№1003

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

і завдання до виконання РГР
«Гармонічний аналіз та його застосування до розрахунку лінійних електричних кіл»

ХАРКІВ 2002

Методичні вказівки розглянуті та рекомендовані до друку на засіданні кафедри вищої математики р., протокол №

Рекомендуються для студентів факультету АТЗ денної форми навчання.

Укладачі:

М.Г.Давиденко,
В.І.Храбустовський,

Рецензент

ВСТУП

Розрахунок електричних кіл у спектральній області є одним з докорінно важливих методів, що входять до арсеналу, яким повинен володіти спеціаліст у галузі автоматики та автоматизації на транспорті. При цьому важливе як володіння математичними засадами цього методу та технікою виконання відповідних аналітичних перетворень, так і вміння надавати отриманим результатам фізичного змісту та інтерпретувати їх в термінах теорії електричних кіл. Саме тому кафедри вищої математики та електротехніки і електричних машин вирішили поєднати розрахунково-графічні роботи “Гармонічний аналіз періодичних функцій” та “Розрахунок кола періодичного несинусоїдного струму” в одну, яка має як спеціалізовану математичну частину, так і спеціалізовану електротехнічну частину.

Таке поєднання має за мету встановити наочний зв’язок між математичним та електротехнічним тлумаченнями понять “гармоніка”, “період”, “спектр” та ін. і, таким чином, сприяти повноцінному засвоєнню теоретичних відомостей та практичних навичок з відповідних розділів обох дисциплін.

1 ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Кожен студент повинен виконати роботу згідно з номером варіанта, що його видає викладач, який веде практичні заняття в групі. Роботу має бути виконано в строк, передбачений графіком самостійної роботи студентів.

Розрахунково-пояснювальну записку має бути виконано акуратно, без виправлень. Її оформлення повинне відповідати вимогам ДСТУ 3008-95 (більш детальну інформацію, при необхідності, можна одержати на кафедрі електротехніки та електричних машин).

Умовні позначення на принципіальних електричних схемах , позначення електричних величин та математичних символів, а також розмірності мають відповідати діючим нормативним документам.

Кожен розрахунок необхідно супроводжувати коротким пояснювальним текстом, необхідними формулами, проміжними та кінцевими результатами обчислень. Для останніх має бути вказано розмірність.

Обчислення слід проводити з точністю до п’яти значущих цифр.

Графіки має бути виконано на міліметровому папері за допомогою креслярських інструментів. Їх також можна виконати на білому папері за допомогою креслярських інструментів або за допомогою друкуючого пристрою ЕОМ; в обох випадках на графіки має бути накладено масштабну сітку.

Перелічені вище вимоги зберігають свою силу й при виконанні розрахунків та оформленні роботи за допомогою ЕОМ.

2 МАТЕМАТИЧНА ЧАСТИНА

2.1 ПЕРІОДИЧНІ ФУНКЦІЇ (СИГНАЛИ)

Періодичною називається функція $f(t)$, значення якої не змінюється при додаванні до значень її аргументу t деякого числа $T \neq 0$ (див. рисунок 2.1),

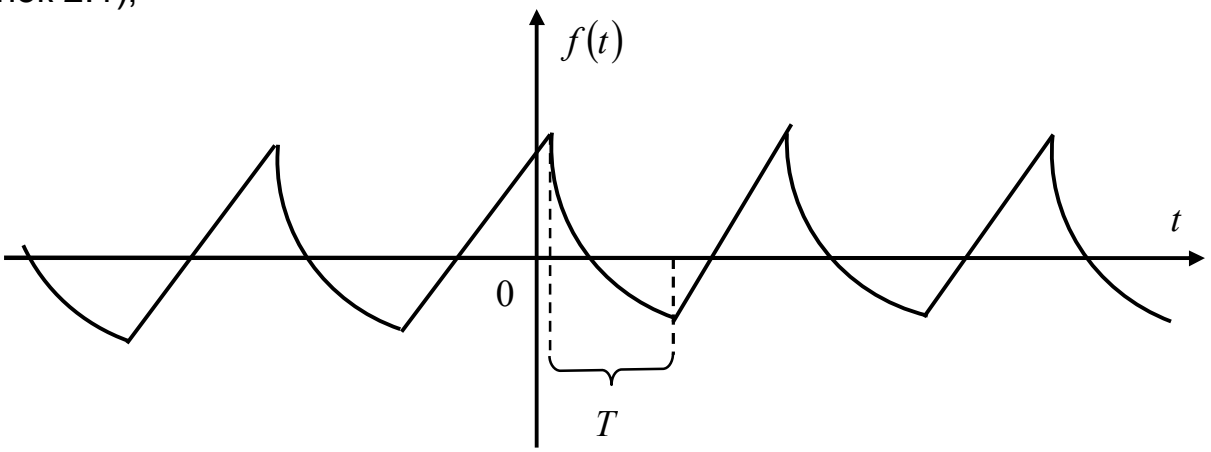


Рисунок 2.1

яке називається періодом цієї функції [*], тобто

$$f(t+T)=f(t).$$

Якщо періодична функція $f(t)$ неперервна на деякому інтервалі і $f(t) \equiv const$ на цьому інтервалі, то для неї існує найменший додатний період T > 0. Тоді будь-який період цієї функції має вигляд $nT,\ 0 \neq n \in Z$.

ВЛАСТИВОСТІ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

1 Алгебраїчна сума, добуток і частка періодичних функцій зі спільним періодом є періодичними функціями з тим же (або меншим) періодом [**].

2 Похідна періодичної функції періоду T є періодичною функцією з тим же періодом T.

3 Інтеграл від періодичної функції по періоду не залежить від місцезнаходження інтервалу інтегрування. Тобто, якщо $f(t+T)=f(t)$, то (див. рисунок 2.2)

---

[*] *Точніше функція* $f(t)$ *називається періодичною, коли* $\exists T \neq 0 \quad \forall t \in D(f)$: $t \pm T \in D(f),\ f(t \pm T)=f(t)$.

[**] *Якщо їх області визначення не пусті.*

$$\forall\, x \qquad \int_{x}^{x+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt\,.$$

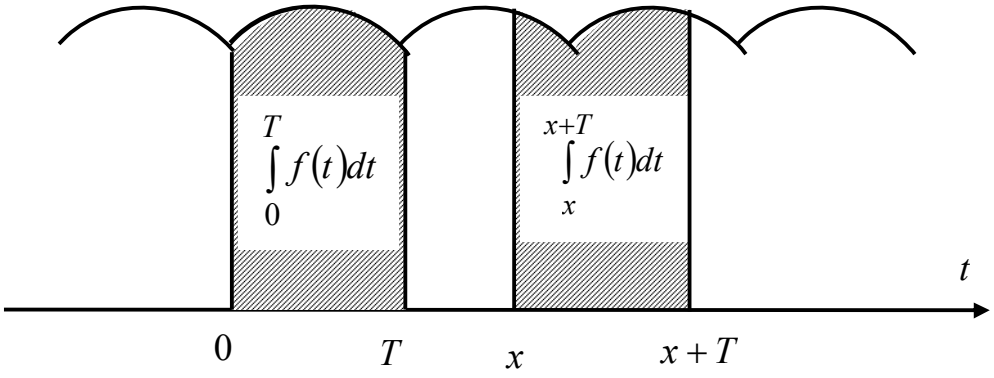


Рисунок 2.2

Наслідок. Первісна періодичної функції періодична, коли середнє по періоду цієї функції дорівнює 0.

4 Нехай функції $f_j(t)$; $j = 1,2$ є періодичними з періодами T_j. Тоді, якщо періоди $T_1,\ T_2$ спільномірні, тобто $T_1 / T_2 = m / n$, де $m, n \in Z$, то $f_1(t) \pm f_2(t)$, $f_1(t) \cdot f_2(t)$, $f_1(t) / f_2(t)$ є періодичними функціями** з періодом $T = T_1 n = T_2 m$ (або меншим).

Зауваження. Якщо T_1 і T_2 неспільномірні, то $f_1(t) + f_2(t)$ вже не буде періодичною. Наприклад, функція $\sin t + \sin \sqrt{2}\, t$ неперіодична. Суми періодичних функцій з неспільномірними періодами належать більш широкому класу майже періодичних функцій.

2.2 ПРОСТА ГАРМОНІКА

Так називається дійсна періодична функція виду

$$\gamma(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t. \qquad (2.1)$$

Число ω називається її частотою; її період $T = 2\pi / \omega$.

Перетворимо праву частину (2.1):

$$\gamma(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos\omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin\omega t \right). \qquad (2.2)$$

Позначаючи

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi\,, \qquad \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi\,, \tag{2.3}$$

одержуємо іншу форму запису простої гармоніки:

$$\gamma(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{2.4}$$

де число $A = \sqrt{a^2+b^2} > 0$ називається амплітудою, а число φ - початковою фазою (при цьому $tg\varphi = -\frac{b}{a}$, $-\pi < \varphi \le \pi$ [*]).

Очевидно гармоніку виду (2.4) можна записати у формі (2.1). Наприклад,

$$\gamma(t) = 5\cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) = 5\cos 3t\ \cos\frac{\pi}{3} - 5\sin 3t\ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{5}{2}\cos 3t + \left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\sin 3t.$$

2.3 РОЗКЛАДАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ (СИГНАЛІВ) В СУМУ ПРОСТИХ ГАРМОНІК (ГАРМОНІЧНИЙ АНАЛІЗ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ (СИГНАЛІВ))

Скінченна сума простих гармонік із частотами, які кратні одній частоті, є періодичною функцією. Виникає питання: чи можна довільну періодичну функцію записати у вигляді суми гармонік?

