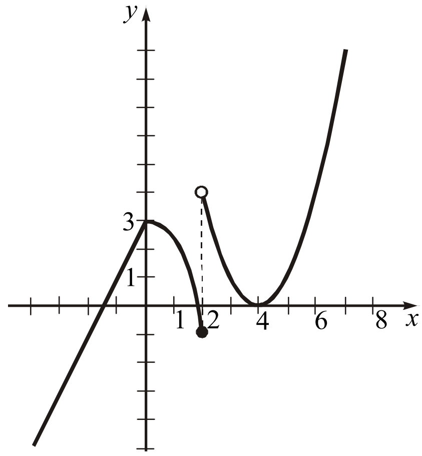

Рисунок 6

З рисунка 6 робимо висновок, що точка $x = 2$ є точкою розриву першого роду, тобто скінченним стрибком, а значення δ дорівнює

$$\delta = \lim_{x\to 2+0} f(x) - \lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2+0}(x-4)^2 - \lim_{x\to 2-0} 3-x^2 = (-2)^2 - [3-2^2] = 5 \, .$$

Розриви неперервності другого роду. Асимптоти графіка функції

У випадку, коли хоча б одна з односторонніх границь (ліва або права) у деякій точці *a* дорівнює нескінченності, тобто

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty \quad \text{або} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty . \qquad (1)$$

Говорять, що точка $x=a$ *є точкою розриву другого роду,* або *нескінченним стрибком*. Зокрема функції, фрагменти графіків яких наведені на рисунках 7-10, при $x=a$ зазнають розриву типу нескінченого стрибка.

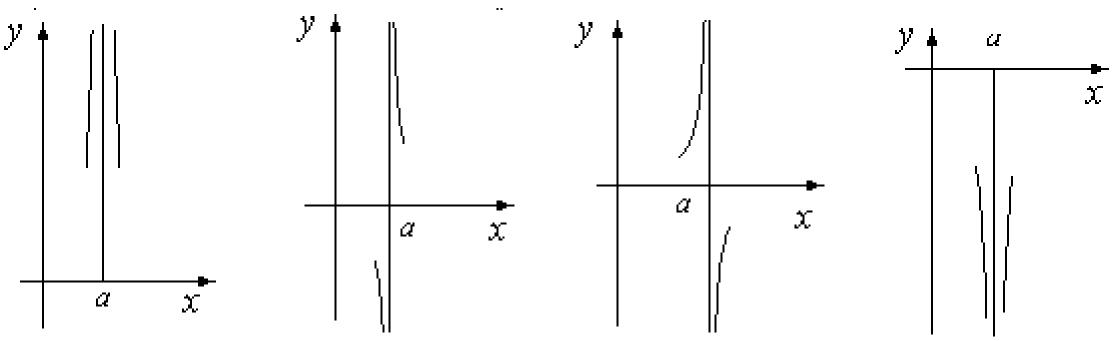

Рисунок 7 Рисунок 8 Рисунок 9 Рисунок 10

Вертикальна пряма з рівнянням $x=a,$ до якої наближається графік, коли $x\to a,$ називається *вертикальною асимптотою графіка функції.*

Поведінка усіх наведених на цих графіках функцій поблизу точки $x=a$ описується обома рівностями (1) (однією $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ також), але у подальшому нам необхідно буде їх відрізняти. Це можна зробити, якщо ввести символи +∞ та – ∞ замість ∞. Тоді можна записати так:

для рисунка 7 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty\,;$ (2)

для рисунка 8 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty\,;$ (3)

для рисунка 9 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty\,;$ (4)

для рисунка 10 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty\,.$ (5)

Деталізація (1) у вигляді (2)-(5) виявиться корисною при побудові графіків функцій, що мають нескінченний стрибок.

Похила асимптота – це пряма, до якої наближається графік функції при $x \to \infty$, тобто при великих значеннях модуля аргументу *x.* Рівняння цієї асимптоти може бути записане у вигляді $y = kx+b$. Числа k та b знаходяться як границі:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] \tag{6}$$

У випадку, коли $k = 0$, похила асимптота також називається *горизонтальною.*

Наявність асимптот не є обов'язковою. Наприклад, квадратна парабола не має жодної асимптоти - ні похилої, ні вертикальної. Якщо хоча б одна з границь (6) не є скінченним числом, похилої асимптоти у функції $f(x)$ не існує. Якщо відсутні точки, де має місце хоча б одна з рівностей (1) – відсутні вертикальні асимптоти.

