УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Н. Г. Панченко, М. Є. Резуненко

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

Частина 3

Харків – 2020

Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища та прикладна математика: конспект лекцій. – Харків: УкрДУЗТ, 2020. – Ч. 3. – 50 с.

Рекомендується для студентів освітнього рівня «бакалавр» економічного факультету всіх форм навчання.

Іл. 5, табл. 1, бібліогр.: 11 назв.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 1 червня 2020 р., протокол № 14.

Рецензент:

доц. А. П. Рибалко (ХНЕУ ім. С. Кузнеця)

ЗМІСТ

1 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1 Первісна функції

Визначення. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на множині X, якщо для будь-якого значення $x \in X$ функція $F(x)$ диференційована і

$$F'(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Приклад 1. Первісною для $f(x) = 2x$ на множині R є функція $F(x) = x^2$ ($F'(x) = \left(x^2\right)' = 2x$), або $F(x) = x^2 + 3$ ($F'(x) = \left(x^2 + 3\right)' = 2x$), і взагалі $F(x) = x^2 + C$, $C \in R$. Тобто $F(x) = x^2 + C$, $C \in R$ є загальним видом первісної для функції $f(x) = 2x$.

Теорема (*загальний вигляд усіх первісних*). Якщо $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$, то множина всіх первісних для функції $f(x)$ має вигляд

$$F(x) + C,\ C \in R. \tag{1.2}$$

Визначення. Множина всіх первісних (1.2) для функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{1.3}$$

При цьому $f(x)$ називається *підінтегральною* функцією, а $f(x)dx$ - підінтегральним виразом.

Операція знаходження невизначеного інтеграла від деякої функції називається *інтегруванням* цієї функції.

1.2 Властивості невизначеного інтеграла

1 Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x).$$

2 Сталий множник підінтегральної функції можна виносити за знак інтеграла

$$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \in R.$$

3 Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

4 Інтеграл від суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) інтегралів

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

5 Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C,\ C \in R. \tag{1.4}$$

1.3 Таблиця інтегрування елементарних функцій

Операція інтегрування є оберненою до операції диференціювання, тому для кожної функції з основної таблиці похідних можна написати відповідну їй первісну функцію (невизначений інтеграл). Таким чином, отримаємо таблицю невизначених інтегралів (таблиця 1.1).

1.4. Основні методи інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування

Знаходження невизначених інтегралів методом зведення їх до табличних (таблиця 1.1) за допомогою перетворення підінтегрального виразу та застосування властивостей п. 1.2 називається *методом безпосереднього інтегрування*.

Таблиця 1.1 – Таблиця невизначених інтегралів

1	$\int dx = x + C$	8	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
2	$\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	9	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
3	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	10	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
4	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	11	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$
5	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1$	12	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
6	$\int e^x dx = e^x + C$	13	$\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$
7	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	14	$\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert \dfrac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$

Приклад 2. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int (3 + x + 2x^3) dx$; 2) $\int \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x} dx$; 3) $\int (2^x + \cos x - \dfrac{3}{\sin^2 x}) dx$;

4) $\int \dfrac{2x^2 + 3}{x^2(x^2 + 3)} dx$; 5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{9 - 16x^2}}$.

Розв'язання:

1) $$\int (3 + x + 2x^3) dx = \int 3dx + \int xdx + 2\int x^3 dx = 3x + \frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{x^4}{4} + C =$$
$$= 3x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + C;$$

2) $$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x} dx = \int \frac{x^3}{x} dx + 2\int \frac{x^2}{x} dx - \int \frac{dx}{x} = \int x^2 dx + 2\int xdx - \int \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^3}{3} + x^2 - \ln\lvert x\rvert + C;$$

3) $\int(2^x+\cos x-\frac{3}{\sin^2 x})dx=\int 2^x dx+\int\cos x\,dx-3\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$

$=\frac{2^x}{\ln 2}+\sin x+3ctgx+C$;

4) $\int\frac{2x^2+3}{x^2(x^2+3)}dx=\int\frac{x^2+x^2+3}{x^2\cdot(x^2+3)}dx=\int\left(\frac{x^2}{x^2(x^2+3)}+\frac{x^2+3}{x^2(x^2+3)}\right)dx=$

$=\int\left(\frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}+\int x^{-2}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}-x^{-1}+C=$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{x}+C;$$

5) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}=\int\frac{dx}{4\cdot\sqrt{\frac{9}{16}-x^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{4}\arcsin\frac{4x}{3}+C$.

Відповідь:

1) $\int(3+x+2x^3)dx=3x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2}+C$;

2) $\int\frac{x^3+2x^2-1}{x}dx=\frac{x^3}{3}+x^2-\ln|x|+C$;

3) $\int(2^x+\cos x-\frac{3}{\sin^2 x})dx=\frac{2^x}{\ln 2}+\sin x+3ctgx+C$;

4) $\int\frac{2x^2+3}{x^2(x^2+3)}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{x}+C$;

5) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}=\frac{1}{4}\arcsin\frac{4x}{3}+C$.

Приклад 3. Використовуючи властивість (5), знайти невизначені інтеграли:

1) $\int e^{3x}dx$; 2) $\int\frac{dx}{2x+3}$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x+5}}$; 4) $\int 3^{x/2}dx$; 5) $\int\frac{dx}{(4x+5)^2}$;

6) $\int\frac{dx}{x^2+4x+29}$.

Розв'язання:

1) використовуємо формулу $\int e^x dx = e^x + C$ і властивість (5), в якій $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$ ($k = 3, b = 0$), та отримаємо

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C;$$

2) за табличним інтегралом $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ та властивістю (5), де $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$, $k = 2, b = 3$,

$$\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C;$$

3) за табличним інтегралом (3) таблиці 1.1 та за властивістю (5)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ F(x) = 2\sqrt{x},\ k = 3,\ b = 5 \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{3x+5}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+5} + C;$$

4) за таблицею 1.1. та за властивістю (5)

$$f(x) = 3^x,\ F(x) = \frac{3^x}{\ln 3},\ k = \frac{1}{2},\ b = 0 \Rightarrow$$

$$\int 3^{x/2} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3^{x/2}}{\ln 3} + C = \frac{2}{\ln 3} \cdot 3^{x/2} + C;$$

5) аналогічно

$$f(x) = \frac{1}{x^2},\ F(x) = -\frac{1}{x},\ k = 4,\ b = 5 \Rightarrow \int \frac{dx}{(4x+5)^2} = -\frac{1}{4(4x+5)} + C;$$

6) спочатку виділимо в знаменнику повний квадрат відносно x

$$x^2 + 4x + 29 = \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2\right) + 25 = (x+2)^2 + 25,$$ тоді

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+29} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+25} = \left| \begin{array}{l} f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2+5^2}; \\ F(x) = \dfrac{1}{5} arctg\, \dfrac{x+2}{5} \end{array} \right| = \frac{1}{5} arctg\, \frac{x+2}{5} + C.$$

Відповідь:

1) $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$; 2) $\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+5}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+5} + C$; 4) $\int 3^{x/2}dx = \frac{2}{\ln 3}\cdot 3^{x/2} + C$;

5) $\int \frac{dx}{(4x+5)^2} = -\frac{1}{4(4x+5)} + C$; 6) $\int \frac{dx}{x^2+4x+29} = \frac{1}{5} arctg\, \frac{x+2}{5} + C$.

Метод заміни змінної

Суть методу полягає в такому: необхідно замінити новою змінною таку частину підінтегральної функції, при диференціюванні якої отримаємо частину, що залишилась від підінтегрального виразу (не враховуючи сталого множника, на який завжди можна помножити або поділити підінтегральний вираз).

Приклад 4. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int \sin^2 x \cos x dx$; 2) $\int (x^3+5)^7 x^2 dx$; 3) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

Розв'язання:

1) $$\int \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = (\sin x)' dx = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C;$$

2) $$\int (x^3+5)^7 x^2 dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3+5 \\ dt = (x^3+5)' dx = 3x^2 dx \\ x^2 dx = \dfrac{dt}{3} \end{array} \right| = = \frac{1}{3}\int t^7 dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8} + C = \frac{(x^3+5)^8}{24} + C;$$

3) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int \sqrt{t}dt = \frac{2t^{3/2}}{3} + C = \frac{2}{3}\cdot(\ln x)^{3/2} + C$.

Відповідь:

1) $\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$; 2) $\int (x^3+5)^7 x^2 dx = \frac{(x^3+5)^8}{24} + C$;

3) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \frac{2}{3}\cdot(\ln x)^{3/2} + C$.

