DOI: https://doi.org/10.33216/2222-3428-2026-30-9
УДК 629.462.2[:624.04:539.3]

Каграманян А. О., Аракелян Т. А.

АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС ПРОСТОРОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ НЕСУЧОЇ СИСТЕМИ ВАГОНА-ЦИСТЕРНИ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Розглянуто задачу аналітичного опису просторового навантаження несучої системи вагона-цистерни, яка зазнає одночасної дії вертикальних, поздовжніх і поперечних сил та внутрішнього тиску вантажу. Показано, що чинні нормативні методики та значна частина публікацій спираються на плоскі або балочні розрахункові схеми, які не відображають просторового характеру деформування тонкостінної оболонки котла та її взаємодії з рамою, що призводить до недооцінки місцевих напружень у вузлах з'єднання котла з рамою. Проаналізовано сучасні вітчизняні та закордонні публікації за темою дослідження й виявлено відсутність єдиного математичного апарату, який поєднував би точність аналітичних розв'язків теорії пружності з гнучкістю скінченноелементної апроксимації складних геометричних форм. Метою роботи є розробка уточненої математичної моделі та методології аналітико-чисельного розрахунку просторового навантаження несучої системи вагона-цистерни. Запропоновано класифікацію просторових навантажень за напрямком і природою походження; наведено рівняння рівноваги, співвідношення Коші, закон Гука та критерій Мізеса для просторового пружного тіла, аналітичні залежності для напружень у циліндричній оболонці котла; побудовано скінченноелементну модель на основі методу переміщень. Виконано числове дослідження для вагона-цистерни – за п'ятьма режимами експлуатації. Розбіжність між аналітичним розрахунком оболонки та скінченноелементним розв'язком не перевищує 5–7 % у зонах, віддалених від концентраторів напружень, а похибка моделі відносно натурних тензометричних вимірювань для експлуатаційних режимів становить 2,1–4,7 %. Серед зон котла й рами найбільші еквівалентні напруження виникають у зоні спряження котла з опорними шпангоутами та хребтовою балкою, а за удару при зчепленні – у п'яті автозчепу ($n_s = 1,16$); запропоноване локальне підсилення хребтової балки у зоні шкворневого вузла знижує рівень напружень на 15 %. Результати можуть бути використані для експрес-оцінки міцності на етапі ескізного проєктування та зниження тари вагонів-цистерн.

Ключові слова: *вагон-цистерна, несуча система, просторове навантаження, теорія пружності, метод скінченних елементів, напружено-деформований стан, концентрація напружень*

Актуальність дослідження. Забезпечення надійності та безпеки експлуатації залізничного рухомого складу є одним із пріоритетних завдань транспортної галузі. Особливе місце у структурі вантажних перевезень посідають вагони-цистерни, які транспортують небезпечні, рідкі та газоподібні речовини, зокрема під тиском [1, 2]. Під час руху несуча система такого вагона зазнає складного комплексу статичних і динамічних навантажень, а просторовий характер силових факторів зумовлює появу концентрацій напружень у критичних зонах конструкції. Розвиток швидкісного руху та збільшення вантажопідйомності вимагають більш точних підходів до оцінки напружено-деформованого стану (НДС) вагонів. Класичні положення теорії пружності дозволяють отримати фундаментальні закономірності розподілу внутрішніх зусиль, проте складна геометрія котла та рами унеможливлює знаходження точних аналітичних розв'язків для всієї системи. Тому виникає об'єктивна необхідність поєднання аналітичних методів із чисельними процедурами, зокрема зі скінченноелементною апроксимацією, яка слугує ефективним інструментом дискретизації континууму несучої конструкції. Інтеграція аналітичного опису та методу скінченних елементів (МСЕ) дає змогу створювати гібридні математичні моделі високої точності й детально досліджувати просторову роботу елементів вагона за випадкових експлуатаційних впливів. Розрахунок на міцність з урахуванням тривимірного напруженого стану є основою для подовження терміну служби вагонів, а зниження металоємності за збереження експлуатаційної надійності становить важливу економічну передумову таких досліджень. Результати досліджень можуть бути використані заводами-виробниками для модернізації існуючих серій вагонів і створення нормативної бази проєктування вагонів нового покоління.

Постановка проблеми. Існуючі методи оцінки міцності несучих систем вагонів-цистерн часто базуються на одновимірних або двовимірних наближеннях, які нівелюють просторовий характер розподілу реальних сил. Проблема полягає у відсутності єдиного узгодженого математичного апарату, який поєднував би точність аналітичних розв'язків теорії пружності з гнучкістю скінченноелементної апроксимації складних геометричних форм. Складне просторове навантаження, що виникає внаслідок коливань рідкого вантажу та динамічної взаємодії вагона з колією, створює зони високої концентрації напружень, які важко виявити стандартними методами. Недостатня вивченість просторової взаємодії циліндричної оболонки котла з елементами рами призводить до передчасного втомного руйнування металоконструкцій. Потребує розв'язання