Завдання 4. Задана функція $f(x) = \frac{x^2-4}{x+3}$. Знайти точки перетину її графіка з осями координат, точки розриву, рівняння асимптот та інтервали знакопостійності. За допомогою отриманих даних побудувати ескіз графіка.

Розв'язання: Знайдемо спочатку рівняння похилої асимптоти

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x(x+3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x+3} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4-x^2-3x}{x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x-4}{x+3} = -3.$$

Таким чином, похила асимптота існує і має рівняння $y=x-3$.

Дослідимо функцію на наявність вертикальних асимптот.

Очевидно, єдиною точкою, де надана функція не існує, і де вона може мати вертикальну асимптоту, є точка $x = -3$. Знайдемо ліву та праву границі у цій точці. Маємо

$$\lim_{x \to -3-0} \frac{(x-2)(x+2)}{x+3} = \left(\frac{5}{-3+3} = \frac{5}{0} \right) = -\infty \,.$$

Пояснення: Вираз у дужках, формально не маючи сенсу, тим не менш дає інформацію про поведінку функції (дробу) поблизу x= -3: чисельник дробу наближається до числа 5, а знаменник прямує до нуля, будучи від'ємним. Таким чином, дріб ліворуч та поблизу x= -3 має від'ємний знак, а за модулем прямує до нескінченності.

Аналогічно, розглянемо праву границю

$$\lim_{x \to -3+0} \frac{(x-2)(x+2)}{x+3} = \left(\frac{5}{-3+3} = \frac{5}{0} \right) = +\infty \,.$$

Таким чином, поведінка наданої функції поблизу вертикальної асимптоти x= *-3* відповідає рисунку 8.

Для отримання більш детальної інформації про поведінку функції знайдемо точки перетину графіка з осями координат, похилою асимптотою та з'ясуємо знак (додатність або від'ємність) функції при усіх значеннях її аргументу з області визначення.

Перетин з віссю *OY*: при x*=0* функція має значення

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x+3} = \frac{-4}{0+3} = \frac{-4}{3} \,,$$

тобто графік перетинає вісь *OY* у точці (0,–4/3).

Для знаходження точок перетину з віссю *OX* потрібно розв'язати рівняння

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x+3} = 0 \,,$$

звідки маємо x_1= – 2, x_2= 2.

Для знаходження точок перетину графіка з похилою асимптотою потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 4}{x+3}, \\ y = x - 3 \end{cases}$$

виключаючи змінну *у,* отримаємо рівняння $x^2-4=x^2-3$. Оскільки розв'язків воно не має, робимо висновок: графік $f(x)$ не перетинається з асимптотою.

Зауваження: У деяких варіантах розв'язання цієї системи приведе до алгебраїчного рівняння четвертого степеня, корені якого не можливо буде точно обчислити. У таких випадках графік можна будувати без цієї інформації, оскільки вона носить допоміжний характер.

З'ясуємо тепер знаки функції при різних значеннях аргументу, для чого застосуємо метод інтервалів: нанесемо на вісь *OX* точки $x=-3$, $x=-2$, $x=2$, у яких чисельник або знаменник дробу обертаються на 0. Тільки при переході через ці точки можлива зміна знака дробу, а всередині інтервалів $(-\infty,-3)$, $(-3,-2)$, $(-2,2)$, $(2,+\infty)$ знак дробу не змінюється.

Визначимо цей знак, обчисливши значення функції у будь-якій точці, що належать відповідному інтервалу (рисунок 11).