Метод інтегрування частинами

Метод інтегрування частинами застосовується у випадку, коли підінтегральна функція складається з добутку двох множників певного виду.

Формула *інтегрування частинами* має такий вигляд:

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{1.5}$$

Основну частину інтегралів, які обчислюють методом інтегрування частинами, можна поділити на три групи:

I Інтеграли виду $\int P(x)\cdot e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\cdot \sin x dx$, $\int P(x)\cdot \cos x dx$, де $P(x)$ - поліном, $\alpha \in R, \alpha \neq 0$.

У цьому випадку через u позначають поліном $P(x)$, а через dv - всю іншу частину підінтегрального виразу.

II Інтеграли виду $\int P(x)\cdot \arcsin x dx$, $\int P(x)\cdot \arccos x dx$, $\int P(x)\cdot arctgx dx$, $\int P(x)\cdot arcctgx dx$, $\int P(x)\cdot \ln x dx$, $\int P(x)\cdot \log_a x dx$, де $P(x)$ – поліном.

У цьому випадку через dv позначають $P(x)dx$, а всю іншу частину підінтегрального виразу – через u.

III Інтеграли виду $\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx$, $\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx$, де $\alpha, \beta \in R,\quad \alpha \neq 0, \beta \neq 0$.

У цьому випадку через u позначають, наприклад, $e^{\alpha x}$ і застосовують формулу інтегрування частинами (1.5) двічі, повертаючись у результаті до даного інтеграла, після чого цей інтеграл виражається з отриманої рівності.

Зауваження:

- У деяких випадках для знаходження інтеграла формулу інтегрування частинами (1.5) необхідно застосовувати кілька разів.
- Метод інтегрування частинами також комбінують з іншими методами.

Приклад 5. Методом інтегрування частинами знайти невизначені інтеграли:

1) $\int x\cdot e^{-3x}dx$; 2) $\int\left(x^2+1\right)\cdot\ln x dx$; 3) $\int e^{3x}\cdot\cos x\,dx$.

Розв'язання:

1) $$\int x\cdot e^{-3x}dx=\left|\begin{array}{ll} u=x, & dv=e^{-3x}dx \\ du=(x)'dx=dx, & v=\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{3}x\cdot e^{-3x}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}x\cdot e^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}+C;$$

2) $$\int\left(x^2+1\right)\cdot\ln x dx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x, & dv=\left(x^2+1\right)dx \\ du=(\ln x)'dx=\frac{dx}{x}, & v=\int\left(x^2+1\right)dx=\frac{x^3}{3}+x\end{array}\right|=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\cdot\ln x-\int\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\cdot\frac{dx}{x}=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\cdot\ln x-\int\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\cdot\ln x-\frac{x^3}{9}-x+C;$$

3) $$\int e^{3x}\cdot\cos x\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=e^{3x} & dv=\cos x\,dx \\ du=\left(e^{3x}\right)'dx=3e^{3x}dx & v=\int\cos x\,dx=\sin x\end{array}\right|=$$

$$=e^{3x}\cdot\sin x-3\int e^{3x}\cdot\sin x\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=e^{3x} & dv=\sin x \\ du=3e^{3x} & v=\int\sin x\,dx=-\cos x\end{array}\right|=$$

$$= e^{3x} \cdot \sin x - 3\left(- e^{3x} \cdot \cos x + 3\int e^{3x} \cdot \cos x\, dx\right) + C =$$

$$= e^{3x} \cdot \sin x + 3e^{3x} \cdot \cos x - 9\int e^{3x} \cdot \cos x\, dx + C.$$

Відносно невідомого інтеграла $I = \int e^{3x} \cdot \cos x\, dx$ складаємо рівняння

$$I = e^{3x} \cdot \sin x + 3e^{3x} \cdot \cos x - 9I + C$$

та отримаємо розв'язок

$$I = \frac{1}{10}\left(e^{3x} \cdot \sin x + 3e^{3x} \cdot \cos x\right) + C\,.$$

Відповідь:

1) $\int x \cdot e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} x \cdot e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} + C$;

2) $\int \left(x^2 + 1\right) \cdot \ln x dx = = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} - x + C$;

3) $\int e^{3x} \cdot \cos x\, dx = \frac{1}{10}\left(e^{3x} \cdot \sin x + 3e^{3x} \cdot \cos x\right) + C$.

2 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1 Визначення визначеного інтеграла

Розглянемо неперервну на інтервалі $[a;b]$ функцію $y = f(x)$ (рисунок 2.1.).

Припустимо, що функція $f(x) \geq 0$ на інтервалі $[a;b]$. Необхідно обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженою кривою $y = f(x)$ та прямими $x = a, x = b, y = 0$.

Розіб'ємо інтервал $[a;b]$ на n відрізків довжиною $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ відповідно. На кожному відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ виберемо довільну точку $\xi_i, i = 1,2,...,n$. Відповідні значення функції в цих точках $f(\xi_i), i = 1,2,...,n$. Тоді наближене значення площі криволінійної трапеції дорівнює

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i ,$$

де $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ називається *інтегральною сумою*.

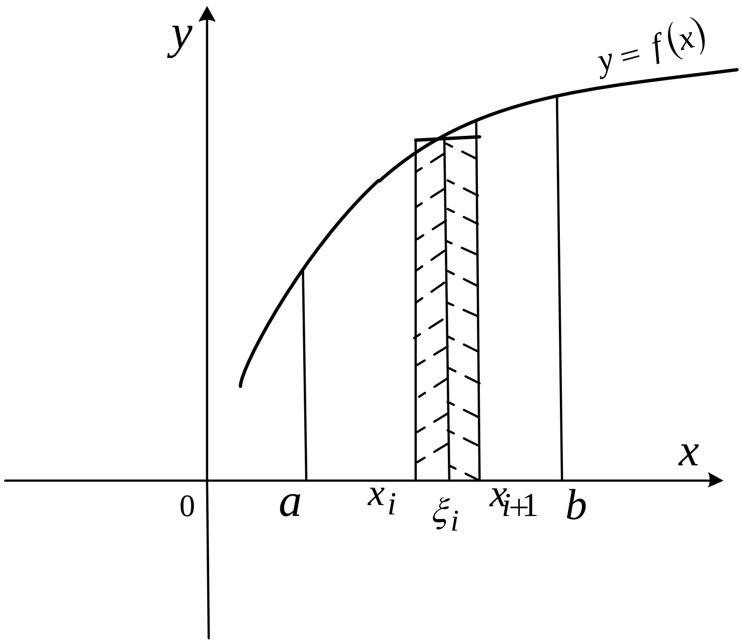

Рисунок 2.1 – Побудова інтегральної суми на прикладі визначення площі криволінійної трапеції

Точне значення цієї площі отримаємо, якщо перейдемо до границі

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i .$$

Визначення. *Визначеним інтегралом* функції $y = f(x)$ на інтервалі $[a;b]$ називається границя суми

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_{a}^{b} f(x) dx . \qquad (2.1)$$

Числа a і b – це нижня і верхня межі інтегрування відповідно.

Зауваження:

- Величина визначеного інтеграла (2.1) залежить від підінтегральної функції $f(x)$, меж інтегрування a, b і не залежить від змінної інтегрування, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

- Очевидно, що

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Якщо $f(x) \geq 0$ на інтервалі $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ – це площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $x = a, x = b, y = 0$.

Економічний зміст визначеного інтеграла

Якщо $y = f(t)$ – продуктивність праці в момент часу t, то обсяг продукції, що випускається за проміжок часу:

- $[0;T]$ обчислюється за

$$Q(T) = \int_0^T f(t)dt; \qquad (2.2)$$

- $[t_1;t_2]$ обчислюється за

$$Q(t_1;t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \qquad (2.3)$$

2.2 Властивості визначеного інтеграла

1 $\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, $k = const$, $k \in R$.

2 $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3 $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$.

