МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра „Механіка і проектування машин”

З.О. Іванова, Н.А. Аксьонова

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій

Змістовний модуль "Кінематика"

Харків – 2010

Іванова З.О., Аксьонова Н.А. Теоретична механіка.

Кінематика: Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2010. – 58 с.

Конспект лекцій призначено для студентів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей механічного, будівельного та АТЗ факультетів. За обсягом конспект охоплює повний курс розділу "Кінематика" та являє собою складову частину методичного забезпечення роботи студентів при вивченні „Теоретичної механіки”.

Іл. 63, табл. 1, бібліогр.: 2 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри «Механіка і проектування машин» 25 листопада 2008 р., протокол № 3.

Рецензент

доц. О.В. Братченко

З.О. Іванова, Н.А. Аксьонова

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
Конспект лекцій

Змістовний модуль "Кінематика"

Відповідальний за випуск Аксьонова Н.А.

Редактор Губарева К.А.

Підписано до друку 19.12.08 р.
Формат паперу 60x84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 2,0. Обл.-вид.арк. 2,25.
Замовлення № Тираж 300 Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, майд. Фейєрбаха, 7

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра “Механіка і проектування машин”

З.О. Іванова, Н.А. Аксьонова

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни „ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”

змістовний модуль "К І Н Е М А Т И К А"

Харків 2010 р.

Іванова З.О., Аксьонова Н.А. Теоретична механіка. Кінематика: Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2010. – 58 с.

Конспект лекцій призначено для студентів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей механічного, будівельного та АТЗ факультетів. За обсягом конспект охоплює повний курс розділу "Кінематика" та являє собою складову частину методичного забезпечення роботи студентів при вивченні „Теоретичної механіки”.

Іл. 63, табл. 1, бібліогр.: 2 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Механіка і проектування машин 25 листопада 2008 р., протокол № 3.

Рецензент

доц. О.В. Братченко

ЗМІСТ

ВСТУП

Впровадження кредитно - модульної системи навчання вимагає нових підходів до викладання загальноінженерних дисциплін, у тому числі дисципліни "Теоретична механіка".

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами механічного, будівельного та АТЗ факультетів на I, II та III курсах дисципліни “Теоретична механіка”.

Теоретична механіка – це наука про загальні закони механічного руху та механічної взаємодії матеріальних тіл.

Теоретична механіка належить до фундаментальних дисциплін та створює основу багатьох інженерних дисциплін.

В основі теоретичної механіки лежать закони, що називаються законами класичної механіки, або законами Ньютона, які встановлені шляхом узагальнення результатів великої кількості експериментів і спостережень. Їхня справедливість перевірена багатовіковою практичною діяльністю людини.

Для вивчення всієї різноманітності механічних явищ теоретична механіка узагальнена в трьох розділах, які розглядаються у сукупності: статика, кінематика і динаміка.

При формуванні теоретичної бази з цієї дисципліни провідна роль відводиться лекційним курсам. Вищесказане зумовило необхідність розроблення і введення до навчального процесу методичного забезпечення (конспекту лекцій) з дисципліни “Теоретична механіка”, яке висвітлює основні питання розділу "Кінематика" і дає змогу активізувати роботу студентів, сприяє формуванню відповідних знань, умінь і навичок.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

Кінематикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл у просторі з геометричної точки зору без урахування сил, що викликають цей рух.

Механічним рухом називається зміна положення одного тіла відносно до іншого в просторі, який пов’язано з системою відліку, з плином часу. Механічний рух є найпростішою формою руху.

Простір у механіці розглядається як тривимірний евклідів простір і всі вимірювання у ньому проводяться на базі методів евклідової геометрії. За одиницю довжини при вимірюванні відстаней приймається один метр (1 м).

Система відліку – це система координат, невідривно пов’язана з тим тілом, відносно якого розглядається положення рухомого тіла або точки.

Час у механіці є універсальним, тобто однаковим в усіх системах відліку і незалежним від руху одних систем відліку відносно інших. Час є скалярною, додатною і безперервно змінною величиною. Всі кінематичні характеристики – відстань, швидкість, прискорення – розглядаються як функції часу. За одиницю часу прийнята одна секунда (1с).

Для розв'язання задач кінематики потрібно, щоб рух був заданий.