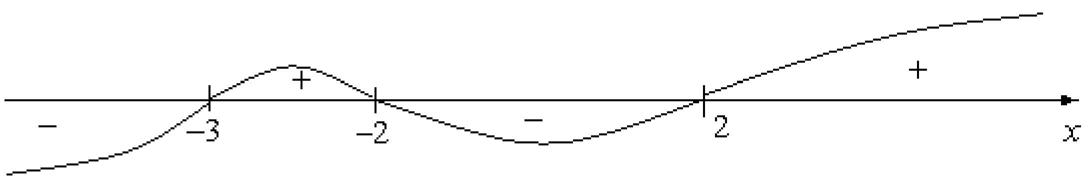

Рисунок 11

$x = 4 \in (2,\infty)$; $\quad y(4) = \dfrac{12}{7} > 0$;

$x = 0 \in (-2,2)$; $\quad y(0) = \dfrac{-4}{3} < 0$;

$x = -2.5 \in (-3,-2)$; $\quad y(-2.5) = \dfrac{2.25}{5.5} > 0$;

$x = -4 \in (-\infty,-3)$; $\quad y(-4) = \dfrac{12}{-1} < 0$.

Ці результати можна для зручності занести до даної таблиці.

Інтервал *x*	$(-\infty,-3)$	(-3,-2)	(-2,2)	(2,∞)
Знак $f(x)$	--	+	-	+

Тепер перейдемо до побудови графіка (рисунок 12). Починати слід з побудови асимптот і графіка $f(x)$ навколо них, після чого з урахуванням точок перетину з осями та знаків функції відобразити поведінку функції у проміжках між асимптотами.

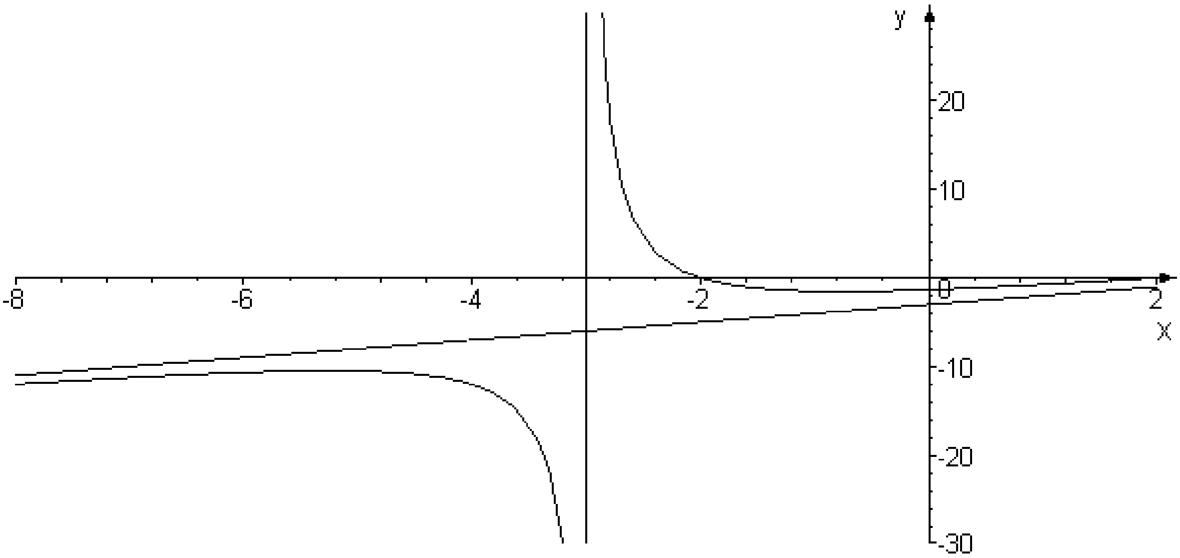

Рисунок 12

Зауваження: У подальшому за допомогою похідних ми зможемо креслити графіки більш складних функцій, але наведений приклад свідчить, що інформація про асимптоти та знак функції для різних значень аргументу є достатньою для з'ясування якісних рис поведінки функції та побудови ескізу її графіка.

Алгебраїчна форма комплексного числа

Комплексні числа (КЧ) - це вирази, що мають будову

$$z = x+iy, \tag{7}$$

де x та y – дійсні числа, а i – так звана уявна одиниця.

Вважається, що

$$i = \sqrt{-1}. \tag{8}$$

Рівність (8) не може мати місця для жодного з дійсних чисел, тобто само i та вираз (7) не можуть бути дійсними числами і за своїми властивостями відрізняються від останніх. КЧ є узагальненням дійсних чисел, останні містяться серед чисел (7) в окремому випадку, а саме коли y=0.