4 Для будь-яких точок $a, b, c \in R$, $c \in (a;b)$ справедлива така рівність (рисунок 2.2):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

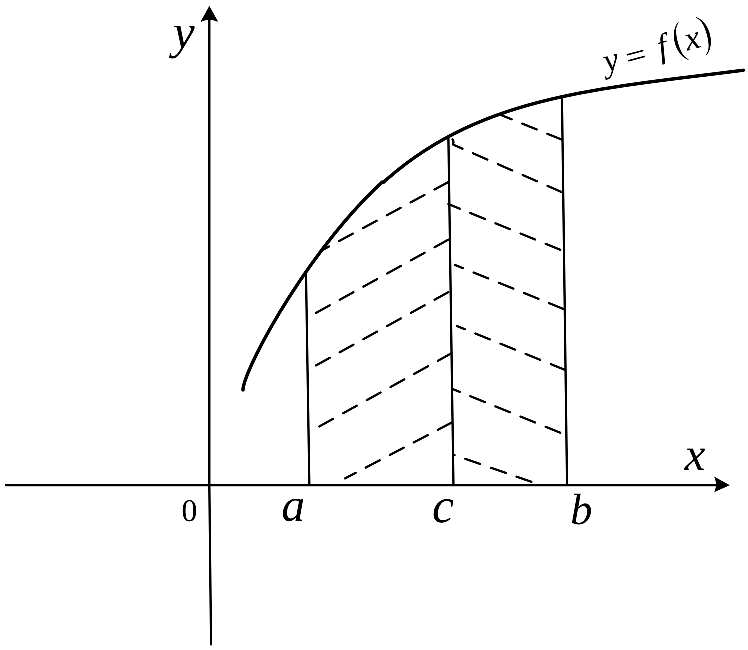

Рисунок 2.2 – Властивість 4

5 Якщо $f(x) \le \varphi(x)$ на інтервалі $[a;b]$, то виконується нерівність

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx.$$

6 Нехай m і M – найменше та найбільше значення функції $y = f(x)$ на інтервалі $[a;b]$ відповідно. Тоді справедлива подвійна нерівність

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

7 *Теорема про середнє значення функції.* Нехай функція $f(x)$ – неперервна на інтервалі $[a;b]$. Тоді на цьому інтервалі існує хоча б одна точка $x = c$ $(a \le c \le b)$, така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

2.3 Формула Ньютона-Лейбніца

Якщо функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a;b]$ і відома її первісна $F(x)$, то визначений інтеграл від функції $f(x)$ можна обчислити за формулою

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (2.4)$$

Це *формула Ньютона-Лейбніца*. Іноді її називають *основною формулою інтегрального числення.*

Приклад 6. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_1^2 x^3 dx$; 2) $\int_0^1 4^x dx$; 3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

Розв'язання. За формулою (2.4) обчислюємо:

1) $\int\limits_{1}^{2} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \frac{(2)^4}{4} - \frac{(1)^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$;

2) $\int\limits_{0}^{1} 4^x dx = \left.\frac{4^x}{\ln 4}\right|_0^1 = \frac{1}{\ln 4} \cdot \left(4^1 - 4^0\right) = \frac{3}{\ln 4}$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь:

1) $\int\limits_{1}^{2} x^3 dx = \frac{15}{4}$; 2) $\int\limits_{0}^{1} 4^x dx = \frac{3}{\ln 4}$; 3) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

2.4 Заміна змінної у визначеному інтегралі

Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Введемо функцію $x = \varphi(t)$, тобто зробимо заміну змінної. Нехай виконуються умови:

1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;

2) функції $\varphi(t), \varphi'(t), f(\varphi(t))$ неперервні на інтервалі $[a;b]$. Тоді справедливе співвідношення

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)dt. \qquad (2.5)$$

Приклад 7. Методом заміни змінної обчислити визначені інтеграли:

$$1)\ \int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}};\ 2)\ \int_e^{e^2} \frac{(\ln x+3)^2}{x}dx;\ 3)\ \int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx.$$

Розв'язання. За формулою (2.5) обчислюємо:

$$1)\ \int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}} = \left| \begin{array}{l} t=1+2x^2 \\ dt=\left(1+2x^2\right)'dx=4xdx \\ \alpha=1+2\cdot 0^2=1 \\ \beta=1+2\cdot 2^2=9 \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int_1^9 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{4}\sqrt{t}\Big|_1^9 = \frac{1}{2}\sqrt{t}\Big|_1^9 =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{9}-\sqrt{1}\right)=1;$$

$$2)\ \int_e^{e^2} \frac{(\ln x+3)^2}{x}dx = \left| \begin{array}{l} t=\ln x+3 \\ dt=(\ln x+3)'dx=\dfrac{dx}{x} \\ \alpha=\ln e+3=4 \\ \beta=\ln e^2+3=5 \end{array} \right| = \int_4^5 t^2dt = \frac{t^3}{3}\Big|_4^5 = \frac{1}{3}\left(5^3-4^3\right)=$$

$$=\frac{1}{3}(125-64)=\frac{61}{3};$$

$$3)\ \int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{1+x} \\ t^2=1+x \\ x=t^2-1 \\ dx=\left(t^2-1\right)'dt=2tdt \\ \alpha=\sqrt{1+0}=1 \\ \beta=\sqrt{3+1}=2 \end{array} \right| = \int_1^2 \left(t^2-1\right)\cdot t\cdot 2tdt = 2\int_1^2 \left(t^4-t^2\right)dt =$$

$$=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=2\left[\left(\frac{2^5}{5}-\frac{2^3}{3}\right)-\left(\frac{1^5}{5}-\frac{1^3}{3}\right)\right]=\frac{116}{15}.$$

Відповідь:

1) $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}}=1$; 2) $\int_e^{e^2} \frac{(\ln x+3)^2}{x}dx=\frac{61}{3}$; 3) $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx=\frac{116}{15}$.

Приклад 8. Визначити об'єм випуску продукції $Q(t)$, виробленої за проміжок часу $[0;T]$, якщо продуктивність праці характеризується функцією $f(t)$, де t, год:

1) $f(t)=-3{,}2t^2+16t+124$, $T=3$ год;

2) $f(t)=\frac{2}{3t+4}+5$, $T=4$ год.

Розв'язання. За формулою (2.2) отримаємо:

$$1)\ Q(T=3)=\int_0^3\left(-3{,}2t^2+16t+124\right)dt=\left[-3{,}2\cdot\frac{t^3}{3}+16\cdot\frac{t^2}{2}+124t\right]\Bigg|_0^3=$$

$$=-3{,}2\cdot\frac{3^3}{3}+8\cdot 3^2+124\cdot 3=415{,}2 \text{ (умов. од.);}$$

$$2)\ Q(T=4)=\int_0^4\left(\frac{2}{3t+4}+5\right)dt=\left[\frac{2}{3}\ln|3t+4|+5t\right]\Bigg|_0^4=\left[\frac{2}{3}\ln|3\cdot 4+4|+5\cdot 4\right]-$$

$$-\left[\frac{2}{3}\ln|3\cdot 0+4|+5\cdot 0\right]=\frac{2}{3}\ln 16+20-\frac{2}{3}\ln 4=\frac{2}{3}\ln 4+20\approx 20{,}9 \text{ (умов. од.).}$$

Відповідь: 1) 415,2 (умов. од.); 2) 20,9 (умов. од.).

2.5 Інтегрування частинами

Нехай функції $u(x), v(x)$ неперервні разом зі своїми похідними на інтервалі $[a;b]$. Запишемо співвідношення

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Проінтегруємо це співвідношення на інтервалі $[a;b]$:

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx.$$

Таким чином, отримаємо формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (2.6)$$

Приклад 9. Методом інтегрування частинами обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^1 (2x+1)e^x dx$; 2) $\int_1^2 \ln x\, dx$.

Розв'язання. За формулою (2.6) отримаємо:

$$1)\ \int_0^1 (2x+1)e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = 2x+1 & dv = e^x dx \\ du = (2x+1)' dx = 2dx & v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| =$$

$$= (2x+1)\cdot e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^x dx = 3e - 1 - 2e^x\Big|_0^1 = 3e - 1 - 2e + 2 = e + 1;$$

$$2)\ \int_1^2 \ln x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = (\ln x)' dx = \dfrac{dx}{x} & v = \int dx = x \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{dx}{x} = 2\ln 2 - \ln 1 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1.$$

Відповідь: 1) $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = e + 1$; 2) $\int_1^2 \ln x dx = 2\ln 2 - 1$.

3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

3.1 Визначення диференціального рівняння

Визначення. *Диференціальним рівнянням* називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, функцію y та похідні $y', y'', ..., y^{(n)}$.

Позначається диференціальне рівняння так:

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0. \tag{3.1}$$

Визначення. *Порядком* диференціального рівняння (3.1) називається порядок найвищої похідної, що входить у рівняння.

Приклад 10. Визначити порядок диференціального рівняння:

1) $x^2 y' + \ln y - x = 0$ - рівняння першого порядку;
2) $y'' - e^{xy} + x^3 y = y^2$ - рівняння другого порядку.