Кінематично **задати рух** або **закон руху** тіла (точки) означає задати положення цього тіла (точки) відносно даної системи відліку в будь – який момент часу. **Закон (або рівняння) руху** – це залежність між положенням тіла у просторі протягом часу. Закон руху визначає положення тіла (точки) у будь–який момент часу.

У кінематиці розглядаються всі тверді тіла як абсолютно тверді, тобто вважається, що відстань між кожними двома точками тіла весь час руху залишається незмінною.

Основна задача кінематики: Знаючи закон руху тіла (або точки), визначити всі кінематичні характеристики руху тіла в цілому та кожної його точки окремо.

1 КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1 Способи задання руху точки. Траєкторія руху точки

Матеріальна точка – фізичне тіло певної маси, розмірами якого можна знехтувати при вивченні його руху.

Задати спосіб описання руху точки означає встановити сукупність таких параметрів, за допомогою яких можна однозначно встановити положення точки у просторі в будь – який момент часу відносно обраної системи відліку.

Траєкторія руху – це безперервна лінія, яку описує рухома точка відносно обраної системи відліку.

За виглядом траєкторії можна охарактеризувати **вид руху** точки.

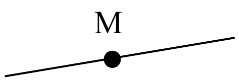


Рисунок 1

Якщо траєкторія руху точки М - пряма лінія, рух називається **прямолінійним** (рисунок 1).

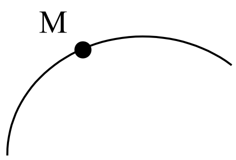


Рисунок 2

Якщо траєкторія руху точки М - крива лінія, рух називається **криволінійним** (рисунок 2).

Для задання руху точки існує **три способи**: натуральний, координатний, векторний.

Натуральний спосіб задання руху точки

Натуральним способом задання руху точки користуються, коли **траєкторія руху точки відома**.

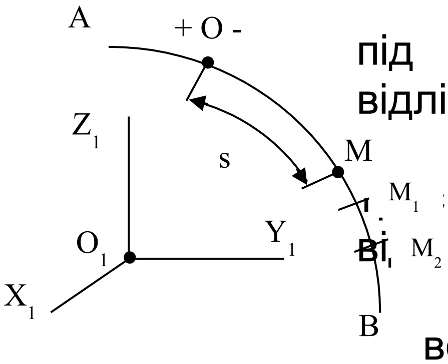


Рисунок 3

Крива АВ є траєкторією точки М під час її руху відносно системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ (рисунок 3).

О - нерухома точка на траєкторії, яку приймають за початок відліку.

Траєкторія АВ розглядається як криволінійна координатна вісь, на якій встановлено додатний та від'ємний напрямок.

Положення точки М на траєкторії у кожний момент часу однозначно встановлено **криволінійною (дуговою) координатою** s (s =ОМ), яка дорівнює відстані від точки О до точки М, виміряної вздовж дуги траєкторії і обраної з відповідним знаком. Під час руху точка буде займати положення M_1, M_2,..., тобто відстань s буде з плином часу змінюватись. Тоді положення точки М на траєкторії у будь-який момент часу надасть залежність криволінійної координати s від часу.

Закон руху точки вздовж траєкторії

$$s = f(t). \tag{1}$$

Для **задання руху точки натуральним способом** треба знати:

1) траєкторію точки (АВ);
2) початок відліку на траєкторії (т. О);
3) додатний та від’ємний напрямок відліку ($\pm$);
4) закон руху точки вздовж траєкторії $s = f(t)$ (рисунок 3).

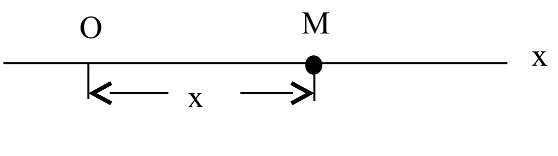


Рисунок 4

Величина s у рівнянні (1) визначає положення рухомої точки, а не довжину пройденого точкою шляху. У випадку прямолінійного руху, якщо направити вісь *Ox* вздовж траєкторії (рисунок 4), буде $s = x$ і закон прямолінійного руху точки виглядатиме як $x = f(t)$.