Якщо обмежитись скінченними сумами, не можна, як показує

Приклад. Періодична функція $f(t)$ на рисунку 2.3

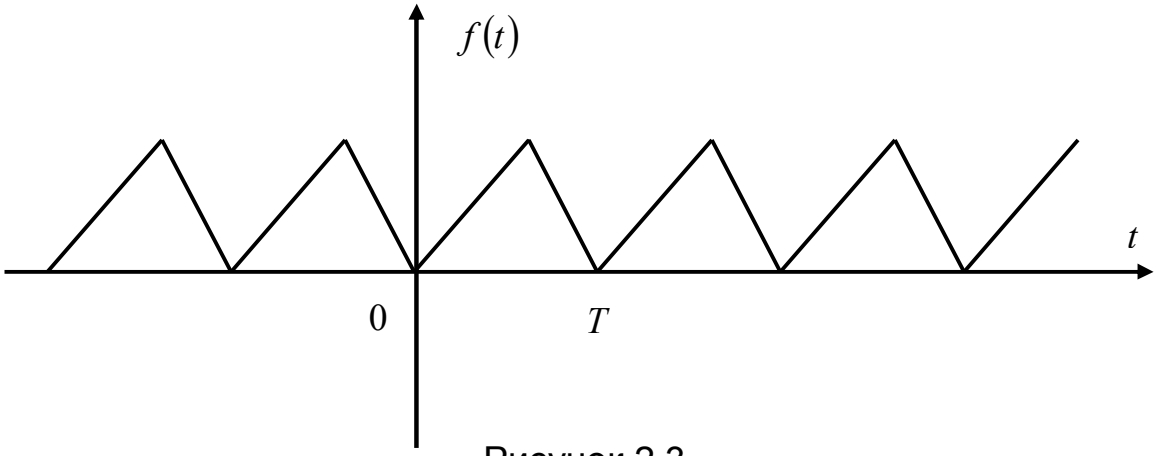


Рисунок 2.3

недиференційована в точках $t = kT$ $(k \in Z)$ і тому вона не дорівнює скінченній сумі гармонік, яка диференційована всюди.

Однак, якщо скінченну суму замінити нескінченною сумою (рядом), то позитивну відповідь на питання дає

[*] *В деяких випадках вибирають початкову фазу, яка задовольняє умову:* $0 \le \varphi < 2\pi$.

Теорема 1. Нехай періодична функція $f(t)$ періоду $T = 2l$ є кусково гладкою на відрізку $[0, T]$.*

Тоді $f(t)$ в точках неперервності розкладається в ряд:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t\right), \qquad (2.5)$$

де $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$, який називається її рядом Фур'є.

В точці розриву t_0 функції $f(t)$ її ряд Фур'є збігається до $\frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}$ (див. рисунок 2.4).

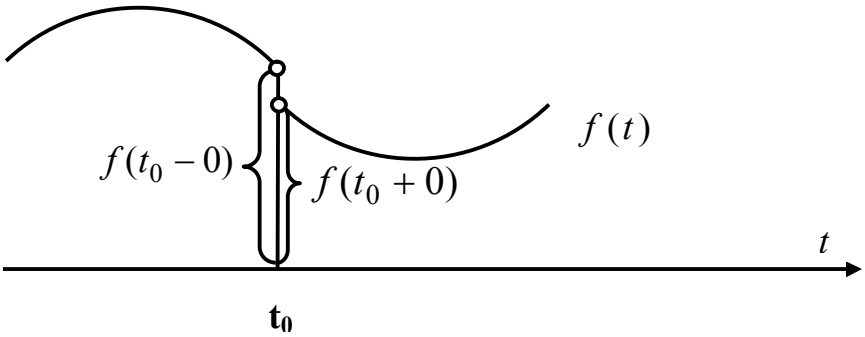


Рисунок 2.4

Числа a_n, b_n називаються коефіцієнтами Фур'є функції $f(t)$ і знаходяться за формулами:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\omega_n x\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\omega_n x\,dx \qquad n = 0,1,2\ldots \quad (2.6)$$

Зокрема $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \bar{f}$ – середнє значення сигналу по періоду.

Має місце рівність Парсеваля (Релея) :

---

* *Функція називається кусково гладкою на відрізку $[a, b]$, якщо вона і її похідна є кусково неперервною цьому відрізку. Функція називається кусково неперервною на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна у всіх точках інтервалу (a, b), за виключенням можливо скінченого числа точок, в яких має розриви I роду, і, крім того, має однобічні граничні значення в точках a і b.*

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}|f(t)|^2\,dt=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right). \qquad (2.7)$$

У випадку, коли функція $f(t)$ дійсна, перетворимо кожний доданок в сумі (2.5) аналогічно (2.2) - (2.4) і перепишемо формулу (2.5) у вигляді

$$f(t)=A_0\cos\varphi_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(\omega_n t+\varphi_n), \qquad (2.8)$$

де

$$A_0=\frac{|a_0|}{2},\quad \varphi_0=0\ \textit{або}\ \pi,\qquad A_n=\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2},\qquad tg\varphi_n=\frac{-b_n}{a_n}\quad . \qquad (2.9)$$

Кожний доданок в сумі (2.8) описує гармонічне коливання з амплітудою A_n, частотою ω_n, початковою фазою φ_n. Сталий доданок $A_0\cos\varphi_0=\frac{a_0}{2}$ називається сталою складовою сигналу $f(t)$, перший гармонічний доданок $\neq 0$ - основною гармонікою або основним тоном, а наступні ненульові гармонічні доданки – верхніми гармоніками або обертонами.

Тому розкладання періодичного сигналу $f(t)$ в ряд Фур'є , тобто в суму гармонік, називається його гармонічним аналізом.

ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ РІВНОСТІ ПАРСЕВАЛЯ

Враховуючи (2.9) і властивість 3 періодичних функцій, перепишемо рівність Парсеваля (2.7) у формі

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T}f^2(t)dt=A_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2\,. \qquad (2.10)$$

Нехай по провіднику з опором R тече періодичний струм ***i***(t) з періодом T. Розкладемо ***i***(t) на гармоніки

$$\mathbf{i(t)=I_0\cos\varphi_0+\sum_{n=1}^{\infty}I_n\cos(\omega_n t+\varphi_n)}. \qquad (2.11)$$

Рівність Парсеваля (2.10) для цього випадку після множення на R має вигляд

$$\mathbf{\frac{1}{T}\int_{0}^{T}i^2(t)R\,dt=I_0^2R+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n^2R}{2}}\,. \qquad (2.12)$$

Ліва частина (2.12) дорівнює середній потужності струму ***i***(t) на періоді. Перший доданок $I_0^2 R$ в лівій частині дорівнює потужності сталої складової в розкладанні (2.11). Легко перевірити, що наступні доданки $\frac{1}{2} I_n^2 R$ дорівнюють $\frac{I_n^2 R}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_n t + \varphi_n) dt$ - середній потужності гармонічних складових $I_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ на періоді.

Висновок. Формула (2.12) означає, що середня за період потужність періодичного електричного струму дорівнює сумі середніх за період потужностей його гармонічних складових плюс потужність його сталої складової.

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПЕРІОДИЧНОГО СИГНАЛУ

Сукупність величин $A_n, -\varphi_n$ $(n = 0,1,...)$ з формул (2.8), (2.9) називають відповідно амплітудним та фазовим спектрами дійсного сигналу $f(t)$, а його частотним спектром – сукупність тих ω_n, для яких $A_n \neq 0$.

Графічно амплітудний та фазовий спектри зображуються стовпчиками відповідної довжини, як на рисунку 2.5.

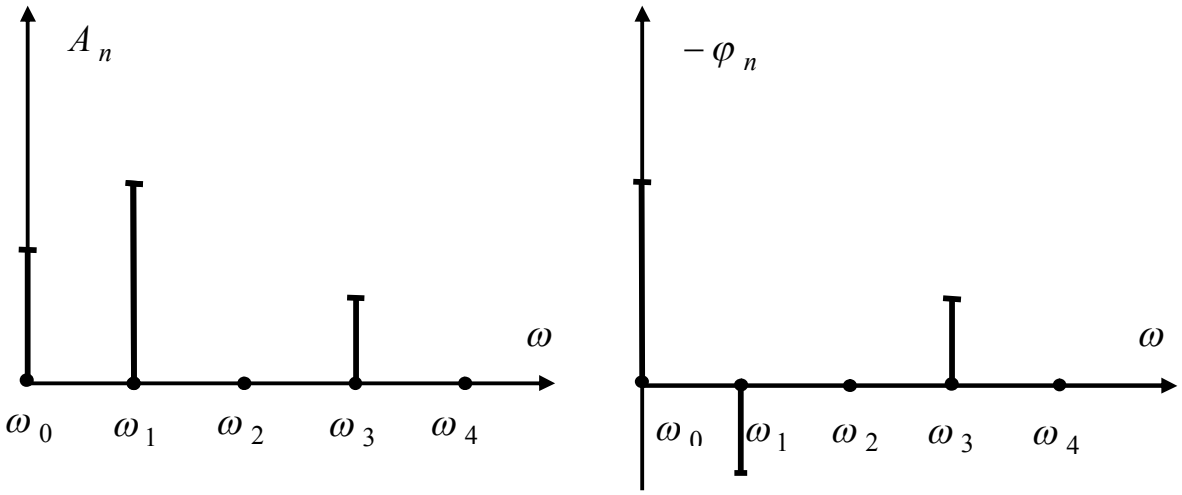


Рисунок 2.5

Приклад. Який сигнал має амплітудний та фазовий спектри, що зображені на рисунку 2.6?