3.2 Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3.2}$$

де x – незалежна змінна;
y – невідома функція;
y' – похідна невідомої функції.

Якщо рівняння (3.2) можна розв'язати відносно похідної y', то його записують у вигляді

$$y' = f(x;y). \quad (3.3)$$

Визначення. *Розв'язком* диференціального рівняння першого порядку називається така функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння (3.2) (або (3.3)) перетворює його на тотожність.

Визначення. *Загальним розв'язком* диференціального рівняння першого порядку (3.2) (або (3.3)) називається функція $y = \varphi(x;C)$, яка при будь-якому значенні сталої C є розв'язком цього рівняння.

Визначення. *Частинним розв'язком* диференціального рівняння першого порядку називається будь-яка функція $y = \varphi(x;C_0)$, отримана із загального розв'язку при певному значенні $C = C_0$.

Визначення. Графік розв'язку $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння першого порядку на площині XOY називається *інтегральною кривою*. Загальному розв'язку відповідає сукупність (сімейство) інтегральних кривих.

Інколи серед всіх розв'язків диференціального рівняння першого порядку потрібно знайти такий розв'язок, який задовольняє умову $y = y_0$ при $x = x_0$. Така умова називається *початковою* і позначається як

$$y(x_0) = y_0 \text{ або } y\big|_{x=x_0} = y_0. \quad (3.4)$$

З геометричної точки зору це означає, що з сімейства інтегральних кривих, які визначаються загальним розв'язком рівняння, потрібно виділити ту інтегральну криву, яка проходить через точку $(x_0;y_0)$.

Визначення. Задача знаходження частинного розв'язку $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння першого порядку, який задовольняє початкову умову (3.4), називається *задачею Коші.*

Зауваження:

- Часто в процесі розв'язання диференціального рівняння першого порядку не вдається одержати розв'язок у явному вигляді $y = \varphi(x;C)$, а отримують співвідношення

$$\Phi(x;y;C) = 0, \quad (3.5)$$

яке неявно визначає загальний розв’язок рівняння.

Співвідношення (3.5) називається *загальним інтегралом* диференціального рівняння першого порядку (3.2) або (3.3).

• Співвідношення

$$\Phi(x;y;C_0)=0, \tag{3.6}$$

яке отримано зі співвідношення (3.5) і задовольняє умову (3.4), називається *частинним інтегралом*.

Приклад 11. Для диференціального рівняння $y'=2x$ загальним розв’язком буде множина функцій

$$y=x^2+C.$$

Це можна перевірити шляхом підстановки в рівняння

$$\left(x^2+C\right)'=2x.$$

Знайдемо частинний розв’язок даного рівняння, який задовольняє початкову умову $y(2)=5$:

$$y(2)=2^2+C_0=4+C_0=5, C_0=1.$$

Отримаємо частинний розв’язок $y=x^2+1$.

Відповідь: загальний розв’язок $y=x^2+C$, частинний розв’язок $y=x^2+1$.

3.2.1 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними має вигляд

$$y'=f(x)\cdot g(y), \tag{3.7}$$

де $f(x)$ і $g(x)$ – неперервні на деякому інтервалі функції.

Враховуючи, що $y'=\dfrac{dy}{dx}$, з рівняння (3.7) отримаємо

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y);$$
$$dy = f(x) \cdot g(y) dx;$$
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx, \; g(y) \neq 0.$$

Інтегруючи обидві частини останнього рівняння, отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx .$$

Приклад 12. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{y}{x^2 - 9}.$$

Розв’язання. Враховуючи, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, отримаємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2 - 9};$$
$$dy = \frac{y}{x^2 - 9} dx;$$
$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x^2 - 9}, \; y \neq 0$ - рівняння з відокремлюваними змінними.

Інтегруємо обидві частини:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2 - 9};$$
$$\ln|y| = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + \ln|C|;$$
$$\ln|y| = \ln\left|\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^{1/6}\right| + \ln|C|;$$
$$\ln|y| = \ln\left|C \cdot \left(\frac{x-3}{x+3}\right)^{1/6}\right|;$$

$$y = C \cdot \left(\frac{x-3}{x+3} \right)^{1/6};$$
$$y = C \cdot \sqrt[6]{\frac{x-3}{x+3}}.$$

При відокремлюванні змінних інтегральна крива $y(x) = 0$ була втрачена, але вона потрапляє у загальний розв'язок диференціального рівняння.

Відповідь: загальний розв'язок $y = C \cdot \sqrt[6]{\dfrac{x-3}{x+3}}$.

Приклад 13. Знайти частинний інтеграл диференціального рівняння

$$\begin{cases} (xy - x) \cdot y' = xy + y; \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

$$(xy - x) \cdot y' = xy + y;$$
$$x(y-1) \cdot \frac{dy}{dx} = y(x+1);$$
$$x(y-1)dy = y(x+1)dx;$$
$$\frac{(y-1)}{y}dy = \frac{(x+1)}{x}dx, y \neq 0, x \neq 0.$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними. Проінтегруємо обидві частини:

$$\int \frac{(y-1)}{y}dy = \int \frac{(x+1)}{x}dx;$$
$$\int \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx;$$
$$y - \ln|y| = x + \ln|x| + \ln|C|;$$
$$y - x = \ln|x| + \ln|y| + \ln|C|.$$

Таким чином, загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд

$$y - x = \ln|Cxy|.$$

При відокремлюванні змінних були втрачені частинні розв'язки диференціального рівняння, а саме

$$y = 0 \text{ та } x = 0.$$

Але жоден з цих частинних розв'язків не належить до початкової умови прикладу. Тому в подальшому розв'язки $y = 0$ та $x = 0$ не розглядаємо.

Підставимо початкові умови в загальний інтеграл та отримаємо частинний інтеграл диференціального рівняння:

$$1 - 1 = \ln|C| \Rightarrow C = 1.$$

Отже, частинний інтеграл

$$y - x = \ln|xy|.$$

Відповідь: частинний інтеграл $y - x = \ln|xy|$.

Приклад 14. Знайти обсяг реалізованої продукції $y = y(t)$ за час $t = 3$ (доб), якщо модель зростання в умовах конкурентного ринку має вигляд

$$\begin{cases} y' = 0{,}7y(8 - y), \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння $y' = 0{,}7y(8 - y)$:

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}7y(8 - y);$$
$$dy = 0{,}7y(8 - y)dt;$$
$$\frac{dy}{y(8 - y)} = 0{,}7dt,\ y \neq 0,\ y \neq 8;$$
$$\int \frac{dy}{y(8 - y)} = 0{,}7\int dt.$$

Аналогічно прикладу 3 обчислюємо інтеграл лівої частини:

$$\int\frac{dy}{y(8-y)}=-\int\frac{dy}{y(y-8)}=-\int\frac{dy}{y^2-8y}=-\int\frac{dy}{(y-4)^2-16}=$$
$$=-\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\ln\left|\frac{y-4-4}{y-4+4}\right|+C=-\frac{1}{8}\cdot\ln\left|\frac{y-8}{y}\right|+C.$$

Отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння

$$-\frac{1}{8}\cdot\ln\left|\frac{y-8}{y}\right|=0{,}7t+C\,.$$

Після алгебраїчних перетворень:

$$\ln\left|\frac{y-8}{y}\right|=-5{,}6t-8C\,;$$
$$\frac{y-8}{y}=e^{-5{,}6t-8C}\,.$$

Позначимо через $C_1=e^{-8C}$ та отримаємо:

$$\frac{y-8}{y}=C_1\cdot e^{-5{,}6t}\,;$$
$$y-8=C_1\cdot y\cdot e^{-5{,}6t}\,;$$
$$y\left(1-C_1\cdot e^{-5{,}6t}\right)=8\,;$$
$$y=\frac{8}{1-C_1\cdot e^{-5{,}6t}},\ 1-C_1\cdot e^{-5{,}6t}\neq 0.$$

Запишемо загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y=\frac{8}{1-C_1\cdot e^{-5{,}6t}},\ 1-C_1\cdot e^{-5{,}6t}\neq 0.$$

При відокремленні змінних були втрачені інтегральні криві:

$$y(t)=0 \text{ та } y(t)=8.$$

Жодна з цих інтегральних кривих не задовольняє початкову умову прикладу. Тому ці інтегральні криві в подальшому можна не розглядати.