Число *x* називається дійсною частиною КЧ z , число y – уявною частиною КЧ z. При цьому застосовуються позначення: $x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$. Число $\bar{z} = x - iy$ називається спряженим до z.

Арифметичні дії з КЧ в алгебраїчній формі. Подання (7) називається алгебраїчною формою КЧ. Арифметичні дії з КЧ у ній формально нічим не відрізняються від дій із звичайними алгебраїчними виразами. Потрібно тільки враховувати властивість (8), з якої випливає також:

$$i^2= -1, \qquad i^3= i^2\, i= - i\,, \qquad i^4= i^2\, i^2=(-1)(-1)=1 \quad \text{та ін.} \tag{9}$$

Наприклад, якщо $z_1 = x_1+iy_1$ та $z_2 = x_2+iy_2$ комплексні, а m дійсне число, тоді $m\ z_1=m\ (x_1+iy_1\ )=m\ x_1+imy_1$, а $z_1\ z_2 =$
$= (x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+i(x_1y_2+x_2y_1)+i^2\ y_1y_2= x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1).$

Обчислимо значення

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2,$$

тобто добуток $z\bar{z}$ є дійсним додатним числом. Дійсне число $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ *>0* називається модулем КЧ $z.$

Опишемо більш детально ділення КЧ $\frac{z_1}{z_2}$ в алгебраїчній формі. Його виконують за схемою $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{r^2} = \frac{1}{r^2} z_1\overline{z_2}$, тим самим зводячи ділення КЧ до множення z_1 та $\overline{z_2}$, а потім множення результату на дійсне число $\frac{1}{r^2}$.

Завдання 5. Подати в алгебраїчній формі вираз $w = \frac{z_1}{z_2} + mz_3$, якщо

$$m=2,\ z_1=-2+3i,\ z_2=5-2i,\ z_3=4+i.$$

Розв'язання: Підставивши у формулу для w відповідні значення, отримаємо

$$w = \frac{-2+3i}{5-2i} + 2(4+i) = \frac{(-2+3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} + 8 + 4i = \frac{-10+11i+6i^2}{5^2-(2i)^2} + 8 + 4i =$$
$$= \frac{-16+11i}{25+4} + 8 + 4i = \frac{-16}{29} + \frac{11}{29}i + 8 + 4i = 7\frac{13}{29} + 4\frac{11}{29}i$$

Розв'язання квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом

Як відомо з курсу елементарної математики, корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ знаходяться за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{10}$$

а розклад на множники має вигляд

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2). \tag{11}$$

При застосуванні дійсних чисел вважається, що корені квадратного рівняння x_1 та x_2 існують у випадку, коли дискримінант $D=b^2-4ac>0,$ адже якщо $D<0,$ операція добування квадратного кореня нездійсненна. При застосуванні КЧ існування $i=\sqrt{-1}$ дозволяє обчислювати, керуючись законами звичайної арифметики, також квадратні корені із від'ємних чисел. Таким чином зникають обмеження при застосуванні формули (10), при цьому тотожність (11) зберігається у випадку комплексних коренів x_1 та x_2.

Завдання *6*. Знайти комплексні корені квадратного рівняння x^2-$14x+53=0$ та зробити перевірку для кореня з від'ємною уявною частиною.

Розкласти квадратний тричлен на лінійні множники.

Розв'язання: Для наданого прикладу отримаємо

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{14\pm\sqrt{196-212}}{2a}=\frac{14\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{14\pm 4i}{2}=7\pm 2i,$$

отже, x_1=7-2i, x_2=7+2i.

Перевірка:

$(7–2i)^2–14(7–2i)+53=49-28i-4-98+28i+53=0$.

Шуканий розклад на множники має вигляд

$$x^2\text{-}14x+53=(x\text{-}7+2i)(x\text{-}7\text{-}2i).$$

Тригонометрична та показникова форми комплексного числа

Геометрична інтерпретація КЧ. Кожному КЧ $z = x+iy$ можна поставити у відповідність на площині *XOY* точку з координатами (x,y), при цьому звичайним дійсним числам будуть відповідати точки, що розташовані на осі *OX* (див. рисунок 13).

Геометричний зміст модуля $r=\sqrt{x^2+y^2}$ – відстань від точки, що зображує КЧ z на комплексній площині до початку системи координат.

