№462

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**і завдання для самостійної роботи
з дисципліни**

„ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА”

Харків 2008

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 31 березня 2008 р., протокол № 9.

Методичні вказівки та завдання присвячені розгляду багатьох прикладів для розуміння основних принципів теорії ймовірностей та охоплюють теми «Комбінаторика», «Випадкові події», «Основні теореми теорії ймовірностей», «Випадкові величини» з досить докладним розгляданням усіх питань. Також наведені приклади розв'язання задач з розгорнутими поясненнями не тільки складних питань, але й визначень теорії ймовірностей, наведено зразки завдань для практичних занять, варіанти завдань для виконання домашніх і контрольних робіт.

Методичні вказівки та завдання призначені для організації самостійної роботи студентів загальнотехнічних спеціальностей денної форми навчання, але, за певних зауважень викладача, їх можна застосовувати студентам інших спеціальностей заочної та денної форм навчання.

Укладачі:

доц. Ю.О. Акімова,

старші викладачі Н.І.Волохова,

Н.О.Мільська

Рецензент

доц. А.О.Дрогаченко

Науку цю у давнині
з азартних ігор почали,
віками потім розвивали
розумні люди на Землі,
щоб ви її застосували.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА КОМБІНАТОРИКИ

1.1 Предмет теорії ймовірностей

Розглянемо деякий дослід, у результаті якого може з'явитись або не з'явитись подія A. Прикладами такого досліду можуть бути:

а) дослід – виготовлення певного виробу, подія A – стандартність цього виробу;

б) дослід – кидання монети, подія A – випав герб;

в) дослід – стрільба п'ятьма пострілами в мішень, подія A – вибито 30 очок;

г) дослід – введення програми у комп'ютер, подія A – безпомилкове введення.

Загальним для усіх дослідів є те, що кожен із них може реалізуватись у певних умовах скільки завгодно разів. Такі досліди називають випробуваннями.

Події поділяють на такі типи: випадкові, достовірні та неможливі.

Випадковою називають таку подію, яка за умов, що розглядаються, може відбутися, а може й не відбутися.

Достовірною називають таку подію, яка за умов, що розглядаються, обов'язково відбудеться.

Неможливою називають таку подію, яка за умов, що розглядаються, не може відбутися.

Наприклад, якщо в урні є лише білі кулі, то діставання білої кулі з урни – достовірна подія, а діставання з цієї урни кулі іншого кольору – неможлива подія.

Якщо кинути монету на площину, то поява герба буде випадковою подією, тому що замість герба може з’явитися надпис.

Випадкові події позначають великими латинськими літерами, наприклад, $A, B, C, D, X, Y, A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Кожна випадкова подія є наслідком багатьох випадкових або невідомих нам причин, які впливають на подію. Тому неможливо передбачити наслідок певного випробування. Але якщо багато разів повторювати дослід за однакових умов, то можна виявити певну закономірність появи або непояви події. Таку закономірність називають *імовірною закономірністю масових однорідних випадкових подій.*

У теорії ймовірностей під *масовими однорідними випадковими подіями* розуміють такі події, які здійснюються багатократно за однакових умов, або коли відбувається багато однакових подій.

Наприклад, кинути одну монету 1000 разів або 1000 однакових монет кинути один раз у теорії ймовірностей вважають однаковими подіями.

Предметом теорії ймовірностей є вивчення імовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій.

1.2 Алгебра випадкових подій

Визначення. *Події називають несумісними, якщо поява однієї з них виключає появу інших в одному і тому ж випробуванні.*

Події називають сумісними, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших.

Приклад 1.1. Серед однорідних деталей у ящику є стандартні та нестандартні. Навмання беруть з ящика одну деталь.

Події:

A – взята деталь є стандартною,

B – взята деталь є нестандартною –

несумісні тому, що взята лише одна деталь, яка не може бути одночасно стандартною та нестандартною.

Приклад 1.2. Два стрільці стріляють у мішень.

Події

A_1 – перший стрілець влучив у мішень,

A_2 – другий стрілець влучив у мішень –

є сумісними випадковими подіями.

Визначення. *Випадкові події* A_1, $A_2,\ldots,$ A_n *утворюють повну групу подій, якщо внаслідок випробування обов'язково з'явиться хоча б одна з них.*

Приклад 1.3. Кидають шестигранний кубик. Позначимо події так:

A_1 – випала грань *1*;

A_2 – випала грань *2*;

A_3 – випала грань *3*;

A_4 – випала грань *4*;

A_5 – випала грань *5*;

A_6 – випала грань *6*.

Події $A_1, A_2 \ldots A_6$ утворюють повну групу.

Зауважимо, що у прикладі 1.2 події A_1 та A_2 не утворюють повну групу. Але якщо позначити через A_3 подію, яка полягає в тому, що жоден із стрільців не влучив у мішень, а через A_4 подію, яка полягає в тому, що обидва стрільці влучили у мішень, то події A_1, A_2, A_3 та A_4 утворюють повну групу.

Визначення. *Події називають рівноможливими в деякому досліді, якщо немає підстав вважати, що жодна з них є більш можливою за інші.*

Приклад 1.4. Події – поява *1, 2, 3, 4, 5* або *6* очок при киданні шестигранного кубика – рівноможливі за умови, що центр його ваги не зміщений.

Визначення. *Дві несумісні події, які утворюють повну групу, називають протилежними.*

Подія, протилежна до події A, позначається $\bar{A}$ (рисунок 1.1).

Приклад 1.5. Якщо позначити через A подію, що при стрільбі по мішені вибито 8 очок, то подія $\bar{A}$ – при стрільбі по мішені вибито будь-яке інше число очок.

Тепер розглянемо важливе поняття *простору елементарних наслідків.*

Нехай виконується деякий експеримент, який має елементи випадковості, тобто кожне випробування може мати різні наслідки.

Так, при киданні монети можуть бути два можливих наслідки: випадіння герба або надпису.

При киданні грального кубика можуть бути шість можливих наслідків.

У випробуванні “постріл у мішень” можна розглядати такі наслідки, як влучення у мішень або кількість вибитих очок, або координати точки влучення.

Отже, що саме приймати за наслідок випробування, залежить від умови задачі.

Визначення. *Елементарними наслідками називають такі наслідки, які неможливо розділити на більш прості. Множину усіх можливих елементарних наслідків називають простором елементарних наслідків.*

Простір елементарних наслідків може містити *скінченну, злічену або незлічену* множину елементів.

У ролі елементарних наслідків можна розглядати точки *n*–вимірного простору, відрізок деякої лінії, точки поверхні *S* або об*’*єму *V* тривимірного простору, функцію однієї або багатьох змінних.

У більшості випадків, що розглядаються, припускають, що елементарні наслідки рівноможливі.

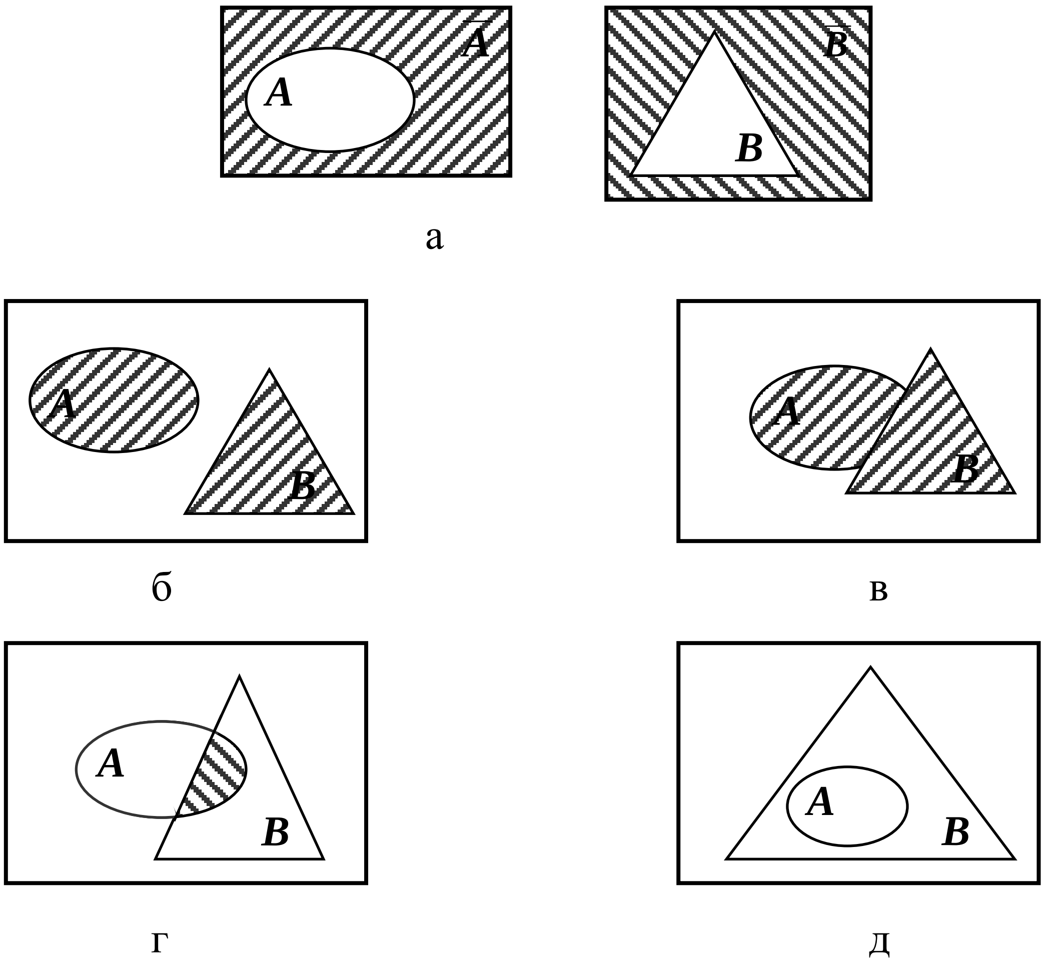
Нехай *A* та *B* – випадкові події.

Визначення. *Сумою (об’єднанням) A+B* ($A \bigcup B$) *випадкових подій A і B називають таку випадкову подію, яка полягає у появі або події A, або події B, або обох подій A і B разом.*

Таким чином, сума двох подій – це подія, яка полягає у появі хоча б однієї з подій A або B.

Якщо A та B – несумісні, то $A+B$ означає появу події A або події B.

Аналогічно визначають суму (об’єднання) більшої кількості випадкових подій.



а) подія A та подія B та протилежні їм події;
б) $A + B$ (A, B – несумісні);
в) $A + B$;
г) $A \cdot B$;
д) $A \subset B$;
$A + B = B$;
$A \cdot B = A$

Рисунок 1.1 – Співвідношення між подіями

Визначення. *Сумою (об'єднанням)* $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ $(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n)$ *випадкових подій* A_1, A_2,..., A_n *називають таку випадкову подію, яка полягає в появі хоча б однієї з цих подій.*

Якщо події попарно несумісні, то їх сумою є подія, яка полягає в тому, що з'являється або тільки подія A_1, або тільки A_2,.., або тільки A_n.

Визначення. *Добутком (перетином)* $A \cdot B$ $(A \bigcap B)$ *двох випадкових подій A і B називають таку випадкову подію, яка полягає у появі подій A і B одночасно.*

У разі несумісності подій *A, B* маємо $A \bigcap B = A \cdot B = \varnothing$.

Визначення. *Добутком (перетином)* $A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_n$ *випадкових подій* A_1, A_2, . . . , A_n *називають таку випадкову подію, яка полягає у сумісній появі усіх цих подій.*

Вказані співвідношення між подіями можна подати графічно (див. рисунок 1.1).

Приклад 1.6. Стрілець двічі стріляє по мішені. Описати простір елементарних наслідків. Записати подію, яка полягає в тому, що:

а) стрілець влучив рівно один раз (подія *C*);

б) стрілець влучив у мішень принаймні один раз (подія *D*);

в) стрілець не влучив у мішень (подія *F*).

Розв'язання. Позначимо:

подія *A* – влучення при першому пострілі,

подія *B* – влучення при другому пострілі.

Простір елементарних наслідків складається з чотирьох подій

$$\left\{AB,\ A\bar{B},\ \bar{A}B,\ \bar{A}\bar{B}\right\}.$$

а) рівно одне влучення може бути тільки тоді, коли стрілець при першому пострілі влучив, а при другому – ні, або при першому пострілі не влучив, а при другому – влучив.

Тобто

$$C = A\overline{B} + \overline{A}B;$$

б) якщо стрілець влучив у мішень принаймні один раз, то це означає, що він влучив або при першому пострілі ($A\overline{B}$), або при другому пострілі ($\overline{A}B$), або при обох (AB).

Тобто

$$D = A\overline{B} + \overline{A}B + AB;$$

в) якщо стрілець не влучив у мішень, то це означає, що він не влучив при обох пострілах.

Тобто

$$F = \overline{A} \cdot \overline{B}.$$

1.3 Визначення та властивості імовірності та частості

Для порівняння випадкових подій за ступенем їх можливості треба кожну подію пов'язати з певним числом, яке повинно бути тим більше, чим більш можлива подія. Таке число P називають імовірністю події. Існує декілька визначень імовірності. Ознайомимось із ними.

Визначення. *Імовірністю події є чисельна міра ступеня об'єктивної можливості цієї події.*

Це визначення імовірності визначає філософську суть імовірності, але не вказує правила знаходження імовірності будь-якої події.

Визначення *(класичне). Імовірність події A дорівнює відношенню числа елементарних наслідків, які сприяють появі події A, до загального числа всіх рівноможливих і попарно несумісних елементарних наслідків, які утворюють повну групу.*

Імовірність події *A* позначають *P(A)*. За визначенням

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

де m – число елементарних наслідків, що сприяють появі події A;

n – число усіх рівноможливих і попарно несумісних елементарних наслідків, які утворюють повну групу.

Приклад 1.7. В урні 6 однакових за розміром куль: 2 червоні, 3 сині, 1 біла. Знайти імовірність появи червоної кулі, якщо беруть одну кулю з урни навмання.

Розв'язання. Нехай подія *A* – навмання взята куля є червоною. З урни можна взяти будь-яку кулю із шести, тому всіх можливих наслідків 6 $(n=6)$. Подія *A* з'явиться, якщо буде взято одну з двох червоних куль, тому $m=2$. За формулою (1.1) отримуємо

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Зауваження 1. *При розв'язанні багатьох задач знаходження чисел m та n має певні труднощі, запобігти яким допомагають принципи та формули комбінаторики, з якими ознайомимось нижче.*

Зауваження 2. *Класичне визначення імовірності має місце лише тоді, коли m та n скінченні, а усі елементарні наслідки рівноможливі (саме така ситуація виникає у більшості азартних ігор, що здійснюються без шахрайства).*

Якщо множина елементарних наслідків нескінченна або елементарні наслідки не рівноможливі, то формулою (1.1) користуватись не можна.

Якщо множина усіх елементарних наслідків нескінченна і, як наслідок, займає деяку область G, а події A сприяє лише частина $g \in G$*, то обчислення імовірності події A виконують згідно з геометричним визначенням імовірності.*

Основні властивості імовірності

1 Імовірність будь-якої події A задовольняє співвідношення

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2 Якщо подія A достовірна, то її імовірність дорівнює одиниці, тобто

$$P(A) = 1.$$

3 Якщо подія A неможлива, то її імовірність дорівнює нулю, тобто

$$P(A) = 0.$$

Визначення *(геометричне). Імовірність події A дорівнює відношенню міри* g *до міри G*

$$P(A) = \frac{m(g)}{m(G)}. \tag{1.2}$$

Зауваження 3. *Якщо область G – проміжок, поверхня або просторове тіло, а g – частина G, тоді мірою G та g буде довжина, площа або об'єм відповідної області. Якщо G та g – проміжки часу, тоді їхньою мірою буде час.*

Визначення. *Відносною частотою або частістю події A називають відношення числа незалежних випробувань, у яких подія A з'явилась, до числа фактично проведених незалежних випробувань.*

Відносну частоту події A звичайно позначають $W(A)$. Отже,

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

де m – кількість незалежних випробувань, у яких з'явилась подія A;

n – кількість усіх незалежних випробувань.

Приклад 1.8. Відділ технічного контролю серед 100 виробів виявив 8 нестандартних. Чому дорівнює відносна частота появи нестандартних виробів?

Розв'язання. Позначимо через A таку подію, яка полягає в появі нестандартного виробу. Тоді за визначенням частості події одержимо

$$W(A) = \frac{8}{100} = 0,08.$$

Зауваження 4. *Підкреслимо, що імовірність P(A) події A обчислюється до випробування, а частість* $W(A)$ *обчислюється після випробування.*

Частість появи події має властивість стійкості: при великій кількості випробувань частість змінюється дуже мало, коливаючись близько деякої сталої (числа) – імовірності появи цієї події, тобто

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} W(A).$$

1.4 Основні поняття та принципи комбінаторики

Визначення. *Різні групи, складені з будь-яких елементів, називають сполуками цих елементів.*

Приклад 1.9. З цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 можна скласти багато різних сполук по 2, 3, 4, … цифр. Деякі з них будуть відрізнятися лише порядком цифр. Наприклад 123, 8056, 96, 312, 231, 321.

Усі можливі сполуки доцільно класифікувати. Сполуки бувають трьох видів (рисунок 1.2)

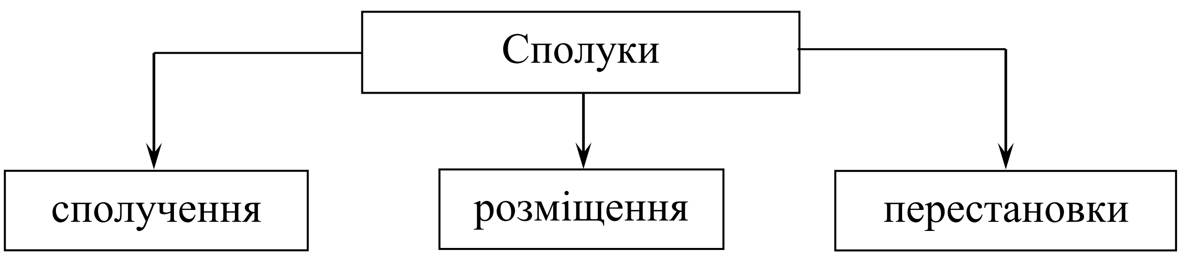


Рисунок 1.2

Визначення. *Сполученнями з n елементів по m називають сполуки, що складаються з m елементів, взятих з даних n елементів* $(m \le n)$, *і відрізняються хоча б одним елементом.*

Кількість сполучень з n елементів по m позначають C_n^m і знаходять за формулою

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (1.3)$$

Зауважимо, що за визначенням

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n \quad (n \in N),$$
$$0! = 1.$$

Приклад 1.10. З 10 кандидатів на одну й ту саму посаду мають бути обрані троє. Скільки існує варіантів вибору?