Координатний спосіб задання руху точки

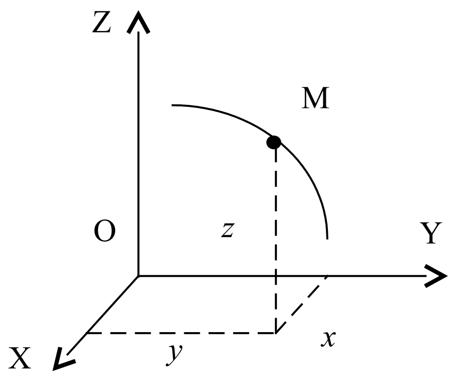


Рисунок 5

Траєкторія точки невідома.

Положення точки відносно системи відліку *Oxyz* у будь–який момент часу може бути визначено її декартовими координатами (*x,y,z*) (рисунок 5).

Закон руху точки в декартових прямокутних координатах:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \qquad (2)$$

Також рух точки можна задати, обираючи будь-яку іншу систему координат, наприклад, полярну, сферичну і т. п.

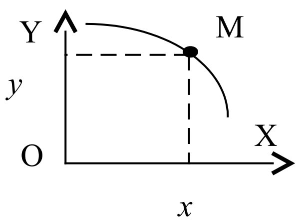


Рисунок 6

Рівняння руху точки в площині, вважаючи площиною руху *Oxy* (рисунок 6)

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t). \qquad (3)$$

Рівняння руху (2) і (3) являють собою одночасно **рівняння траєкторії точки в параметричній формі**, де параметром є час t. Виключаючи з рівнянь руху час t, можна знайти рівняння траєкторії у звичній формі, тобто у вигляді залежності між її координатами.

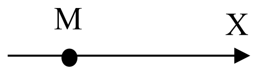


Рисунок 7

Рівняння прямолінійного руху точки вздовж координатної осі *Ox* (рисунок 7)

$$x = f(t), \qquad (4)$$

координатний та натуральний способи задання руху в цьому випадку (4) співпадають.

Векторний спосіб задання руху точки

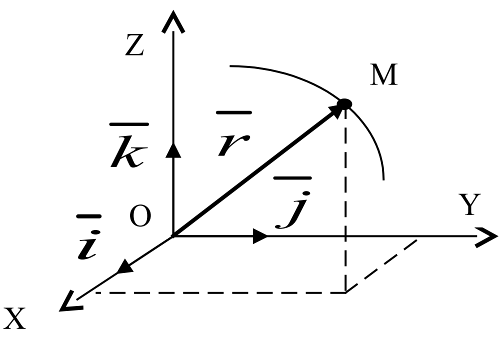


Рисунок 8

Положення точки в будь-який момент часу можна визначити, задаючи вектор $\bar{r}$, проведений із початку координат O в рухому точку M (рисунок 8).

Вектор $\bar{r}$ називається **радіусом – вектором** точки M, це вектор, проведений із нерухомої точки простору в рухому. Під час руху точки M вектор $\bar{r}$ змінюється з часом за модулем і за напрямком, тобто $\bar{r}$ є змінним вектором (вектором-функцією), який залежить від аргументу.

Закон руху точки у векторній формі

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \qquad (5)$$

Геометричне місце кінцевих точок радіуса-вектора $\bar{r}$ - **годограф** цього вектора, визначає **траєкторію** рухомої точки.

Векторний спосіб задання руху зручний при встановленні загальних залежностей, тому що дозволяє описати рух точки одним векторним рівнянням (5) замість трьох скалярних рівнянь (2).

Відносно координатних осей рівняння руху точки у векторній формі

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}, \qquad (6)$$

де проекції вектора $\bar{r}$ на осі *Ox, Oy, Oz* дорівнюють координатам точки М, тобто $r_X = x$, $r_Y = y$, $r_Z = z$.

1.2 Швидкість точки

Швидкість точки – одна з основних кінематичних характеристик руху, векторна величина, що характеризує бистроту та напрямок руху точки в даній системі відліку.

Швидкість точки як похідна за часом радіуса-вектора (визначення швидкості точки при векторному способі задання руху)

Кожному положенню точки М у моменти часу t і t_1 відповідають належні значення радіуса-вектора $\bar{r}(t)$ та $\bar{r}_1(t_1)$, тоді $\Delta t = t_1 - t$.

$\overline{MM_1}$ - в**ектор переміщення** точки за проміжок часу Δt, спрямований *за хордою*, якщо точка рухається криволінійно (рисунок 9), та *вздовж траєкторії*, якщо - прямолінійно (рисунок 10) та дорівнює $\overline{MM_1} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \Delta\bar{r}$.