задача точного математичного опису граничних умов у вузлах кріплення та опорних зонах цистерни з урахуванням реальних зазорів і контактного тертя. Чисельні моделі без належного аналітичного базису мають високу чутливість до форми та розмірів скінченних елементів, що ставить під сумнів достовірність результатів у критичних точках. Виникає суперечність між необхідністю зниження тари вагона та жорсткими вимогами до його просторової міцності й стійкості, яку ускладнює випадковий характер зовнішніх впливів, що діють одночасно в поздовжньому, вертикальному та поперечному напрямках. Отже, науково-практична задача полягає в розробці інструментарію для точного проєктування та оцінки елементів вагонів-цистерн на основі синтезу класичної механіки та обчислювальної математики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Експериментально-розрахункове визначення НДС кузова вагона-цистерни із застосуванням тензометрії та скінченноелементних розрахунків виконано в роботах [1, 2]; їхні результати підтвердили можливість використання МСЕ для визначення просторового розподілу напружень і локалізації зон їх концентрації. Навантаженість несучої конструкції вагона-цистерни з пружно-фрикційною хребтовою балкою досліджено в [3], а в працях [4, 5] показано, що застосування пружних елементів і податливих зв'язків між котлом і рамою знижує динамічні навантаження й напруження. Тиск і напруження в нерухомих циліндричних резервуарах, заповнених рідиною, за гідростатичної та сейсмічної дії із застосуванням МСЕ та підходу «рідина – конструкція» проаналізовано в [6], а власні частоти та структурне випромінювання шуму цистернами – у [7]. Модальний і динамічний аналіз вантажного вагона методом скінченних елементів наведено в [8]; напружений стан контейнерів-цистерн LNG за залізничних ударів і варіанти зменшення напружень у каркасі розглянуто в [9]. Порівняльну оцінку втомної міцності рами вантажного вагона за нормами DVS 1612 та ERRI B 12/RP 60 виконано в [10], методи моделювання структурної динаміки залізничних цистерн для рідких вантажів запропоновано в [11], а оцінку вузла з'єднання днища з циліндричною обичайкою цистерни під тиском за вимогами ASME VIII Div. 2 із поєднанням аналітичної теорії оболонок і МСЕ – у [12]. Водночас більшість праць обмежується плоскими схемами, балочними моделями, що не описують НДС тонкостінної оболонки котла, або ізольованим аналізом компонентів без урахування їхньої просторової взаємодії. Практично відсутні підходи до інтеграції аналітичних розв'язків тривимірної теорії пружності зі скінченноелементною дискретизацією для залізничних цистерн: робота [12] поєднує аналітичне й чисельне розв'язання, проте лише для осесиметричного вузла «днище – обичайка» під внутрішнім тиском, без просторового навантаження від рами. Це й визначає напрям даної роботи.

Мета дослідження – розробка уточненої математичної моделі та методології аналітико-чисельного розрахунку просторового навантаження несучої системи вагона-цистерни для підвищення точності оцінки її напружено-деформованого стану, оптимізації геометричних параметрів конструкції та зниження металоємності за гарантованого рівня надійності. **Об'єкт дослідження** – процес просторового деформування та сприйняття експлуатаційних навантажень несучою системою вагона-цистерни. **Предмет дослідження** – аналітичні залежності теорії пружності, методи скінченноелементної апроксимації, алгоритми їх інтеграції та показники НДС металоконструкцій вагона.

Задачі дослідження. Для досягнення мети поставлено такі задачі:

– проаналізувати існуючі підходи до розрахунку несучих систем вагонів-цистерн і класифікувати просторові навантаження, що діють на них в експлуатації;

– розробити математичну модель тривимірного НДС котла вагона-цистерни на основі фундаментальних рівнянь теорії пружності;

– сформулювати коректні граничні та контактні умови для моделювання взаємодії котла з рамою та рами з візками;

– побудувати дискретну скінченноелементну модель несучої системи з оптимізованою сіткою розбиття в зонах концентрації напружень;

– розробити алгоритм поєднання аналітичних розв'язків теорії пружності з матричними процедурами скінченноелементної апроксимації;

– виконати чисельний аналіз і верифікацію результатів порівнянням аналітичних розрахунків з даними комп'ютерного моделювання та натурних випробувань;

– сформулювати науково обґрунтовані рекомендації щодо вдосконалення конструктивних елементів несучої системи.

Виклад основного матеріалу. Дослідження ґрунтується на поєднанні теоретичних і чисельних методів: класичної теорії пружності (диференціальні рівняння рівноваги, співвідношення Коші та закон Гука для просторового тіла), методу скінченних елементів у формі методу переміщень з поліноміальними функціями форми та ізопараметричним поданням геометрії елемента [13], методу множників Лагранжа та штрафних функцій для контактної взаємодії котла з рамою, а також розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності в середовищі CAE-системи. Послідовність викладу відповідає поставленим задачам: спочатку класифікуються навантаження, далі подано математичну постановку просторової задачі теорії пружності для котла та граничні й контактні умови; на цій основі будується скінченноелементна модель і формулюється алгоритм поєднання аналітичних та матричних процедур; завершують виклад числовий аналіз із верифікацією та рекомендації щодо вдосконалення конструкції.

Класифікація просторових навантажень

Для побудови адекватної математичної моделі проведено класифікацію навантажень за просторовим характером, напрямком і природою походження. У просторовій системі координат $Oxyz$ (x – поздовжня вісь

вагона, y – поперечна, z – вертикальна) виділено чотири групи силових факторів: вертикальні F_z, поздовжні F_x, поперечні F_y та тиск вантажу на стінки котла. Вертикальні навантаження F_z включають власну вагу конструкції, вагу вантажу та динамічні вертикальні сили; їх розрахункове значення становить:

$$P_z = \left(m_{gr} + m_c\right) g\, k_v \tag{1}$$

де P_z – розрахункове вертикальне навантаження, Н; m_{gr} – маса вантажу, кг; m_c – маса конструкції (тара вагона), кг; g = 9,81 м/с² – прискорення вільного падіння; k_v = 1,25…1,35 – динамічний коефіцієнт вертикального навантаження [14]. Поздовжні навантаження F_x формуються силами тяги, гальмування та ударними імпульсами під час зчеплення, а поперечні F_y зумовлені відцентровими силами, вітровим тиском і боковою качкою. Їхні розрахункові значення визначаються за формулами:

$$P_x = m_{br}\, a_x, \qquad P_y = m_{br}\, a_y + q_w A_{lat} \tag{2}$$

де P_x, P_y – розрахункові поздовжня та поперечна сили, Н; m_{br} – маса брутто вагона, кг; a_x – поздовжнє прискорення, м/с² (за гальмування $a_x \le$ 3,0 м/с², за удару при зчепленні $a_x \le$ 5,0 м/с²); $a_y = v^2/R_{\text{кр}}$ – доцентрове прискорення в кривій радіуса $R_{\text{кр}}$, м/с², де v – швидкість руху, м/с; q_w – вітровий тиск (0,6–1,2 кПа); A_{lat} – бокова площа вагона, м²; добуток $q_w A_{lat}$ – рівнодійна вітрового навантаження. Четверта група силових факторів – тиск вантажу на стінки котла, який має гідростатичну й динамічну складові:

$$p(z) = \rho\, g\, (H - z) + p_{dyn} \tag{3}$$

де ρ – густина вантажу, кг/м³; H – рівень наповнення (висота стовпа рідини від нижньої твірної котла), м; z – вертикальна координата точки стінки, що відлічується від нижньої твірної котла, м; p_{dyn} – динамічна складова тиску за хитання рідини, Па, яку оцінюють за теорією коливань рідини в резервуарах [15]. Додатково враховується внутрішній робочий (надлишковий) тиск p_{in}, що створює розтягувальні напруження в оболонці котла; сумарний тиск на стінку становить $p_\Sigma = p_{in} + p(z)$. Сили P_z, P_x, P_y та тиск p_Σ є вихідними даними для математичної постановки просторової задачі, яка розглядається далі.

Формульний опис на основі теорії пружності

Несуча система розглядається як просторове пружне тіло об'єму V, обмежене поверхнею S. Диференціальні рівняння рівноваги в тривимірному просторі для будь-якої точки конструкції мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

де $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальні напруження, МПа; $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ – дотичні напруження, МПа (за законом парності дотичних напружень $\tau_{ij} = \tau_{ji}$); X, Y, Z – проєкції об'ємних сил (власної ваги та сил інерції) на осі координат, Н/м³. Зв'язок між деформаціями та переміщеннями задається співвідношеннями Коші, а між напруженнями та деформаціями для ізотропного матеріалу – законом Гука:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{5}$$

$$\sigma_{ij} = 2G\, \varepsilon_{ij} + \lambda\, \delta_{ij}\, \varepsilon_{kk}, \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{6}$$

де ε_{ij} – компоненти тензора деформацій; u_i – компоненти вектора переміщень (u, v, w) вздовж осей x_i, а індекси i, j набувають значень x, y, z; σ_{ij} – компоненти тензора напружень (за $i = j$ вони збігаються з $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, а за $i \ne j$ – з дотичними напруженнями τ_{xy} тощо); δ_{ij} – символ Кронекера; $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ – об'ємна деформація; G і λ – константи Ламе; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона (для сталі 09Г2С E = 2,06·10⁵ МПа, ν = 0,28). Рівняння сумісності Сен-Венана за формулювання в переміщеннях виконуються автоматично. Для оцінки міцності використано еквівалентне напруження за критерієм Мізеса та умову міцності:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\right] + 3\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)} \tag{7}$$

$$\sigma_{eq} \le [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n_s} \tag{8}$$

де σ_{eq} – еквівалентне напруження за Мізесом, МПа; $[\sigma]$ – допустиме напруження, МПа; $\sigma_т$ – границя текучості матеріалу (для сталі 09Г2С $\sigma_т$ = 345 МПа); n_s – коефіцієнт запасу міцності. У роботі прийнято $n_s \geq 1{,}5$ – на рівні підходу $S_a = S_y/1{,}5$ за ASME VIII Div. 2, який використано в [12]; тоді $[\sigma]$ = 345/1,5 = 230 МПа. Для гладкої частини оболонки котла застосовано безмоментну (мембранну) теорію тонких оболонок, що є окремим випадком задачі (4)–(6) за умови $s \ll R_к$. Для циліндричної оболонки радіусом $R_к$ і товщиною стінки s під дією внутрішнього тиску p_{in} колові та поздовжні напруження становлять:

$$\sigma_\theta = \frac{p_{in} R_к}{s}, \quad \sigma_x = \frac{p_{in} R_к}{2s} \tag{9}$$

де σ_θ – колові (кільцеві) напруження, МПа; σ_x – поздовжні напруження вздовж осі котла, МПа; $R_к$ – радіус котла, мм; s – товщина стінки, мм. Для котла вагона-цистерни – $s/R_к$ = 8/1500 ≈ 0,0053, тобто умова тонкостінності виконується. Формули (9) справедливі на відстані, що перевищує характерну довжину крайового ефекту $\sqrt{R_к s} \approx 110$ мм [12], від днищ, опорних шпангоутів і зварних вузлів; саме в цих зонах зосереджено концентрації напружень, які визначаються лише чисельно. Рівняння (4)–(8) утворюють замкнену постановку просторової задачі, проте її аналітичний розв'язок для всієї несучої системи з нерегулярною геометрією неможливий, тому далі застосовується скінченноелементна апроксимація.

Граничні та контактні умови

Для однозначності розв'язання системи (4)–(6) на поверхні $S = S_u \cup S_\sigma$ задаються граничні умови: кінематичні – на частині S_u (зони опирання на візки) та силові – на частині S_σ (навантаження від тиску вантажу та зовнішніх сил (1)–(3)):

$$u_i = \bar{u}_i \text{ на } S_u, \qquad \sigma_{ij}\, n_j = \bar{t}_i \text{ на } S_\sigma \tag{10}$$

де $\bar{u}_i$ – задані переміщення; n_j – компоненти одиничної нормалі до поверхні; $\bar{t}_i$ – компоненти заданого поверхневого навантаження, МПа; зокрема на змоченій поверхні котла $\bar{t}_i = -p_\Sigma n_i$. Взаємодія котла з опорними шпангоутами та рамою, а також рами з візками моделюється односторонньою контактною задачею з урахуванням початкових зазорів:

$$g_n \geq 0, \qquad p_n \geq 0, \qquad p_n\, g_n = 0 \tag{11}$$

де g_n – нормальний зазор між контактними поверхнями (з урахуванням початкового конструктивного зазору), мм; p_n – нормальний контактний тиск, МПа. Умови (11) означають, що проникнення поверхонь неможливе ($g_n \geq 0$), контактний тиск не може бути розтягувальним ($p_n \geq 0$), а тиск виникає лише за замкненого зазору ($p_n g_n = 0$). Для їх виконання застосовано методи штрафних функцій і множників Лагранжа:

$$p_n = \varepsilon_n \langle -g_n \rangle, \qquad \langle a \rangle = \frac{a + |a|}{2} \tag{12}$$

де ε_n – штрафний коефіцієнт (нормальна жорсткість контакту), МПа/мм; $\langle a \rangle$ – дужки Маколея; у методі множників Лагранжа контактний тиск $p_n = \lambda_n$ розглядається як додаткова невідома. Тертя в контакті описується законом Кулона:

$$|\tau_t| \leq \mu\, p_n \tag{13}$$

де τ_t – дотичне контактне напруження, МПа; μ – коефіцієнт тертя.