Розв'язання. Усі можливі варіанти вибору – сполуки з 10 кандидатів по 3, які відрізняються хоча б одним кандидатом, тобто ці сполуки – сполучення. Згідно з формулою (1.3) їх кількість дорівнює

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Визначення. *Розміщеннями з n елементів по m називають сполуки, що складаються з m елементів, взятих з даних n елементів* $(m \le n)$, *і відрізняються або складом елементів, або порядком їх розташування.*

Кількість розміщень з n елементів по m позначають A_n^m і знаходять за формулою

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1.4)$$

Приклад 1.11. Студенти другого курсу, згідно з навчальним планом, вивчають 10 дисциплін. На один день можна планувати заняття з 4 дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на один день?

Розв'язання. Усі можливі розклади занять на один день – це сполуки з 10 дисциплін по 4, які відрізняються або дисциплінами, або порядком їх розташування, тобто ці сполуки – розміщення. Згідно з формулою (1.4) їх кількість дорівнює

$$A_{10}^{4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040 \ .$$

Визначення. *Перестановками з n елементів називають сполуки, що складаються з цих n елементів і відрізняються порядком їх розташування.*

Кількість перестановок з n елементів позначають P_n і знаходять за формулою

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \qquad (1.5)$$

Приклад 1.12. Скільки п'ятизначних чисел можна записати, використовуючи п'ять різних цифр (крім нуля)?

Розв'язання. Сполуки, що утворюють з п'яти різних цифр п'ятизначні числа, відрізняються порядком цифр, тобто ці сполуки – перестановки з п'яти елементів. Згідно з формулою (1.5) їх кількість дорівнює

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 .$$

Приклад 1.13. У ящику 10 виробів, з яких 2 нестандартні. Навмання беруть 6 виробів. Яка імовірність того, що усі взяті вироби будуть стандартними?

Розв'язання. Подія A – взято 6 стандартних виробів. Згідно з умовою задачі немає значення, в якому порядку беруть 6 виробів, отже, це будуть сполучення з 10 виробів по 6. Тому кількість усіх можливих елементарних наслідків буде

$$n = C_{10}^{6} .$$

Події A сприяють лише сполуки по 6 виробів, узятих з 8 стандартних у будь-якому порядку, тобто

$$m = C_8^6.$$

Отже, згідно з класичним означенням імовірності події A маємо

$$P(A) = \frac{C_8^6}{C_{10}^6} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} : \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{8! \cdot 6! \cdot 4!}{6! \cdot 2! \cdot 10!} = \frac{2}{15}.$$

Основні принципи комбінаторики

Принцип суми. *Якщо множина A містить n елементів, а множина B містить m елементів, і* $A \bigcap B = \varnothing$, *тоді множина* $A \bigcup B$ *містить n+m елементів.*

Принцип добутку. *Якщо множина A містить n елементів, а множина B містить m елементів, то множина C усіх можливих пар* (a_i, b_k) $(i = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., m)$ *містить* $n \cdot m$ *елементів.*

Приклад 1.14. У кошику 4 яблука першого сорту та 5 яблук другого сорту. Навмання беруть 2 яблука. Знайти імовірність того, що ці яблука будуть різних сортів.

Розв'язання. Нехай подія A – навмання взяті 2 яблука різних сортів.

Всього яблук 9, сполучень з них по 2 буде C_9^2, тобто кількість усіх можливих наслідків $n = C_9^2$.

Події A будуть сприяти сполуки, утворені з пар, елементами яких будуть яблука різних сортів. Згідно з принципом добутку кількість таких пар буде дорівнювати $m = C_4^1 \cdot C_5^1$.

Використовуючи класичне визначення імовірності, одержимо шукану імовірність події A:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^1 \cdot C_5^1}{C_9^2} = \frac{4!}{3!} \cdot \frac{5!}{4!} : \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{4! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 7!}{3! \cdot 4! \cdot 9!} = \frac{5}{9}.$$

2 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ

2.1 Теорема додавання ймовірностей

Теорема 2.1. *Імовірність суми будь–яких двох подій А і В дорівнює сумі ймовірностей цих подій без імовірності їх сумісної появи:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Наслідок 1. Якщо події A і B несумісні, то імовірність їх суми дорівнює сумі їх імовірностей:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Наслідок 2. Імовірність суми будь-якого числа попарно несумісних подій $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ дорівнює сумі їх імовірностей:

$$P(A_1+A_2+A_3+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n).$$

Наслідок 3. Імовірність суми попарно несумісних подій $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n)=1.$$

Наслідок 4. Сума ймовірностей двох протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

Отже, якщо $P(A)=p$, а $P(\bar{A})=q$, то $p+q=1$.

2.2 Залежні та незалежні події, умовні імовірності

Визначення 1. *Дві події називаються незалежними, якщо імовірність появи однієї з них не змінюється в залежності від того, відбулась чи не відбулась інша подія.*

Визначення 2. *Дві події називаються залежними, якщо імовірність появи однієї з них змінюється в залежності від того, відбулась чи не відбулась інша подія.*

Визначення 3. *Імовірність події В, обчислена за умови появи події А, називають умовною імовірністю події В і позначають* $P(B/A)$ або $P_A(B)$.

Приклад 2.1. В урні 12 куль: 5 білих і 7 чорних. Навмання беруть дві кулі. Нехай подія A – взято білу кулю; подія B – взято чорну кулю.

Якщо кулю, яку взяли першою, повертають до урни, то імовірність появи другої кулі не залежить від того, яку саме кулю взято першою.

Якщо першу кулю не повертають до урни, то імовірність другої події залежить від результату першого випробування.

Якщо першою взяли білу кулю, то в урні залишилося 4 білих кулі та 7 чорних, тому

$$P_A(B) = \frac{7}{11}.$$

Якщо першою взяли чорну кулю, то в урні залишилося 5 білих куль та 6 чорних, тому

$$P_A(B) = \frac{6}{11}.$$

Отже, імовірність події B залежить від появи або непояви події A, тобто події A та B є залежними.

Зауваження. *Якщо події А та В незалежні, то умовна імовірність дорівнює безумовній імовірності, тобто*

$$P_A(B) = P(B).$$

2.3 Теорема множення ймовірностей

Теорема. *Імовірність добутку двох подій A і B дорівнює добутку імовірності події A на умовну імовірність події B за умови, що подія A відбулась:*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Наслідок 1. Для добутку двох подій має місце переставний закон, тобто $A \cdot B = B \cdot A$, тому справедлива рівність

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Наслідок 2. Імовірність добутку подій $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ обчислюється за формулою

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot ... \cdot P_{A_1 A_2 ... A_{n-1}}(A_n).$$

Наслідок 3. Якщо події A і B незалежні, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Визначення. *Події* $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ *називаються незалежними в сукупності, якщо незалежні кожні дві з них і незалежні кожна подія та усі можливі добутки інших подій.*

Наслідок 4. Якщо події $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ незалежні у сукупності, то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

2.4 Імовірність появи хоча б однієї випадкової події

Якщо $A_1, A_2, A_3 ... A_n$ – сумісні, незалежні у сукупності події, то імовірність події *A,* яка полягає у появі хоча б однієї з цих подій, можна обчислити за формулою

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) \cdot ... \cdot P(\bar{A}_n). \qquad (2.1)$$

Якщо $p_i = P(A_i)$, $q_i = P(\overline{A_i})$, то формула (2.1) набуває вигляду

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n. \tag{2.2}$$

Приклад 2.2. Імовірність влучення в мішень у першого стрілка дорівнює 0,7, у другого стрілка – 0,8, а у третього стрілка – 0,9. Знайти імовірність влучення у мішень хоча б одним стрілком, якщо кожен з них здійснює лише один постріл.

Розв'язання. Позначимо події:

A_1 – у мішень влучив перший стрілок;

A_2 – у мішень влучив другий стрілок;

A_3 – у мішень влучив третій стрілок;

A – у мішень влучив хоча б один стрілок.

За умовою задачі події A_1, A_2 та A_3 – сумісні, незалежні у сукупності. Отже, згідно з формулою (2.2)

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3.$$

Оскільки

$$q_1 = P(\bar{A}_1),\ q_2 = P(\bar{A}_2),\ q_3 = P(\bar{A}_3),\ q_i = 1 - P(A_i),$$
$$P(\bar{A}_1) = 1 - 0,7 = 0,3,\ P(\bar{A}_2) = 1 - 0,8 = 0,2,\ P(\bar{A}_3) = 1 - 0,9 = 0,1,$$

то

$$q_1 = 0,3,\ q_2 = 0,2,\ q_3 = 0,1.$$

Тоді

$$P(A) = 1 - 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 1 - 0,006 = 0,994.$$

Приклад 2.3. Працівник обслуговує три станки, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що протягом години перший станок не вимагатиме уваги працівника, дорівнює 0,9; для другого та третього станків – 0,8 та 0,85 відповідно. Якою є імовірність того, що протягом години:

а) жоден зі станків не вимагатиме уваги працівника;

б) усі три станки вимагатимуть уваги працівника;

в) тільки один станок вимагатиме уваги працівника;

г) тільки два станки вимагатимуть уваги працівника;

д) хоча б один станок вимагатиме уваги працівника.

Розв’язання. Позначимо такі події:

A_i – i-й станок не вимагатиме уваги працівника (i = 1, 2, 3).

$\bar{A}_i$ – i-й станок вимагатиме уваги працівника.

$$P(A_1)=0,9 \Rightarrow P(\bar{A}_1)=1-P(A_1)=1-0,9=0,1,$$
$$P(A_2)=0,8 \Rightarrow P(\bar{A}_2)=1-P(A_2)=1-0,8=0,2,$$
$$P(A_3)=0,85 \Rightarrow P(\bar{A}_3)=1-P(A_3)=1-0,85=0,15.$$

а) A – усі три станки не вимагатимуть уваги працівника:

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0,9\cdot 0,8\cdot 0,85=0,612;$$

б) B – усі три станки вимагатимуть уваги працівника:

$$P(B)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3)=0,1\cdot 0,2\cdot 0,15=0,003;$$

в) C – тільки один станок вимагатиме уваги працівника:

$$P(C)=P(\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)+$$
$$+P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(A_3)+P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\bar{A}_3)=0,1\cdot 0,8\cdot 0,85+$$
$$+0,9\cdot 0,2\cdot 0,85+0,9\cdot 0,8\cdot 0,15=0,329.$$

г) D – тільки два станки вимагатимуть уваги працівника:

$$P(D)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)=P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3)+$$
$$+P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(A_3)+P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\bar{A}_3)=0,9\cdot 0,2\cdot 0,15+$$
$$+0,1\cdot 0,2\cdot 0,85+0,1\cdot 0,8\cdot 0,15=0,056.$$

д) E – хоча б один станок вимагатиме уваги працівника:

$$P(E) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}85 = 1 - 0{,}612 = 0{,}388.$$

Можна також обчислити *P(E)* у такий спосіб:

$$P(E) = P(C + D + B) = P(C) + P(D) + P(B) = 0{,}329 + 0{,}056 + 0{,}003 =$$
$$= 0{,}388.$$

2.5 Надійність системи

Визначення. *Надійністю системи називають імовірність її безвідмовної роботи протягом певного часу* t *(гарантійний термін)*.

Системи, що складаються з елементів, з'єднаних послідовно, наведені на рисунку 2.1.

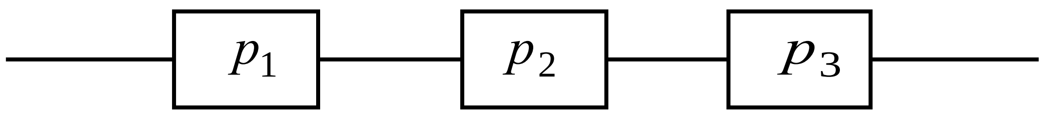


Рисунок 2.1.

Системи, що складаються з елементів, з'єднаних паралельно, наведені на рисунку 2.2.

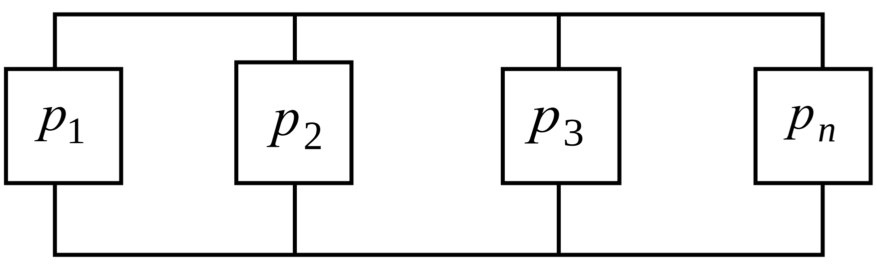


Рисунок 2.2.

При обчисленні надійності системи необхідно виразити її надійність через надійність її елементів (надійність елементів вважається відомою, бо вона пов'язана з технологією їх виготовлення).

Нехай $p_к$ – надійність *к*-того елемента, q_k – імовірність виходу *к*-того елемента з ладу протягом часу t, P– надійність блока.

Перший випадок – елементи системи з'єднані послідовно (див. рисунок 2.1). Система буде працювати безвідмовно, якщо усі елементи працюватимуть безвідмовно.

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n . \tag{2.3}$$

Другий випадок – елементи системи з'єднані паралельно (див. рисунок 2.2). Система буде працювати безвідмовно, якщо хоча б один елемент не вийде з ладу.

$$P = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n . \tag{2.4}$$

Зауваження. *Будь-яку складну систему можна розглядати як послідовне або паралельне з'єднання блоків, надійність яких обчислюється за формулами (2.3) та (2.4).*

Приклад 2.4. Імовірності безвідмовної роботи елементів №№ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 електричної схеми відповідно дорівнюють 0,95, 0,9, 0,85, 0,8, 0,7, 0,6, 0,5. Знайти імовірність проходження сигналу крізь схему (рисунок 2.3)

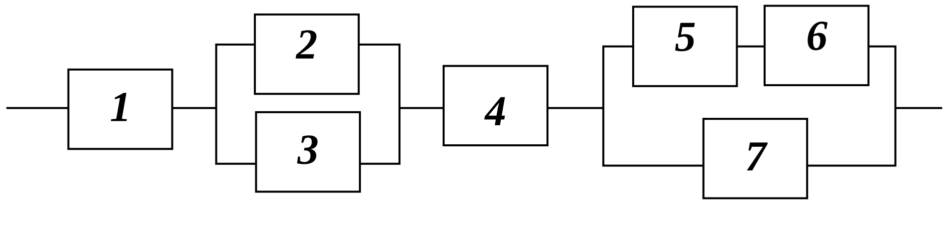


Рисунок 2.3

Розв'язання. За умовою задачі ймовірності безвідмовної роботи елементів дорівнюють $p_1 = 0{,}95$, $p_2 = 0{,}9$, $p_3 = 0{,}85$, $p_4 = 0{,}8$, $p_5 = 0{,}7$, $p_6 = 0{,}6$, $p_7 = 0{,}5$, а ймовірності відмови елементів відповідно: $q_1 = 1 - p_1 = 0{,}05$, $q_2 = 0{,}1$, $q_3 = 0{,}15$, $q_4 = 0{,}2$, $q_5 = 0{,}3$, $q_6 = 0{,}4$, $q_7 = 0{,}5$.

Скориставшись формулами (2.3) та (2.4), можна записати ймовірність безвідмовного проходження сигналу крізь схему:

$$P = p_1 \cdot (1 - q_1 q_2) \cdot p_4 \cdot (1 - (1 - p_5 p_6) q_7).$$

Після підстановки відповідних числових значень, будемо мати

$$P = 0{,}95 \cdot (1 - 0{,}05 \cdot 0{,}15) \cdot 0{,}8 \cdot (1 - (1 - 0{,}7 \cdot 0{,}6)0{,}5) = 0{,}53.$$

2.6 Формули повної імовірності та Байєса

Припустимо, що

1) подія А може відбутися лише за умови появи однієї з попарно несумісних подій (гіпотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, *які утворюють повну групу, тобто*

$$P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1;$$

2) відомі умовні ймовірності появи події А за умови появи цих гіпотез $P_{H_1}(A), P_{H_2}(A), \ldots, P_{H_n}(A)$.

Тоді ймовірність появи події А обчислюється за формулою повної імовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{H_i}(A). \qquad (2.5)$$

Якщо подія *А* вже відбулась, то імовірність гіпотез може бути переоцінена за *формулою Байєса*

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k)\cdot P_{H_k}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}. \quad (2.6)$$

Приклад 2.5. У першому ящику 20 деталей, серед яких 15 – стандартні. У другому ящику 10 деталей, серед яких 9 – стандартні. З другого ящика беруть навмання одну деталь і перекладають її до першого ящика. Знайти імовірність того, що деталь, яку після цього взято навмання з першого ящика, виявиться стандартною.

Розв'язання. Позначимо такі події:

А – з першого ящика взято стандартну деталь;

H_1 – з другого ящика переклали до першого стандартну деталь;

H_2 – з другого ящика переклали до першого нестандартну деталь.

Згідно з умовою задачі з першого ящика можна взяти деталь лише після того, як здійсниться подія H_1 або подія H_2.

Події H_1 та H_2 несумісні, а подія *А* може з'явитись лише сумісно з однією із них. Тому для знаходження імовірності події *А* можна використати формулу повної імовірності (2.5), яка у даному випадку набуває вигляду

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + (H_2)P_{H_2}(A).$$

Знайдемо потрібні імовірності:

$$P(H_1) = \frac{9}{10}; \quad P(H_2) = \frac{1}{10}; \quad P_{H_1}(A) = \frac{16}{21}; \quad P_{H_2}(A) = \frac{15}{21}.$$

(Зауважимо, що $P(H_1)+P(H_2)=\frac{9}{10}+\frac{1}{10}=1$, отже, події H_1 та H_2 утворюють повну групу.)

Підставивши ці значення у формулу (2.5), отримаємо

$$P(A)=\frac{9}{10}\cdot\frac{16}{21}+\frac{1}{10}\cdot\frac{15}{21}=\frac{144+15}{210}=\frac{159}{210}=\frac{53}{70}.$$

Приклад 2.6. Деталі, виготовлені цехом заводу, попадають для перевірки їх стандартності до одного з двох контролерів. Імовірність того, що деталь попаде до першого контролера, дорівнює 0,6, а до другого – 0,4. Імовірність того, що придатна деталь буде визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,94, а другим – 0,98. Придатна деталь при перевірці визнана стандартною. Знайти імовірність того, що деталь перевіряв перший контролер.

Розв’язання. Позначимо такі події:

A – придатна деталь визнана стандартною;

H_1 – деталь перевіряв перший контролер;

H_2 – деталь перевіряв другий контролер.

За умовою прикладу

$$P(H_1)=0{,}6;\ P(H_2)=0{,}4;\ P_{H_1}(A)=0{,}94;\ P_{H_2}(A)=0{,}98.$$

(Зауважимо, що $P(H_1)+P(H_2)=0{,}6+0{,}4=1$, отже, події H_1 та H_2 утворюють повну групу.)

За формулою Байєса (2.6) при $\kappa=1$ отримаємо

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94+0{,}4\cdot 0{,}98}=$$

$$=0{,}5899\approx 0{,}59.$$

3 ПОСЛІДОВНОСТІ ВИПРОБУВАНЬ

3.1 Схема та формула Бернуллі

Визначення. *Якщо усі n випробувань проводяться в однакових умовах і імовірність появи події А в кожному з цих випробувань одна й та сама і не залежить від появи або непояви події А в інших випробуваннях, то таку послідовність незалежних випробувань називають схемою Бернуллі.*

Нехай випадкова подія A може з'явитись у кожному з n незалежних випробувань з імовірністю $P(A) = p$ або не з'явитись з імовірністю $q = P(\bar{A}) = 1 - p$. Тоді імовірність того, що при n таких випробуваннях подія A з'явиться m разів, обчислюється за формулою

$$P_n^m = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \tag{3.1}$$

Формулу (3.1) називають *формулою Бернуллі*.