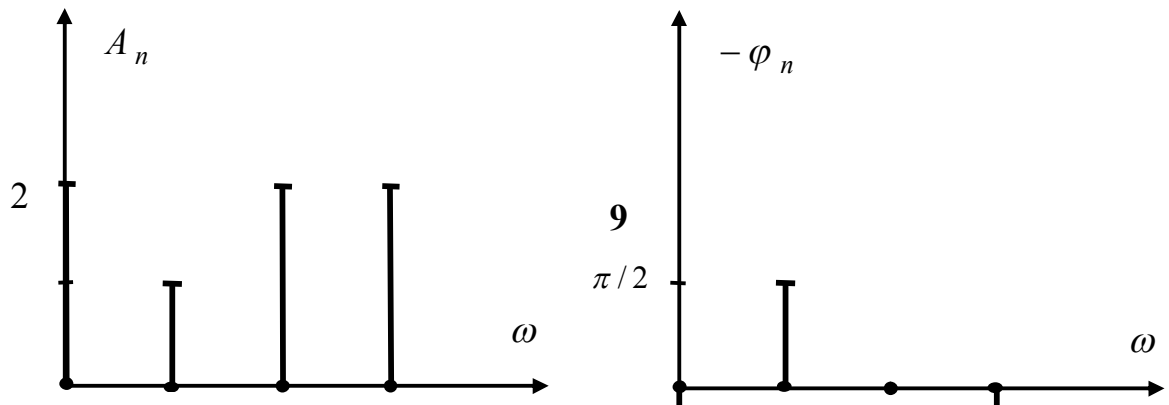


Рисунок 2.6

Розв'язок. $f(t) = 2\cos\pi + \cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos t + 2\cos\left(\frac{3}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) =$

$$= -2 + \sin\frac{t}{2} + 2\cos t - 2\sin\frac{3}{2}t.$$

РЯДИ ФУР'Є ПАРНИХ І НЕПАРНИХ ФУНКЦІЙ

Коли періодична функція $f(t)$ парна, то її коефіцієнти Фур'є $b_n = 0$ і вона в точках неперервності розкладається в ряд Фур'є по косинусах

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\omega_n t, \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\omega_n t\, dt, \ (n = 0,1,...). \qquad (2.13)$$

Аналогічна непарна періодична функція $f(t)$ розкладається в ряд Фур'є по синусах:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\omega_n t \ , \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\sin\omega_n t\, dt. \qquad (2.14)$$

КОМПЛЕКСНА ФОРМА РЯДУ ФУР'Є

Користуючись формулами Ейлера, кожний доданок в сумі (2.5) можна записати у формі

$$a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t = \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\omega_n t} + \frac{a_n - ib_n}{2} e^{-i\omega_n t}.$$

Позначаючи для $n = 1,2,3...$

$$c_n = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, e^{-i\omega_n t}\, dt\,, \quad c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\; dt\,,$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, e^{-i\omega_{-n} t}\, dt,\ де \omega_{-n} = -\omega_n\,,$$

приходимо до комплексної форми ряду Фур'є:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}\,, \qquad c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, e^{-i\omega_n t}\, dt\,.$$

В цьому випадку рівність Парсеваля записується так:

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2\,.$$

Для дійсних $f(t)$ коефіцієнти $c_n = \overline{c_{-n}}$, $a_n = 2\,\mathbf{Re}\, c_n$, $b_n = -2\,\mathbf{Im}\, c_n$. Оскільки при цьому амплітуди A_n і фази φ_n з формул (2.8), (2.9) дорівнюють

$$A_0 = |c_0|, \qquad A_n = 2|c_n| \quad (n > 0), \qquad \varphi_n = \mathbf{arg}\; c_n\,,$$

то у випадку, коли дійсний сигнал розкладено в комплексний ряд Фур'є, то амплітудним та фазовим спектром цього сигналу називають відповідно сукупність величин

$$|c_n| \quad (або \quad T|c_n|), \quad -\mathbf{arg}\; c_n\,, \quad n - 0, 1, 2, \ldots$$

2.4 РОЗКЛАДАННЯ В РЯД ФУР'Є ФУНКЦІЙ, ЯКІ ВИЗНАЧЕНІ НА ВІДРІЗКУ

РОЗКЛАДАННЯ В РЯД ФУР'Є ФУНКЦІЙ, ЯКІ ВИЗНАЧЕНІ НА $[-l,\ l]$

Нехай функція $f(t)$, що задана на $[-l,\ l]$ (див. рисунок 2.7), є кусково гладкою на $[-l,\ l]$.

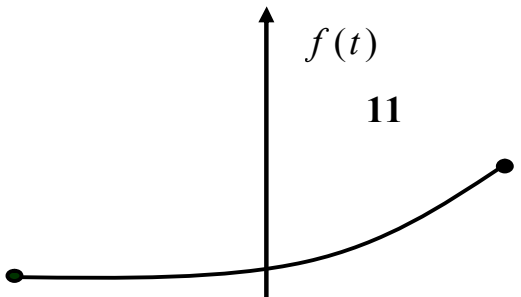


Рисунок 2.7

Продовжимо її з $[-l,\ l)$ періодично на усю вісь (див. рисунок 2.8).

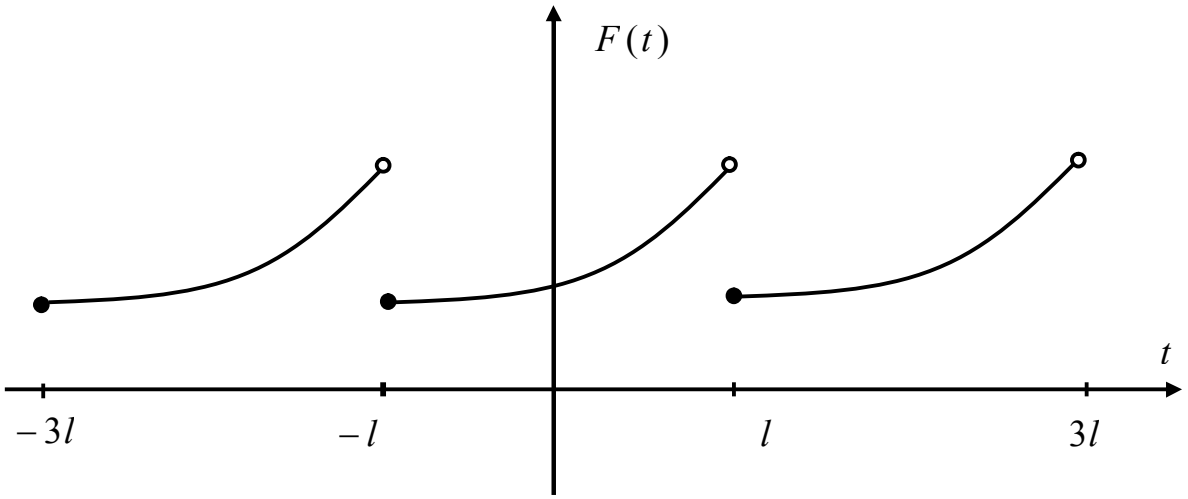


Рисунок 2.8

Одержана періодична функція $F(t)$ задовольняє умови теореми 1 $\Rightarrow$ вона розкладається в ряд Фур'є. Але на $[-l,\ l)$ $F(t)=f(t) \Rightarrow f(t)$ розкладається в ряд Фур'є (2.5).

РОЗКЛАДАННЯ В РЯД ФУР'Є ФУНКЦІЙ, ЯКІ ЗАДАНІ НА $[0,\ l]$

Нехай функція, що задана на $[0,\ l]$ (див. рисунок 2.9), є кусково гладкою на $[0,\ l]$.

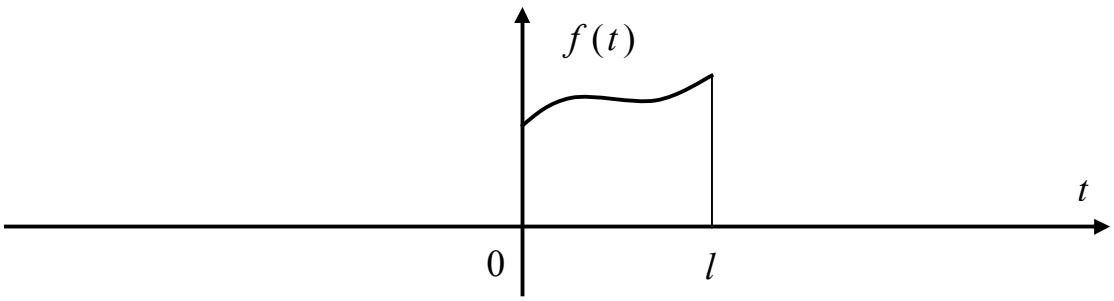


Рисунок 2.9

Спочатку продовжимо її парним чином на $[0,\ l]$ (див. рисунок 2.10),

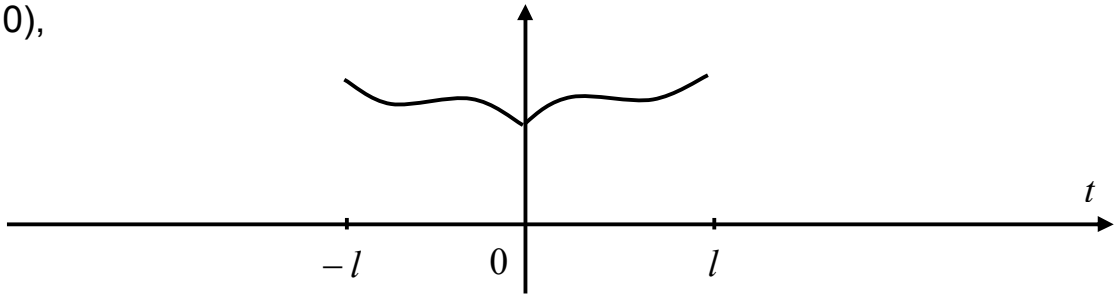


Рисунок 2.10

а потім періодично на всю вісь (див. рисунок 2.11)