За початковою умовою $y(0)=5$ обчислюємо сталу C_1:

$$y(0)=\frac{8}{1-C_1\cdot e^{-5{,}6\cdot 0}}=\frac{8}{1-C_1}=5;$$

$$1-C_1=\frac{8}{5};$$

$$C_1=-\frac{3}{5}=-0{,}6.$$

Таким чином отримаємо частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y=\frac{8}{1+0{,}6e^{-5{,}6t}}.$$

Обчислюємо обсяг реалізованої продукції за 3 доби

$$y(3)=\frac{8}{1+0{,}6\cdot e^{-5{,}6\cdot 3}}=\frac{8}{1+0{,}6\cdot e^{-16{,}8}}\approx 8 \text{ ум. од.}$$

Відповідь: 8 ум. од.

3.2.2 Однорідні диференціальні рівняння

Визначення. Диференціальне рівняння $y'=f(x;y)$ називається *однорідним*, якщо функція $f(x;y)$ є однорідною, тобто $f(\lambda x;\lambda y)=f(x;y)$ для всіх λ. Однорідне диференціальне рівняння можна записати у вигляді

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.8}$$

Однорідне диференціальне рівняння розв'язується за допомогою підстановки

$$\begin{aligned} y&=t\cdot x,\\ y'&=t'\cdot x+t, \end{aligned} \tag{3.9}$$

де $t=t(x)$ – невідома функція.

В результаті отримують рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 15. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$y' = \frac{y^2 - xy}{2xy - x^2}.$$

Розв'язання. Виконуємо заміну рівняння (3.9) та отримаємо

$$t' \cdot x + t = \frac{t^2 x^2 - tx^2}{2xtx - x^2};$$

$$t' \cdot x + t = \frac{x^2\left(t^2 - t\right)}{x^2(2t-1)};$$

$$t' \cdot x = \frac{t^2 - t}{2t-1} - t;$$

$$t' \cdot x = \frac{t^2 - t - 2t^2 + t}{2t-1};$$

$$t' \cdot x = -\frac{t^2}{2t-1};$$

$$\frac{dt}{dx} \cdot x = -\frac{t^2}{2t-1};$$

$$dt \cdot x = -\frac{t^2}{2t-1} \cdot dx;$$

$$\frac{(2t-1)}{t^2} dt = -\frac{dx}{x}, t \neq 0;$$

$$\int \frac{(2t-1)}{t^2} dt = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\int \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \frac{dx}{x};$$

$$2\ln|t| + \frac{1}{t} = -\ln|x| - \ln|C|;$$

$$2\ln|t| + \ln|x| + \ln|C| + \frac{1}{t} = 0;$$

$$\ln\left|Cxt^2\right| + \frac{1}{t} = 0.$$

Повертаючись до заміни, $t=\frac{y}{x}$: $\ln\left|Cx\left(\frac{y}{x}\right)^2\right|+\frac{x}{y}=0$; $\ln\left|C\frac{y^2}{x}\right|+\frac{x}{y}=0$.

При відокремлюванні змінних була втрачена інтегральна крива $y(x)=0$, яка також є розв'язком диференціального рівняння.

Відповідь: загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\ln\left|C\frac{y^2}{x}\right|+\frac{x}{y}=0,\ y=0.$$

3.2.3 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Визначення. *Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку* називається рівняння вигляду

$$y'+p(x)\cdot y=q(x), \tag{3.10}$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – задані і неперервні на деякому інтервалі функції.

Розв'язок рівняння (3.10) знаходять у вигляді заміни

$$y=u\cdot v, \tag{3.11}$$

де $u=u(x)$ та $v=v(x)$ – невідомі функції.

Після підстановки формули (3.11) в рівняння (3.10) задане рівняння перетворюється на систему двох рівнянь з відокремлюваними змінними:

$$\begin{gathered}(uv)'+p(x)\cdot y=q(x),\\ u'v+uv'+p(x)\cdot uv=q(x),\\ u'v+u(v'+p(x)\cdot v)=q(x).\end{gathered}$$

$$\textbf{I}\ v'+p(x)\cdot v=0 \text{ та } \textbf{II}\ u'v=q(x)$$

Приклад 16. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'+2xy=2x\cdot e^{-x^2}.$$

Розв'язання. За формулою (3.11) отримаємо

$$u' \cdot v + u \cdot v' + 2x \cdot uv = 2x \cdot e^{-x^2} \text{ або}$$

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' + 2xv\right) = 2x \cdot e^{-x^2}.$$

Звідси система двох диференціальних рівнянь

$$\text{I. } v' + 2xv = 0;$$

$$\text{II. } u' \cdot v = 2x \cdot e^{-x^2}.$$

Знайдемо спочатку будь-який частинний розв'язок першого рівняння:

$$v' + 2xv = 0;$$

$$v' = -2xv;$$

$$\frac{dv}{dx} = -2xv;$$

$$\frac{dv}{v} = -2xdx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int xdx;$$

$$\ln|v| = -x^2 + C.$$

Оскільки нам потрібен будь-який частинний розв'язок, то будемо вважати, що $C = 0$, тобто

$$\ln|v| = -x^2 \text{ або } v = e^{-x^2}.$$

Підставляємо отриманий розв'язок в друге рівняння

$$u' \cdot e^{-x^2} = 2x \cdot e^{-x^2};$$

$$u' = 2x;$$

$$du = 2xdx;$$

$$\int du = 2\int xdx;$$

$$u = x^2 + C.$$

Таким чином, отримаємо $y = uv = \left(x^2 + C\right) \cdot e^{-x^2}$.

Відповідь: загальний розв'язок $y = \left(x^2 + C\right) \cdot e^{-x^2}$.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

4 ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

4.1 Предмет теорії ймовірностей. Види подій

Всі події, які ми спостерігаємо, діляться на достовірні, неможливі та випадкові.

Визначення. *Достовірною* називається така подія, яка при виконанні певних умов обов'язково відбудеться.

Достовірна подія позначається символом Ω («омега»).

Визначення. *Неможливою* називається така подія, яка при виконанні певних умов обов'язково не відбудеться.

Неможлива подія позначається символом $\varnothing$ («порожня множина»).

Визначення. *Випадковою* називають таку подію, яка при виконанні певних умов може відбутися або не відбутися.

Випадкові події позначають великими латинськими літерами:

$$A, B, C, \ldots; A_1, A_2, A_3, \ldots; B_1, B_2, B_3, \ldots.$$

Приклад 17. Випадковими подіями є:

1) наявність або відсутність у касі квитка на даний потяг;

2) наявність вагона, що потребує ремонту, у потязі, який прибув на станцію;

3) відмова у роботі деякого обладнання.

Випадкові події в масі спостережень підпорядковані певним характерним лише для них невипадковим законам. Математична наука, що вивчає закономірності масових подій, називається *теорією ймовірностей*. Науку, що використовує теорію ймовірностей для обробки числових одиниць інформації як наслідків експерименту, називають *математичною статистикою*.

Предметом теорії ймовірностей є моделі експериментів з випадковим результатом.

Будемо розглядати тільки такі експерименти (випробування), які можна повторити при незмінних певних умовах довільну кількість разів. Будь-який результат, що спостерігатиметься, будемо інтерпретувати як випадковий результат експерименту, тобто випадкову подію.

Подія – це результат випробування.

Визначення. Події називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу інших в одному і тому самому випробуванні.

Події називаються *єдино можливими,* якщо поява в результаті випробування однієї і тільки однієї з них є достовірною подією.

Взаємовиключні наслідки випробування називають *елементарними* подіями і позначають $\omega_i, i = 1,2,3,...$.

Сукупність всіх елементарних подій $\omega_i, i = 1,2,3,...$ називається *простором елементарних подій* і позначається Ω.

4.2 Алгебра подій

1 *Сумою* двох подій A і B називається така подія $C = A + B$, яка полягає в появі принаймні однієї з них (рисунок 4.1).

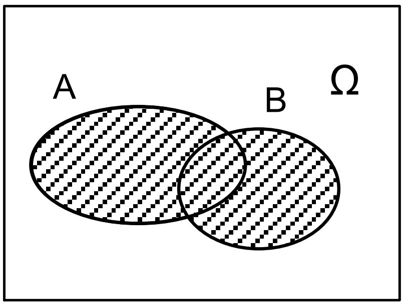

Рисунок 4.1 – Схематичне зображення суми двох подій A і B

2 *Добутком* двох подій A і B називається така подія $C = AB$, яка полягає в сумісній появі A і B (рисунок 4.2).