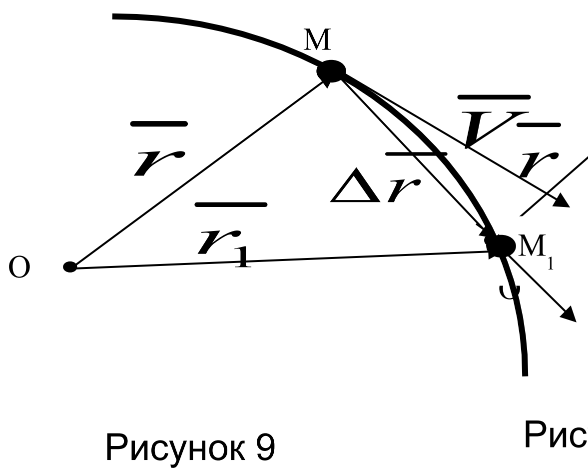


Рисунок 9

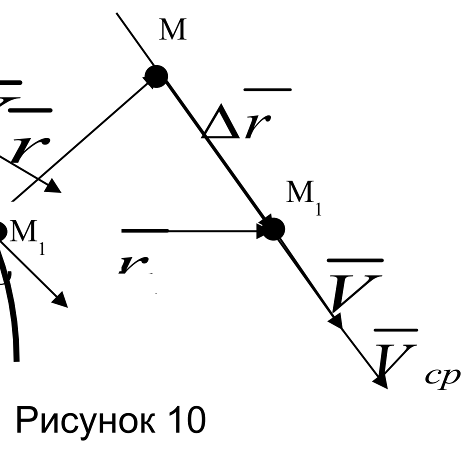


Рисунок 10

Середньою швидкістю точки називається векторна величина, яка дорівнює відношенню вектора переміщення точки до відповідного проміжку часу

$$\overline{V_{CP}} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}. \qquad (7)$$

Напрямок вектора $\overline{V_{CP}}$ співпадає з вектором переміщення $\overline{MM_1}$ (рисунки 9 і 10).

Очевидно, що чим менше буде проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$, для якого визначена середня швидкість, тим величина $\overline{V_{CP}}$ буде точніше характеризувати рух точки. Характеристика руху, яка не залежить від обрання проміжку часу Δt, - це швидкість точки в даний момент часу.

Швидкістю точки в даний момент часу t називається векторна величина $\overline{V}$, до якої спрямована середня швидкість $\overline{V_{CP}}$ при прямуванні проміжку часу Δt до нуля

$$\overline{V} = \lim_{\Delta t \to 0}(\overline{Vcp}) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}. \qquad (8)$$

Границя відношення $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ являє собою першу похідну від вектора $\overline{r}$ за аргументом t і визначається як похідна від скалярної функції $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{d\overline{r}}{dt}$.

Швидкість точки в даний момент часу – це векторна величина, яка дорівнює першій похідній від радіуса-вектора точки за часом

$$\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt}. \qquad (9)$$

Враховуючи, що граничним напрямком січної MM_1 є дотична, вектор швидкості точки в даний момент часу спрямований **по дотичній до траєкторії** точки в бік руху (рисунок 9). У випадку прямолінійного руху вектор $\overline{V}$ весь час спрямовується вздовж прямої (рисунок 10), за якою відбувається рух точки, і може змінюватись лише за модулем. При криволінійному русі окрім чисельної величини, весь час може змінюватись і напрямок вектора швидкості точки.

Одиницею вимірювання швидкості є метр за секунду (м/с).

Визначення швидкості за проекціями на координатні осі

При **координатному способі задання руху** точки, коли закон руху надано у вигляді рівнянь (2), проекції швидкості на координатні осі визначаються як перші похідні від належних координат точки за часом

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \qquad V_y = \frac{dy}{dt}, \qquad V_z = \frac{dz}{dt}. \tag{10}$$

Модуль вектора швидкості дорівнює

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \tag{11}$$

Напрямок вектора швидкості визначається за напрямними косинусами:

$$\cos(\overline{V},\overline{i}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\overline{V},\overline{j}) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(\overline{V},\overline{k}) = \frac{V_z}{V}. \tag{12}$$

Визначення швидкості точки при натуральному способі задання руху точки

Алгебраїчна (чисельна) величина швидкості точки в даний момент часу дорівнює першій похідній від переміщення (криволінійної координати) s точки за часом

$$V = \frac{ds}{dt}. \qquad (13)$$

Спрямовується вектор швидкості по дотичній до траєкторії, яка наперед відома.