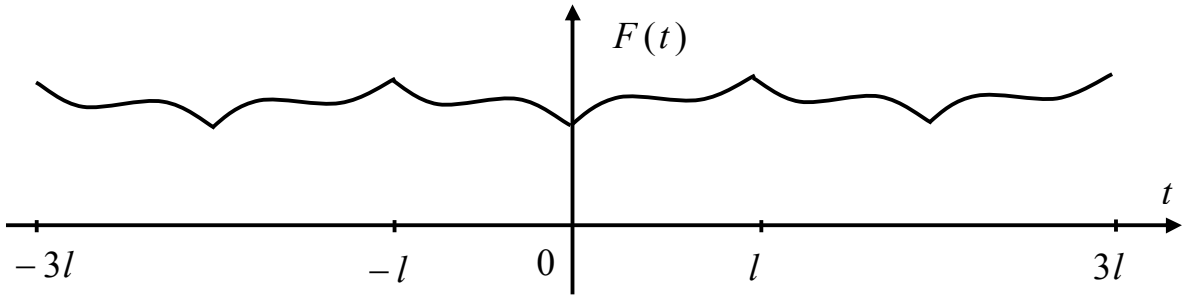


Рисунок 2.11

Одержана періодична парна функція $F(t)$ задовольняє умови теореми 1 $\Rightarrow$ вона розкладається в ряд Фур'є (2.13) по косинусах. Але на $[0,\ l]$ $F(t) = f(t) \Rightarrow f(t)$ при $t \in [0,\ l]$ розкладається в ряд Фур'є (2.13) по косинусах.

Аналогічно, продовжуючи $f(t)$ непарним чином на $[-l,\ l)$ (див. рисунок 2.12),

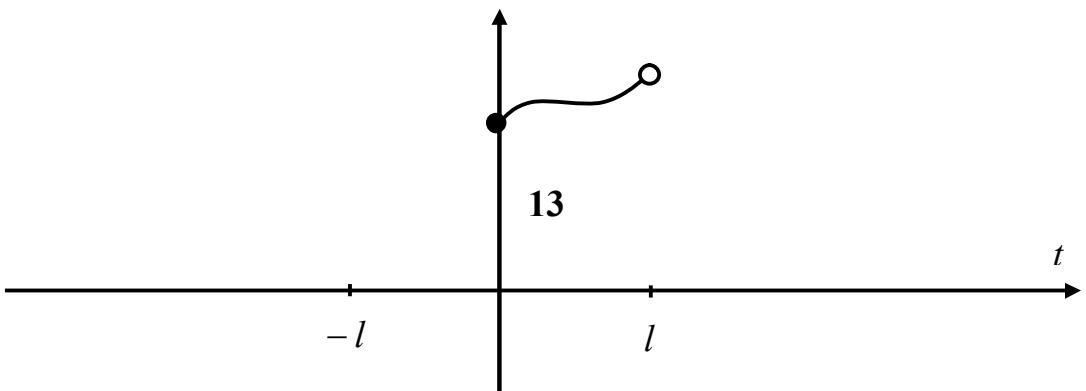


Рисунок 2.12

а потім періодично на всю вісь (див. рисунок 2.13),

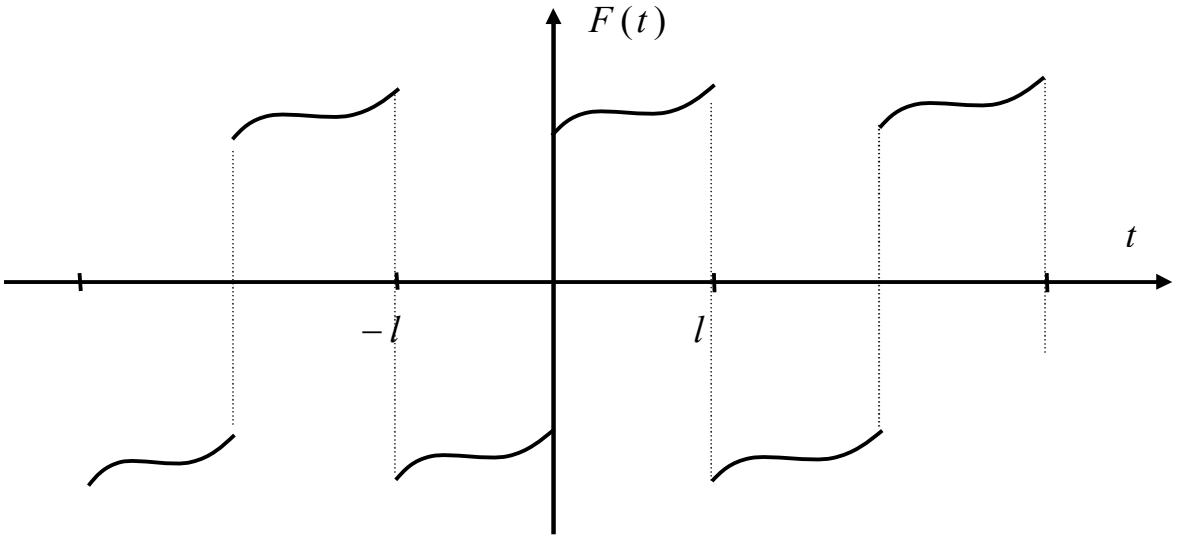


Рисунок 2.13

бачимо, що $f(t)$ розкладається в ряд Фур'є (2.14) по синусах.

ЗАВДАННЯ

Періодичний сигнал $f(t)$ задано на періоді $[a,\ a+T)$ (див. рисунок 2.14).

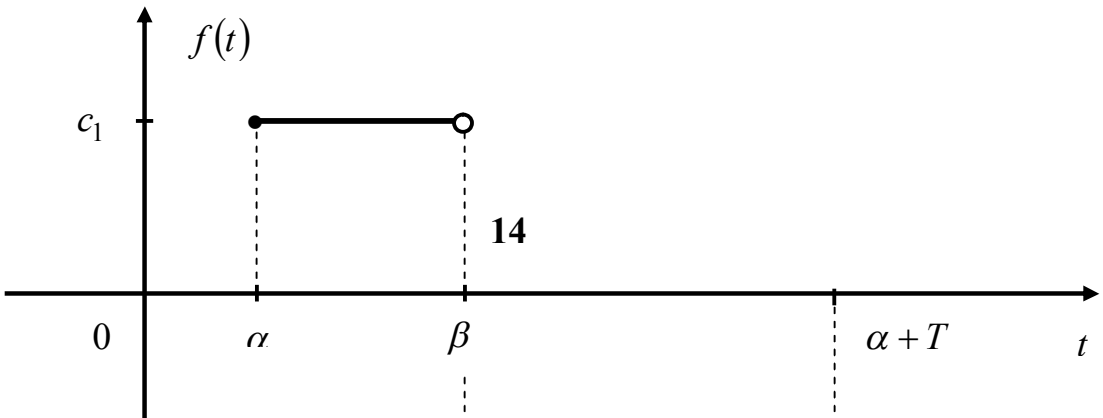


Рисунок 2.14

1 Зобразити графік $f(t)$ на відрізку $[-2T, 2T]$.

2 Розкласти $f(t)$ в ряд Фур'є в дійсній формі.

3 Знайти амплітудний та фазовий спектри сигналу $f(t)$, обмежуючись першими п'ятьма частотами, починаючи з ω_0.

4 Знайти значення суми ряду в точках t_1, t_2 і порівняти ці значення зі значеннями суми перших п'яти членів ряду Фур'є.

5 Вважаючи, що $f(t)$ - струм у провіднику з опором $R=1$, знайти з допомогою рівності Парсеваля сумарну середню за період потужність гармонічних складових цього струму, починаючи зі складової, що відповідає частоті ω_5.

6 Записати одержаний ряд Фур'є в комплексній формі.