Скінченноелементна апроксимація

Для числового розв'язання континуум несучої системи дискретизується на скінченні елементи. Поле переміщень усередині елемента апроксимується через вузлові переміщення $\{q\}$ та матрицю функцій форми $[N]$, а деформації визначаються матрицею $[B] = [L][N]$:

$$\{u\} = [N]\{q\}, \qquad \{\varepsilon\} = [B]\{q\} \tag{14}$$

де $\{u\} = \{u, v, w\}^T$ – вектор переміщень у точці елемента; $\{q\}$ – вектор вузлових переміщень елемента; $[N]$ – матриця функцій форми; $\{\varepsilon\}$ – вектор деформацій (шість компонент ε_{ij}); $[L]$ – матриця диференціальних операторів, що відповідає співвідношенням Коші (5); $[B]$ – матриця зв'язку деформацій із вузловими переміщеннями. Матриця жорсткості окремого скінченного елемента об'єму V_e та глобальна система рівнянь рівноваги після ансамблювання мають вигляд:

$$[k_e] = \int_{V_e} [B]^T [D][B]\, dV_e \tag{15}$$

$$[K]\{Q\} = \{F\}, \qquad [K] = \sum_e [k_e] \tag{16}$$

де $[D]$ – матриця пружних сталих, що зв'язує вектори напружень і деформацій, $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$, і визначається константами E та ν згідно з (6); $[k_e]$ – матриця жорсткості елемента; $[K]$ – глобальна матриця жорсткості (підсумовування виконується за всіма елементами з урахуванням нумерації степенів свободи); $\{Q\}$ – вектор вузлових переміщень усієї моделі; $\{F\}$ – вектор глобальних просторових навантажень, який формується з сил (1)–(3) та умов (10)–(13):

$$\{F\} = \sum_e \left(\int_{V_e} [N]^T \{X\}\, dV + \int_{S_e} [N]^T \{\bar{t}\}\, dS \right) + \{F_c\} \tag{17}$$

де $\{X\}$ – вектор об'ємних сил (власна вага та сили інерції); $\{\bar{t}\}$ – вектор поверхневих навантажень, зокрема тиску p_Σ; S_e – частина поверхні елемента, на якій задано навантаження; $\{F_c\}$ – вектор зосереджених і контактних сил. Після розв'язання системи (16) напруження в елементах визначаються за формулою:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{q\} \tag{18}$$

а еквівалентні напруження – за (7).

Алгоритм аналітико-чисельного розрахунку

Поєднання аналітичних і чисельних процедур реалізується в такій послідовності: 1) за (1)–(3) формуються розрахункові навантаження для кожного режиму експлуатації; 2) за (9) визначається аналітичний рівень напружень у гладкій частині оболонки котла, який слугує еталоном для зон, віддалених від концентраторів; 3) будується скінченноелементна модель з граничними та контактними умовами (10)–(13), для якої за (14)–(18) визначаються переміщення й напруження; 4) за (7), (8) обчислюються σ_{eq} та n_s, а в зонах концентрації сітка згущується до стабілізації результату; 5) результати порівнюються з аналітичним розв'язком (у віддалених зонах) і з даними натурної тензометрії за відносною похибкою (19); 6) за результатами параметричного аналізу (зокрема, за товщиною стінки котла) формулюються рекомендації щодо вдосконалення конструкції.

Числове дослідження та обговорення результатів

Розрахунки виконано для нафтобензинової цистерни – (навантаження від осі 23,5 тс, тобто ≈ 230 кН; база вагона 7,8 м; довжина 12,0 м; внутрішній діаметр котла 3,0 м; товщина стінки 8 мм; сталь 09Г2С із границею текучості $\sigma_т$ = 345 МПа). Скінченноелементна модель містить 142 500 вузлів і 284 000 елементів типу C3D10M. Розглянуто п'ять режимів експлуатації: нормальний рух (дія P_z); екстрене гальмування ($P_z + P_x$); проходження кривої радіуса $R_{кр}$ = 350 м ($P_z + P_y$); комбіноване навантаження ($P_z + P_x + P_y$); удар при зчепленні ($P_z + P_x$ за ударного значення a_x). Розрахункові сили та результати МСЕ наведено в табл. 1.

Таблиця 1 - Параметри навантажень та результати МСЕ за режимами

Режим	P_z, кН	P_x, кН	P_y, кН	$\sigma_{eq,max}$, МПа	Зона максимуму	n_s
Нормальний рух	1063	–	–	112	Опорний шпангоут	3,08
Екстрене гальмування	1063	234	–	187	Вузол котел–рама	1,84
Прохід кривої $R_{кр}$ = 350 м	1063	–	264	171	Бічна стінка котла	2,02
Комбіноване навантаження	1063	234	264	221	Вузол котел–рама	1,56
Удар при зчепленні	1063	412	–	298	П'ята автозчепу	1,16

Примітка: $n_s = \sigma_т / \sigma_{eq,max}$, де $\sigma_{eq,max}$ – максимальне за моделлю еквівалентне напруження за Мізесом (7) для відповідного режиму; «–» означає, що відповідна складова навантаження не діє.