Алгебраїчна (чисельна) величина швидкості визначає одночасно і модуль вектора швидкості, і бік, в який вона спрямована (за знаком похідної).

Якщо величина $V > 0$, то вектор швидкості $\overline{V}$ спрямований в додатному напрямку відліку переміщення s, а якщо $V < 0$, то у від'ємному.

Рівняння (13) вказує, що величину V можна визначати як відношення елементарного переміщення ds точки вздовж дуги траєкторії до відповідного проміжку часу dt.

1.3 Прискорення точки

Прискоренням точки називається векторна величина, яка характеризує зміну модуля і напрямку швидкості точки з плином часу.

Прискорення точки як похідна вектора швидкості за часом (визначення швидкості точки при векторному способі задання руху)

За проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ точка здійснює переміщення $\overline{MM_1}$ і приріст швидкості дорівнює $\overline{\Delta V} = \overline{V_1} - \overline{V}$. Вектор $\overline{\Delta V}$ завжди спрямований у бік увігнутості траєкторії.

Вектор середнього прискорення точки $\overline{a_{CP}}$ за проміжок часу Δt дорівнює відношенню приросту вектора швидкості $\overline{\Delta V}$ до відповідного проміжку часу Δt

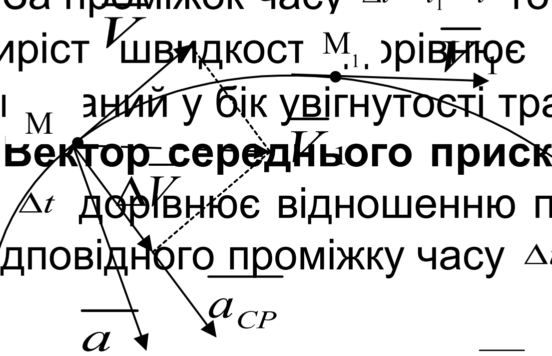


Рисунок 11

$$\overline{a_{CP}} = \frac{\overline{\Delta V}}{\Delta t}. \qquad (14)$$

Вектор середнього прискорення

точки $\overline{a_{CP}}$ має той же напрямок, що і вектор $\overline{\Delta V}$, тобто спрямований у бік увігнутості траєкторії (рисунок 11).

Прискоренням точки в даний момент часу t називається векторна величина $\overline{a}$, до якої спрямовується середнє прискорення $\overline{a_{CP}}$ при прямуванні проміжку часу Δt до нуля

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0}(\overline{a_{cp}}) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \overline{V}}{\Delta t} = \frac{d\overline{V}}{dt}. \qquad (15)$$

Таким чином, з урахуванням рівняння (9) буде отримано рівняння (16).

Прискоренням точки в даний момент часу називається векторна величина $\overline{a}$, яка дорівнює першій похідній від вектора швидкості або другій похідній від радіуса-вектора точки за часом

$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}. \qquad (16)$$

Вектор прискорення точки в даний момент часу $\overline{a}$ лежить у дотичній площині і спрямований у бік увігнутості траєкторії при криволінійному русі точки (рисунки 11 і 13) та вздовж прямої при прямолінійному русі.

Одиниці вимірювання прискорення - метр за секунду в квадраті (м/с^2).

При координатному способі задання руху точки проекції вектора прискорення точки в даний момент часу визначаються як перші похідні від проекцій швидкості або другі похідні від відповідних координат точки за часом

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (17)$$

Модуль вектора прискорення дорівнює

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (18)$$

Напрямок прискорення визначається із рівнянь напрямних косинусів

$$\cos(\overline{a},\overline{i}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\overline{a}\,\overline{j}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\overline{a},\overline{k}) = \frac{a_z}{a}. \qquad (19)$$

Дотичне та нормальне прискорення

При натуральному способі задання руху вектор прискорення точки $\overline{a}$ визначають за його проекціями на натуральні координатні осі (τ, n, b), які мають початок у точці М і рухаються разом з нею (рисунок 12).