Таблиця 2.1

№	α	β	T	C_1	C_2	t_1	t_2
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	2	4	3	3	-1	–2	6
2	1	2	4	-2	5	–3	7
3	-1	1	5	4	2	–3	4
4	½	3/2	2	1	-2	–1/2	3
5	-2	-1	4	-3	-1	3	4
6	-1	2	5	-2	4	–7	8
7	1/3	2/3	1	-1	3	–2/3	5/3
8	1	5/2	3	-4	-2	–2	5
9	-2	1	6	5	-3	4	8

Продовження таблиці 2.1

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
10	-1/2	1	2	3	2	3/2	2
11	-6	-4	5	-2	1	1	7
12	3	5	4	-3	-2	–2	6
13	-1	1	3	4	-1	–5	5/2
14	1/2	1		2	3	0	

15	-1/2	1	2	-1	-5	3/2	4
16	-1	2	4	5	2	–3	7
17	-1	3	6	3	-4	–3	8
18	3	4	5	-2	3	–2	7
19	-2	-1	3	-4	-5	-	
20	2	3	4	5	2	–2	5
21	-4/5	3/5	3	-3	4	–9/5	11/5
22	1	3	5	1	-5	–4	–3
23	-2	-1	3	-2	-1	–5	3
24	-3/2	-1/2	2	4	1	3/2	3
25	2	4	6	-5	-4	–8	9
26	-1	1	4	2	-3	3	6
27	-4	-2	5	1	4	1	2
28	1	5/2	2	-3	1	1/2	7/2
29	1/2	3/2	3	5	-2	–3/2	4
30	-4	-1	6	-4	2	5	10
31	1	3	3	1	-2	-2	2
32	2	3	5	-2	3		

Розв'язання № 31. В цьому випадку:

$\alpha = 1,\ \beta = 3,\ T = 3,\ c_1 = 1,\ c_2 = -2,\ t_1 = -2 \quad t_2 = 2,$

тобто на $[\alpha, \alpha + T) = [1, 4)$ сигнал має вигляд (див. рисунок 2.15):

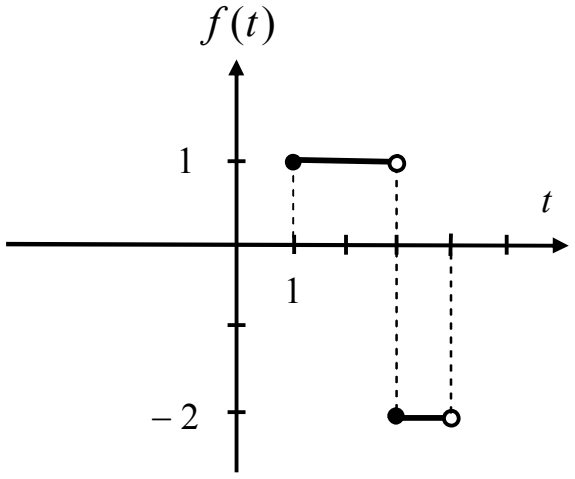


Рисунок 2.15

1 Зображуємо сигнал на $[-2T,\ 2T] = [-6,\ 6]$ (див. рисунок 2.16):

2

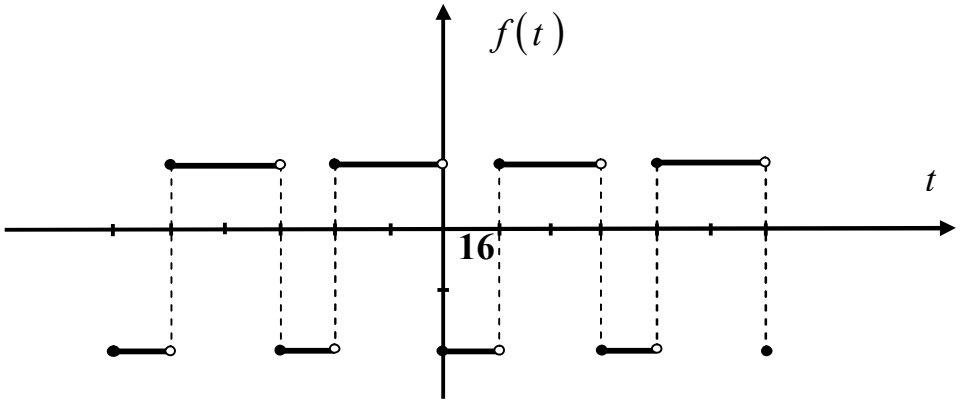


Рисунок 2.16

З $3 = T = 2l \;\Rightarrow\; l = 3/2$; $\omega_n = n\pi/l = 2n\pi/3$. Для того, щоб спростити обчислення коефіцієнтів Фур'є, розглянемо сигнал $F(t) = f(t) + 2$ (див. рисунок 2.17):

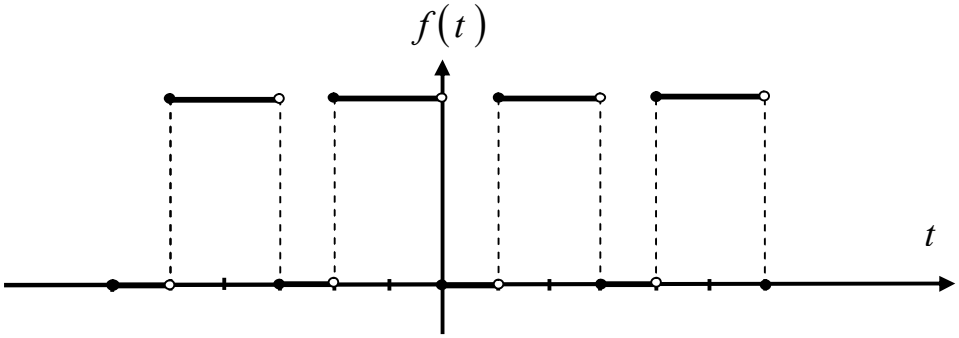


Рисунок 2.17

$$\frac{a_0}{2} = \overline{f} = \overline{(F-2)} = \overline{F} - 2 = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3 - 2 = 0.$$

Оскільки $F(t)$ відрізняється від $f(t)$ на сталу складову, то їх коефіцієнти Фур'є при $n \geq 1$ співпадають. Тому, використовуючи властивість 3 періодичних функцій, маємо:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(t)\cos\omega_n t\,dt = \frac{2}{3}\int_0^3 F(t)\cos\frac{2\pi n}{3}t\,dt = \frac{2}{3}\cdot 3\int_1^3 \cos\frac{2\pi n}{3}t\,dt = -\frac{3}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}.$$

Аналогічно

$$b_n = \frac{3}{\pi n}\left(\cos\frac{2\pi n}{3} - 1\right).$$

Отже, розвинення $f(t)$ в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{\pi n}\,\mathbf{sin}\,\frac{2\pi n}{3}\mathbf{cos}\,\frac{2\pi n}{3}\,t+\frac{3}{\pi n}\left(\,\mathbf{cos}\,\frac{2\pi n}{3}-1\right)\mathbf{sin}\,\frac{2\pi n}{3}\,t\right).\quad(2.15)$$

4 Стала складова дорівнює нулю.

Перша гармоніка:

$$a_1=-\frac{3}{\pi}\,\mathbf{sin}\,\frac{2\pi}{3}=-\frac{3}{\pi}\,\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad b_1=\frac{3}{\pi}\left(\,\mathbf{cos}\,\frac{2\pi}{3}-1\right)=-\frac{9}{2\pi};$$

і тому

$$a_1\,\mathbf{cos}\,\omega_1 t+b_1\,\mathbf{sin}\,\omega_1 t=-\frac{3}{\pi}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{cos}\,\frac{2\pi}{3}t-\frac{9}{2\pi}\,\mathbf{sin}\,\frac{2\pi}{3}t=$$

$$=\left|\begin{array}{l}A_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2}=\sqrt{\dfrac{27}{4\pi^2}+\dfrac{81}{4\pi^2}}=\dfrac{3\sqrt{12}}{2\pi}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}\\ tg\varphi_1=-\dfrac{b_1}{a_1}=-\dfrac{-\dfrac{9}{2\pi}}{-\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}}=-\dfrac{9}{3\sqrt{3}}=-\sqrt{3}\\ \cos\varphi_1=\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}<0\\ \sin\varphi_1=\dfrac{-b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}>0\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi_1=\frac{2\pi}{3}\left|=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}t+\frac{2\pi}{3}\right).\right.$$

Друга гармоніка:

$$a_2=-\frac{3}{2\pi}\,\mathbf{sin}\,\frac{4\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi},\qquad b_2=\frac{3}{2\pi}\left[\,\mathbf{cos}\,\frac{4\pi}{3}-1\right]=-\frac{9}{4\pi}.$$

і тому

$$a_2\,\mathbf{cos}\,\omega_2 t+b_2\,\mathbf{sin}\,\omega_2 t=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\,\mathbf{cos}\,\frac{2\pi}{3}\,2t-\frac{9}{4\pi}\,\mathbf{sin}\,\frac{2\pi}{3}\,2t=$$

$$= \left| \begin{array}{l} A_2 = \sqrt{\dfrac{27}{16\pi^2} + \dfrac{81}{11\pi^2}} = \dfrac{3\sqrt{12}}{4\pi} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi} \\ tg\,\varphi_2 = -\dfrac{-\dfrac{9}{4\pi}}{\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}} = \dfrac{9}{4\pi}\,\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3} \\ \cos\varphi_2 > 0 \\ \sin\varphi_2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3} \left| = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot 2t + \frac{2\pi}{3} \right). \right.$$

Третя гармоніка дорівнює нулю, оскільки:

$$a_3 = -\frac{3}{3\pi}\,\mathbf{sin}\,\frac{6\pi}{3} = 0\,, \qquad b_3 = \frac{3}{3\pi}\left[\,\mathbf{cos}\,\frac{6\pi}{3} - 1\,\right] = 0\,.$$

Четверта гармоніка:

$$a_4 = -\frac{3}{\pi 4}\,\mathbf{sin}\,\frac{8\pi}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\,, \qquad b_4 = \frac{3}{\pi 4}\left[\,\mathbf{cos}\frac{8\pi}{3} - 1\,\right] = \frac{-9}{8\pi};$$