У режимах нормального руху, екстреного гальмування, проходження кривої та комбінованого навантаження еквівалентні напруження не перевищують допустимого значення $[\sigma]$ = 230 МПа ($n_s \geq 1{,}56$). Серед зон котла й рами найбільші напруження виникають у місцях спряження котла з опорними шпангоутами та хребтовою балкою рами: за комбінованого навантаження $\sigma_{eq,max}$ = 221 МПа у вузлі котел–рама, 198 МПа в опорному шпангоуті, 143 МПа у зварному шві люка та 112 МПа в середній частині котла (рис. 1). У цілому за всіма режимами найменший запас міцності n_s = 1,16 зафіксовано за удару при зчепленні в зоні п'яти автозчепу ($\sigma_{eq,max}$ = 298 МПа); це перевищує $[\sigma]$, але не досягає границі текучості $\sigma_т$ = 345 МПа, тобто пластичних деформацій немає, і саме в цій зоні потрібне першочергове підсилення.

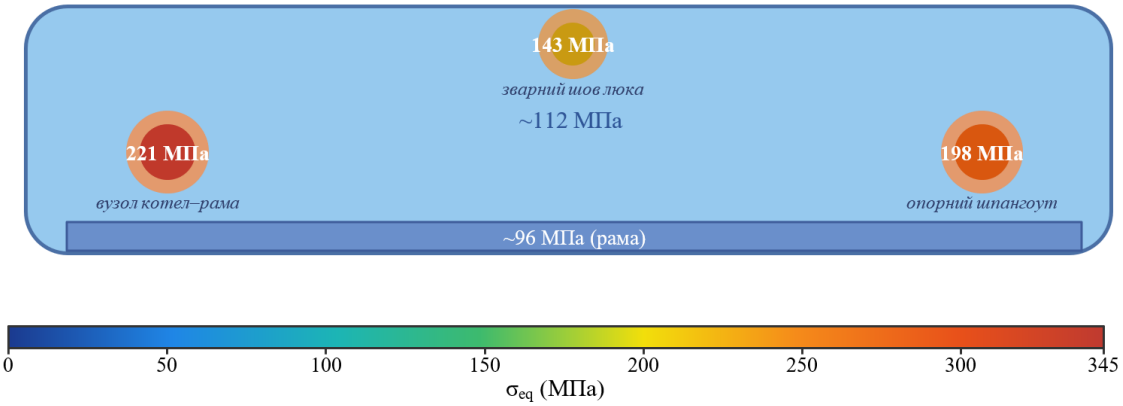


Рисунок 1 - Схема розподілу напружень за Мізесом σ_{eq} (МПа) за комбінованого навантаження ($P_z + P_x + P_y$): кружками позначено вузол котел–рама (221 МПа), опорний шпангоут (198 МПа) і зварний шов люка (143 МПа); 112 МПа – середня частина котла, 96 МПа – середина рами; шкала 0–345 МПа, верхня межа – границя текучості $\sigma_т$

Співставлення аналітичного розрахунку оболонки котла за (9) з даними скінченноелементної апроксимації показало високу збіжність: розбіжність не перевищує 5–7 % у зонах, віддалених від концентраторів напружень (понад $\sqrt{R_к s} \approx 110$ мм від днищ, шпангоутів і швів). Верифікацію МСЕ-моделі виконано порівнянням із натурними тензометричними випробуваннями (24 розетки тензорезисторів) за відносною похибкою:

$$\delta = \frac{|\sigma_{eq}^{МСЕ} - \sigma_{eq}^{екс}|}{\sigma_{eq}^{екс}} \cdot 100\ \% \qquad (19)$$

де $\sigma_{eq}^{МСЕ}$ – еквівалентне напруження за результатами МСЕ, МПа; $\sigma_{eq}^{екс}$ – еквівалентне напруження за даними тензометрії в тій самій точці, МПа. Відносна похибка МСЕ становить 2,1–4,7 % для нормальних режимів і 5,2–8,3 % для ударних, що задовольняє прийняту допустиму розбіжність до 10 %; для п’яти характерних зон, наведених на рис. 2, вона дорівнює 2,6–3,9 %. Застосування просторової моделі дозволило встановити суттєвий перерозподіл зусиль в оболонці за рахунок дії відцентрових сил і бокової качки та довести, що плоска балкова схема недооцінює рівень місцевих напружень у вузлах кріплення автозчепного пристрою: за рис. 2 плоска модель дає на 8–20 % менші значення σ_{eq}, ніж просторова МСЕ (у п’яті автозчепу – 254 МПа проти 298 МПа). Урахування внутрішнього тиску та гідродинамічної складової p_{dyn} [15] показало, що тиск вантажу стабілізує оболонку котла, підвищуючи її стійкість проти поперечного згинання.