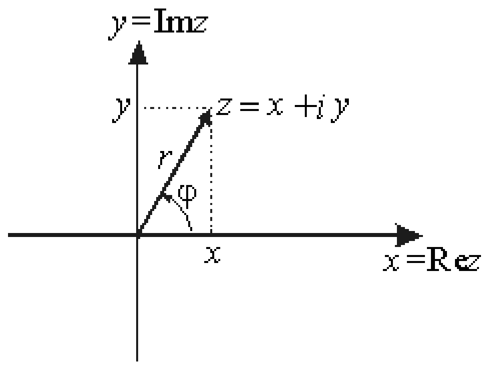

Рисунок 13

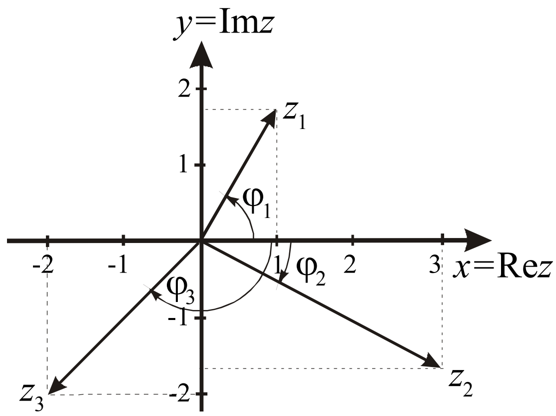

Рисунок 14

Кут φ між додатним напрямком осі *OX* та відрізком, що з'єднує зображення числа z з точкою O(0,0), називається аргументом КЧ. Вважається, що

$$-\pi < \varphi \le \pi\,. \tag{12}$$

Обчислення модуля та аргументу КЧ. Неважко побачити з рисунка 13, що мають місце рівності:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}\,.$$

Розв'язуючи останнє рівняння відносно φ, з урахуванням (12), можна отримати таке правило:

$$\varphi = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, \; якщо \quad x > 0 \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi, \; якщо \quad x < 0 \; та \; y > 0 \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi, \; якщо \quad x < 0 \; та \; y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, якщо \quad x = 0 \; та \; y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, якщо \quad x = 0 \; та \; y < 0 \end{cases} \tag{13}$$

Приклад: Знайти модуль та аргумент КЧ $z = -2 + 2i$.

Маємо r= $\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$,

Оскільки $x=-2<0$, а $y=2>0$, для аргументу φ отримаємо значення

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\frac{2}{-2}) + \pi = -\operatorname{arctg}1 + \pi = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4 .$$

Доцільно зображати комплексні числа на площині для перевірки правильності визначення їх аргументів.

Наведемо для зручності також таблицю значень $\operatorname{arctg} a$ для деяких аргументів.

a	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$

Зауваження: Функція $\operatorname{arctg} a$ непарна, тобто $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$. Це дозволяє обчислювати за допомогою наведеної вище таблиці також її значення для від'ємних аргументів.

Застосовуючи модуль та аргумент КЧ, можна виконати такі тотожні перетворення КЧ:

$$z = x + iy = r(\frac{x}{r} + i\frac{y}{r}) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) . \qquad (14)$$

Подання КЧ у вигляді

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \qquad (15)$$

називають *тригонометричною формою* КЧ.

Якщо застосувати позначення Ейлера

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi} , \qquad (16)$$

тоді (15) можна записати у вигляді

$$\boxed{z = re^{i\varphi}} . \qquad (17)$$

Вираз (17) називається *показниковою формою* КЧ.

Дії з КЧ у показниковій формі. Нехай КЧ z_1 та z_2 задані у показниковій формі (17):

$$z_1 = r_1 \mathrm{e}^{i\varphi_1}, \qquad z_2 = r_2 \mathrm{e}^{i\varphi_2},$$

тоді можна довести, що

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$$

тобто при множенні КЧ у показниковій формі необхідно перемножити їх модулі, а аргументи додати.

З цієї властивості випливають наступні.

Ділення комплексних чисел у показниковій формі

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}}$$

тобто при діленні КЧ у показниковій формі необхідно поділити їх модулі, а аргументи відняти.

Піднесення КЧ у цілий степінь (формула Муавра)

$$\boxed{z^n = r^n e^{in\varphi}}$$

модуль підноситься у відповідний степінь, а аргумент множиться на нього.