Зауваження 1. *Імовірність появи події A в n випробуваннях схеми Бернуллі менше, ніж m разів, знаходять за формулою*

$$P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m-1).$$

Імовірність появи події А не менше, ніж m разів, можна знайти за формулою

$$P_n(k \geq m) = P_n(m) + P_n(m+1) + ... + P_n(n)$$

або за формулою

$$P_n(k \geq m) = 1 - (P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m-1)).$$

Зауваження 2. *У багатьох випадках треба знаходити найімовірніше число появи події A в n незалежних випробуваннях. Це число m_0 визначається співвідношеннями*

$$np - q \le m_0 \le np + p \text{ або } (n+1)p - 1 \le m_0 \le (n+1)p.$$

Число m_0 має бути цілим. Якщо $(n+1)p$ – ціле число, тоді найбільше значення імовірність має при двох значеннях:

$$m_1 = (n+1)p - 1 \text{ і } m_2 = (n+1)p.$$

Зауваження 3. *Якщо імовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює p, то кількість n випробувань, які необхідно здійснити, щоб з імовірністю P можна було стверджувати, що подія A з'явиться хоча б один раз, знаходять за формулою*

$$n \ge \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}. \tag{3.2}$$

Приклад 3.1. Прилад складено з 10 блоків, надійність кожного з них 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти імовірність того, що

а) відмовлять два блоки;

б) відмовить хоча б один блок;

в) відмовлять не менше двох блоків.

Розв'язання. Позначимо за подію *A* відмову блока. Тоді імовірність події *A* за умовою прикладу буде

$$P(A) = p = 1 - 0,8 = 0,2, \quad \text{тому} \quad q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Згідно з умовою задачі $n = 10$. Використовуючи формулу Бернуллі (3.1) та зауваження 1, отримуємо:

а) $P_{10}(2) = C_{10}^2 p^2 q^8 = C_{10}^2 (0,2)^2 (0,8)^8 \approx 0,302$;

б) $P_{10}(1 < m \le 10) = 1 - P_{10}(0) = 1 - C_{10}^0 (0,2)^0 (0,8)^{10} \approx 0,8926$;

в) $P_{10}(2 \le m \le 10) = 1-(P_{10}(0)+P_{10}(1)) = 1-(C_{10}^0(0,2)^0(0,8)^{10} +$
$+C_{10}^1(0,2)^1(0,8)^9) \approx 0,6241905 \approx 0,6242$.

Приклад 3.2. При певному технологічному процесі 80 % усієї виготовленої продукції має найвищу якість. Знайти найбільш імовірне число виготовлених виробів найвищої якості серед 250 виготовлених виробів.

Розв'язання. Позначимо шукане число m_0.

Згідно з зауваженням 2

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

За умовою прикладу $n = 250, \ p = 0,8, \ q = 0,2$.

Тому $199,8 \le m_0 \le 200,8$. Оскільки m_0 має бути цілим числом, то m_0=200.

Приклад 3.3. За одну годину автомат виготовляє 20 деталей. За скільки годин імовірність виготовлення хоча б однієї бракованої деталі буде не менше, ніж 0,951, якщо імовірність браку будь-якої деталі дорівнює 0,01?

Розв'язання. Застосовуючи формулу (3.2), знайдемо спочатку таку кількість виготовлених деталей, щоб з імовірністю $P = 0,951$ можна було стверджувати про наявність хоча б однієї бракованої деталі, якщо імовірність браку за умовою $p = 0,01$.

$$n \ge \frac{ln\,(1-0,951)}{ln\,(1-0,01)} = \frac{ln\,0,049}{ln\,0.99} = 300,08 \approx 300.$$

Отже, за час $t = \frac{304}{20} = 15,2$ (год) автомат з імовірністю 0,952 виготовить хоча б одну браковану деталь.

3.2 Граничні теореми в умовах схеми Бернуллі

Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n є досить великою, то для обчислення $P_n(m)$ замість формули Бернуллі слід застосовувати наближені формули.

Теорема 1 *(локальна теорема Муавра–Лапласа). Якщо імовірність* p *появи події А в кожному з* n *незалежних випробувань одна й та сама і відмінна від нуля та одиниці, то імовірність* $P_n(m)$ *того, що подія А з'явиться в цих випробуваннях рівно* m *разів, може бути знайдена (тим точніше, чим більше* n*) за наближеною формулою*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (3.3)$$

де $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, а $\varphi(x)$– локальна функція Лапласа

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Зауваження 1. *Значення функції* $\varphi(x)$ *наведені в додатку А даних методичних вказівок, а також у підручниках та посібниках з теорії ймовірностей. При знаходженні значень* $\varphi(x)$ *слід враховувати, що* $\varphi(x)$ *є парною функцією, тобто* $\varphi(-x) = \varphi(x)$, *а також те, що для* $x \ge 4$ $\varphi(x) \approx 0$.

Зауваження 2. *Формулу (3.3) доцільно використовувати при* $n \ge 10$ *та* $npq \ge 9$.

У випадку, коли $npq < 9$, слід застосовувати *формулу Пуассона*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad (3.4)$$

де $\lambda = np$.

Теорема 2 *(інтегральна теорема Муавра–Лапласа). Якщо імовірність* p *появи події А в кожному з* n *незалежних випробувань одна й та сама і відмінна від нуля та одиниці, то імовірність* $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ *того, що подія А з'явиться в* n *незалежних випробуваннях не менше* m_1 *та не більше* m_2 *разів, може бути знайдена за наближеною формулою*

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (3.5)$$

де

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}},$$

а $\Phi(x)$– інтегральна функція Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Зауваження 3. *Значення функції $\Phi(x)$ наведені в додатку Б даних методичних вказівок, а також у підручниках та посібниках з теорії ймовірностей. При знаходженні значень $\Phi(x)$ слід враховувати, що $\Phi(x)$ є непарною функцією, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, а також те, що для $x \ge 5$ $\Phi(x) \approx 0{,}5$.*

Приклад 3.4. Гральний кубик кидають 800 разів. Яка імовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з'явиться 270 разів?

Розв'язання. У даному випадку кількість незалежних випробувань n=800 є досить великою, $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, отже, $npq = 800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \approx 177{,}8 > 9$. Тому для знаходження $P_{800}(270)$ слід застосувати формулу (3.3).

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{270 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{40}{3}} = \frac{810 - 800}{40} = \frac{10}{40} = 0{,}25.$$

За формулою (3.3) отримуємо

$$P_{800}(267) \approx \frac{3}{40} \cdot \varphi(0{,}25) = \frac{3}{40} \cdot 0{,}3867 \approx 0.029.$$

Значення функції $\varphi(x)$ взяте з таблиці.

Приклад 3.5. Гральний кубик кидають 800 разів. Яка імовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з'явиться не менше 260 та не більше 274 разів?

Розв'язання. Для знаходження імовірності

$$P_{800}(260 \le m \le 274)$$

використаємо формулу (3.5). Маємо

$$x_2 = \frac{274 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{40}{3}} = \frac{22}{40} = 0{,}55; \quad x_1 = \frac{260 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{40}{3}} = -0{,}5\,.$$

$$P_{800}(260 \le m \le 274) \approx \Phi(0{,}55) + \Phi(0{,}5) = 0{,}2088 + 0{,}1915 = 0{,}4003$$

.

Значення функції $\Phi(x)$ взяті з таблиці і використана властивість непарності цієї функції.

Приклад 3.6. Підручник надруковано тиражем 10000 екземплярів. Імовірність неправильного брошурування підручника дорівнює 0,0004. Знайти імовірність того, що тираж має 5 бракованих підручників.

Розв'язання. Брошурування кожного підручника можна розглядати як незалежні випробування, імовірність неправильного брошурування одна й та сама, тому задача вкладається у схему Бернуллі. Згідно з умовою задачі кількість екземплярів $n = 10000$ є досить великою; p=0,0004, q=0,9996, отже, $npq = 10000 \cdot 0.0004 \cdot 0{,}9996 = 3{,}9996 < 9$. Тому слід застосувати формулу Пуассона.

Застосовуючи формулу (3.4) та враховуючи, що $\lambda = np = 10000 \cdot 0{,}0004 = 4$, отримуємо

$$P_{10000}(5) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \approx \frac{4^5}{5!} e^{-5} = 0,0575.$$

4 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

4.1 Види випадкових величин та способи їх задання

Випадковою величиною називають таку величину, яка внаслідок випробування може набувати лише одне числове значення, заздалегідь невідоме і обумовлене випадковими причинами.

Випадкові величини звичайно позначають великими літерами X, Y, Z, а їх можливі значення – малими літерами з індексами. Наприклад, X – випадкова величина, $x_1, x_2, ..., x_n$ – її значення, Z – випадкова величина, $z_1, z_2, ..., z_m$ – її значення.

Випадкові величини бувають *дискретними* та *неперервними*.

Визначення 1. *Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називають таку випадкову величину, яка може набувати окремі, ізольовані можливі значення з певними ймовірностями (ці значення можна пронумерувати).*

Приклад 4.1. Якщо X – кількість влучень у мішень при трьох пострілах, то X може набувати чотири окремі, ізольовані числові значення 0, 1, 2, 3, 4 з різними ймовірностями. Тому X – дискретна випадкова величина.

Якщо Y – кількість викликів таксі на диспетчерському пункті, то Y також буде дискретною випадковою величиною, але при $t \to \infty$ значення Y також зростають, тобто їх кількість прямує до нескінченності. Отже, Y може набувати значення: $0, 1, 2, ..., n, ...$.

Визначення 2. *Неперервною випадковою величиною (НВВ) називають таку випадкову величину, яка може набувати усі значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку.*

Приклад 4.2. Величина похибки, яка може виникнути при вимірюванні відстані; час безвідмовної роботи приладу; зріст людини; розміри деталі, яку виготовляє верстат-автомат, – це неперервні випадкові величини.

Визначення 3. *Законом розподілу випадкової величини називають таке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм імовірностями.*

У випадку дискретної випадкової величини *X* закон розподілу можна задавати *таблично*, *аналітично* або *графічно*.

Табличний спосіб – це ряд розподілу ДВВ

X	x_1	x_2	....	x_n
P	p_1	p_2	....	p_n

,

де $x_1,\ x_2,\ x_3\ ...\ x_n$ – можливі значення ДВВ, записані у порядку зростання $(x_1 < x_2 < x_3 < \ ...\ < x_n)$, $p_k = P(X = x_k)$, причому $\sum_{k=1}^{n} P_k = 1$.

Графічний спосіб – многокутник розподілу ДВВ (рисунок 4.1).

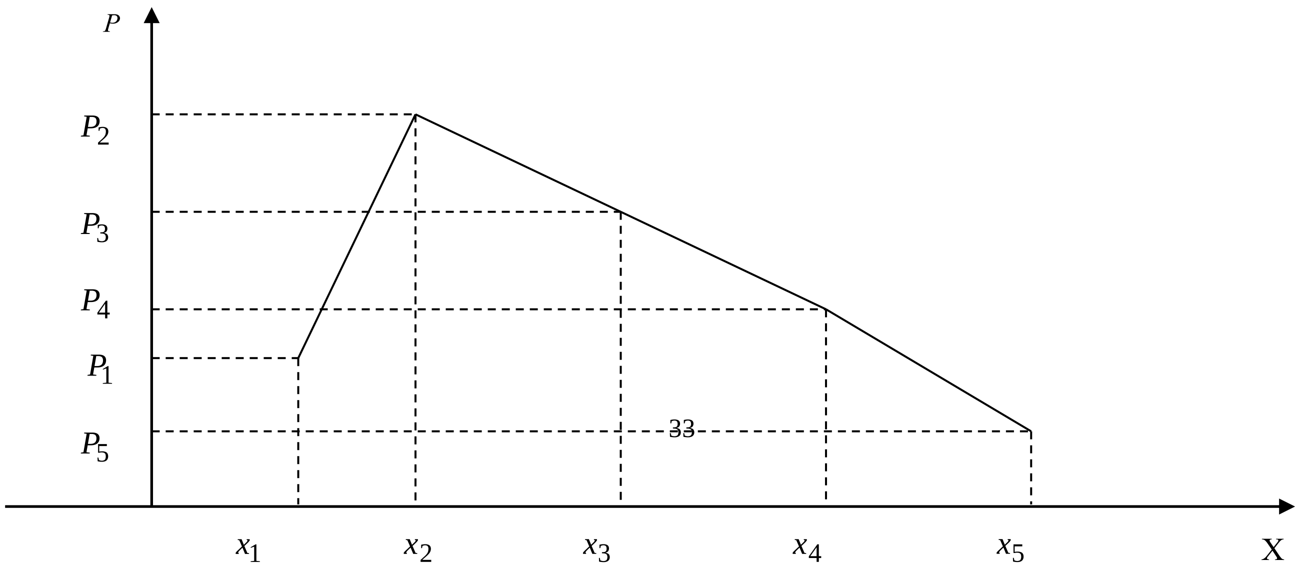


Рисунок 4.1

Аналітичний спосіб задання ДВВ базується на заданні певної функції, за якою можна знайти імовірність P відповідного значення x_k, тобто $p_k = f(x_k),\ k = 1,2,...,n$.

У випадку неперервної випадкової величини X функціональну залежність задають за допомогою інтегральної або диференціальної функції розподілу.

Визначення 4. *Функцією розподілу $F(x)$ (інтегральною функцією розподілу) називають імовірність того, що випадкова величина X набуде значення, менше за x:*

$$F(x) = P(\mathrm{X} < x).$$

***Властивості функції розподілу*:**

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(x)$ – неспадна функція, тобто $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

4) $P(\alpha \le \mathrm{X} < \beta) = F(\alpha) - F(\beta)$.

Зауваження. *Для неперервної випадкової величини X, що набуває значення у проміжку ($\alpha;\beta$), мають місце рівності*

$$P(\alpha \le \mathrm{X} < \beta) = P(\alpha < \mathrm{X} < \beta) = P(\alpha < \mathrm{X} \le \beta) = P(\alpha \le \mathrm{X} \le \beta).$$

Визначення 5. *Щільністю розподілу ймовірностей f(x) (диференціальною функцією розподілу) неперервної випадкової величини називають похідну першого порядку від її інтегральної функції розподілу:*

$$f(x) = F^{'}(x).$$

Якщо щільність розподілу ймовірностей $f(x)$ відома, то функцію розподілу $F(x)$ можна знайти за формулою

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Властивості щільності розподілу ймовірностей:

1) $f(x)\geq 0$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$;

3) $P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Графік щільності розподілу ймовірностей f(x) називають *кривою розподілу.*

4.2 Числові характеристики випадкових величин

Нехай X – випадкова величина. Якщо вона дискретна, то відомий її ряд розподілу, а якщо неперервна, то щільність розподілу ймовірностей $f(x)$.

Визначення. *Математичним сподіванням* $M(X)$ *дискретної випадкової величини X називається сума добутків усіх її можливих значень на їх імовірності:*

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+...+x_np_n+...=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i\ . \qquad (4.1)$$

Зауваження. *Математичне сподівання випадкової величини тісно пов'язане з середнім арифметичним спостережених значень цієї випадкової величини. При великій кількості n відносна частота наближено дорівнює імовірності, тобто в цьому випадку середнє арифметичне спостережених значень випадкової величини наближається до її математичного сподівання.*

Визначення. *Математичним сподіванням* $M(X)$ *неперервної випадкової величини* X *називається невласний інтеграл*

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx\,. \tag{4.2}$$

Зауваження. *Якщо ряд (4.1) або невласний інтеграл (4.2) не збігається абсолютно, то вважається, що математичного сподівання* $M(X)$ *не існує.*

Властивості математичного сподівання:

1) $M(C)=C$, якщо C – стала величина;
2) $M(CX)=C\cdot M(X)$, якщо C – стала величина;
3) якщо $X_1,X_2,X_3,...,X_n$ – випадкові величини, то

$$M(X_1+X_2+X_3+...+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n);$$

4) якщо $X_1,X_2,...,X_n$ – незалежні в сукупності випадкові величини, то

$$M(X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot...\cdot X_n)=M(X_1)\cdot M(X_2)\cdot...\cdot M(X_n).$$

Визначення. *Дисперсією випадкової величини* X *називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:*

$$D(X)=M\left(\left(X-M\left(X\right)\right)^2\right). \tag{4.3}$$

Зауваження. *Дисперсія характеризує ступінь розсіювання випадкової величини X навколо її середнього значення.*

Іноді дисперсію зручно обчислювати за такою формулою:

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2. \tag{4.4}$$

Запишемо формули (4.3) і (4.4) для дискретних та неперервних випадкових величин.

Для дискретної випадкової величини

$$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-M(x))^2 p_i$$

або

$$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^{\,2} p_i-[M(x)]^2 .$$

Для неперервної випадкової величини

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M\left(x\right)\right)^2 f\left(x\right)dx$$

або

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f\left(x\right)dx-\left[M\left(x\right)\right]^2 .$$

Властивості дисперсії:

1) $D(X)\geq 0$;
2) $D(C)=0$, якщо C – стала величина;
3) $D(CX)=C^2\cdot D(X)$, якщо C – стала величина;
4) якщо $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ – незалежні в сукупності випадкові величини, то

$$D(X_1\pm X_2\pm X_3\pm\ldots\pm X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n).$$

Визначення. *Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називається квадратний корінь з її дисперсії:*

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} .$$

Зауваження. *Середнє квадратичне відхилення, як і дисперсія, характеризує ступінь розсіювання випадкової величини X навколо її середнього значення, причому його розмірність така сама, що й розмірність X.*

Для описання випадкової величини X застосовуються також моменти порядків k = 1, 2, ...

Початкові – $\nu_k(X)=M(X^k)$.

Центральні – $\mu_k(X) = M\left((X - M(X))^k\right)$.

Зокрема, $M(X) = \nu_1(X)$, $D(X) = \mu_2(X)$.

Приклад 4.3. Обчислити математичне сподівання і дисперсію величини $Z = 2X - 3Y$, якщо X і Y – незалежні випадкові величини з характеристиками $m_x = 3$, $m_y = 2$, $D_x = 4$, $D_y = 1$.

Розв'язання. Згідно з властивостями математичного сподівання та дисперсії будемо мати

$$M(Z) = M(2X - 3Y) = M(2X) + M(-3Y) = M(X) - 3M(Y) =$$
$$= 2{\cdot}3 - 3{\cdot}2 = 0.$$
$$D(Z) = D(2X - 3Y) = D(2X) + D(-3Y).$$

Оскільки $D(CX) = C^2D(X)$, остаточно отримуємо

$$D(Z) = D(2X - 3Y) = D(2X) + D(-3Y) = 4{\cdot}D(X) + 9{\cdot}D(Y) =$$
$$= 4{\cdot}4 + 9{\cdot}1 = 25.$$

4.3 Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

Існують такі основні закони розподілу дискретних випадкових величин (таблиця 4.1):

1) біноміальний;
2) Пуассона;
3) геометричний.