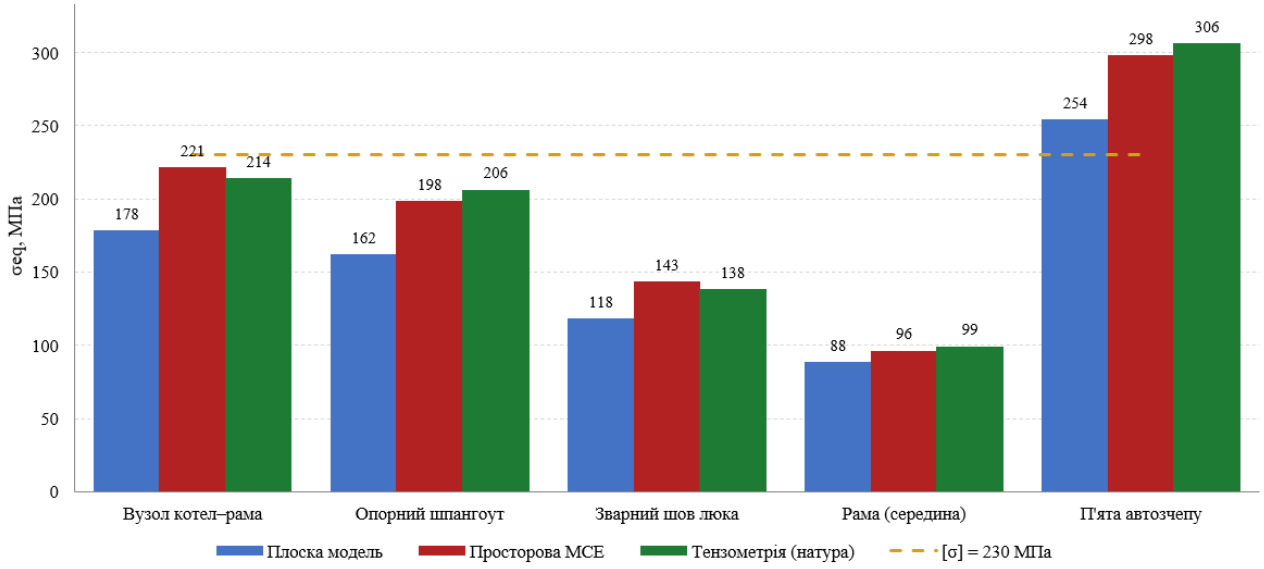


Рисунок 2 - Порівняння еквівалентних напружень σ_{eq} (МПа) у п’яти характерних зонах несучої системи за плоскою (балковою) схемою, просторовою МСЕ-моделлю та натурною тензометрією (для кожної зони – за режимом, що дає найбільше значення: комбіноване навантаження для чотирьох перших зон і удар при зчепленні для п’яти автозчепу); штрихова лінія – допустиме напруження $[\sigma] = 230$ МПа

Чутливість моделі до товщини стінки котла s ілюструє рис. 3: збільшення товщини знижує $\sigma_{eq,max}$ в усіх розглянутих режимах (для комбінованого навантаження – від ≈ 330 МПа за s = 5 мм до ≈ 156 МПа за s = 12 мм), а зменшення товщини нижче 8 мм за комбінованого навантаження призводить до перевищення допустимого напруження $[\sigma]$ = 345/1,5 = 230 МПа (≈ 246 МПа за s = 7 мм); за екстреного гальмування допустиме значення перевищується за $s \leq 6$ мм. Це підтверджує можливість цілеспрямованої зміни товщини листів котла в зонах з низьким рівнем напружень для зниження тари вагона за збереження $s \geq 8$ мм у зонах концентрації.

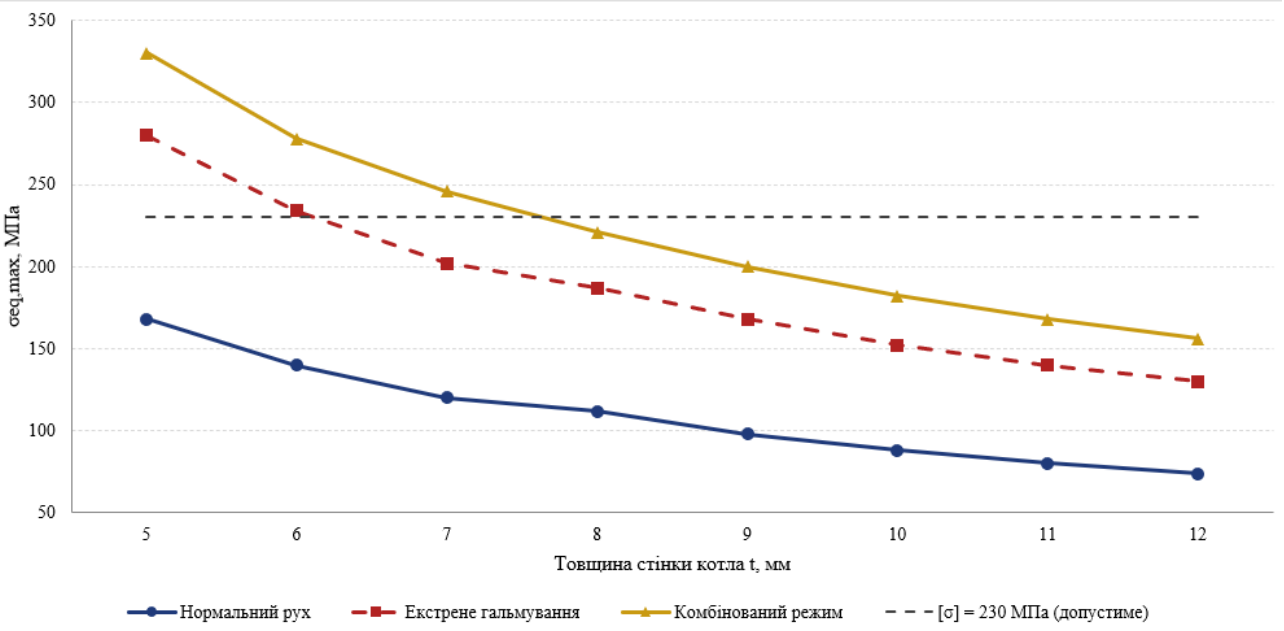


Рисунок 3 - Залежність максимальних еквівалентних напружень $\sigma_{eq,max}$ (МПа) від товщини стінки котла s (мм) для режимів нормального руху, екстреного гальмування та комбінованого навантаження; штрихова лінія – допустиме напруження $[\sigma]$ = 230 МПа, заштрихована область – перевищення допустимого напруження

Рекомендації: 1) першочергово підсилити зону п’яти автозчепу (n_s = 1,16 < 1,5); 2) виконати локальне підсилення хребтової балки в зоні шкворневого вузла (зниження напружень на 15 %); 3) зменшувати товщину листів котла лише в малонавантажених зонах, зберігаючи $s \geq 8$ мм у зонах концентрації.