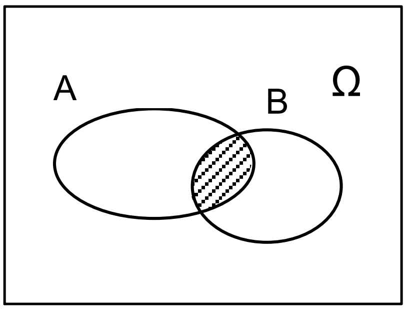

Рисунок 4.2 – Схематичне зображення добутку двох подій A і B

3 *Різницею* двох подій A і B називається така подія $C = A - B$, яка полягає в появі події A за умови ненастання події B (рисунок 4.3).

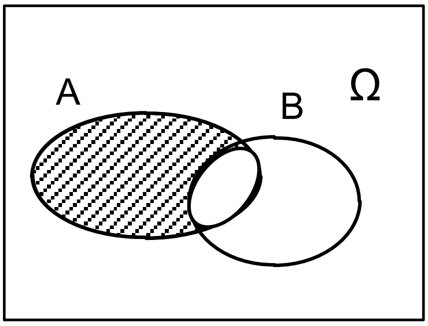

Рисунок 4.3 – Схематичне зображення різниці двох подій A і B

Визначення. Випадкові події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють *повну групу подій,* якщо:

1) вони попарно несумісні, тобто $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$;

2) настання хоча б однієї з подій $A_1, A_2, ..., A_n$ є достовірною подією, тобто $A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n = \Omega$.

Зауваження:

• *Протилежною* до події A називається подія $\overline{A}$, яка полягає в ненастанні події A.

• Якщо подія A обов'язково відбувається, коли відбувається подія B, то будемо називати подію A *наслідком* події B $(A \supset B \text{ або } B \subset A)$.

• Якщо подія A є наслідком події B, а подія B є наслідком події A, то ці події *збігаються* ($A = B$).

• Події A і B називаються *несумісними*, якщо одночасне їх настання неможливе, тобто $AB = \varnothing$.

• Якщо $AB \neq \varnothing$, то випадкові події A і B називають *сумісними.*

Приклад 18. Технічний контроль перевіряє якість двох приладів. Необхідно знайти:

1) простір елементарних подій;

2) подію $A = \{$обидва прилади якісні$\}$;

3) подію $B = \{$хоча б один з приладів є неякісним$\}$;

4) подію $C = \{$серед перевірених приладів тільки один неякісний$\}$;

5) подію $A + B$;

6) подію AB;

7) подію $B + C$;

8) подію BC.

Розв'язання. Введемо позначення:

«Я» – прилад якісний,

«Н» – прилад неякісний.

Таким чином, результати перевірки двох приладів можна записати:

1) простір елементарних подій $\Omega = \{$ЯЯ, ЯН, НЯ, НН$\}$;

2) подія $A = \{$ЯЯ$\}$;

3) подія $B = \{$НЯ, ЯН, НН$\}$;

4) подія $C = \{$НЯ, ЯН$\}$;

5) подія $A + B = \Omega$;

6) подія $AB = \varnothing$ – неможлива подія;

7) подія $B + C = B$ – хоча б один з приладів є неякісним;

8) подія $BC = C$ – серед перевірених приладів тільки один неякісний.

Відповідь:

1) $\Omega = \{$ЯЯ, ЯН, НЯ, НН$\}$; 2) $A = \{$ЯЯ$\}$;

3) $B = \{$НЯ, ЯН, НН$\}$; 4) $C = \{$НЯ, ЯН$\}$;

5) $A + B = \Omega$; 6) $AB = \varnothing$; 7) $B + C = B$; 8) $BC = C$.

4.3 Класичне визначення ймовірності

Визначення. *Ймовірністю* випадкової події A називається невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій m $(0 \le m \le n)$, які сприяють появі події A, до кількості всіх рівноможливих несумісних елементарних подій n, що утворюють повну групу:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{4.1}$$

Властивості ймовірності події:

1) $0 \le P(A) \le 1$;
2) $P(\Omega) = 1$ − ймовірність достовірної події дорівнює 1;
3) $P(\varnothing)=0$ – ймовірність неможливої події дорівнює 0.

Зауваження. Використання класичного визначення ймовірності є обмеженим через те, що весь простір елементарних подій не завжди вдається розбити на рівноможливі події.

Приклад 19. З урни, що містить 10 куль, серед яких 6 білих, навмання дістанемо одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля є білою.

Розв'язання. За умовою подія $A = \{$навмання вийнята куля є білою$\}$. За формулою (4.1) отримаємо ймовірність події A:

$$P(A) = \frac{6}{10} = 0{,}6 .$$

Відповідь: 0,6.

4.4 Статистичне визначення ймовірності

Визначення. *Відносною частотою* $w(A)$ випадкової події A називається відношення кількості випробувань m, при яких подія A спостерігалася, до загальної кількості n проведених випробувань:

$$w(A) = \frac{m}{n}. \tag{4.2}$$

Очевидно, для відносної частоти виконується нерівність

$$0 \le w(A) \le 1.$$

Визначення. Число, навколо якого групується значення відносної частоти події A при великій кількості випробувань, називають *імовірністю* події A:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} w(A). \tag{4.3}$$

Таким чином, має місце статистична стійкість, яка полягає в тому, що при багатократних випробуваннях відносна частота, мало змінюючись, коливається навколо деякого числа, яке є ймовірністю події. Згідно зі статистичним визначенням за ймовірність події приймається відносна частота або число, близьке до неї.

Зауваження. Перевага статистичного визначення ймовірності полягає в тому, що в його основі лежить випробування. При цьому маємо й недоліки: необхідність великої кількості випробувань для впевненого визначення ймовірності.

Приклад 20. Відділ технічного контролю виявив у партії з 70 деталей 3 браковані деталі. Знайти відносну частоту бракованих деталей.

Розв'язання. За формулою (4.2) обчислюємо

$$w(A) = \frac{3}{70}.$$

Відповідь: $\frac{3}{70}$.

4.5 Теорема додавання ймовірностей подій

Теорема (*теорема додавання ймовірностей несумісних подій*). Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій, байдуже якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{4.4}$$

Наслідок. Ймовірність появи однієї з декількох попарно несумісних подій, байдуже якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n). \tag{4.5}$$

Зокрема для трьох подій

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C). \qquad (4.6)$$

Теорема (*теорема додавання ймовірностей сумісних подій*). Ймовірність появи однієї з двох сумісних подій, байдуже якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх одночасної появи:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (4.7)$$

Зауваження. Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, ..., A_n$, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1. \qquad (4.8)$$

Приклад 21. Куплено лотерейний квиток. Відомо, що ймовірність виграшу 0,05. Знайти ймовірність програшу.

Розв'язання. A={виграшний квиток}; B={програшний квиток}. Події A і B утворюють повну групу. Отже,

$$P(A)+P(B)=1 \Rightarrow P(B)=1-P(A)=1-0{,}05=0{,}95.$$

Відповідь: 0,95.

Визначення. *Протилежними* називають дві єдино можливі події, що утворюють повну групу. Протилежні події позначають A і $\overline{A}$. За формулою (4.8) отримаємо

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \qquad (4.9)$$

Зауваження. Якщо ймовірність однієї з двох протилежних подій позначити p, то ймовірність іншої події позначають q. Таким чином, отримаємо

$$p+q=1. \qquad (4.10)$$

4.6 Теорема добутку ймовірностей незалежних подій

Визначення. Події A і B називаються *незалежними*, якщо ймовірність однієї, будь-якої з них, не залежить від того, відбувається чи ні інша подія. У протилежному випадку події A і B називають *залежними*.

Теорема. Ймовірність сумісного настання двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B). \qquad (4.11)$$

Визначення. Декілька подій називають *незалежними у сукупності*, якщо незалежні кожні дві з них, незалежна кожна подія і всі можливі добутки останніх.

Тобто A_1,A_2,A_3 - незалежні події, якщо A_1 і A_2; A_1 і A_3; A_2 і A_3; A_1A_2 і A_3; A_1A_3 і A_2; A_2A_3 і A_1 - незалежні події.

Наслідок. Ймовірність сумісної появи декількох подій, незалежних в сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1A_2A_3...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot ...\cdot P(A_n). \qquad (4.12)$$

Зокрема для трьох подій A_1,A_2,A_3 формула (4.12) має вигляд

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C). \qquad (4.13)$$

Приклад 22. Студент розшукує потрібну йому формулу в трьох довідниках. Ймовірність того, що формула знаходиться в першому довіднику дорівнює 0,6, у другому 0,7, в третьому 0,8. Знайти ймовірність того, що потрібна формула знаходиться:

1) тільки в одному довіднику;
2) тільки в двох довідниках;
3) в усіх трьох довідниках;
4) хоча б в одному з довідників.