Таблиця 4.1

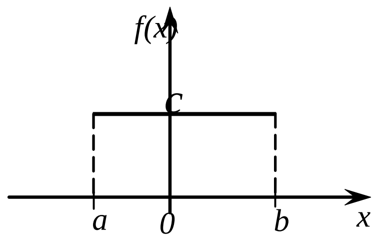
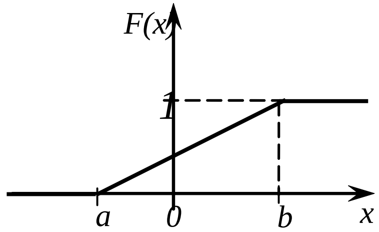
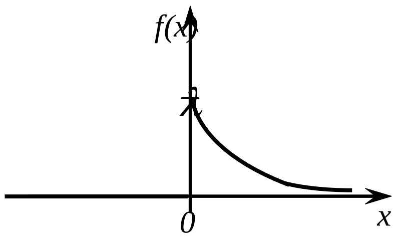
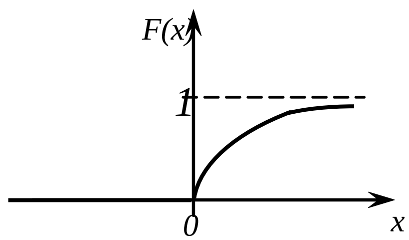
Закон розподілу X та його математичний запис	Математичне сподівання $M(X)$	Дисперсія $D(X)$	Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$

1 Біноміальний $P(X=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$, $m=0,1,2,...,n.$	np	npq	$\sqrt{npq}$
2 Пуассона $P\left(X=m\right)=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, $\lambda>0$	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$
3 Геометричний $P\left(X=m\right)=pq^{m-1}$, $m=1,2,...$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{\sqrt{q}}{p}$

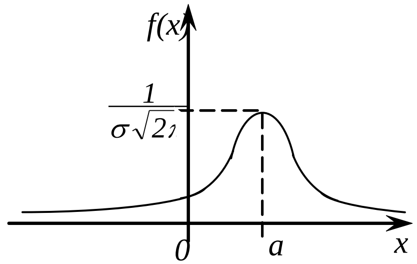
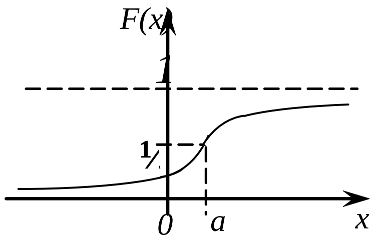
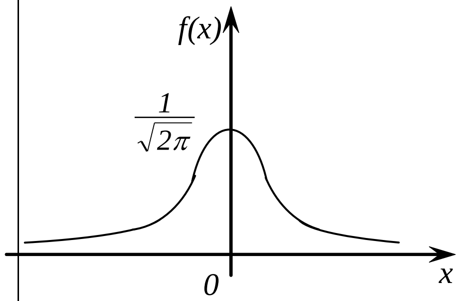
4.4 Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин наведені в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2

Назва закону	Функція щільності ймовірностей $f(x)$ та її графік	Функція розподілу $F(x)$ та її графік	$M(X)$	$D(X)$	$\sigma(X)$	$P(\alpha < X < \beta)$
1	2	3	4	5	6	7
1 Рівномірний розподіл	$f(x)=\begin{cases} c=\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b) \\ 0, & x\notin(a,b) \end{cases}$ 	$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b \\ 1, & x>b \end{cases}$ 	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{(b-a)\sqrt{3}}{6}$	$P(\alpha < X < \beta)=$ $= F(\beta) - F(\alpha)$
2 Показниковий розподіл	$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \end{cases}, \lambda > 0$ 	$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \end{cases}$ 	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$P(\alpha < X < \beta)=$ $= e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}$

Продовження таблиці 4.2

1	2	3	4	5	6	7
3 Нормальний розподіл	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ 	$F(x)=0{,}5+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ 	a	σ^2	σ	$P(\alpha < X < \beta)=$ $=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-a}{\sigma}\right)$; $P(\lvert X-a\rvert<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$
4 Нормований нормальний розподіл ($a=0,\ \sigma=1$)	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ 	$F(x)=0{,}5+\Phi(x)$, де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функція Лапласа	0	1	1	$P(\alpha < X < \beta)=$ $=\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)$; $P(\lvert X\rvert<\varepsilon)=2\Phi(\varepsilon)$

4.4.1 Нормальний закон розподілу

Неперервна випадкова величина X називається розподіленою за нормальним законом, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де числа a та σ – параметри нормального закону розподілу, причому $a=M(X),\ \sigma=\sqrt{D(X)}$.

Графік щільності розподілу нормального закону називають нормальною кривою (кривою Гауса) (рисунок 4.2).

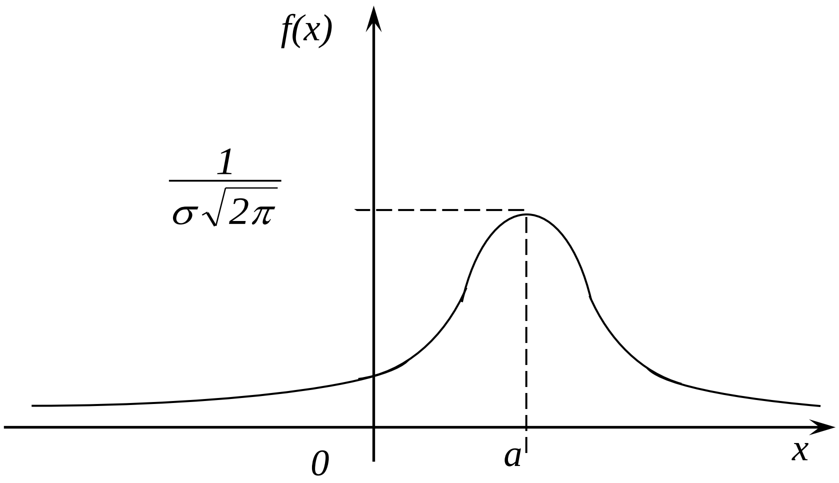


Рисунок 4.2

Нормальна крива симетрична відносно вертикальної прямої, яка проходить через точку $x = a$. Математичне сподівання впливає тільки на місце центра симетрії, тобто на зсув нормальної кривої уздовж осі ОХ. Зміна σ впливає на форму кривої, вона буде тим крутіше, чим менше σ.

Функція розподілу цієї величини

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$$

або

$$F(x)=0{,}5+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа, або інтеграл імовірності,

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина набуде значення з інтервалу $(\alpha;\ \beta)$, обчислюється за формулою

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

а ймовірність того, що абсолютна величина відхилення $|X-a|$ буде менше, ніж додатне число δ, –

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

При $\delta=3\sigma$ отримуємо $P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=0{,}997$. Число 0,997 мало відрізняється від одиниці, тому подію з ймовірністю 0,997 можна вважати достовірною, а останню рівність часто формулюють як *«правило трьох сигм»*: нормально розподілена випадкова величина X може відхилятися від свого математичного сподівання $M(X)=a$ не більше, ніж на потроєне середнє квадратичне відхилення.

Нормальний закон розподілу з параметрами $a=0$ та $\sigma=1$ називається *нормованим нормальним законом розподілу*.

Приклад 4.4. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу

X	–2	0	3	5	6
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2 .

Необхідно:

1) обчислити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення;

2) побудувати многокутник розподілу;

3) знайти функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Розв'язання. 1 Обчислимо математичне сподівання за формулою

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k .$$

$$M(X) = -2 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}2 = 2{,}9 .$$

Обчислимо дисперсію за формулою

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 .$$

$$M(X^2) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k .$$

$$M(X^2) = (-2)^2 \cdot 0{,}1 + 0^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}3 + 5^2 \cdot 0{,}2 + 6^2 \cdot 0{,}2 = 15.3 .$$

$$D(X) = 15{,}3 - (2{,}9)^2 = 6{,}89 .$$

Обчислимо середнє квадратичне відхилення за формулою

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

$$\sigma(X) = \sqrt{6{,}89} \approx 2{,}63 .$$

2 Побудуємо многокутник розподілу випадкової дискретної величини (рисунок 4.3).

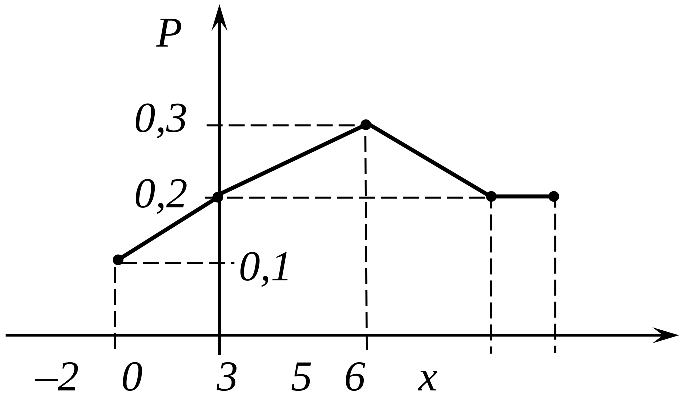


Рисунок 4.3

3 Знайдемо функцію розподілу $F(x)$ і побудуємо її графік (рисунок 4.4).

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & якщо \quad x\le -2,\\ 0{,}1, & якщо \ -2<x\le 0,\\ 0{,}3, & якщо \quad 0<x\le 3,\\ 0{,}6, & якщо \quad 3<x\le 5,\\ 0{,}8, & якщо \quad 5<x\le 6\\ 1\ , & якщо \quad x>6.\end{cases}$$

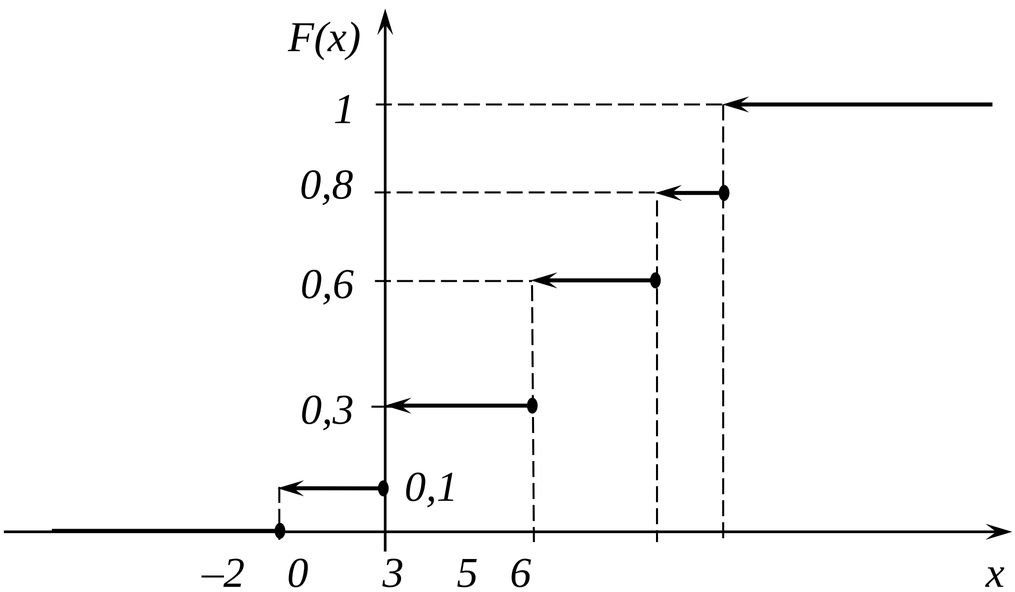


Рисунок 4.4

Приклад 4.5. Задана щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини:

$$f(x)=\begin{cases}0 \quad, \ \textit{якщо} \ \ x\le 0,\\ Cx^2, \ \textit{якщо} \ \ 0<x\le 1,\\ 0 \quad, \ \textit{якщо} \ \ x>1.\end{cases}$$

Знайти:

1) параметр *C*;

2) функцію розподілу *F*(*x*) та побудувати її графік;

3) імовірність попадання випадкової величини *X* в інтервал (–0,5; 0,5).

Розв'язання. 1 Параметр С знайдемо, використовуючи властивість диференціальної функції розподілу:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

У нашому випадку ця властивість запишеться у вигляді

$$\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int\limits_{0}^{1} ax^2dx+\int\limits_{1}^{+\infty} 0\,dx=0+\int\limits_{0}^{1} ax^2dx+0=$$
$$a\int\limits_{0}^{1} x^2dx=a\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{a}{3}(1^3-0^3)=\frac{a}{3}=1,$$

звідки $a=3$.

Таким чином,

$$f(x)=\begin{cases}0 \quad, \ \textit{якщо} \ \ x\le 0,\\ 3x^2, \ \textit{якщо} \ \ 0<x\le 1,\\ 0 \quad, \ \textit{якщо} \ \ x>1.\end{cases}$$

2 Для знаходження функції розподілу *F*(*x*) скористаємось формулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Функція $f(x)$ задана трьома різними виразами на трьох інтервалах. Розглянемо окремо ці інтервали.

Нехай $x \le 0$. Тоді

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0.$$

Нехай $0 < x \le 1$. Тоді

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{x} f(x)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} 3x^2 dx = 0 + \left.\frac{3x^3}{3}\right|_{0}^{x} = x^3.$$

Нехай $x > 1$.

Тоді $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{x} f(x)dx =$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 3x^2 dx + \int_{1}^{x} 0\,dx = 0 + \left.\frac{3x^3}{3}\right|_{0}^{1} + 0 = 1.$$

Таким чином,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \textit{якщо } x \le 0, \\ x^3 & , \textit{якщо } 0 < x \le 1, \\ 1 & , \textit{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Побудуємо графік функції $F(x)$ (рисунок 4.5).

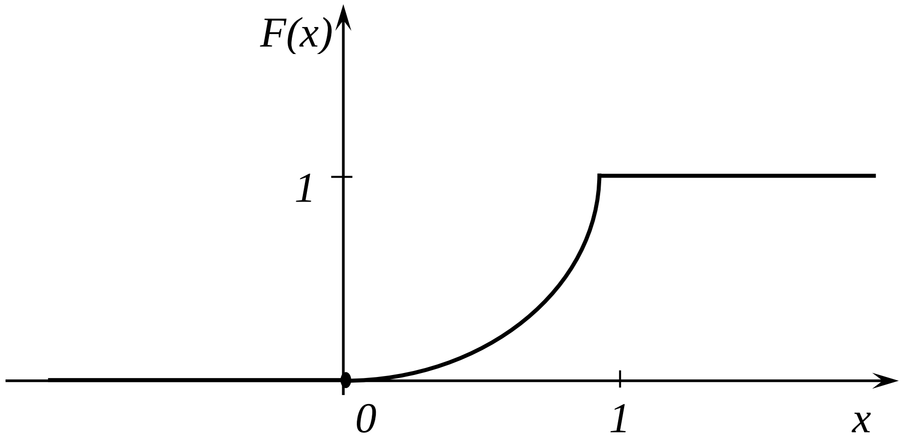


Рисунок 4.5

3 Імовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(-0{,}5; 0{,}5)$ можна обчислити двома способами.

Перший спосіб. Скористаємось властивістю функції $F(x)$:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha);$$
$$P(-0{,}5 \le X \le 0{,}5) = F(0{,}5) - F(-0{,}5) = 0{,}5^3 - 0 = 0{,}125.$$

Другий спосіб. Скористаємось властивістю функції $f(x)$:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

У даному випадку отримуємо

$$P(-0{,}5 < X < 0{,}5) = \int_{-0{,}5}^{0{,}5} f(x)dx = \int_{-0{,}5}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{0{,}5} 3x^2dx = 0 + \frac{3x^3}{3}\bigg|_{0}^{0{,}5} =$$
$$= 0{,}5^3 = 0{,}125.$$

Приклад 4.6. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \ \textit{якщо} \ \ x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4} & , \ \textit{якщо} \ \ 0 < x \le 2, \\ 1 & , \ \textit{якщо} \ \ x > 2.\end{cases}$$

Знайти:

1) щільність розподілу ймовірностей $f(x)$ та побудувати її графік;

2) математичне сподівання;

3) дисперсію;

4) середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання. 1 Щільність розподілу ймовірностей $f(x)$ знайдемо за формулою

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & , \ \textit{якщо} \ \ x \le 0, \\ \dfrac{2x}{4} & , \ \textit{якщо} \ \ 0 < x \le 2, \\ 0 & , \ \textit{якщо} \ \ x > 2.\end{cases}$$

Отже, $f(x)=\begin{cases}0 & , \ \textit{якщо} \ \ x \le 0, \\ \dfrac{x}{2} & , \ \textit{якщо} \ \ 0 < x \le 2, \\ 0 & , \ \textit{якщо} \ \ x > 2.\end{cases}$

Побудуємо графік функції $f(x)$ (рисунок 4.6).

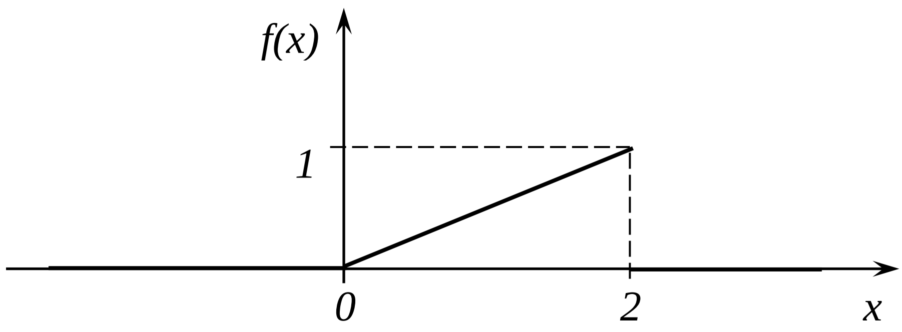


Рисунок 4.6

2 Математичне сподівання обчислимо за формулою

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx .$$

У даному випадку

$$M(X)=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx+\int_{0}^{2} x\cdot \frac{x}{2}dx+\int_{0}^{+\infty} x\cdot 0\,dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2} x^{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{3}}{3}\Bigg|_{0}^{2}=\frac{4}{3}.$$

3 Для обчислення дисперсії обчислимо спочатку $M(X^2)$:

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx=\int_{0}^{2} x^2\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\Bigg|_{0}^{2}=2 .$$

Дисперсію обчислимо за формулою

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2;$$

$$D(X)=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}.$$

4 Середнє квадратичне відхилення обчислимо за формулою

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\approx 0{,}47 .$$

Приклад 4.7. Випадкова величина X розподілена нормально з параметрами $a=3$ та $\sigma=4$. Знайти імовірність того, що X відхилиться від свого математичного сподівання за модулем не більше, ніж на 0,2.

Розв'язання. Скористаємось формулою

$$P(|X-a|\le\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

У нашому випадку $a = 3$, $\sigma = 4$, $\varepsilon = 0{,}2$.
Отже,

$$P(|X-3| \le 0{,}2) = 2\Phi\left(\frac{0{,}2}{4}\right) = 2\Phi(0{,}05) = 2 \cdot 0{,}0199 = 0{,}0398.$$

Приклад 4.8. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a = 3$ та $\sigma = 2$. Знайти таке значення x, щоб імовірність попадання в інтервал $[x;5]$ дорівнювала 0,5.