Вісь Мτ спрямована вздовж дотичної до траєкторії у бік додатного відліку відстані s.

Вісь Мn спрямована за нормаллю, що лежить у площині співдотику, у бік увігнутості траєкторії (головна нормаль).

Вісь Мb спрямована перпендикулярно Мτ та Мn, формуючи з ними праву трійку (бінормаль).

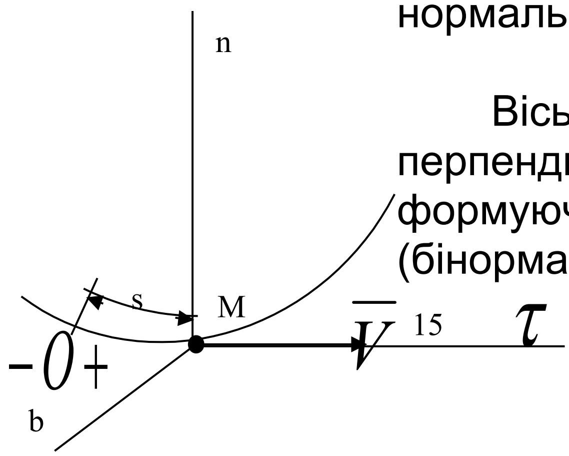
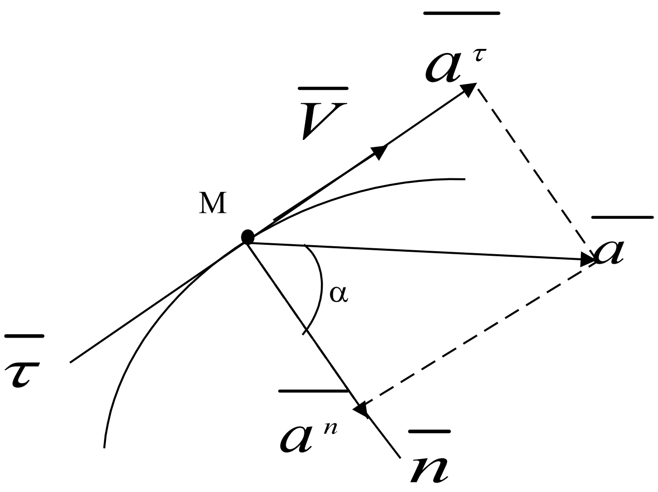


Рисунок 12

Прискорення точки $\overline{a}$, як було встановлено раніше, лежить у площині співдотику, тобто в площині (τ, n), тому проекція вектора $\overline{a}$ на бінормаль дорівнює нулю. Проекції вектора $\overline{a}$ на дві інші осі зображені на рисунку 13.



$\overline{a^\tau}$ - дотичне прискорення.
$\overline{a^n}$ - нормальне прискорення.
$\overline{a}$ - прискорення (повне).
($\overline{a^\tau} \perp \overline{a^n}$),

$tg\alpha = \dfrac{a^\tau}{a^n}$.

Рисунок 13

Прискорення точки (повне прискорення) $\overline{a}$ визначається як векторна сума дотичного та нормального прискорень (рисунок 13)

$$\overline{a} = \overline{a^\tau} + \overline{a^n}. \tag{20}$$

Модуль прискорення дорівнює

$$a = \sqrt{(a^\tau)^2 + (a^n)^2}. \tag{21}$$

Дотичним (тангенціальним) прискоренням a^τ називається проекція прискорення точки на дотичну до траєкторії, тобто на вектор швидкості.

Дотичне прискорення дорівнює першій похідній від алгебраїчної величини швидкості або другій похідній від криволінійної координати s за часом

$$a^{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{22}$$

Дотичне прискорення характеризує зміну швидкості точки **за величиною**, та існує тільки при нерівномірному русі.

Значення дотичного прискорення надає **характеристики руху** точки.

1 Якщо $a^{\tau} = \frac{dV}{dt}$ = 0, швидкість не змінюється за величиною.

2 $a^{\tau} = \frac{dV}{dt}$ >0, коли модуль швидкості зростає, рух точки **прискорений** (величини швидкості та дотичного прискорення мають однакові знаки, тобто вектор дотичного прискорення співпадає за напрямком з вектором швидкості) (рисунок 14).