Розв'язання. Позначимо через A_1,A_2,A_3 випадкові події, які полягають у тому, що потрібна формула знаходиться в першому, другому і третьому довідниках відповідно. Тоді $\overline{A_1},\overline{A_2},\overline{A_3}$ − протилежні події відповідно. За умовою прикладу

$$p_1 = P(A_1) = 0{,}6; \quad p_2 = P(A_2) = 0{,}7; \quad p_3 = P(A_3) = 0{,}9.$$

Тоді ймовірності протилежних подій за формулою (4.10)

$$q_1 = P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4;$$
$$q_2 = P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;$$
$$q_3 = P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

1) подія $A = \{$потрібна формула знаходиться тільки в одному довіднику$\}$. За теоремами додавання та добутку незалежних подій (4.6), (4.13) обчислюємо

$$P(A) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 = \\ = 0{,}154\,;$$

2) подія $B = \{$потрібна формула знаходиться тільки в двох довідниках$\}$. Аналогічно за теоремами додавання та добутку незалежних подій отримаємо

$$P(B) = p_1 p_2 q_3 + q_1 p_2 p_3 + p_1 q_2 p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 = \\ = 0{,}456;$$

3) подія $C = \{$потрібна формула знаходиться в усіх трьох довідниках$\}$:

$$P(C) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}378;$$

4) подія $D = \{$потрібна формула знаходиться хоча б в одному з довідників$\}$:

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}154 + 0{,}456 + 0{,}378 = 0{,}988.$$

Відповідь: 1) 0,154; 2) 0,456; 3) 0,378; 4) 0,988.

Зауваження. Знаходження ймовірності появи хоча б однієї події буде також розглянуто в п. 4.8.

Приклад 23. Підприємець має акції двох компаній. Ймовірність отримання дивідендів по акціях тільки однієї з двох компаній дорівнює 0,38, причому для першої компанії ймовірність дорівнює 0,7. Яка ймовірність того, що підприємець отримає дивіденди по акціях другої компанії?

Розв'язання. Введемо позначення: події A_1, A_2 − отримання дивідентів по акціях першої та другої компаній відповідно, тоді

$$P(A_1) = 0{,}7,\ P(A_2) = x.$$

Подія $A = \{$отримання дивідендів по акціях тільки однієї з двох компаній$\}$, тому

$$P(A) = P\left(A_1\overline{A_2}\right) + P\left(\overline{A_1}A_2\right).$$

Складаємо рівняння:

$$\begin{aligned}
&0{,}7 \cdot (1 - x) + (1 - 0{,}7) \cdot x = 0{,}38;\\
&-0{,}4x = -0{,}32;\\
&x = 0{,}8.
\end{aligned}$$

Відповідь: 0,8.

4.7 Теорема добутку ймовірностей залежних подій. Умовна ймовірність

Визначення. *Умовною* ймовірністю $P_A(B)$ називають ймовірність події B, обчисленої за припущенням, що подія A вже відбулася:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0. \tag{4.14}$$

Аналогічно

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0. \tag{4.15}$$

Властивості умовної ймовірності:

1) $P_A(B) = 0$, якщо $AB = \varnothing$;
2) $P_A(B) = 1$, якщо $AB = A$;
3) у решті випадків $0 < P_A(B) < 1$.

Теорема. Ймовірність сумісної появи двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, яка обчислюється за умови, що перша подія вже відбулася:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) \text{ або } P(AB) = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (4.16)$$

Наслідок. Ймовірність сумісної появи кількох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності всіх інших, причому ймовірність кожної наступної події обчислюється за припущенням, що всі попередні події вже відбулися:

$$P(A_1 A_2 A_3 ... A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot ... \cdot P_{A_1 A_2 ... A_{n-1}}(A_n). \qquad (4.17)$$

Зокрема для трьох подій

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C). \qquad (4.18)$$

Приклад 24. В коробці знаходяться шість білих, три сині та дві чорні кульки. Навмання послідовно беруть три кульки. Яка ймовірність того, що перша кулька – біла, друга – синя, третя – чорна?

Розв'язання. $A = \{$перша витягнута кулька біла$\}$; $B = \{$друга витягнута кулька синя$\}$; $C = \{$третя витягнута кулька чорна$\}$. Тоді за формулою (4.18) отримаємо

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{6}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{55}.$$

Відповідь: $\frac{2}{55}$.

Зауваження. Нагадаємо, що події A і B називаються *незалежними*, якщо

$$P_B(A) = P(A) \text{ або } P_A(B) = P(B).$$

Тоді з формули (4.16) випливає розглянута раніше теорема добутку ймовірностей незалежних подій (4.11).

4.8 Ймовірність появи хоча б однієї події

Ймовірність появи *хоча б однієї* з подій $A_1, A_2, ..., A_n$, незалежних в сукупності, дорівнює

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot ... \cdot P(\overline{A_n}) \text{ або } P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n. \qquad (4.19)$$

Наслідок. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ рівноможливі, тоді отримаємо

$$P(A) = 1 - q^n. \qquad (4.20)$$

Приклад 25. Розглянемо ще раз пункт 4 прикладу 22.

Розв'язання. Формула (4.19) значно спрощує розрахунки. Дійсно

$$P(D) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}988.$$

Відповідь: 0,988.

Приклад 26. На рецепції готелю замовлення на відвідування ресторану на певну дату зробили 4 пари. Яка ймовірність того, що у призначений день свою присутність у ресторані підтвердить хоча б одна пара, якщо ймовірність відмови кожної пари відповідно дорівнює 0,2; 0,1; 0,3; 0,15?

Розв'язання. За умовою подія $A = \{$хоча б одна пара з чотирьох буде присутня в ресторані$\}$.

Ймовірності відмови кожної пари дорівнюють відповідно

$$q_1 = 0{,}2;\ q_2 = 0{,}1;\ q_3 = 0{,}3;\ q_4 = 0{,}15.$$

За формулою (4.19) отримаємо

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}15 = 0{,}9991.$$

Відповідь: 0,9991.

4.9 Формула повної ймовірності

Одним з наслідків застосування теорем додавання і добутку є формула повної ймовірності та формула Байєса.

Теорема (*формула повної ймовірності*). Якщо подія A може настати тільки за умови настання однієї з подій (*гіпотези*) $H_1, H_2, ..., H_n$, які утворюють повну групу, то ймовірність події A дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з подій $H_1, H_2, ..., H_n$ на відповідну умовну ймовірність події A, тобто

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A), \tag{4.21}$$

причому

$$P(H_1 + H_2 + ... + H_n) = 1.$$

Приклад 27. У продаж надходить продукція трьох виробників: 30 % першого, 20 % другого і решта третього. Продукція першого виробника містить 5 % прихованого дефекту, другого − 2 %, третього − 1 %. Знайти ймовірність придбання в даній мережі продукції без дефекту.

Розв'язання. Подія $A=\{$придбання в даній мережі продукції без дефекту$\}$. Розглянемо гіпотези $H_i=\{$продукція надійшла від і-го виробника$\}$, і=1,2,3. Тоді за умовою прикладу отримаємо

$$P(H_1) = 0{,}3; \quad P(H_2) = 0{,}2; \quad P(H_3) = 0{,}5.$$

Умовні ймовірності дорівнюють відповідно

$$P_{H_1}(A) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95; \; P_{H_2}(A) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98;$$
$$P_{H_3}(A) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99.$$

Тоді за формулою повної ймовірності (4.21) обчислюємо

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =$$

$$= 0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 0{,}98 + 0{,}5 \cdot 0{,}99 = 0{,}976.$$

Відповідь: 0,976.

4.10 Формула Байєса

Теорема. ***Формула Байєса*** *(теорема переоцінки гіпотез).* Нехай події $H_1, H_2, ..., H_n$ утворюють повну групу. Тоді умовна ймовірність події $H_i, i = 1,2,...,n$ за умови, що подія A вже відбулася, обчислюється так:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad i = 1,2,...,n, \tag{4.22}$$

де $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)$ − формула повної ймовірності.

Зауваження. Формула (4.22) дозволяє переоцінити ймовірності гіпотез $H_1, H_2, ..., H_n$ за умови, що подія A відбулася.