Розв'язання. Імовірність того, що випадкова величина набуде значення з інтервалу $[\alpha, \beta]$, обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Підставимо в цю формулу задані значення

$$P(x < X < 5) = \Phi\left(\frac{5-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{x-3}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi\left(\frac{x-3}{2}\right).$$

За умовою задачі $P(x < X < 5) = 0{,}5$. За таблицею додатка Б $\Phi(1) = 0{,}3413$.

Тоді $0{,}5 = 0{,}3413 - \Phi\left(\frac{x-3}{2}\right) \Rightarrow \Phi\left(\frac{x-3}{2}\right) = -0{,}1587$.

У таблиці значень функції $\Phi(x)$ (додаток Б) знайдемо значення $\Phi(x)$, найближче до числа 0,1587. Це число 0,1591. Отже, можна вважати, що $\Phi\left(\frac{x-3}{2}\right) \approx -0{,}1591$. За допомогою зазначеної таблиці визначаємо, що $\Phi(0{,}41) = 0{,}1591$, а отже, $\Phi(-0{,}41) = -0{,}1591$. Таким чином, отримуємо $\frac{x-3}{2} \approx -0{,}41 \Rightarrow x \approx 2{,}18$.

5 ДВОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

5.1 Закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини

Випадкова величина *X*, яка при кожному випробуванні визначається одним можливим числовим значенням, називається *одновимірною*.

Якщо можливі значення випадкової величини визначаються у кожному випробуванні 2, 3, …, *n* числами, то такі величини називають відповідно *дво*-, *три*-, …, *n-вимірними* відповідно.

Ми будемо розглядати тільки двовимірні випадкові величини.

Двовимірну випадкову величину будемо позначати (*X*, *Y*), при цьому *X* та *Y* будуть її компонентами. Величини *X* та *Y*, що визначені на одному й тому самому просторі елементарних подій і розглядаються одночасно, утворюють систему двох випадкових величин.

Двовимірні випадкові величини бувають *дискретними* або *неперервними* (компоненти цих величин відповідно будуть дискретними або неперервними).

У подальшому обмежимось розглядом дискретних двовимірних випадкових величин.

5.1 Закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини

Визначення. *Законом розподілу дискретної двовимірної випадкової величини (X, Y) називають перелік можливих значень* (x_i, y_j) *та їх імовірностей* $p(x_i, y_j)$, $i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m$.

Звичайно закон розподілу двовимірної випадкової величини задають у вигляді таблиці з двома входами (таблиця 5.1).

Таблиця 5.1

Y	X					
	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	$\ldots$	$p(x_i, y_1)$	$\ldots$	$p(x_n, y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	$\ldots$	$p(x_i, y_2)$	$\ldots$	$p(x_n, y_2)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	$\ldots$	$p(x_i, y_j)$	$\ldots$	$p(x_n, y_j)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	$\ldots$	$p(x_i, y_m)$	$\ldots$	$p(x_n, y_m)$

Події $(X = x_i; Y = y_j)$, $i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, m$ утворюють повну групу, тому сума ймовірностей у цій таблиці дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1.$$

Знаючи закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини, можна записати закони розподілу кожної компоненти окремо:

$$P(X = x_i) = p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j),$$

$$P(Y = y_j) = p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j).$$

5.3 Умовні закони розподілу складових дискретних двовимірних випадкових величин

Умовним розподілом складової X за умови, що $Y = y_j$, називають сукупність значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та відповідних їм умовних імовірностей $p(x_1/y_j)$, $p(x_2/y_j), \ldots, p(x_n/y_j)$.

Аналогічно визначається умовний розподіл складової Y за умови, що $X = x_i$.

Умовні імовірності складових X і Y обчислюють за формулами

$$p(x_i/y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}; \; p(y_j/x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}, \; i, j \in N .$$

Приклад 5.1. Задана дискретна двовимірна випадкова величина (X, Y)

Y	X	
	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Знайти**:**

а) умовний закон розподілу X, якщо $Y = y_1 = 10$;

б) умовний розподіл Y, якщо $X = x_2 = 6$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку безумовні закони розподілу складових. Додавши імовірності "по стовпцях", запишемо закон розподілу X:

$\boldsymbol{X}$	3	6
P	0,72	0,28

.

Додавши імовірності "по рядках", запишемо закон розподілу Y:

Y	10	14	18
P	0,35	0,20	0,45

.

а) знайдемо імовірності можливих значень X за умови, що складова Y набула значення $y_1 = 10$:

$$p(x_1/y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}25}{0{,}35} = \frac{5}{7};$$

$$p(x_2/y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}10}{0{,}35} = \frac{2}{7}.$$

Запишемо умовний закон розподілу *X*:

X	3	6
$P(X/y_1)$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

.

Контроль: $\frac{5}{7}+\frac{2}{7}=1$;

б) аналогічно знайдемо імовірності можливих значень *Y* за умови, що складова *X* набула значення $x_2=6$:

$$p(y_1/x_2)=\frac{p(x_2,y_1)}{p(x_2)}=\frac{0{,}10}{0{,}28}=\frac{10}{28};$$
$$p(y_2/x_2)=\frac{p(x_2,y_2)}{p(x_2)}=\frac{0{,}05}{0{,}28}=\frac{5}{28};$$
$$p(y_3/x_2)=\frac{p(x_2,y_3)}{p(x_2)}=\frac{0{,}13}{0{,}28}=\frac{13}{28}.$$

Запишемо умовний закон розподілу *Y*:

Y	10	14	18
$P(Y/x_2)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{13}{28}$

.

Контроль: $\frac{10}{28}+\frac{5}{28}+\frac{13}{28}=\frac{28}{28}=1$.

5.4 Числові характеристики дискретних двовимірних випадкових величин

Для двовимірних випадкових величин вводять поняття *умовних математичних сподівань*:

$$M(X/y)=M(X/Y=y)=\sum_i x_i\cdot\frac{p(x_i,y)}{p(y)} \qquad (p(y)>0);$$
$$M(Y/x)=M(Y/X=x)=\sum_j y_j\cdot\frac{p(x,y_j)}{p(x)} \qquad (p(x)>0).$$

За допомогою умовного математичного сподівання можна записати формули *повного математичного сподівання:*

$$M(X)=\sum_j p(y_j)M(X/y_j);$$
$$M(Y)=\sum_i p(x_i)M(Y/x_i).$$

Важливими числовими характеристиками двовимірної випадкової величини є *кореляційний момент* K_{XY} *(коваріація)* та *коефіцієнт кореляції* r_{xy}.

Для дискретних випадкових величин *X* та *Y*

$$\begin{aligned}K_{XY}&=\sum_i\sum_j(x_i-M(X))\cdot(y_j-M(Y))\cdot p(x_i,y_j)=\\&=M(X\cdot Y)-M(X)\cdot M(Y)=\\&=\sum_i\sum_j x_i\cdot y_j\cdot p(x_i,y_j)-M(X)\cdot M(Y).\end{aligned}$$

Кореляційний момент K_{XY} характеризує зв'язок між випадковими величинами *X* та *Y*. Зокрема, якщо *X* і *Y* – незалежні, то $K_{XY}=0$, а тому якщо $K_{XY}\neq 0$, то *X* і *Y* – залежні.

Коефіцієнтом кореляції r_{XY} випадкових величин *X* і *Y* називається відношення

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)},$$

де $\sigma(X)$ і $\sigma(Y)$ – середні квадратичні відхилення випадкових величин *X* і *Y*.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1) $|r_{xy}|\le 1$;

2) якщо *X* та *Y* незалежні, то $r_{xy}=0$;

3) якщо між *X* та *Y* є лінійна залежність $Y=aX+b$, де a та b – сталі, то $|r_{xy}|=1$ (якщо $a>0$, то $r_{xy}=1$, а якщо $a<0$, то $r_{xy}=-1$).

Зауваження. *Випадкові величини X та Y називаються некорельованими, якщо їх кореляційний момент або коефіцієнт кореляції дорівнює нулю.*

Якщо момент кореляції або коефіцієнт кореляції не дорівнює нулю, то випадкові величини *X* та *Y* називаються *корельованими*.

Дві корельовані величини обов'язково залежні. Але дві залежні випадкові величини можуть бути як корельованими, так і некорельованими, тобто їх коефіцієнт кореляції може дорівнювати нулю, а може і не дорівнювати нулю.

Кореляційною матрицею для випадкових величин *X* і *Y* називається матриця $\begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{xy} & K_{yy} \end{pmatrix}$.

Очевидно, що $K_{xx} = D(X), K_{yy} = D(Y)$.

Приклад 5.2. Задано закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини (*X*, *Y*) (таблиця 5.2).

Таблиця 5.2

Y	X			
	-1	3	4	5
–2	0,1	0,12	0,1	0,05
3	0,04	0,3	0,09	0,2

Знайти математичні сподівання $M(X)$, $M(Y)$, $M(Y/X=3)$, кореляційний момент K_{XY} і коефіцієнт кореляції r_{XY}. З'ясувати, чи є залежними випадкові величини *X* та *Y*?

Розв'язання. Запишемо спочатку закони розподілу складових *X* та *Y*.

X	–1	3	4	5
P	0,14	0,42	0,19	0,25

Y	–2	3
P	0,37	0,63

Знайдемо їх математичні сподівання, дисперсії та середні квадратичні відхилення.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i p_i=-1\cdot 0{,}14+3\cdot 0{,}42+4\cdot 0{,}19+5\cdot 0{,}25=3{,}13;$$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2;$$

$$M(X^2)=\sum_{k=1}^{4}x_k^2\cdot p_k=(-1)^2\cdot 0{,}14+3^2\cdot 0{,}42+4^2\cdot 0{,}19+5^2\cdot 0{,}25=$$

$$=13{,}21;$$

$$D(X)=13{,}21-3{,}13^2=3{,}4131;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{3{,}4131}]\approx 1{,}85];$$

$$M(Y)=\sum_{j=1}^{2}y_j p_j=-2\cdot 0{,}37+3\cdot 0{,}63=1{,}15;$$

$$D(X)=M\left(Y^2\right)-[M(Y)]^2;$$

$$M(Y^2)=\sum_{k=1}^{2}y_k^2\cdot p_k=(-2)^2\cdot 0{,}37+3^2\cdot 0{,}63=7{,}15;$$

$$D(Y)=7{,}15-1{,}15^2=5{,}8275;$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{5{,}8275}]\approx 2{,}41].$$

Запишемо умовний закон розподілу випадкової величини Y за умови, що $X=3$.

Кореляційний момент обчислимо за формулою

$$K_{XY}=\sum_i\sum_j x_i\cdot y_j\cdot p(x_i,y_j)-M(X)\cdot M(Y);$$

$$K_{XY}=(-1)(-2)\cdot 0{,}1+3\cdot(-2)\cdot 0{,}12+3\cdot(-2)\cdot 0{,}1+5\cdot(-2)\cdot 0{,}05+$$
$$+(-1)\cdot 3\cdot 0{,}04+3\cdot 3\cdot 0{,}3+4\cdot 3\cdot 0{,}09+5\cdot 3\cdot 0{,}2-3{,}13\cdot 1{,}15=$$
$$=4{,}84-3{,}5995=1{,}2405.$$

Коефіцієнт кореляції обчислимо за формулою

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}.$$

Отже, $r_{XY} = \dfrac{1,2405}{1,85 \cdot 2,41} \approx 0,28$.

Оскільки $K_{XY} \neq 0$, то випадкові величини X і Y залежні.

Висновок про залежність випадкових величин X і Y можна зробити також зауваживши, що $p(x_i) \cdot p(y_j) \neq p(x_i, y_j)$ хоча б для однієї пари (x_i, y_j).

6 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання № 1

Варіант № 1

1 На п'яти картках написані 5 букв: А, И, Л, Н, Я. Картки розкладено в ряд у довільній послідовності. Яка ймовірність того, що утвориться слово "ялина"?

2 Три спортсмени стріляють у мішень по одному разу. Ймовірності їх влучення дорівнюють відповідно 0,7, 0,6 і 0,8. Яка ймовірність того, що у мішень влучили: а) тільки двоє; б) хоча б один?

3 У кожній з трьох скриньок міститься 6 чорних і 4 білих кульки. З першої скриньки навмання вийняли одну кульку та переклали в другу, після чого з другої скриньки вийняли навмання одну кульку та переклали в третю. Знайти ймовірність того, що кулька, навмання вийнята з третьої скриньки, буде білою.

4 Робітниця обслуговує 1000 веретен. Ймовірність обриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини відбудеться: а) рівно два обриви нитки; б) менш ніж два обриви.

Варіант № 2

1 Чотиритомник розташований на полиці в довільній послідовності томів. Знайти ймовірність того, що томи стоять у потрібній послідовності справа наліво або зліва направо.

2 Два спортсмени можуть здобути на змаганнях для своєї команди залікові очки. Перший спортсмен може їх здобути з ймовірністю 0,7, а другий – 0,4. Знайти ймовірності того, що: а) залікові очки здобув тільки один; б) залікові очки здобув хоча б один.

3 У залізничному потязі 25 вагонів, серед яких 10 багажних та 15 пасажирських. Ймовірність того, що треба міняти гальмові колодки у пасажирського вагона, дорівнює 0,1, а у багажного – 0,2. Яка ймовірність того, що колодки треба міняти у навмання вибраного вагона?

4 Гральний кубик кидають п'ять разів. Знайти ймовірність того, що: а) кількість очок, кратна трьом, з'явиться двічі; б) парна кількість очок з'явиться не менше трьох разів.

Варіант № 3

1 Замок з "секретом" має на спільній осі 4 диски, кожний з яких розділений на 5 секторів з різними написаними на них цифрами. Замок відкривається за умови, що диски встановлено так, що цифри на них утворюють певне чотиризначне число. Знайти ймовірність того, що замок відкриється, якщо цифри на дисках встановити навмання.

2 Два стрільці стріляють у мішень незалежно один від одного по одному разу. Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,6, а для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що: а) у мішень влучив тільки один стрілець; б) жодний стрілець не влучив у мішень.

3 У першому ящику – 1000 деталей, з них 500 потрібних, у другому – 700, з них 200 потрібних , а у третьому – 800 деталей, з них 200 потрібних. З двох навмання вибраних ящиків усі деталі висипані в кучу, і потім з них навмання вибрана деталь. Яка ймовірність того, що це потрібна деталь?

4 Ймовірність того, що програміст набере програму правильно, дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що з 9 програм він набере правильно не менше двох?

Варіант № 4

1 У скриньці 8 білих, 5 чорних і 7 червоних кульок. Навмання зі скриньки вийнято 3 кульки. Яка ймовірність того, що всі вони будуть різних кольорів?

2 Ймовірність непопадання спортсменом у мішень при двох пострілах дорівнює 0,04. Знайти ймовірність його попадання у мішень при одному пострілі.

3 На сортувальну станцію прибувають піввагони, платформи та криті вагони з ймовірностями прибуття, що відповідно дорівнюють 0,35, 0,45 та 0,2. Ймовірність зіпсованості піввагона – 0,3, платформи – 0,2, а критого вагона – 0,15. Яка ймовірність того, що навмання взятий вагон буде незіпсованим?

4 Ймовірність того, що абонент правильно набере телефонний номер, приймається для всіх абонентів рівною 0,999. Знайти ймовірність того, що серед 500 проведених незалежно один від одного викликів виявиться менше ніж два помилкових.

Варіант № 5

1 У скриньці 40 деталей, з яких 8 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вийнятих чотирьох деталей немає бракованих.

2 Радіолокаційна станція веде спостереження за двома об’єктами. За час спостереження перший об’єкт може бути загублений з ймовірністю 0,12, а другий – з ймовірністю 0,14. Знайти ймовірність того, що за час спостереження: а) станція загубить обидва об’єкти; б) станція загубить тільки один з об’єктів.

3 Батарея з трьох гармат зробила залп, причому два снаряди влучили в ціль. Знайти ймовірність того, що перша гармата влучила в ціль, якщо ймовірності влучення для першої, другої та третьої гармат відповідно дорівнюють 0,4, 0,3, 0,5.

4 Пристрій складається з 5 елементів. За фіксований час кожний з елементів може вийти з ладу з ймовірністю, що дорівнює 0,1. Пристрій функціонує справно, якщо кількість елементів, що вийшли з ладу, не більша від двох. Знайти ймовірність справного функціонування пристрою.

Варіант № 6

1 У групі студентів 12 хлопців та 18 дівчат. Потрібно вибрати делегацію з двох осіб. Яка ймовірність того, що серед навмання вибраних за списком двох студентів виявляться: а) двоє дівчат; б) двоє хлопців; в) дівчина та хлопець?

2 По цілі стріляють трьома ракетами. Ймовірність влучення кожною ракетою в ціль дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що після обстрілу: а) ціль залишиться непошкодженою; б) ціль зазнає пошкодження.

3 Два мисливці одночасно зробили по одному пострілу у ведмедя. Ведмедя вбито однією кулею. Яка ймовірність того, що його вбито першим мисливцем, якщо ймовірність влучення для першого та другого мисливців відповідно дорівнює 0,8 і 0,4?

4 У камері схову 80% усього багажу – це валізи, які вперемішку з іншими речами зберігаються на стелажах. Через вікно були отримані всі 50 речей з одного із стелажів. Знайти ймовірність того, що серед виданих речей було 38 валіз.

Варіант № 7

1 У конверті серед 100 фотографій є дві, що розшукуються. Навмання з конверта беруть 10 фотографій. Знайти ймовірність того, що серед них будуть обидві потрібні фотографії.

2 Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність того, що перший верстат протягом години вимагатиме уваги робітника, дорівнює 0,8, другий – 0,6, третій – 0,5. Знайти ймовірність того, що протягом години уваги робітника вимагатимуть: а) тільки один верстат; б) два верстати.

3 У групі спортсменів 20 лижників, 6 велосипедистів, 4 бігуни. Ймовірність виконати кваліфікаційну норму така: для лижника – 0,9, для велосипедиста – 0,8, для бігуна – 0,75. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний спортсмен виконає кваліфікаційну норму.

4 Комутатор установи обслуговує 100 абонентів. Ймовірність того, що протягом однієї хвилини абонент зателефонує на комутатор, дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини зателефонує хоча б один абонент.

Варіант № 8

1 Десять різних книг довільно розставлені на полиці. Знайти ймовірність того, що три певні книги виявляться поставленими поруч.

2 Для справної роботи приладу достатньо, щоб були справними два з трьох його вузлів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірності справного функціонування вузлів дорівнюють відповідно 0,7, 0,75 та 0,8. Яка ймовірність того, що прилад працюватиме справно?

3 При експлуатації гарантійний термін роботи витримують 70 % телевізорів I заводу, 80 % телевізорів II заводу та 95 % телевізорів III заводу. У магазині є 4 телевізори I заводу, 5 телевізорів II заводу та 8 – III заводу. Куплений навмання телевізор витримав гарантійний термін. Знайти ймовірність того, що він виготовлений на I заводі.