і тому

$$a_4\,\mathbf{cos}\,\omega_4 t + b_4\,\mathbf{sin}\,\omega_4 t = -\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\,\mathbf{cos}\,\frac{2\pi}{3}\,4t - \frac{9}{8\pi}\,\mathbf{sin}\,\frac{2\pi}{3}\,4t =$$

$$= \left| \begin{array}{l} A_4 = \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = \sqrt{\dfrac{27}{64\pi} + \dfrac{81}{64\pi}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{8\pi} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi} \\ tg\,\varphi_4 = -\dfrac{-\dfrac{9}{8\pi}}{-\dfrac{3\sqrt{3}}{8\pi}} = -\sqrt{3} \\ \mathbf{cos}\,\varphi_4 < 0,\ \ \mathbf{sin}\,\varphi_4 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_4 = \frac{2\pi}{3} \left| = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\,\mathbf{cos}\left(\frac{2\pi}{3}\,4t + \frac{2\pi}{3} \right). \right.$$

Зображуємо амплітудний і фазовий спектри, обмежуючись першими п’ятьма частотами (див. рисунок 2.18):

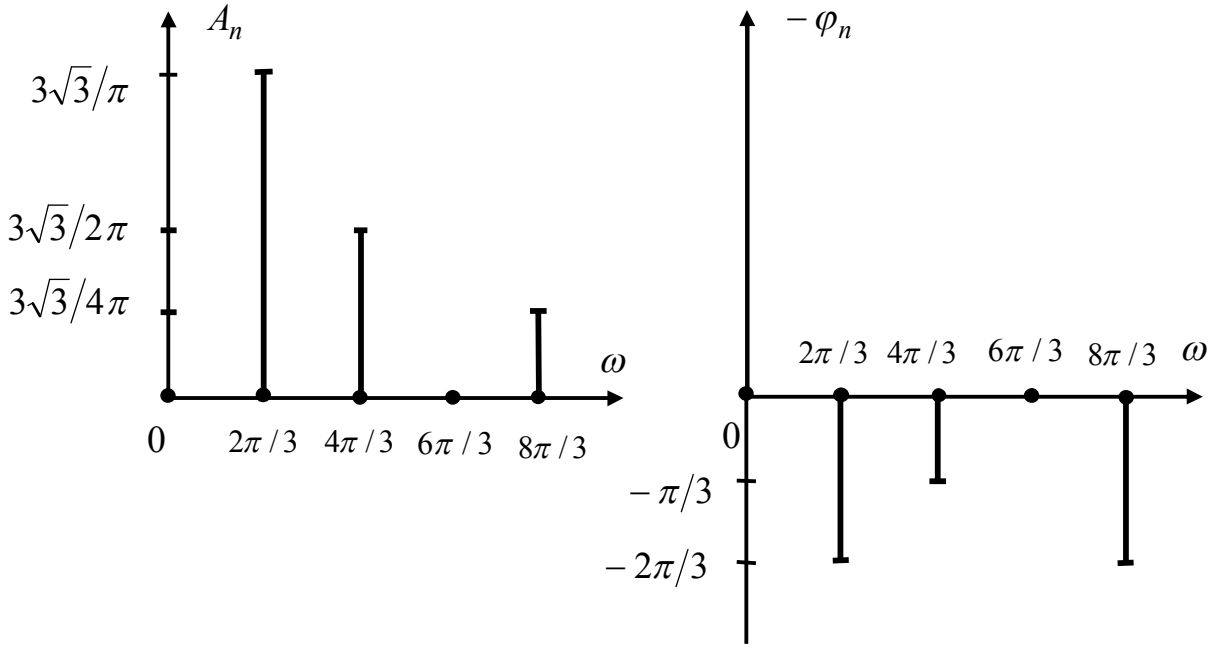


Рисунок 2.18

4 Згідно з теоремою 1 сума ряду $S(t)$ ряду Фур'є (2.15) в точках $t_1 = -2,\ t_2 = 2$ дорівнює відповідно:

$$S(-2) = \frac{(-2+0)+(-2+0)}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}, \qquad S(2) = f(2) = 1.$$

А сума перших п'яти гармонік в цих же точках має значення відповідно:

$$-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} = -\frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \approx -0.62, \qquad \frac{3\sqrt{3}}{\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} \approx 1.24,$$

які мало відрізняються від S(–2) і S(2) відповідно (що свідчить про те, що пункти 2,3 завдання виконані вірно).

$$5\ \sum_{n=5}^{\infty} \frac{I_n^2}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt - A_0^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{4} A_n^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[4+2\right] - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^2\right] = 2 - \frac{27\cdot 21}{32\pi^2} \approx 0.2048.$$

6 При $n \geq 1$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{3}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3} - i\frac{3}{\pi n}\left(\cos\frac{2\pi n}{3} - 1\right)\right\} = \frac{3}{2\pi n}\left(1 - e^{-\frac{2\pi ni}{3}}\right),$$

$c_0 = \frac{a_0}{2} = 0$, $c_{-n} = \overline{c_n}$ (оскільки сигнал $f(t)$ дійсний). Тому комплексна форма ряду Фур'є (2.15) має вигляд

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{3}{2\pi n}\left(1 - e^{-\frac{2\pi ni}{3}}\right) \cdot e^{-\frac{2\pi ni}{3}t}.$$

Наостанок наведемо звіт про виконання варіанта № 32, який склала студентка Т. І. Лобода, використовуючи Mathcad, при цьому перелік завдань дещо модифіковано з урахуванням того, що при їх виконанні використовувалась ПЕОМ.

ЗВІТ ПРО ВИКОНАННЯ РГР З ГАРМОНІЧНОГО АНАЛІЗУ

Варіант №32

a = 2, b = 3, T = 5, C_1 = -2, C_2 = 3

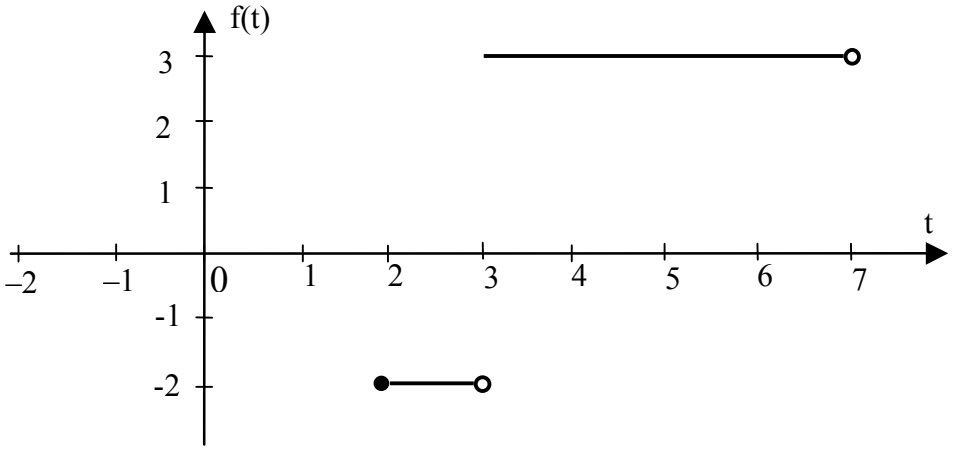


Рисунок 2.19

Потрібно:

1 Зобразити графік функції f(t) на відрізку [-2T;2T].

2 Розкласти f(t) в ряд Фур'є, графічно порівняти суму ряду і заданий сигнал f(t).

3 Побудувати амплітудний, фазовий спектри сигналу (обмежуючись першими 6 членами ряду Фур'є). Зробити перевірку, зобразивши кожну гармоніку і їх суму на фоні заданого сигналу f(t).

Розв'язок:

1 Графік функції на відрізку [-2T;2T]

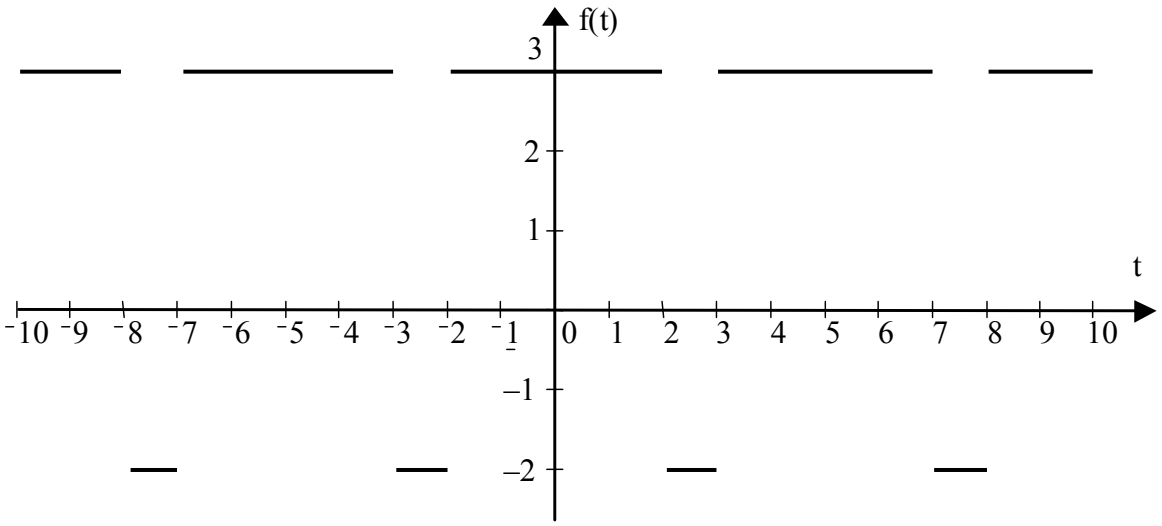


Рисунок 2.20

2 Розкладання в ряд Фур'є (сигнал парний, тому він розкладається в ряд Фур'є по косинусах).