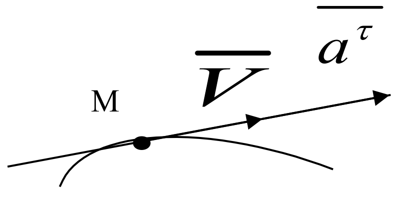


Рисунок 14

3 $a^{\tau} = \frac{dV}{dt}$ <0, коли модуль швидкості зменшується, рух точки **сповільнений** (величини швидкості та дотичного прискорення мають різні знаки, тобто вектор дотичного прискорення спрямований протилежно вектору швидкості) (рисунок 15).

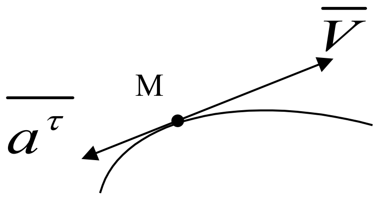


Рисунок 15

Нормальним прискоренням a^n називається проекція прискорення точки на головну внутрішню нормаль до траєкторії.

Нормальне прискорення дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривизни траєкторії у даній точці

$$a^n = \frac{V^2}{R}. \qquad (23)$$

Нормальне прискорення характеризує зміну швидкості **за напрямком** та існує тільки при криволінійному русі.

Нормальне прискорення є завжди додатною величиною.

Нормальне прискорення **характеризує рух за виглядом траєкторії** точки

- $a^n = \frac{V^2}{R} \neq 0$ - рух точки криволінійний ($R \neq 0$);
- $a^n = \frac{V^2}{R} = const$ - рух за колом радіуса R;
- $a^n = \frac{V^2}{R} = 0$ - рух точки прямолінійний ($R \to \infty$).

1.4 Класифікація рухів точки

Види руху точки наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Вид руху	Швидкість	Прискорення	Закон руху	Закон швидкості
Рівномірний прямолінійний	$\overline{V} = const$	$\overline{a}$ =0 $\overline{a^n}$ =0 ($R \to \infty$) $\overline{a^\tau}$ =0		
Нерівномірний прямолінійний	$\overline{V} \neq const$	$\overline{a} = \overline{a^\tau} \neq 0$ $\overline{a^n}$ =0 ($R \to \infty$)		
Рівномірний	$\overline{V} = const$	$\overline{a} = \overline{a^n} \neq 0$	$s = s_0 + V \cdot t$	

криволінійний		$\overline{a^\tau}=0$		
Рівнозмінний криволінійний	$\overline{V} \neq const$	$\overline{a}=\overline{a^\tau}+\overline{a^n}$ $\overline{a^n} \neq 0$ $\overline{a^\tau} \neq 0$	$s=s_0+V_0\cdot t+\frac{a^\tau}{2}\cdot t^2$	$V=V_0+a^\tau t$
Гармонійні коливання			$x=a\cdot\sin(kt+\alpha)$ a, $k=const$ (a - амплітуда, $T=\frac{2\pi}{k}$ - період коливань, k - частота, α - початкова фаза)	$x^{/}=ak\cdot\cos(kt)$

2 ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому будь – яка пряма лінія, проведена в тілі, рухається, залишаючись паралельною самій собі (власному початковому положенню).

Приклади поступального руху

1 Кузов автомобіля на прямолінійній горизонтальній ділянці дороги. При цьому траєкторії його точок будуть прямими лініями.

2 Вантаж AB при обертанні кривошипів O_1A та O_2B ($O_1A = O_2B$) рухається поступально. Траєкторії його точок – кола радіуса $R = O_1A = O_2B$ (рисунок 16).

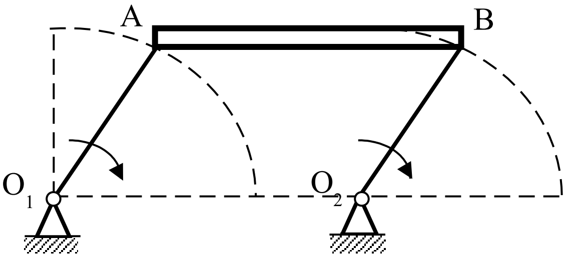


Рисунок 16

3 Рух вантажу на прямолінійній ділянці (рисунок 17). Траєкторії точок вантажу – прямі.