4 Що ймовірніше виграти у рівносильного суперника: не менше трьох партій з чотирьох чи не менше п’яти партій з восьми?

Варіант № 9

1 З повної колоди (52 карти) виймають навмання 3 карти. Знайти ймовірність того, що це будуть сімка, дама, туз.

2 До магазину зайшли троє покупців. Ймовірність того, що перший з них зробить покупку, дорівнює 0,4, а для другого і третього ці ймовірності становлять 0, 7 та 0,8. Знайти ймовірність того, що: а) усі троє зроблять покупки; б) тільки двоє зроблять покупки.

3 У першому ящику дві білі і одна чорна кулі, в другому – одна біла і чотири чорні. З навмання вибраного ящика навмання беруть одну кулю, і вона виявляється білою. Яка ймовірність того, що її взято з другого ящика?

4 У деякій місцевості в середньому на кожні 100 вирощених кавунів трапляється один вагою не менше за 10 кг. Знайти ймовірність того, що в партії з 400 кавунів з цієї місцевості буде принаймні два кавуни вагою не менше за 10 кг.

Варіант № 10

1 На столі у безладді розкидано по 10 карток білого, червоного, зеленого і жовтого кольорів. На картках кожного з кольорів нанесено числа від 1 до 10. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана картка виявиться білою і матиме на собі одну з таких цифр – 5, 6 або 7.

2 Студенти виконують контрольну роботу в класі програмованого навчання. Робота складається з трьох задач. Для отримання позитивної оцінки потрібно знайти правильні відповіді не менше, ніж на дві задачі. До кожної задачі додаються п'ять різних відповідей, з яких тільки одна є правильною. Студент вибирає відповіді навмання. Яка ймовірність того, що він одержить позитивну оцінку?

3 Телеграфне повідомлення складається із сигналів “точка” і “тире”. Властивості перешкод такі, що спотворюються в середньому 2/5 повідомлень “точка” і 1/3 повідомлень “тире”. Відомо, що при передачі сигналів “точка” і “тире” зустрічаються у відношенні 5:3. Знайти ймовірність того, що прийнятий сигнал є “тире”, якщо відомо, що він прийнятий правильно.

4 Верстат–автомат штампує деталі. Ймовірність того, що виготовлена деталь виявиться бракованою, дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що серед 200 деталей виявиться рівно 4 бракованих.

Варіант № 11

1 Серед 17 студентів групи, з яких 8 дівчат, розігруються 7 білетів у театр. Яка ймовірність того, що тільки четверо дівчат одержать білети?

2 Ймовірність виконати норматив кандидата у майстри спорту для І спортсмена дорівнює 0,9, а для ІІ – 0,8. Знайти ймовірність того, що: а) тільки один виконає норматив; б) хоча б один виконає норматив.

3 У цеху працює 20 верстатів, з яких 10 – марки А, 6 – марки В, 4 – марки С. Ймовірність того, що виготовлена на верстаті деталь відповідає стандарту, для верстатів зазначених марок відповідно дорівнює 0,9, 0,8, 0,7. Який відсоток стандартних деталей випускає цех?

4 Радіотелеграфна станція приймає цифровий текст. Ймовірність помилкового приймання довільної цифри внаслідок перешкод не змінюється протягом всього приймання і дорівнює 0,01. Вважаючи приймання окремих цифр незалежними подіями, знайти ймовірність того, що в тексті, який містить 800 цифр, буде 5 помилок.

Варіант № 12

1 У залі театру встановлено 4 прожектори, які освітлюють сцену відповідно червоним, зеленим, синім та жовтим кольорами. Навмання увімкнено 3 прожектори. Яка ймовірність того, що жовтий колір буде освітлювати сцену?

2 Програма іспиту складається зі 100 запитань. Студент знає відповіді на 80 з них. Викладач запропонував студенту 5 запитань, а для того, щоб скласти іспит, потрібно відповісти не менше, ніж на 3 запитання. Яка ймовірність того, що студент складе іспит?

3 У першій урні 5 синіх і 4 червоних кульки, у другій – 3 синіх і 2 червоних. З кожної урни навмання беруть по одній кульці та кладуть у третю, порожню, урну. Знайти ймовірність того, що кулька, взята навмання з третьої урни, виявиться червоною.

4 Вироби високої якості становлять 70 % всієї продукції. Для перевірки взято навмання 8 виробів. Що ймовірніше виявити серед них: 5 високоякісних чи 7 високоякісних?

Варіант № 13

1 На полиці навмання розставлено 10 томів енциклопедії. Знайти ймовірність того, що перші три томи займатимуть місце поруч у послідовності зростання номерів (зліва направо або навпаки).

2 Екзаменаційний білет містить три запитання. Ймовірності того, що студент зможе відповісти на кожне з перших двох запитань білета, дорівнюють по 0,9, а на третє – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього

необхідно відповісти: а) на всі запитання; б) хоча б на два запитання.

3 Одна з друкарок надрукувала третину тексту, а друга – решту. Ймовірність безпомилкового друку однієї сторінки тексту для першої друкарки дорівнює 0,8, а для другої – 0,7. У навмання взятій сторінці тексту виявилась помилка. Яка ймовірність того, що ця сторінка була надрукована другою друкаркою?

4 Ймовірність влучення спортсменом у мішень дорівнює 0,8. Ним зроблено шість пострілів. Яка ймовірність того, що буде не менше двох влучень?

Варіант № 14

1 На гору ведуть 8 різних стежок. Турист піднімається на гору, а потім через деякий час спускається з неї. Знайти ймовірність того, що при підйомі та спуску були використані різні стежки.

2 З колоди (36 карт) навмання вибирають 3 карти. Яка ймовірність того, що серед них буде не менше одного туза?

3 Для участі в студентських відбіркових змаганнях виділено 4 студенти з першої групи, 6 – з другої, 5 – з третьої. Ймовірності того, що студент першої, другої та третьої груп попаде в збірну курсу, дорівнюють відповідно 0,9, 0,7, 0,8. Яка ймовірність того, що навмання вибраний студент за результатами змагання попаде у збірну курсу?

4 Ймовірність безпомилкової передачі символу по лінії зв'язку дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що у телеграмі, яка складається з 200 символів, безпомилково будуть передані: а) 180 символів; б) не менше за 180 символів.

Варіант № 15

1 На полиці випадковим чином розставлено 40 книг, серед яких є три томи І. Франка. Знайти ймовірність того, що ці томи розташовані поруч.

2 Серед 20 лотерейних білетів є 8 виграшних. Яка буде ймовірність виграти, якщо купити 5 білетів?

3 У піраміді 3 автомати та 7 гвинтівок, з яких 2 – з оптичним прицілом. Ймовірність попадання в ціль при пострілі з автомата дорівнює 0,7, зі звичайної гвинтівки – 0,8, із

гвинтівки з оптичним прицілом – 0,9. Яка ймовірність попадання із навмання вибраної зброї?

4 Ймовірність безвідмовної роботи нового телевізора протягом року дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що з шести поставлених на контроль нових телевізорів протягом року вийдуть з ладу: а) три; б) більше трьох.

Варіант № 16

1 З колоди (36 карт) навмання вибирають 3 карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде не менше від одного туза.

2 Навмання вибирають п'ятизначний номер. Знайти ймовірність того, що всі цифри цього номера кратні трьом.

3 У трьох коробках по 10 краваток, з них у першій – 5, у другій – 6, а у третій – 7 червоних. Вміст однієї з перших двох коробок, вибраної навмання, перекладають у третю, а потім з неї виймають одну краватку. Яка ймовірність того, що вона червона?

4 Ймовірність аварії на АЕС протягом одного дня дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що за три роки на станції: а) не відбудеться жодної аварії; б) відбудеться тільки одна аварія (вважати, що рік складається з 360 днів).

Варіант № 17

1 Із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 навмання складають шестизначне число, всі цифри якого різні. Яка ймовірність того, що воно ділиться на п'ять?

2 Ймовірності того, що кожний з трьох спортсменів виконає кваліфікаційну норму і вийде у фінал змагань, відповідно дорівнюють 0,6, 0,8, 0,9. Знайти ймовірність того, що: а) у фінал вийде тільки один спортсмен; б) у фінал вийде хоча б один спортсмен.

3 Пасажир може звернутися за квитком в одну з трьох кас. Ймовірність звернення в кожну касу залежить від її місцезнаходження. Ці ймовірності співвідносяться як 1:7:2. Ймовірність того, що до моменту звернення всі квитки в касі будуть продані, для першої каси дорівнює 0,2, для другої – 0,1,

для третьої – 0,15. Пасажир пішов в одну з кас і купив квиток. Яка ймовірність того, що він купив його в другій касі?

4 Ймовірність влучення у ціль при одному пострілі з гармати дорівнює 0,3. Здійснено 5 пострілів. Що ймовірніше: в ціль попаде один снаряд чи в ціль попадуть два снаряди?

Варіант № 18

1 У лотереї розігрується 50 білетів, 8 з яких – виграшні. Яка ймовірність виграшу для того, хто купив 2 білети?

2 На 20 картках написані числа від 1 до 20. Навмання вибирають дві картки. Яка ймовірність того, що на одній з них буде число, менше за 6, а на другій – більше за 6?

3 Гравець А, в якого 2 карти червоної масті і 4 чорної, ходить до гравця В. Ймовірність того, що гравець В поб’є карту червоної масті, дорівнює 0,3, а чорної – 0,6. Перша карта гравця А була бита. Яка ймовірність того, що він походив картою чорної масті?

4 Гральний кубик кидають 420 разів. Яка ймовірність того, що одне очко випаде: а) 70 разів; б) від 10 до 70 разів?

Варіант № 19

1 Із послідовності чисел 1, 2, ..., 10 навмання вибирають два числа. Яка ймовірність того, що одне з них менше, ніж 4, а друге – більше?

2 Деталь має форму прямокутного паралелепіпеда. Ймовірності відхилення її розмірів від стандартних по довжині, ширині та висоті дорівнюють відповідно 0,09, 0,11 та 0,12. Яка ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться нестандартною?

3 Перший верстат виготовляє 20 % деталей, другий – 30 %, третій – решту. Ймовірність браку в їхній продукції в дорівнює 0,05, 0,04 та 0,03 відповідно. Навмання вибрана деталь виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена першим верстатом.

4 Ймовірність нещасного випадку з робітником на виробництві протягом року дорівнює 0,0001. В цеху 5000 чоловік. Яка ймовірність того, що протягом року: а) не

трапиться жодного нещасного випадку; б) трапиться хоча б один нещасний випадок?

Варіант № 20

1 Колода з 36 карт добре перемішана. Знайти ймовірність того, що тузи розташовані поруч.

2 Ймовірності того, що перший, другий або третій спортсмен виконає кваліфікаційну норму та вийде у фінал змагань, відповідно дорівнюють 0,4, 0,7, 0,9. Яка ймовірність того, що у фіналі будуть виступати: а) усі три спортсмени; б) хоча б один?

3 Зі скриньки, де було 8 білих і 4 чорних кульки, загублені дві кульки невідомого кольору. Яка ймовірність вийняти зі скриньки навмання кульку білого кольору?

4 Гральний кубик кидають тричі. Яка ймовірність того, що хоча б двічі випаде непарна кількість очок?

Варіант № 21

1 Серед десяти книг, які навмання поставлені в ряд на полицю, є дві однакові. Знайти ймовірність того, що між цими однаковими книгами розташовані три інші книги.

2 Три спортсмени стріляють у мішень. Ймовірності їх влучення дорівнюють відповідно 0,6, 0,7 та 0,9. Яка ймовірність того, що тільки двоє з них влучать у мішень?

3 У першій скриньці 2 білих та 4 чорних кульки, в другій – 3 білих та 1 чорна кулька. З першої скриньки вийняли навмання дві кульки і переклали у другу, після чого з другої скриньки вийняли навмання одну кульку. Яка ймовірність того, що ця кулька біла?

4 Ймовірність невдалого запуску ракети дорівнює 0,0002. Яка ймовірність того, що в 2000 запусках: а) не відбудеться жодної аварії; б) відбудеться тільки одна аварія?

Варіант № 22

1 Колода з 36 карт навмання ділиться навпіл. Знайти ймовірність того, що в кожній половині виявиться по 2 тузи.

2 У коробці лежать 3 картки з літерою А, 4 – з літерою Т, 5 – з літерою О. Дитина, яка не вміє читати, бере навмання чотири картки та викладає їх у рядок. Яка ймовірність того, що утвориться слово ТАТО?

3 60 % усіх електроламп, що є в магазині, виготовлені на одному заводі, а 40 % – на іншому. Продукція першого заводу містить 85 %, а другого – 95 % стандартних електроламп. Знайти ймовірність того, що куплена в магазині електролампа виявиться стандартною.

4 У середньому на станцію запізнюються 20 % потягів. Яка ймовірність того, що з 200 потягів запізняться: а) 35; б) не більше 30?

Варіант № 23

1 У студентській групі з 20 чоловік 6 вчаться на „відмінно”. З групи навмання відібрано 4 студенти для тестування. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться не менше половини відмінників.

2 Кидають три гральні кубики. Яка ймовірність того, що на двох з них випаде однакове число очок, а на третьому – інше?

3 У скриньку, що містить 3 кульки, опущено білу кульку. Після цього з неї навмання вийнято одну кульку. Знайти ймовірність того, що ця кулька буде білою, якщо будь-які припущення відносно початкової кількості білих кульок у скриньці мають рівні ймовірності.

4 Ймовірність отримання травми туристом, який відпочиває на гірськолижній базі, дорівнює 0,005. Яка ймовірність того, що з 300 туристів: а) жодний не отримає травму; б) тільки один отримає травму?

Варіант № 24

1 Кинуто два гральні кубики. Яка ймовірність того, що на них випаде різна кількість очок?

2 Ймовірність запізнення першого потяга дорівнює 0,1, другого – 0,11, третього – 0,12. Яка ймовірність того, що: а) запізниться тільки один потяг; б) жоден потяг не запізниться.

3 У першій коробці – 20 книг, з них 5 – з теорії ймовірностей. У другій – 30 книг, з них 10 – з теорії ймовірностей. З навмання вибраної коробки взято книгу, яка виявилась книгою з теорії ймовірностей. Яка ймовірність того, що її взято з другої коробки?

4 У середньому 25 % людей мають сірі очі. Яка ймовірність того, що з 200 новонароджених: а) 40 сірооких; б) не більше 40 сірооких?

Варіант № 25

1 У скриньці міститься 5 кульок з номерами від 1 до 5. Послідовно виймають 3 кульки, щоразу повертаючи взяту кульку до скриньки. Яка ймовірність того, що номери першої та третьої кульок виявляться однаковими?

2 Ймовірність того, що баскетболіст попаде у корзину тільки один раз при двох спробах, дорівнює 0,18. Знайти ймовірність його попадання у корзину при одній спробі, якщо відомо, що вона більша за ймовірність непопадання.

3 Відомо, що 5 % всіх чоловіків та 0,25 % всіх жінок – дальтоніки. Навмання вибрана людина виявилась дальтоніком. Яка ймовірність того, що це чоловік? (Вважати, що кількість жінок і чоловіків однакова.)

4 Ймовірність безпомилкової передачі одного сигналу дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що з 400 переданих сигналів: а) безпомилково будуть прийняті 300 сигналів; б) з помилками будуть прийняті не більше 15% сигналів?

Варіант № 26

1 Група з 8 чоловік довільним чином розміщується за круглим столом. Яка ймовірність того, що дві певні особи опиняться поруч?

2 Три дослідники незалежно один від одного вимірюють деяку фізичну величину. Ймовірність вимірювання з помилкою для кожного з них різна і дорівнює відповідно 0,1, 0,2 та 0,15. Знайти ймовірність того, що: а) тільки один з них припуститься помилки; б) жоден з них не припуститься помилки.

3 Куля, що лежить в урні, з рівною ймовірністю є білою або чорною. У цю урну кладуть білу кулю і після перемішування навмання дістають одну кулю. Вона виявилась білою. Яка ймовірність того, що в урні залишилась біла куля?

4 Яка ймовірність того, що у стовпчику, навмання складеному зі 100 монет, число монет, розташованих гербом угору, буде: а) рівним 50; б) не меншим 45 і не більшим 55?

Варіант № 27

1 Група з 8 чоловік довільним чином розміщується з одного боку прямокутного стола. Знайти ймовірність того, що дві певні особи опиняться поруч.

2 У класі 20 учнів, серед них 12 хлопців. За списком навмання відібрано 4 учні. Яка ймовірність того, що серед них виявиться більше двох хлопців?

3 Зі скриньки, що містила 20 білих та 10 чорних кульок, одна кулька невідомого кольору загубилась. Яка ймовірність навмання вийняти зі скриньки білу кульку?

4 Відомо, що в середньому лівші складають 1 %. Яка ймовірність того, що серед 200 чоловік буде тільки чотири лівші?

Варіант № 28

1 Гральний кубик підкидають двічі. Знайти ймовірність того, що добуток очок на гранях, які випадуть, дорівнюватиме шести.

2 Ймовірність хоча б одного влучення спортсменом у „десятку” при трьох пострілах дорівнює 0,973. Знайти ймовірність його влучення у „десятку” при одному пострілі.

3 На заводі, що виготовляє гайки, перший цех виробляє 25 % всієї продукції, другий – 35 %, третій – решту. Брак в їхній продукції становить відповідно 5 %, 4 %, 2 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана гайка, виготовлена на цьому заводі, матиме дефект.

4 Середня щільність мікробів в повітрі становить 100 шт. на 1 м^3. Беруть на пробу 2 дм повітря. Знайти ймовірність того, що в ньому буде виявлений принаймні один мікроб.

Варіант № 29

1 П’ятеро провідників, серед яких двоє братів, закріплюються навмання за п’ятьма вагонами. Яка ймовірність того, що брати виявляться закріпленими за сусідніми вагонами?

2 Кидають три гральні кубики. Знайти ймовірність того, що принаймні на одному з них випаде одиниця, за умови, що на всіх кубиках випали грані з різною кількістю очок.

3 Ймовірність влучення в ціль при кожному пострілі з двох із п’яти рушниць дорівнює 0,8, ймовірність влучення з інших трьох рушниць – 0,9. Знайти ймовірність влучення в ціль при одному пострілі з навмання взятої рушниці.

4 Ймовірність отримання травми туристом на гірськолижній базі становить 0,005. Яка ймовірність того, що з 400 туристів: а) жоден не отримає травму; б) тільки один отримає травму?

Варіант № 30

1 Серед дев’яти книг, які навмання поставлені в ряд на полицю, є дві однакові. Знайти ймовірність того, що між цими однаковими книгами розташовані дві інші книги.

2 З карток з написаними на них буквами складено слово СТАТИСТИКА. Дитина, яка не вміє читати, бере навмання п’ять карток та викладає їх у рядок. Знайти ймовірність того, що вийде слово ТАКСА.

3 У першій урні 5 білих та 7 чорних куль, у другій – 7 білих та 5 чорних, а у третій – 4 білих та 8 чорних. З навмання вибраної урни навмання беруть кулю. Яка ймовірність того, що вона виявиться білою?