Бачимо, що для уявних степенів $e^{i\varphi}$ зберігаються усі властивості, притаманні звичайним (дійсним) степеням.

Завдання 7*.* Записати в алгебраїчній формі вираз

$$z = \frac{(1+i\sqrt{3})^9 \cdot (3-i\sqrt{3})^{10}}{i^4(-2-2i)^{15}}.$$

Розв'язання. Переведемо у показникову форму надані комплексні числа.

Позначимо $z_1 = 1+i\sqrt{3}$. Знайдемо його модуль та аргумент.

$r_1 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, оскільки *x=1>0*, за правилом (13) маємо $\varphi_1 = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \pi/3$.

Отже, маємо показникову форму числа $z_1 = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Позначимо $z_2 = 3 - i\sqrt{3}$.

Тоді

$$r_2 = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} = 2 \cdot 3^{1/2}.$$

Оскільки *x=3>0*, за правилом (13) маємо

$$\varphi_2 = arctg\frac{-\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

Отже, $z_2 = 2\cdot 3^{1/2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Для $z_3 = -2-2i$ отримаємо $r_3 = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2^{3/2}$. Оскільки *x<0* та *y<0*, за правилом (13) отримаємо

$$\varphi_3 = \operatorname{arctg}(\frac{-2}{-2}) - \pi = \pi/4 - \pi = -3\pi/4.$$

Отже, $z_3 = 2^{3/2}\, e^{-3\pi i/4}$.

Модулі та аргументи КЧ z_1, z_2, z_3 зображені на рисунку 14.

Користуючись властивостями (9) числа i, знайдемо $i^4=1$.

Підставляючи ці вирази в умову та використовуючи формули Муавра, множення та ділення КЧ у показниковій формі, отримаємо

$$z = \frac{z_1^{\ 9}\cdot z_2^{\ 10}}{z_3^{\ 15}} = \frac{(2\mathrm{e}^{i\pi/3})^9\cdot(2\cdot 3^{1/2}\,\mathrm{e}^{-i\pi/6})^{10}}{(2^{3/2}\,\mathrm{e}^{-i3\pi/4})^{15}} = \frac{2^9 2^{10} 3^5\,\mathrm{e}^{i9\pi/3}\cdot\mathrm{e}^{-i10\pi/6}}{2^{45/2}\,\mathrm{e}^{-i45\pi/4}} = \frac{3^{\,5}\,\mathrm{e}^{\,i151\pi/12}}{2^{\,7/2}}.$$

Зауваження: Формально усі дії виконуються за правилами, які мають місце для дій із звичайними степенями:

$$\boxed{a^m a^n = a^{m+n};\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};\qquad \left(a^m\right)^n = a^{mn}}$$

Тепер необхідно отриманий вираз перевести спочатку у тригонометричну форму за формулами Ейлера (16), а потім, обчислюючи значення тригонометричних функцій та розкриваючи дужки, перейти з тригонометричної форми до алгебраїчної. Таким чином остаточно отримаємо

$$\boldsymbol{z} = \frac{3^{\,5}\,\mathrm{e}^{\,i151\pi/12}}{2^{\,3}\sqrt{2}} = \frac{3^{\,5}}{2^{\,3}\sqrt{2}}\left(\cos\frac{151\pi}{12} + i\sin\frac{151\pi}{12}\right) =$$

$$= \frac{3^{\,5}}{2^{\,3}\sqrt{2}}\left[\cos\left(12\pi + \frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(12\pi + \frac{7\pi}{12}\right)\right] = \frac{3^{\,5}}{2^{\,3}\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) \approx$$

$$\approx 21{,}478(-0{,}259 + i\,0{,}966) \approx -5{,}563 + 20{,}746i.$$

Коментар: Якщо остаточне значення тригонометричних функцій буде отримане за допомогою таблиць, потрібно використовувати, як це зроблено у прикладі, періодичність цих функцій та формули зведення, якщо значення цих функцій буде отримане за допомогою калькулятора, ці перетворення не є обов'язковими.