$$f(t) := 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 10 \cdot \sin(0.8 \cdot \pi \cdot n) \cdot \frac{\cos\left(\pi \cdot n \cdot \frac{t}{2.5}\right)}{\pi \cdot n}.$$

Зображуємо суму ряду Фур'є:

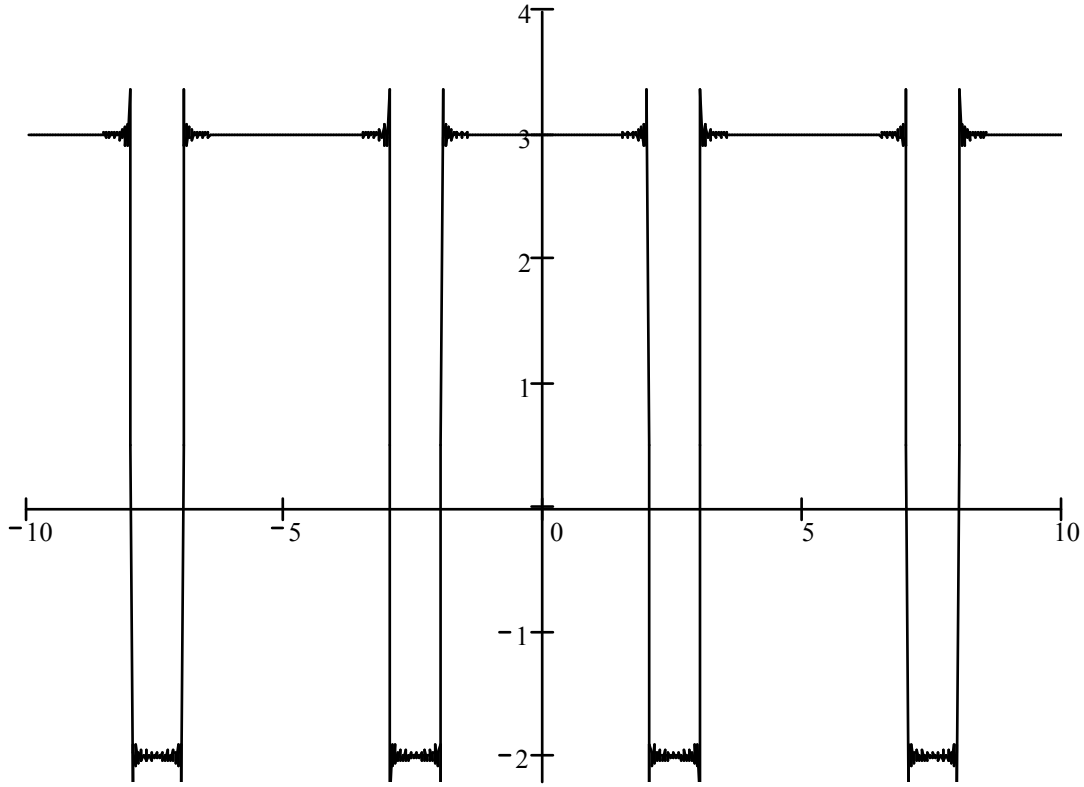


Рисунок 2.21

3 Спектральний аналіз:

Стала складова $\gamma_0(t) = 2$

Перша гармоніка: $\gamma_1(t) := 1.87 \cdot \cos(0.4 \cdot \pi \cdot t)$

Друга гармоніка: $\gamma_2(t) := 1.513 \cdot \cos(0.8 \cdot \pi \cdot t + \pi)$

Третя гармоніка: $\gamma_3(t) := \cos(1.2 \cdot \pi \cdot t)$

Четверта гармоніка: $\gamma_4(t) = 0$

П'ята гармоніка: $\gamma_5(t) := 0.468 \cdot \cos(1.6 \cdot \pi \cdot t + \pi)$

Зображуємо амплітудний та фазовий спектри:

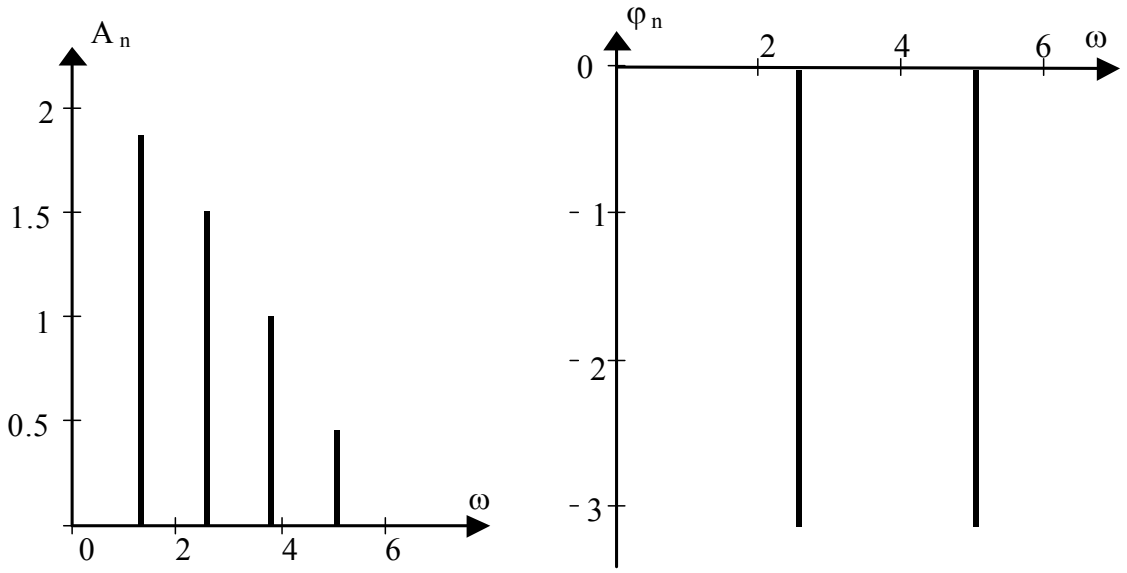


Рисунок 2.22

Зображуємо послідовні часткові суми ряду Фур'є на фоні заданого сигналу f(t)