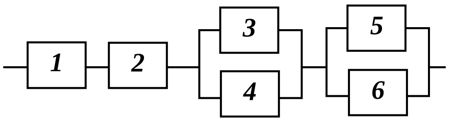
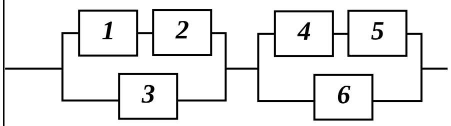
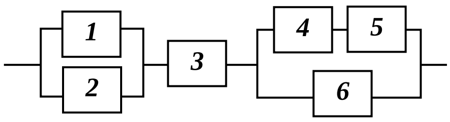
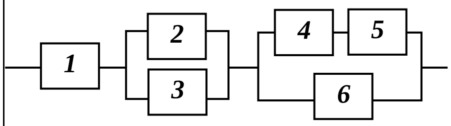
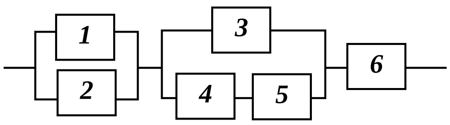
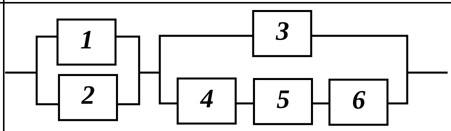
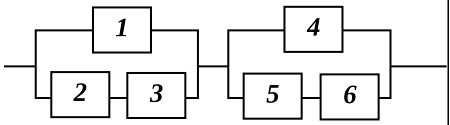
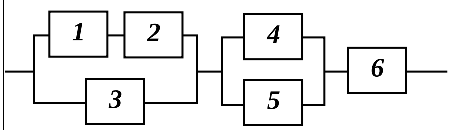
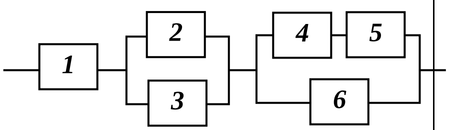
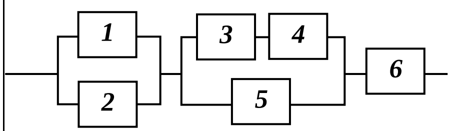
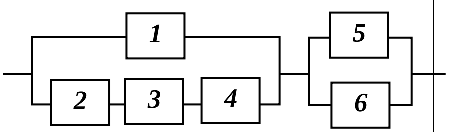
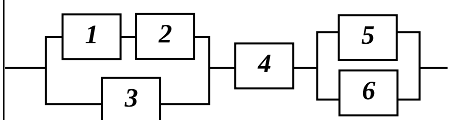
4 Ймовірність того, що деталь даної партії – вищої якості, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що серед 200 деталей цієї партії буде не менше 170 деталей вищої якості.

Завдання № 2

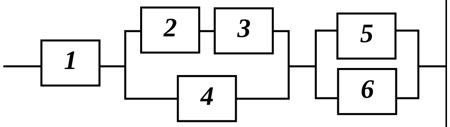
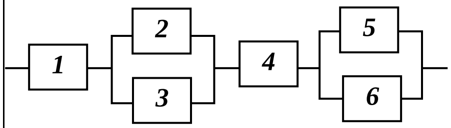
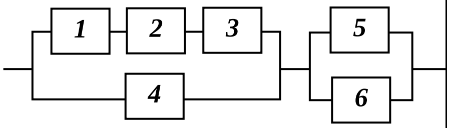
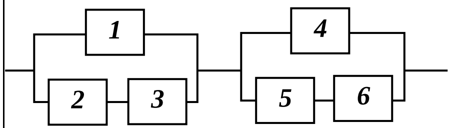
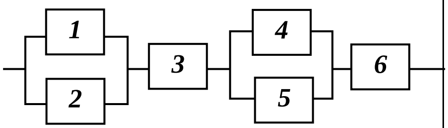
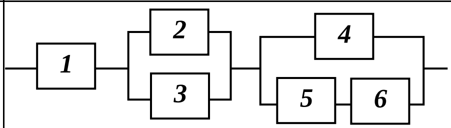
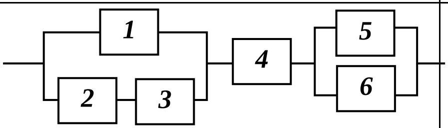
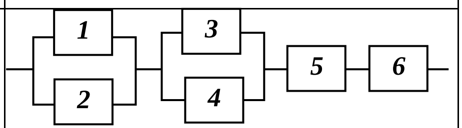
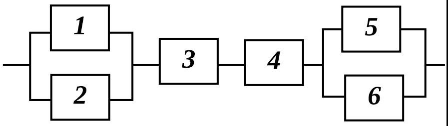
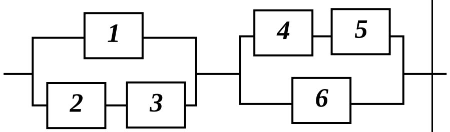
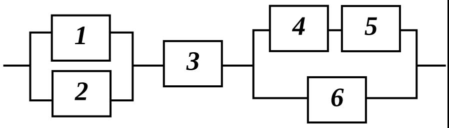
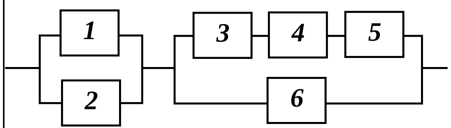
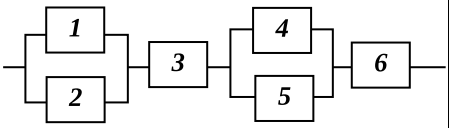
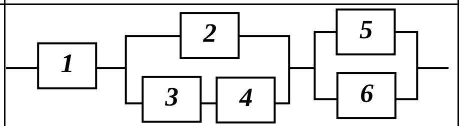
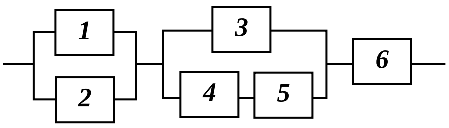
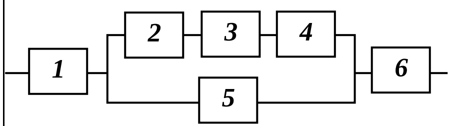
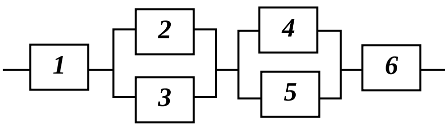
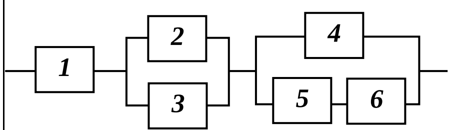
Імовірності безвідмовної роботи елементів №№ 1, 2, 3, 4, 5, 6 електричної схеми відповідно дорівнюють 0,9, 0,8, 0,7, 0,6, 0,5, 0,4.

Знайти імовірність проходження сигналу через схему (таблиця 6.1).

Таблиця 6.1

Варіант	Схема	Варіант	Схема
1	2	3	4
1		***2***	
3		***4***	
5		***6***	
7		***8***	
9		***10***	
11		***12***	

Продовження таблиці 6.1

1	2	3	4
13		***14***	
15		***16***	
17		***18***	
19		***20***	
21		***22***	
23		***24***	
25		***26***	
27		***28***	
29		***30***	

Завдання № 3

Обчислити математичне сподівання і дисперсію величини $Z = Z(X, Y)$, якщо X і Y – незалежні випадкові величини з характеристиками $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, заданими в таблиці 6.2.

Таблиця 6.2

Варіант	Z	$M(X)$	$M(Y)$	$D(X)$	$D(Y)$
1	$3X-2Y$	2	5	1	9
2	$2Y-5X$	–2	3	9	4
3	$4X-3Y$	0	2	1	4
4	$5Y-2X$	2	–1	9	1
5	$6X-5Y$	3	0	4	9
6	$5Y-6X$	–3	1	4	1
7	$4X-5Y$	0	–2	16	9
8	$3Y-6X$	5	2	9	16
9	$7X-2Y$	3	–1	1	16
10	$4Y-5X$	0	3	16	1
11	$8X-2Y$	–2	5	4	16
12	$3Y-7X$	5	4	16	4
13	$5X-3Y$	2	–3	25	1
14	$2Y-7X$	2	–5	1	25
15	$7X-4Y$	5	–4	25	4
16	$2Y-3X$	4	3	4	25
17	$5X-2Y$	3	–2	16	25
18	$3Y-4X$	4	–1	25	16
19	$2X-5Y$	5	1	25	9
20	$5Y-6X$	3	–4	9	25
21	$6X-5Y$	–5	2	36	25
22	$5Y-4X$	–3	2	25	36
23	$6X-3Y$	2	0	36	9
24	$2Y-7X$	–1	2	9	36
25	$2X-3Y$	0	–3	36	4
26	$5Y-4X$	1	–3	4	36
27	$2X-8Y$	–2	0	36	1
28	$7Y-3X$	–2	7	1	36
29	$3X-5Y$	–1	3	36	49
30	$4Y-7X$	–3	0	49	36

Завдання № 4

Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу. Знайти математичне сподівання $M(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

Побудувати графік функції розподілу $F(x)$.

1

x_i	1	6	11	16	21
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

2

x_i	2	5	8	11	14
p_i	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

3

x_i	3	7	11	15	19
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

4

x_i	4	10	16	22
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

5

x_i	5	10	15	20	25
p_i	0,1	0,4	0,1	0,3	0,1

6

x_i	6	11	16	17	21
p_i	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

7

x_i	7	11	15	19	23
p_i	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

8

x_i	8	15	22	29
p_i	0,1	0,2	0,5	0,2

9

x_i	9	11	13	15	17
p_i	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

10

x_i	10	13	15	17	19
p_i	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

11

x_i	–1	2	5	8	11
p_i	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

12

x_i	–15	–6	3	12
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

13

x_i	–3	1	5	9	13
p_i	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2

14

x_i	5	7	9	12	14
p_i	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

15

x_i	2	5	8	12	15

p_i	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

16

x_i	–27	–16	5	16
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

17

x_i	–7	–1	5	11	17
p_i	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

18

x_i	10	12	14	16	18
p_i	0,1	0,3	0,3	0,1	0,2

19

x_i	–9	–2	5	12	19
p_i	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

20

x_i	–31	–14	3	20
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

21

x_i	5	9	13	17	21
p_i	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

22

x_i	2	7	12	17	22
p_i	0,3	0,4	0,1	0,1	0,1

23

x_i	–22	–7	8	23

p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

24

x_i	8	12	16	20	24
p_i	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

25

x_i	–7	1	9	17	25
p_i	0,3	0,4	0,1	0,1	0,1

26

x_i	23	24	25	26
p_i	0,1	0,3	0,5	0,1

27

x_i	–10	–3	7	17	27
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

28

x_i	–4	4	12	20	28
p_i	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

29

x_i	–7	2	11	20	29
p_i	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

30

x_i	24	26	28	30
p_i	0,1	0,2	0,5	0,2

Завдання № 5

6.5.1 Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти щільність розподілу $f(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ і ймовірність попадання випадкової величини X в заданий інтервал (α, β). Побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

1 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sin 3x, & 0\le x\le \pi/6 \\ 1, & x>\pi/6 \end{cases}$;

$\alpha=0;\ \beta=\pi/12.$

2 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{100}x^2, & 0\le x\le 10 \\ 1, & x>10 \end{cases}$;

$\alpha=5;\ \beta=12.$

3 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^3, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$;

$\alpha=0{,}5;\ \beta=1{,}2.$

4. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0\le x\le \pi \\ 1, & x>\pi \end{cases}$;

$\alpha=\frac{\pi}{2};\ \beta=\frac{3\pi}{2}.$

5 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x^3}{8}, & 0\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$;

$\alpha=1;\ \beta=3.$

6 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sin 2x, & 0\le x\le \pi/4 \\ 1, & x>\pi/4 \end{cases}$;

$\alpha=\pi/6;\ \beta=\pi/3.$

7 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ 0{,}5(x^2-x), & 1\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$;

$\alpha=1{,}5;\ \beta=3.$

8 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x^4}{16}, & 0\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$;

$\alpha=-1;\ \beta=1.$

9 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1+\sin x}{2}, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$;

$\alpha=0;\ \beta=\pi.$

10 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{4}, & 1\le x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$;

$\alpha=0;\ \beta=2.$

11 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<2 \\ \dfrac{1}{4}(x-2)^2, & 2\le x\le 4 \\ 1, & x>4 \end{cases}$;

$\alpha=1;\ \beta=5.$

12 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<\pi/3 \\ sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right), & \dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{5\pi}{6} \\ 1, & x>5\pi/6 \end{cases}$;

$\alpha=\pi/2;\ \beta=\pi.$

13 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 2x-x^2, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$;

$\alpha=0{,}5;\ \beta=1{,}5.$

14 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sin 3x, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{6} \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$;

$\alpha=\dfrac{\pi}{12};\ \beta=\dfrac{\pi}{3}.$

15 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$;

$\alpha=0{,}5;\ \beta=1{,}5.$

16 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sin 2x, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{4} \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$;

$\alpha=0;\ \beta=\dfrac{\pi}{6}.$

17 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-\cos x, & 0\le x\le\pi/2 \\ 1, & x>\pi/2 \end{cases}$;

$\alpha=0{,}5;\ \beta=1{,}5.$

18 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<5 \\ 0.25(x-5)^2, & 5\le x\le 7 \\ 1, & x>7 \end{cases}$;

$\alpha=4;\ \beta=6.$

19 $F(x)=\begin{cases}0, & x<\ln 2\\ e^{x}-2, & \ln 2\le x\le \ln 3\\ 1, & x>\ln 3\end{cases}$;

$\alpha=\ln 2{,}5;\quad \beta=\ln 4.$

20 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{9}, & 0\le x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$;

$\alpha=1;\quad \beta=4.$

21 $F(x)=\begin{cases}0, & x<\pi/2\\ 1-\sin x, & \pi/2\le x\le \pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$;

$\alpha=0;\quad \beta=2\pi/3.$

22 $F(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ \left(x-2\right)^4, & 2\le x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$;

$\alpha=1;\quad \beta=2{,}5.$

23 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ e^{x}-1, & 0\le x\le \ln 2\\ 1, & x>\ln 2\end{cases}$;

$\alpha=\ln 1{,}5;\quad \beta=\ln 3.$

24 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{25}, & 0\le x\le 5\\ 1, & x>5\end{cases}$;

$\alpha=2;\quad \beta=6.$

25 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sqrt{2}\sin x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$;

$\alpha=-\dfrac{\pi}{6};\quad \beta=\dfrac{\pi}{6}.$

26 $F(x)=\begin{cases}0, & x<3\\ \dfrac{(x-3)^2}{36}, & 3\le x\le 9\\ 1, & x>9\end{cases}$;

$\alpha=2;\quad \beta=5.$

27 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ x^2-1, & 1\le x\le \sqrt{2}\\ 1, & x>\sqrt{2}\end{cases}$;

$\alpha=0{,}5;\quad \beta=1{,}1.$

28 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2^{x}-1, & 0\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$;

$\alpha=log_2 1{,}5;\quad \beta=1.$

29 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2\sin x, & 0\le x\le \pi/6\\ 1, & x>\pi/6\end{cases}$;

$\alpha=0;\quad \beta=\pi/12.$

30 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \dfrac{\left(x+1\right)^2}{49}, & -1\le x\le 6\\ 1, & x>6\end{cases}$;

$\alpha=0;\quad \beta=7.$

6.5.2 Неперервна випадкова величина *X* задана щільністю розподілу *f(x)*. Знайти сталу *C*, функцію розподілу *F(x)*, математичне сподівання *M(X)*, дисперсію *D(X)*, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ і ймовірність попадання випадкової величини *X* в заданий інтервал (α,β). Побудувати графіки функцій *f(x)* та *F(x)*.

1 $f(x)=\begin{cases} Cx \text{ ï ðè } x\in(0;\ 4) \\ 0 \text{ ï ðè } x\notin(0;\ 4) \end{cases};$
$\alpha=1;\ \ \beta=5.$

2 $f(x)=\begin{cases} C\left(4-x^2\right) \text{ ï ðè } x\in(1;\ 2) \\ 0 \text{ ï ðè } x\notin(1;\ 2) \end{cases};$
$\alpha=0,5;\ \ \beta=2.$

3 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{C}(x+2) & \text{при } x\in(-1;1) \\ 0 & \text{при } x\notin(-1;1) \end{cases};$
$\alpha=0;\ \ \beta=2.$

4 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{C} & \text{при } x\in(-1;0{,}5) \\ 0 & \text{при } x\notin(-1;0{,}5) \end{cases};$
$\alpha=-2;\ \ \beta=0.$

5 $f(x)=\begin{cases} Cx^2 \text{ ï ðè } x\in(-2;2) \\ 0 \text{ ï ðè } x\notin(-2;2) \end{cases};$
$\alpha=0;\ \ \beta=3.$

6 $f(x)=\begin{cases} C(2x+1) & \text{ï ðè } x\in(1;3) \\ 0 & \text{ï ðè } x\notin(1;3) \end{cases};$
$\alpha=0;\ \ \beta=2.$

7 $f(x)=\begin{cases} C(1-x^2) & \text{ï ðè } x\in(-1;1) \\ 0 & \text{ï ðè } x\notin(-1;1) \end{cases};$
$\alpha=0;\ \ \beta=2.$

8 $f(x)=\begin{cases} Cx \text{ ï ðè } x\in(1;3) \\ 0 \text{ ï ðè } x\notin(1;3) \end{cases};$
$\alpha=-1;\ \ \beta=2.$

9 $f(x)=\begin{cases} C \text{ ï ðè } x\in(1;4) \\ 0 \text{ ïðè } x\notin(1;4) \end{cases};$
$\alpha=3;\ \ \beta=5.$

10 $f(x)=\begin{cases} C\left(x^2+4x\right) \text{ ï ðè } x\in(-4;-2) \\ 0 \text{ ï ðè } x\notin(-4;-2) \end{cases};$
$\alpha=-1;\ \ \beta=2.$

11 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{C}(9-x^2) & \text{при } x\in(-3;3) \\ 0 & \text{при } x\notin(-3;3) \end{cases};$
$\alpha=0;\ \ \beta=3.$

12 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{C} & \text{при } x\in(2;4) \\ 0 & \text{при } x\notin(2;4) \end{cases};$
$\alpha=1;\ \ \beta=3.$

13 $f(x)=\begin{cases} C(2-x) & \text{ï ðè } x\in(-2;0) \\ 0 & \text{ïðè } x\notin(-2;0) \end{cases};$
$\alpha=-3;\ \ \beta=-1.$

14 $f(x)=\begin{cases} C\left(x^2-x^3\right) \text{ ï ðè } x\in(0;1) \\ 0 \text{ ï ðè } x\notin(0;1) \end{cases};$
$\alpha=0,5;\ \ \beta=2.$

15 $f(x)=\begin{cases} C(2-x) & \text{ïðè} \quad x\in(0;2) \\ 0 & \text{ïðè} \quad x\notin(0;2) \end{cases};$ $\alpha=0{,}5;\quad \beta=3.$

16 $f(x)=\begin{cases} Cx & \text{ïðè} \quad x\in(2;6) \\ 0 & \text{ïðè} \quad x\notin(2;6) \end{cases};$ $\alpha=1;\quad \beta=4.$