Приклад 28. Статистика запитів кредитів в деякому банку така: 25 % − бюджетні організації, 42 % − юридичні особи, решта – фізичні особи. Імовірності неповернення взятого кредиту відповідно дорівнюють 0,01, 0,05 і 0,2. Знайти:

1) ймовірність неповернення чергового кредиту;

2) ймовірність того, що кредит не повернула фізична особа.

Розв'язання. Подія $A = \{$неповернення кредиту$\}$. Розглянемо гіпотези:

$H_1 = \{$запит на кредит від бюджетної організації$\}$,

$H_2 = \{$запит на кредит від юридичної особи$\}$,

$H_3 = \{$запит на кредит від фізичної особи$\}$;

1) за умовою прикладу

$$P(H_1) = 0{,}25; \quad P(H_2) = 0{,}42; \quad P(H_3) = 1 - (0{,}25 + 0{,}42) = 0{,}33.$$

Тоді умовні ймовірності відповідно дорівнюють

$$P_{H_1}(A) = 0{,}01; P_{H_2}(A) = 0{,}05; P_{H_3}(A) = 0{,}2.$$

За формулою повної ймовірності (4.21) обчислюємо ймовірність неповернення кредиту:

$$P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}01 + 0{,}42 \cdot 0{,}05 + 0{,}33 \cdot 0{,}2 = 0{,}0895.$$

2) імовірність того, що кредит не повернула фізична особа, обчислюємо за формулою Байєса (4.22):

$$P_A(H_3)=\frac{P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}33\cdot 0{,}2}{0{,}0895}\approx 0{,}737\ .$$

Відповідь: 1) 0,0895; 2) 0,737.

5 ПОВТОРНІ ВИПРОБУВАННЯ

5.1 Формула Бернуллі. Найімовірніше число появи випадкової події

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких імовірність появи події A відома, однакова та дорівнює $p,\ 0<p<1$.

Імовірність того, що в результаті n незалежних випробувань подія A з'явиться рівно k разів, обчислюється за *формулою Бернуллі:*

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,1,\ldots,n, \tag{5.1}$$

де $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ − число сполучень;

p − ймовірність появи події A у випробуванні;

$q=1-p$ − ймовірність появи протилежної події $\overline{A}$ у випробуванні.

Зауваження:

• Ймовірність того, що в результаті n незалежних випробувань подія A з'явиться від k_1 до k_2 разів включно $k_1=\overline{0,n-1},\ k_2=\overline{1,n}$:

$$P_n(k_1\le k\le k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2}P_n(k)=\sum_{k=k_1}^{k_2}C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{5.2}$$

• Ймовірність того, що в результаті n незалежних випробувань подія A з'явиться хоча б один раз:

$$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n,\ k = 0,1,2,\dots,n. \tag{5.3}$$

• Ймовірність того, що в результаті n незалежних випробувань подія A з'явиться хоча б певну кількість k, $k = 1,2,\dots,n$ разів:

$$P_n(m \geq k) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} \quad \text{або} \quad P_n(m \geq k) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{5.4}$$

Приклад 29. В середньому 25 % пакетів акцій на аукціонах продаються за початковою заявленою ціною. Знайти ймовірність того, що з 5 пакетів акцій в результаті торгів за початковою заявленою ціною буде продано:

1) рівно 3 пакети;
2) менше 3-х пакетів;
3) не більше 3;
4) хоча б 3 пакети.

Розв'язання. За умовою прикладу

$$p = 0{,}25;\ q = 1 - p = 1 - 0{,}25 = 0{,}75;\ n = 5.$$

Тоді:

1) за формулою Бернуллі (5.1) отримаємо

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^{5-3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^2 =$$

$$= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0{,}015625 \cdot 0{,}5625 \approx 0{,}088;$$

2) за формулою (5.2)

$$P_5(0 \leq k \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} P_5(k) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = C_5^0 \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^5 +$$

$$+ C_5^1 \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^4 + C_5^2 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^3 =$$

$$=\frac{5!}{0!\cdot 5!}\cdot 0{,}25^0\cdot 0{,}75^5+\frac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot 0{,}25^1\cdot 0{,}75^4+\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 0{,}25^2\cdot 0{,}75^3\approx 0{,}896;$$

3) за формулою (5.2)

$$P_5(0\le k\le 3)=\sum_{k=0}^{3}P_5(k)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)+P_5(3)\approx$$
$$\approx 0{,}237+0{,}395+0{,}264+0{,}088=0{,}984;$$

4) враховуючи, що $k_1=3, k_2=5$ та відповідь з 1), маємо

$$P_5(3\le k\le 5)=1-P_5(0\le k\le 2)\approx 1-0{,}896=0{,}104.$$

Відповідь: 1) 0,088; 2) 0,896; 3) 0,984; 4) 0,104.

Визначення. *Найімовірнішим числом* появи випадкової події A в результаті n незалежних випробувань називається таке ціле невід'ємне число k_0, для якого ймовірність $P_n(k_0)$ є не меншою за ймовірність $P_n(k)$ будь-якого іншого наслідку серії випробувань, тобто

$$P_n(k_0)\ge P_n(k),\ \forall k.$$

Для знаходження найімовірнішого числа k_0 використовують формулу

$$np-q\le k_0\le np+p. \qquad (5.5)$$

Зауваження. Якщо $np+p$ – ціле число, то найімовірніших два числа $k_{01}=np+p$ і $k_{02}=np-q$, інакше – одне.

Приклад 30. Компанія має мережу дилерів на біржі. Ймовірність того, що кожний дилер буде грати вдало, дорівнює 0,8. В роботі беруть участь 5 дилерів. Знайти найімовірніше число дилерів, які будуть грати вдало, а також обчислити ймовірність цього числа. Вважати, що дії дилерів на біржі є незалежними.

Розв'язання. За умовою $n=5; p=0,8; q=0,2$. За формулою (5.5)

$$5\cdot 0,8-0,2\le k_0\le 5\cdot 0,8+0,8$$

$$3,8\le k_0\le 4,8$$

$$k_0=4.$$

Отже, $P_5(4)=C_5^4\cdot(0,8)^4\cdot(0,2)^1=0,4096$.

Відповідь: $k_0=4$, $P_5(4)=0,4096$.

Зауваження. При великих n обчислити $P_n(k)$ за формулою Бернуллі технічно складно. Тому в цих випадках користуються наближеними *асимптотичними* формулами: локальною та інтегральною теоремами Муавра-Лапласа, теоремою Пуассона.

Список літератури

1 Барковський В. В., Барковська Н. В. Математика для економістів: Вища математика. Київ: Національна академія управління, 1997. 397 с.

2 Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: навч. посіб.: у 2 ч. Київ: КНЕУ, 2001. Ч. 1. 546 с.

3 Васильченко І. П. Вища математика для економістів: підручник. Київ: Знання–Прес, 2002. 454 с.

4 Вища математика: підручник у 2 кн. Кн. 1. Основні розділи / за ред. Г. Л. Кулініча. Київ: Либідь, 2003. 400 с.

5 Вища математика: підручник у 2 кн. Кн. 2. Основні розділи / за ред. Г. Л. Кулініча. Київ: Либідь, 2003. 368 с.

6 Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посіб. Київ: А.С.К., 2001. 648 с.

7 Неміщ В. М., Процик А. І., Березька К. М. Вища математика (практикум): навч. посіб. Тернопіль: Економічна думка, 2001. 266 с.

8 Коваленко Л. Б., Станішевський С. О. Збірник тестових завдань для менеджерів: навч. посіб. Харків: ХНАМГ, 2010. 423 с.

9 Юрчак Н. С., Волохова Н. І., Панченко Н. Г. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Харків: УкрДАЗТ, 2009. 86 с.

10 Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики в управлінні процесами перевезень: навч. посіб. / Т. В. Бутько, Р. В. Вовк, Н. Г. Панченко, А. П. Рибалко. Харків: УкрДАЗТ, 2009. 308 с.

11 Методичні вказівки і завдання до виконання розрахунково-графічних і домашніх робіт для студентів денної форми навчання та до виконання контрольних робіт студентами заочної форми навчання факультету економіки транспорту / Н. С. Юрчак, Ю. О. Акімова, Н. І. Волохова, Т. І. Жулід. Харків: ХарДАЗТ, 2009. 65 с.

Н. Г. Панченко, М. Є. Резуненко

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

Частина 3

Підписано до друку 19.06.20 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк. арк. 2,5. Тираж 10. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.