Добування кореня n-го степеня з комплексного числа

Якщо комплексне число задане у показниковій формі $z = re^{i\varphi}$, то усі корені n-го степеня з нього (вони завжди існують і їх кількість завжди дорівнює n з урахуванням кратності) можуть бути обчислені за формулою

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i(\varphi+2k\pi)/n} \qquad (k = 0, 1, 2, ..., n-1).$$

Якщо числа ω_k зобразити на комплексній площині, вони утворять правильний n-кутник.

Завдання 8. Знайти всі значення кореня n-го степеня з комплексного числа. Зобразити отримані значення на комплексній площині. Зробити перевірку для одного з них. $\sqrt[3]{-2+2i}$ **.**

Розв'язання. Знайдемо модуль та аргумент комплексного числа, що знаходиться під коренем

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}, \quad \varphi = arctg(-1) + \pi = 3\pi/4$$

Запишемо тепер формулу коренів для даного випадку

$$\omega_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\,\mathrm{e}^{\frac{i(3\pi/4+2k\pi)}{3}} = \sqrt{2}\left[\mathrm{e}^{\frac{i(3\pi/4+2k\pi)}{3}}\right].$$

Для значень k=0, 1, 2 знаходимо

$$\omega_0 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right] = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\big/_2 + i\sqrt{2}\big/_2\right) = 1 + i\,,$$

$$\omega_1 = \sqrt{2}e^{\frac{i11\pi}{12}} = \sqrt{2}\left[\cos(11\pi/12) + i\sin(11\pi/12)\right] \approx,$$
$$\approx 1{,}41(-0{,}97 + i0{,}26) \approx -1{,}37 + 0{,}37i$$

$$\omega_2 = \sqrt{2}e^{\frac{i19\pi}{12}} \sqrt{2}\left[\cos(19\pi/12) + i\sin(19\pi/12)\right] \approx.$$
$$\approx 1{,}41(0{,}26 - i0{,}97) \approx 0{,}37 - 1{,}37i$$

Зобразимо отримані числа на комплексній площині (рисунок 15).

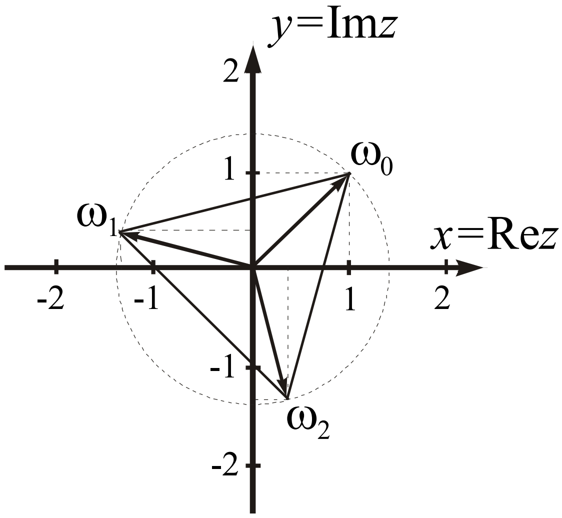

Рисунок 15

Перевірка: За формулою Муавра маємо

$$\omega_0^3 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 e^{\frac{i3\pi}{4}} = \sqrt{8}\left[\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\right] =$$
$$= \sqrt{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{16}}{2}(-1 + i) = -2 + 2i\,.$$

Зауваження: Для того, щоб уникнути похибок округлення, перевірку краще робити, підносячи до n-го степеня число ω_k у показниковій формі.

Зауваження: Побудова коренів на комплексній площині також є деякою мірою перевіркою правильності їх знаходження, адже вони повинні утворювати правильний n-кутник.

Список літератури

1 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1978. – Т.І.

2 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.

3 Ефимов А.В., Демидович А.Б. Сборник задач по математике для втузов. – М.: Наука, 1986. – Т.І.

4 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К., 2001.

5 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 2006. – Ч.І.

6 Давидов Р.М., Науменко В.В. Вступ до математичного аналізу: Методичні вказівки №914. – Харків: ХарДАЗТ, 2000. – 56 с.

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

з розділу дисципліни
"*ВИЩА МАТЕМАТИКА*"

Відповідальний за випуск Науменко В.В.

Редактор Губарева К.А.

Підписано до друку 01.04.09 р.
Формат паперу 60x84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 1,0. Обл.-вид.арк. 1,25.
Замовлення № Тираж 300. Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, майд. Фейєрбаха, 7