17 $f(x)=\begin{cases} C & \text{ïðè} \quad x\in(3;6) \\ 0 & \text{nðè} \quad x\notin(3;6) \end{cases};$ $\alpha=2;\quad \beta=4.$

18 $f(x)=\begin{cases} C(3x+1) & \text{ïðè} \quad x\in(0;1/3) \\ 0 & \text{ïðè} \quad x\notin(0;1/3) \end{cases};$ $\alpha=1/4;\quad \beta=2.$

19 $f(x)=\begin{cases} C(x-2) & \text{ïðè} \quad x\in(2;3) \\ 0 & \text{ïðè} \quad x\notin(2;3) \end{cases};$ $\alpha=0{,}5;\quad \beta=2{,}5.$

20 $f(x)=\begin{cases} Cx & \text{ïðè} \quad x\in(1;7) \\ 0 & \text{ïðè} \quad x\notin(1;7) \end{cases};$ $\alpha=3;\quad \beta=8.$

21 $f(x)=\begin{cases} C(x+1) & \text{ïðè} \quad x\in(0;2) \\ 0 & \text{ïðè} \quad x\notin(0;2) \end{cases};$ $\alpha=1;\quad \beta=3.$

22 $f(x)=\begin{cases} Cx^2 & \text{ïðè} \quad x\in(-3;3) \\ 0 & \text{ïðè} \quad x\notin(-3;3) \end{cases};$ $\alpha=1;\quad \beta=4.$

23 $f(x)=\begin{cases} C(x^2+1) & \text{ïðè} \quad x\in(0;2) \\ 0 & \text{ïðè} \quad x\notin(0;2) \end{cases};$ $\alpha=0{,}5;\quad \beta=2{,}5.$

24 $f(x)=\begin{cases} Cx & \text{ïðè} \quad x\in(2;3) \\ 0 & \text{ïðè} \quad x\notin(2;3) \end{cases};$ $\alpha=0;\quad \beta=2{,}5.$

25 $f(x)=\begin{cases} C(x+2) & \text{ïðè} \quad x\in(1;3) \\ 0 & \text{ïðè} \quad x\notin(1;3) \end{cases};$ $\alpha=2;\quad \beta=4.$

26 $f(x)=\begin{cases} C\left(x-x^2\right) & \text{ïðè} \quad x\in(0;1) \\ 0 & \text{ïðè} \quad x\notin(0;1) \end{cases};$ $\alpha=1/2;\quad \beta=2.$

27 $f(x)=\begin{cases} Cx^2 & \text{ïðè} \quad x\in(0;2) \\ 0 & \text{ïðè} \quad x\notin(0;2) \end{cases};$ $\alpha=0{,}5;\quad \beta=2{,}5.$

28 $f(x)=\begin{cases} C(3-x) & \text{ïðè} \quad x\in(0;3) \\ 0 & \text{ïðè} \quad x\notin(0;3) \end{cases};$ $\alpha=2;\quad \beta=4.$

29 $f(x)=\begin{cases} Cx & \text{ïðè} \quad x\in(0;5) \\ 0 & \text{nðè} \quad x\notin(0;5) \end{cases};$ $\alpha=4;\quad \beta=6.$

30 $f(x)=\begin{cases} C\left(4-x^2\right) & \text{ïðè} \quad x\in(-2;2) \\ 0 & \text{ïðè} \quad x\notin(-2;2) \end{cases};$ $\alpha=0;\quad \beta=3.$

Завдання № 6

1 Час проходження потягом перегону є випадковою величиною X, розподіленою за нормальним законом з $\mathrm{M}(X) = 16$ хв, $\sigma(X) = 2$ хв. Знайти ймовірність проходження перегону за час, більший за 18 хв.

2 Випадкова величина X розподілена за показниковим законом з $\mathrm{D}(X) = 1/9$. Знайти математичне сподівання $\mathrm{M}(X)$, функцію розподілу $\mathrm{F}(x)$ та ймовірність попадання в інтервал (3,6).

3 Помилка вимірювання ваги випадкової величини X розподілена за нормальним законом з $\mathrm{M}(X) = 0$ і середньою квадратичною помилкою $\sigma(X) = 10$ г. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде зроблено з помилкою, більшою по модулю за 20 г.

4 Час безвідмовної роботи приймача розподілений за нормальним законом. Середній час безвідмовної роботи становить 10 год, а середнє квадратичне відхилення – 5 год. Знайти ймовірність того, що приймач буде працювати без відмов більше 8 год.

5 Кількість вагонів, що прибувають на сортувальну станцію, є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Середня їх кількість становить 300 шт., а середнє квадратичне відхилення – 20 шт. Знайти ймовірність того, що на станцію прибуде більше 320 вагонів.

6 Час безвідмовної роботи приладу розподілений за нормальним законом. Середній час безвідмовної роботи становить 30 год, а середнє квадратичне відхилення – 10 год. Знайти ймовірність того, що прилад буде працювати безвідмовно більше 40 год.

7 Час безвідмовної роботи передавача має показниковий закон розподілу. Середній час його безвідмовної роботи становить 15 год. Знайти ймовірність того, що передавач працюватиме безвідмовно не менше 10 і не більше 20 год.

8 Час очікування у черзі білетної каси є випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом із середньою тривалістю очікування 15 хв. Знайти ймовірність того, що час очікування буде не меншим за 10 хв і не більшим за 20 хв.

9 Помилка у розмірах деталі при її виготовленні розподілена нормально з a = 100 мм і σ = 5 мм. Граничний допуск складає ±5 мм. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь буде забракованою, а також середній процент браку.

10 Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з $M(X) = 20$ і $D(X) = 4$. Записати щільність розподілу та знайти ймовірність того, що відхилення X від математичного сподівання буде більшим за 1,5.

11 Час очікування пасажиром електропоїзда має рівномірний розподіл на відрізку [3; 8]. Знайти ймовірність того, що тривалість очікування буде меншою за 4.

12 Діаметр деталі вимірюється без систематичних помилок. Випадкова помилка вимірювання X розподілена за нормальним законом з σ = 2 мм. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде виконане з помилкою, яка не перевищує 3 мм.

13 Тривалість ремонту блока апаратури на АТС має нормальний розподіл з середнім значенням 2 год та середнім квадратичним відхиленням 45 хв. Знайти ймовірність того, що тривалість ремонту буде меншою за 1 год 30 хв.

14 Випадкова величина X розподілена рівномірно на відрізку [0; в] з середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X) = 2$. Знайти довжину цього відрізка та математичне сподівання $M(X)$.

15 Час очікування у черзі в білетну касу має показниковий закон розподілу з середньою тривалістю очікування 10 хв. Знайти ймовірність того, що тривалість очікування буде: а) більше 5 хв; б) від 5 до 15 хв.

16 Час очікування пасажиром електропоїзда має рівномірний розподіл на відрізку [0; 20]. Знайти ймовірність того, що тривалість очікування буде меншою за 15.

17 Випадкова величина X розподілена рівномірно на відрізку [а; в] з математичним сподіванням $M(X) = 5$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X) = 2\sqrt{7}$. Знайти цей відрізок та ймовірність того, що $X < 4$.

18 Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з $M(X) = 16$ і $D(X) = 6$. Записати функцію розподілу випадкової величини X та знайти ймовірність того, що відхилення X від математичного сподівання буде не більшим за 8.

19 Час очікування пасажиром автобуса має рівномірний розподіл на відрізку [0; 15]. Знайти ймовірність того, що тривалість очікування буде меншою за 10.

20 Час очікування пасажиром маршрутного таксі має рівномірний розподіл на відрізку [0; 25]. Знайти ймовірність того, що тривалість очікування буде не більшою за 15.

21 Випадкова величина X розподілена рівномірно на відрізку [а; 10] з середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X) = 5$. Знайти довжину цього відрізка та математичне сподівання $M(X)$.

22 Випадкова величина X розподілена рівномірно на відрізку [а; в] з математичним сподіванням $M(X) = -1$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X) = 3$. Знайти цей відрізок та ймовірність того, що $-3 < X < 1$.

23 Довжина деталі вимірюється без систематичних помилок. Випадкова помилка вимірювання X розподілена за нормальним законом з $\sigma(X) = 3$ мм. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде виконане з помилкою, яка не перевищує 5 мм.

24 Час безвідмовної роботи реле розподілений за показниковим законом. Середній час безвідмовної роботи дорівнює 2000 год. Знайти ймовірність того, що реле буде безвідмовно працювати не більше 1800 год.

25 Тривалість ремонту вузла приладу має нормальний розподіл з середнім значенням 1 год та середнім квадратичним відхиленням 30 хв. Знайти ймовірність того, що тривалість ремонту буде більшою за 1 год 15 хв.

26 Випадкова величина X розподілена рівномірно на відрізку [–1; в] з математичним сподіванням $M(X) = 3$. Знайти довжину цього відрізка та середнє квадратичне відхилення σ.

27 Кількість вагонів, що прибувають на сортувальну станцію, є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Середня їх кількість становить 180 шт., а середнє квадратичне відхилення – 15 шт. Знайти ймовірність того, що на станцію прибуде менше 170 вагонів.

28 Час очікування пасажиром трамвая у “годину пік” має рівномірний розподіл на відрізку [0; 20]. Знайти ймовірність того, що тривалість очікування буде не більшою за 10.

29 Час очікування у черзі на обслуговування має показниковий закон розподілу з середньою тривалістю очікування 8 хв. Знайти ймовірність того, що тривалість очікування буде: а) більше 6 хв; б) від 7 до 9 хв.

30 Помилка вимірювання довжини випадкової величини X розподілена за нормальним законом з $M(X) = 0$ і $\sigma(X) = 5$ мм. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде зроблено з помилкою, меншою за модулем за 7 мм.

Завдання № 7

Розподіл ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини задано в таблиці.

Знайти:

1) безумовні закони розподілу складових;

2) умовний закон розподілу складової x за умови, що складова $y = y_2$;

3) умовний закон розподілу складової y за умови, що складова $x = x_1$;

4) коефіцієнт кореляції величин x та y.

1

Y \ ***X***	***2***	***3***	***4***
–2	0,21	0,13	0,07
1	0,05	0,04	0,11
4	0,19	0,06	0,14

2

Y \ ***X***	***1***	***3***	***5***
–4	0,17	0,13	0,10
–2	0,08	0,15	0,12
0	0,10	0,12	0,08

3

Y \ ***X***	***5***	***7***	***9***
1	0,12	0,15	0,16
4	0,03	0,09	0,13
7	0,10	0,06	0,11

4

Y \ ***X***	***–5***	***–3***	***–1***
1	0,18	0,02	0,09
4	0,11	0,17	0,13
7	0,09	0,11	0,10

5

Y \ ***X***	***8***	***10***	***12***
1	0,15	0,12	0,08
3	0,05	0,18	0,02
5	0,09	0,12	0,19

6

Y \ ***X***	***–3***	***–1***	***1***
2	0,09	0,13	0,07
4	0,11	0,06	0,14
6	0,07	0,14	0,19

7

Y \ ***X***	***–8***	***–3***	***2***
4	0,11	0,16	0,04
7	0,08	0,11	0,13
10	0,17	0,08	0,12

8

Y \ ***X***	***5***	***10***	***15***
3	0,09	0,08	0,13
5	0,11	0,15	0,04
7	0,19	0,11	0,10

9

Y \ X	**7**	**8**	**9**
–3	0,07	0,12	0,13
–1	0,08	0,13	0,07
1	0,13	0,18	0,09

10

Y \ X	**10**	**13**	**16**
–5	0,08	0,12	0,07
–1	0,13	0,11	0,08
3	0,11	0,17	0,13

11

Y \ X	**4**	**8**	**12**
6	0,07	0,12	0,09
10	0,14	0,09	0,11
14	0,14	0,12	0,12

12

Y \ X	**3**	**6**	**13**
–7	0,05	0,13	0,12
–4	0,18	0,06	0,11
–1	0,17	0,08	0,10

13

Y \ X	**6**	**11**	**16**
–7	0,14	0,04	0,12
–5	0,11	0,19	0,08
–3	0,13	0,09	0,10

14

Y \ X	**–6**	**–3**	**0**
5	0,06	0,12	0,09
8	0,13	0,12	0,11
11	0,07	0,18	0,12

15

Y \ X	**5**	**12**	**19**
1	0,16	0,05	0,04
2	0,12	0,13	0,08
3	0,14	0,06	0,22

16

Y \ X	**2**	**3**	**4**
–2	0,21	0,05	0,19
1	0,13	0,04	0,06
4	0,07	0,11	0,14

17

Y \ X	**1**	**3**	**5**
–4	0,17	0,03	0,10
–2	0,13	0,15	0,12
0	0,10	0,12	0,08

18

Y \ X	**5**	**7**	**9**
1	0,15	0,09	0,06
4	0,16	0,13	0,11
7	0,12	0,08	0,10

19

Y \ X	**–5**	**–3**	**–1**
1	0,02	0,17	0,11
4	0,09	0,13	0,10
7	0,18	0,11	0,09

20

Y \ X	**–3**	**–1**	**1**
–2	0,13	0,06	0,14
–4	0,07	0,14	0,19
–6	0,09	0,11	0,07

21

Y \ ***X***	***–3***	***–1***	***1***
2	0,18	0,12	0,12
4	0,08	0,02	0,19
6	0,15	0,05	0,09

22

Y \ ***X***	***–8***	***–3***	***2***
4	0,16	0,11	0,08
7	0,04	0,13	0,12
10	0,11	0,08	0,17

23

Y \ ***X***	***5***	***10***	***15***
3	0,08	0,13	0,11
5	0,13	0,04	0,10
7	0,09	0,11	0,19

24

Y \ ***X***	***7***	***8***	***9***
–3	0,12	0,13	0,18
–1	0,13	0,07	0,09
1	0,07	0,08	0,13

25

Y \ ***X***	***10***	***13***	***16***
–5	0,12	0,11	0,17
–1	0,07	0,08	0,13
3	0,08	0,13	0,11

26

Y \ ***X***	***4***	***8***	***12***
6	0,12	0,09	0,14
10	0,09	0,11	0,12
14	0,07	0,14	0,12

27

Y \ ***X***	***3***	***8***	***13***
–7	0,13	0,06	0,08
–4	0,12	0,11	0,10
–1	0,05	0,18	0,17

28

Y \ ***X***	***6***	***11***	***16***
–7	0,04	0,09	0,09
–5	0,12	0,08	0,20
–3	0,14	0,11	0,13

29

Y \ ***X***	***–6***	***–3***	***0***
5	0,12	0,12	0,18
6	0,09	0,11	0,12
11	0,06	0,13	0,07

30

Y \ ***X***	***5***	***12***	***19***
1	0,04	0,08	0,22
2	0,16	0,12	0,14
3	0,05	0,13	0,06

Додаток А

Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,242	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1465	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,054	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

Продовження. додатка А

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0,0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018

3,3	0017	0017	0016	0015	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток Б

Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
0,00	0,0000	0,18	0,0714	0,36	0,1406	0,54	0,2054	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,19	0,0753	0,37	0,1443	0,55	0,2088	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,20	0,0793	0,38	0,1480	0,56	0,2123	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,21	0,0832	0,39	0,1517	0,57	0,2157	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,22	0,0871	0,40	0,1554	0,58	0,2190	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,23	0,0910	0,41	0,1591	0,59	0,2224	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,24	0,0948	0,42	0,1628	0,60	0,2257	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,25	0,0987	0,43	0,1664	0,61	0,2291	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,26	0,1026	0,44	0,1700	0,62	0,2324	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,27	0,1064	0,45	0,1736	0,63	0,2357	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,28	0,1103	0,46	0,1772	0,64	0,2389	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,29	0,1141	0,47	0,1808	0,65	0,2422	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,30	0,1179	0,48	0,1844	0,66	0,2454	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,31	0,1217	0,49	0,1879	0,67	0,2486	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,32	0,1255	0,50	0,1915	0,68	0,2517	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,33	0,1293	0,51	0,1950	0,69	0,2549	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,34	0,1331	0,52	0,1985	0,70	0,2580	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,35	0,1368	0,53	0,2019	0,71	0,2611	0,89	0,3133
0,90	0,3159	1,24	0,3925	1,58	0,4429	1,92	0,4726	2,50	0,4938
0,91	0,3186	1,25	0,3944	1,59	0,4441	1,93	0,4732	2,52	0,4941
0,92	0,3212	1,26	0,3962	1,60	0,4452	1,94	0,4738	2,54	0,4945
0,93	0,3238	1,27	0,3980	1,61	0,4463	1,95	0,4744	2,56	0,4948
0,94	0,3264	1,28	0,3997	1,62	0,4474	1,96	0,4750	2,58	0,4951
0,95	0,3289	1,29	0,4015	1,63	0,4484	1,97	0,4756	2,60	0,4953
0,96	0,3315	1,30	0,4032	1,64	0,4495	1,98	0,4761	2,62	0,4956
0,97	0,3340	1,31	0,4049	1,65	0,4505	1,99	0,4767	2,64	0,4959
0,98	0,3365	1,32	0,4066	1,66	0,4515	2,00	0,4772	2,66	0,4961
0,99	0,3389	1,33	0,4082	1,67	0,4525	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,00	0,3413	1,34	0,4099	1,68	0,4535	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,01	0,3438	1,35	0,4115	1,69	0,4545	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,02	0,3461	1,36	0,4131	1,70	0,4554	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,03	0,3485	1,37	0,4147	1,71	0,4564	2,10	0,4821	2,76	0,4971

Продовження додатка Б

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1,04	0,3508	1,38	0,4162	1,72	0,4573	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,05	0,3531	1,39	0,4177	1,73	0,4582	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,06	0,3554	1,40	0,4192	1,74	0,4591	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,07	0,3577	1,41	0,4207	1,75	0,4599	2,18	0,4854	2,84	0,4977

1,08	0,3599	1,42	0,4222	1,76	0,4608	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,09	0,3621	1,43	0,4236	1,77	0,4616	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,10	0,3643	1,44	0,4251	1,78	0,4625	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,11	0,3665	1,45	0,4265	1,79	0,4633	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,12	0,3686	1,46	0,4279	1,80	0,4641	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,13	0,3708	1,47	0,4292	1,81	0,4649	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,14	0,3729	1,48	0,4306	1,82	0,4656	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,15	0,3749	1,49	0,4319	1,83	0,4664	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,16	0,3770	1,50	0,4332	1,84	0,4671	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,17	0,3790	1,51	0,4345	1,85	0,4678	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,18	0,3810	1,52	0,4357	1,86	0,4686	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,19	0,3830	1,53	0,4370	1,87	0,4693	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,20	0,3849	1,54	0,4382	1,88	0,4699	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,21	0,3869	1,55	0,4394	1,89	0,4706	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,22	0,3883	1,56	0,4406	1,90	0,4713	2,48	0,4934	5,00	0,499997
1,23	0,3907	1,57	0,4418	1,91	0,4719				

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

і завдання для самостійної роботи
з дисципліни

„ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА”

Відповідальний за випуск Волохова Н.І.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 11.06.08 р.

Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 5,25. Обл.-вид.арк. 5,5.

Замовлення № Тираж 300. Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК № 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7