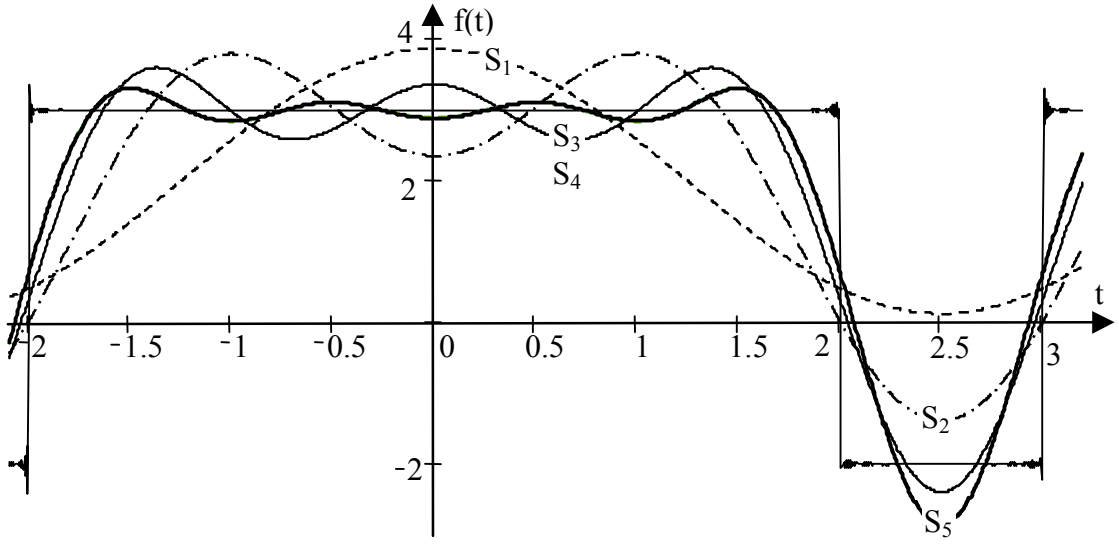


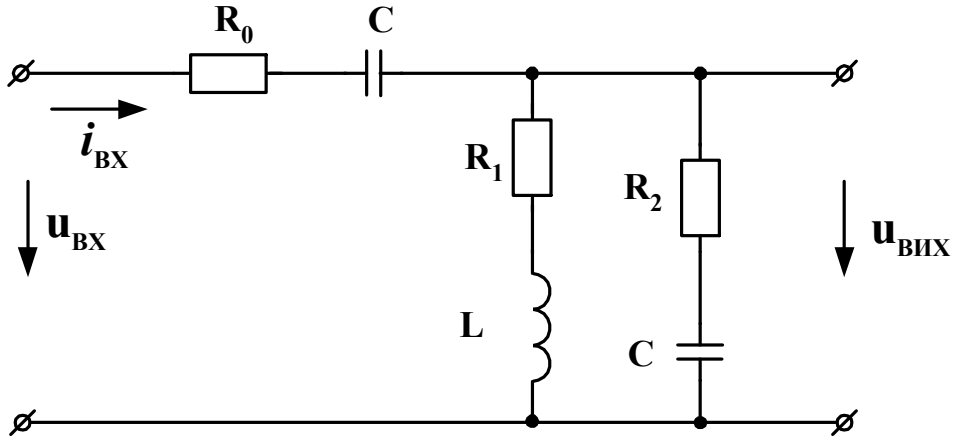
Рисунок 2.23

3 ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНА ЧАСТИНА РОЗРАХУНКУ

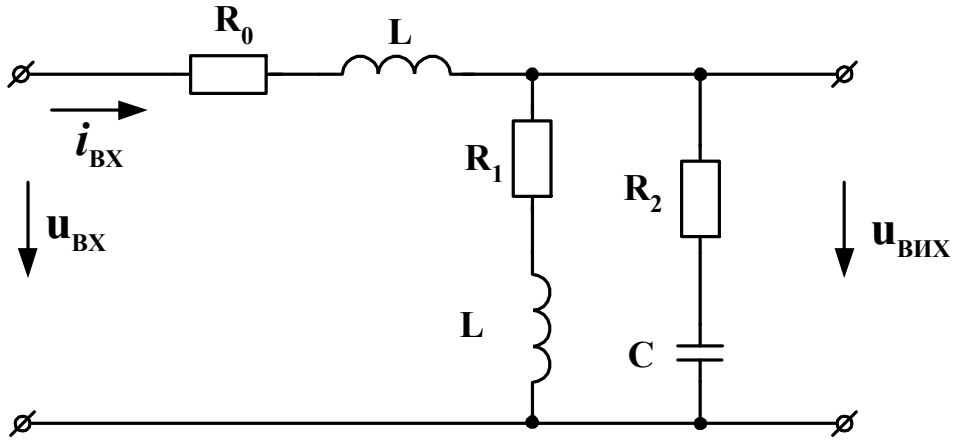
3.1 Вихідні дані для розрахунку

Схему кола, яке підлягає розрахунку, наведено на рисунку 3.1,а (для варіантів з 1 по 50) та на рисунку 3.1,б (для варіантів з 51 по 100).

Опори елементів цих кіл першій гармоніці струму наведено в таблиці 3.1. Як вхідну напругу $\mathbf{u_{вх}}$ слід використати суму перших чотирьох обчислених у математичній частині розрахунку гармонік, амплітуди яких не дорівнюють нулю. При цьому амплітуди слід вважати вираженими у вольтах, а час – у мілісекундах (1 мс=10^{-3} с). Якщо при виконанні математичної частини розрахунку ненульових гармонік обчислено менше ніж чотири – додатково обчислити гармоніки, яких не вистачає.



а



б

Рисунок 3.1

Таблиця 3.1

Номер варіанта завдання	Опори елементів кола першій гармоніці струму				
	R_0, Ом	R_1, Ом	R_2, Ом	$X_{L(1)}$, Ом	$X_{C(1)}$, Ом
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	5	10	5	5	15
2	2	3	10	3	27
3	1	3	10	4	30
4	5	10	5	5	15
5	2	3	10	3	27
6	3	4	6	4	30
7	5	10	5	5	15
8	2	10	3	4	27
9	3	4	6	2	30
10	5	10	5	5	15
11	2	10	3	4	21
12	3	4	6	2	30
13	2	10	3	4	21
14	1	3	10	3	27
15	5	10	5	5	15
16	3	4	4	2	30
17	2	10	3	4	27
18	1	2	3	4	21
19	3	3	4	6	30
20	5	10	5	5	15
21	1	2	3	4	21
22	2	10	3	4	30
23	3	3	4	2	27
24	5	10	5	5	15
25	3	3	5	4	21
26	2	10	3	4	21
27	5	10	10	5	15
28	2	10	3	4	21
29	2	4	4	3	9
30	5	10	5	5	15
31	2	10	3	4	30
32	5	10	5	5	15
33	2	4	4	3	9
34	5	10	10	5	15
35	1	3	3	3	9
36	2	10	3	4	21
37	5	10	5	5	15

Продовження таблиці 3.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
38	2	3	10	5	21
39	10	10	5	5	15
40	2	10	3	4	21
41	2	10	3	4	27
42	1	3	3	3	9
43	2	10	3	4	30
44	10	5	5	5	15
45	5	10	5	5	30
46	1	2	3	4	21
47	2	3	10	5	21
48	5	10	5	5	15
49	2	3	10	5	21
50	10	5	5	5	15
51	3	3	5	4	21
52	5	10	5	5	18
53	3	3	4	2	27
54	2	10	3	4	30
55	1	2	3	4	21
56	5	10	5	5	15
57	3	3	4	6	30
58	1	2	3	4	21
59	2	10	3	4	27
60	3	4	4	2	30
61	5	10	5	5	15
62	1	3	10	3	27
63	2	10	3	4	21
64	3	4	6	2	30
65	2	10	3	4	21
66	5	10	5	5	15
67	3	4	6	2	30
68	2	10	3	4	27
69	5	10	5	5	15
70	3	4	6	4	30
71	2	3	10	3	27
72	5	10	5	5	15
73	1	3	10	4	30
74	2	3	10	3	27
75	5	10	5	5	15
76	5	10	5	5	15
77	2	3	10	5	21

Продовження таблиці 3.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
78	10	5	5	5	15
79	2	3	10	5	21
80	1	2	3	4	21
81	5	10	5	5	30
82	10	5	5	5	15
83	2	10	3	4	30
84	1	3	3	3	9
85	2	10	3	4	27
86	2	10	3	4	21
87	10	10	5	5	15
88	2	3	10	5	21
89	5	10	5	5	15
90	2	4	4	3	9
91	5	10	5	5	15
92	2	10	3	4	30
93	5	10	5	5	15
94	2	4	4	3	9
95	2	10	3	4	21
96	5	10	10	5	15
97	2	10	3	4	21
98	1	3	3	1	9
99	2	10	3	4	30
100	3	3	5	5	15

3.2 ЗМІСТ ЗАВДАННЯ

3.2.1 Побудувати в одній і тій же системі координат часові діаграми гармонік, вказаних у п. 3.1. Графічно додати ці гармоніки і накреслити в тій же системі координат результуючу часову діаграму. Там же накреслити червоним кольором функцію, яку Ви розкладали в ряд Фур'є в математичній частині розрахунку. Порівняти цю функцію та результуючу часову діаграму. Розбіжність не повинна перевищувати 20%.

Примітка – Всі побудування доцільно виконувати на інтервалі часу, який дорівнює одному періоду вхідної напруги.

3.2.2 Обчислити гармоніки вхідного струму $i_{вх}$, які відповідають прийнятим до розрахунку гармонікам вхідної напруги. Записати вирази для миттєвих значень цих гармонік.

3.2.3 Побудувати в одній і тій же системі координат часові діаграми гармонік, обчислених у п. 3.2.2. Графічно додати ці гармоніки і накресли-

ти червоним кольором в тій же системі координат результуючу часову діаграму $i_{вх}(t)$.

3.2.4 Обчислити гармоніки вихідної напруги $u_{вих}$, які відповідають прийнятим до розрахунку гармонікам вхідної напруги. Записати вирази для миттєвих значень цих гармонік.

Примітка – Обчислення комплексної амплітуди **k-**ї гармоніки вихідної напруги $\dot{U}_{m\,вих(k)}$ простіше за все виконувати, користуючись другим законом Кірхгофа, за формулою $\dot{U}_{m\,вих(k)} = \dot{U}_{m\,вх(k)} - \dot{U}_{m0(k)}$, **де** $\dot{U}_{m0(k)}$ комплексна амплітуда **k-**ї гармоніки напруги на ланцюжку R_0C (для схеми ***а***) або ланцюжку R_0L (для схеми ***б***).

3.2.5 Побудувати в одній і тій же системі координат часові діаграми гармонік, обчислених у п.3.2.4. Графічно додати ці гармоніки і накреслити червоним кольором в тій же системі координат результуючу часову діаграму $u_{вих}(t)$.

3.2.6 Порівняти часові діаграми $u_{вх}(t)$ та $u_{вих}(t)$. На базі цього порівняння, а також попередніх розрахунків зробити висновки щодо впливу досліджуваного кола на форму сигналу, який проходить крізь це коло.

3.3 Методичні рекомендації з виконання електротехнічної частини розрахунку

Перед початком розрахунку радимо Вам повторити розділи “Принцип накладання. Метод накладання” та “Кола періодичного несинусоїдного струму [11 – 13]. І, звичайно, безумовно необхідним є вміння виконувати розрахунок кіл синусоїдного струму символічним методом та вміння вільно переходити від комплексних амплітуд (або комплексів діючих значень) струмів і напруг до їх миттєвих значень та навпаки [11-13].

Детальні приклади розрахунків з тематики даної роботи наведено в задачнику [14].

Відносно рекомендованих літературних джерел зауважимо, що цілком придатними є й більш давні видання, аніж подані в списку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1985.

2 Сборник задач по теории аналитических функций / Под. ред. М.А. Евграфова – М.: Наука, 1972.

3 Сборник задач для втузов. Специальные разделы математического анализа /Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича – М.: Наука, 1986.

4 Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989.

5 Зорич В. А. Математический анализ. – М.: Наука, 1984. – Т. 2.

6 Козел В.А., Храбустовский В.И. Методические указания и задания к типовому расчету «Элементы гармонического анализа». – Харьков: ХИИТ, 1992.

7 Колобов А.М. Избранные главы высшей математики. – Минск: Вышэйшая школа, 1965. – 218 с.

8 Поддубный Г.В., Романовский Р.К. Математический анализ для радиоинженеров. – М.: МО СССР, 1976.

9 Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М., 1970. – Т. 3.

10 Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. – М., 1971.

11 Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Высшая школа, 1996.

12 Основы теории цепей / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – М.: Энергия, 1989.

13 Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. – Л.: Энергоиздат, 1981. – Т. 1.

14 Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей. – М.: Высшая школа, 1990.