Висновки. У роботі розв’язано науково-технічну задачу створення уточненого аналітико-чисельного апарату оцінки міцності вагонів-цистерн. За поставленими задачами отримано такі результати:

сформовано класифікацію просторових навантажень (вертикальні, поздовжні та поперечні сили, тиск вантажу з гідростатичною й динамічною складовими), яка враховує одночасну дію статичних, динамічних і гідродинамічних факторів;

запропоновано математичну постановку просторової задачі для котла на основі рівнянь рівноваги, співвідношень Коші, закону Гука та критерію Мізеса і мембранні залежності для напружень у гладкій частині тонкостінної циліндричної оболонки;

сформульовано граничні та контактні умови (односторонній контакт із зазорами та тертям) для взаємодії котла з рамою й рами з візками;

побудовано розрахункову модель несучої системи із згущенням в зонах концентрації напружень;

розроблено алгоритм поєднання аналітичних розв’язків теорії пружності з матричними процедурами скінченноелементної апроксимації;

виконано числовий аналіз і верифікацію: розбіжність аналітичного та МСЕ-розрахунків оболонки не перевищує 5–7 % у віддалених від концентраторів зонах, похибка відносно натурних даних становить 2,1–4,7 % для експлуатаційних режимів, а плоска балкова схема занижує місцеві напруження на 8–20 %; для комбінованого навантаження $\sigma_{eq,max}$ = 221 МПа (n_s = 1,56) у вузлі котел–рама, а мінімальний запас n_s = 1,16 ($\sigma_{eq,max}$ = 298 МПа) зафіксовано за удару при зчепленні в зоні п’яти автозчепу;

сформульовано рекомендації щодо підсилення зони п’яти автозчепу та хребтової балки в зоні шкворневого вузла (зниження напружень на 15 %) і зменшення товщини листів котла лише в малонавантажених зонах.

Подальші дослідження доцільно спрямувати на розрахунок втомної довговічності, власних частот і оптимізацію товщин листів за критерієм мінімальної маси.

Література

1. Mănescu T. Ș., Zaharia N. L., Barbință C. I. Static and dynamic tests at a railway tank wagon. Studia Universitatis Babeș-Bolyai Engineering. 2020. Vol. 65, No. 1. P. 105–114. DOI: https://doi.org/10.24193/subbeng.2020.1.11
2. Каграманян, А. О., Аракелян, Т. А. Сучасний стан та удосконалення нормативної бази систем опирання котлів залізничних цистерн. Рейковий рухомий склад. 2026. 32, 45–54. https://doi.org/10.47675/2304-6309-2026-32-45-54
3. Фомін О. В., Ловська А. О. Визначення навантаженості несучої конструкції вагона-цистерни з пружньо-фрикційною хребтовою балкою. Вісник Приазовського державного технічного університету. Серія: Технічні науки. 2022. Вип. 44. С. 73–81. DOI: https://doi.org/10.32782/2225-6733.44.2022.9
4. Fomin O. V., Lovska A., Gerlici J., Kravchenko K. Analysis of the dynamics and strength of the symmetrically loaded bearing structure of a tank car with friction bonds implemented by means of elastic elements in the tank supports. Symmetry. 2022. Vol. 14, No. 4. Art. 727. DOI: https://doi.org/10.3390/sym14040727
5. Fomin O. V., Lovska A., Bohomia V., Berestovoi I. Determination of dynamic loading of a tank wagon with malleable links between the pot and the frame. Procedia Structural Integrity. 2022. Vol. 36. P. 239–246. DOI: https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.01.030
6. Kotrasova K., Kormanikova E., Harabinova S. Pressure and stress analysis of liquid-filled cylindrical tank. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2022. Vol. 45, No. 15. P. 8819–8834. DOI: https://doi.org/10.1002/mma.7711
7. Ďungel J., Grenčík J., Zvolenský P. Emission of structural noise of tank wagons due to induced vibrations during wagon operation. Vibration. 2022. Vol. 5, No. 3. P. 628–640. DOI: https://doi.org/10.3390/vibration5030037
8. Каграманян А. О., Аракелян Т. А. Аналіз сучасного стану та перспективи вдосконалення систем спирання котлів вагонів-цистерн. Науковий журнал Метінвест Політехніки. Серія: Технічні науки. 2026. № 7. DOI: https://doi.org/10.32782/3041-2080/2026-7-20
9. Wang Z., Qian C., Wu Z. Stress analysis and structural improvement of LNG tank container frames under impact from railway transport vehicles. Applied Sciences. 2023. Vol. 13, No. 24. Art. 13335. DOI: https://doi.org/10.3390/app132413335
10. Vega B., Pérez J. Á. Comparative analysis of fatigue strength of a freight wagon frame. Welding in the World. 2024. Vol. 68. P. 321–332. DOI: https://doi.org/10.1007/s40194-023-01577-5
11. Zhao C., Zhao S., Xie S., He M., Li X., Li Y. New methods and applications of structural dynamics modeling for railway freight liquid tank. Advances in Mechanical Engineering. 2024. DOI: https://doi.org/10.1177/16878132241274441
12. Ilincă C. N. et al. ASME-based structural assessment of head–shell junctions in pressurized railway tank wagons. Materials. 2026. Vol. 19, No. 6. Art. 1125. DOI: https://doi.org/10.3390/ma19061125
13. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals. 7th ed. Oxford: Elsevier, 2013. 756 p.
14. ДСТУ EN 12663-2:2018. Залізниці. Вимоги до міцності кузовів залізничного рухомого складу. Ч. 2: Вантажні вагони. Київ: ДП «УкрНДНЦ», 2018. 62 с.
15. Ibrahim R. A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 972 p.

References

1. Mănescu T. Ș., Zaharia N. L., Barbință C. I. Static and dynamic tests at a railway tank wagon. Studia Universitatis Babeș-Bolyai Engineering. 2020. Vol. 65, No. 1. P. 105–114. DOI: https://doi.org/10.24193/subbeng.2020.1.11
2. Kahramanyan, A. O., Arakelyan, T. A. Suchasnyy stan ta udoskonalennya normatyvnoyi bazy system opyrannya kotliv zaliznychnykh tsystern. Reykovyy rukhomyy sklad, 2026. 32, 45–54. https://doi.org/10.47675/2304-6309-2026-32-45-54
3. Fomin O. V., Lovska A. O. Vyznachennia navantazhenosti nesuchoi konstruktsii vahona-tsysterny z pruzhno-fryktsiinoiu khrebtovoiu balkoiu [Determination of the loading of the bearing structure of a tank wagon with an elastic-friction center sill]. Visnyk Pryazovskoho derzhavnoho tekhnichnoho universytetu. Seriia: Tekhnichni nauky. 2022. Vol. 44. P. 73–81. DOI: https://doi.org/10.32782/2225-6733.44.2022.9
4. Fomin O. V., Lovska A., Gerlici J., Kravchenko K. Analysis of the dynamics and strength of the symmetrically loaded bearing structure of a tank car with friction bonds implemented by means of elastic elements in the tank supports. Symmetry. 2022. Vol. 14, No. 4. Art. 727. DOI: https://doi.org/10.3390/sym14040727
5. Fomin O. V., Lovska A., Bohomia V., Berestovoi I. Determination of dynamic loading of a tank wagon with malleable links between the pot and the frame. Procedia Structural Integrity. 2022. Vol. 36. P. 239–246. DOI: https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.01.030
6. Kotrasova K., Kormanikova E., Harabinova S. Pressure and stress analysis of liquid-filled cylindrical tank. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2022. Vol. 45, No. 15. P. 8819–8834. DOI: https://doi.org/10.1002/mma.7711
7. Ďungel J., Grenčík J., Zvolenský P. Emission of structural noise of tank wagons due to induced vibrations during wagon operation. Vibration. 2022. Vol. 5, No. 3. P. 628–640. DOI: https://doi.org/10.3390/vibration5030037

8. Kahramanyan A. O., Arakelyan T. A. Analiz suchasnoho stanu ta perspektyvy vdoskonalennya system spyrannya kotliv vahoniv-tsystern. Naukovyy zhurnal Metinvest Politekhniky. Seriya: Tekhnichni nauky. 2026. № 7. DOI: https://doi.org/10.32782/3041-2080/2026-7-20
9. Wang Z., Qian C., Wu Z. Stress analysis and structural improvement of LNG tank container frames under impact from railway transport vehicles. Applied Sciences. 2023. Vol. 13, No. 24. Art. 13335. DOI: https://doi.org/10.3390/app132413335
10. Vega B., Pérez J. Á. Comparative analysis of fatigue strength of a freight wagon frame. Welding in the World. 2024. Vol. 68. P. 321–332. DOI: https://doi.org/10.1007/s40194-023-01577-5
11. Zhao C., Zhao S., Xie S., He M., Li X., Li Y. New methods and applications of structural dynamics modeling for railway freight liquid tank. Advances in Mechanical Engineering. 2024. DOI: https://doi.org/10.1177/16878132241274441
12. Ilincă C. N. et al. ASME-based structural assessment of head–shell junctions in pressurized railway tank wagons. Materials. 2026. Vol. 19, No. 6. Art. 1125. DOI: https://doi.org/10.3390/ma19061125
13. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals. 7th ed. Oxford: Elsevier, 2013. 756 p.
14. DSTU EN 12663-2:2018. Zaliznytsi. Vymohy do mitsnosti kuzoviv zaliznychnoho rukhomoho skladu. Ch. 2: Vantazhni vahony [Railway applications. Structural requirements of railway vehicle bodies. Part 2: Freight wagons]. Kyiv: SE “UkrNDNC”, 2018. 62 p.
15. Ibrahim R. A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 972 p.

The problem of an analytical description of the spatial loading of the load-bearing system of a tank wagon, which is simultaneously subjected to vertical, longitudinal and lateral forces and to the internal pressure of the cargo, is considered. It is shown that current regulatory methods and a considerable part of the publications rely on planar or beam design schemes, which do not reflect the spatial deformation of the thin-walled tank shell and its interaction with the frame; as a result, local stresses in the tank-to-frame connection zones are underestimated. Recent domestic and foreign publications on the subject are analysed, and the absence of a unified mathematical framework combining the accuracy of analytical solutions of the theory of elasticity with the flexibility of finite element approximation of complex geometries is revealed. The aim of the work is to develop a refined mathematical model and a methodology for the analytical-numerical calculation of the spatial loading of the load-bearing system of a tank wagon. A classification of spatial loads by direction and origin is proposed; the equilibrium equations, Cauchy relations, Hooke’s law and the von Mises criterion for a spatial elastic body are given, together with analytical dependences for stresses in the cylindrical tank shell, and a finite element model based on the displacement method is built. A numerical study was carried out for the tank wagon under five operating modes. The discrepancy between the analytical calculation of the shell and the finite element solution does not exceed 5–7 % in zones remote from stress concentrators, and the error of the model relative to full-scale strain-gauge measurements for operating modes is 2.1–4.7 %. Among the tank and frame zones, the highest equivalent stresses occur where the tank joins the support frames and the center sill, and under coupling impact at the coupler heel (n_s = 1.16); the proposed local reinforcement of the center sill in the bolster zone reduces stresses by 15 %. The results can be used for express strength assessment at the preliminary design stage and for reducing the tare weight of tank wagons.
Keywords: *tank wagon, load-bearing system, spatial loading, theory of elasticity, finite element method, stress-strain state, stress concentration*

Каграманян А. О. – Український державний університет залізничного транспорту (Ukrainian State University of Railway Transport). ORCID: 0000-0003-3520-4911.

Аракелян Т. А. – Український державний університет залізничного транспорту (Ukrainian State University of Railway Transport). ORCID: 0009-0007-2062-6894.

Стаття надійшла до редакції: 07.10.2026 р.
Стаття прийнята до друку: 12.10.2026 р.
Стаття опублікована: 08.11.2026 р.