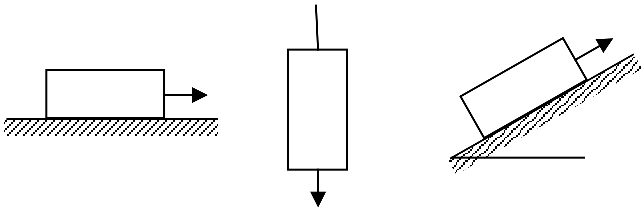


Рисунок 17

Всі властивості поступального руху визначаються **теоремою**:

При поступальному русі всі точки тіла описують однакові траєкторії і в кожний момент часу мають однакові за модулем і напрямком швидкості та прискорення.

Наслідок. Поступальний рух твердого тіла повністю визначається рухом будь–якої однієї його точки, зазвичай центром ваги, тобто кінематика поступального руху може бути зведена до кінематики точки.

При поступальному русі всі точки тіла рухаються тотожно.

Законом поступального руху твердого тіла є рівняння руху будь-якої точки цього тіла, зазвичай рівняння руху центра ваги тіла:

$$x_C = f_1(t), \quad y_C = f_2(t), \quad z_C = f_3(t). \tag{24}$$

При поступальному русі загальну для всіх точок тіла швидкість $\overline{V}$ називають швидкістю поступального руху тіла, а прискорення $\overline{a}$ - прискоренн

Рисунок 18

Вектори $\overline{V}$ і $\overline{a}$ зображують прикладеними до будь–якої точки тіла (рисунок 18).

C (x_C, y_C, z_C) - центр ваги тіла.

$\overline{r_C}$ - радіус-вектор точки C.

Поняття швидкості та прискорення тіла мають сенс тільки при поступальному русі. У всіх інших випадках точки тіла рухаються з різними швидкостями та прискореннями.

3 ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Обертальним рухом твердого тіла називається такий рух, при якому залишаються нерухомими його точки, що лежать на деякій прямій, яка називається віссю обертання. Всі інші точки тіла рухаються у площинах, перпендикулярних до осі обертання, і описують кола, радіуси яких дорівнюють відстаням від точок у тілі до осі обертання, а центри лежать на нерухомій осі (рисунок 19).

Обертання тіла навколо осі може проходити і так, що при цьому жодна з точок тіла не буде лежати на самій осі. Наприклад, обертання колеса, на [illegible]го на вісь, або обертання [illegible] що сидить [illegible]елі

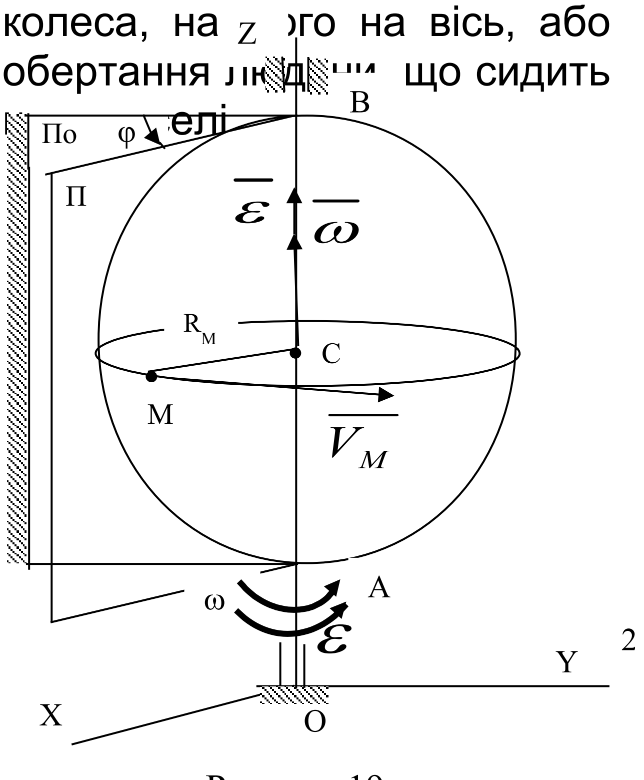


Рисунок 19

На рисунку 19 наведена схема обертального руху тіла.

По – нерухома півплощина,
П – рухома півплощина,
АВ – нерухома вісь обертання,
М – рухома точка тіла,
С – точка на осі обертання,
φ – кут обертання тіла, сформований між нерухомою і рухомою півплощинами.

Положення тіла в будь-який момент часу однозначно встановлюється обраним з відповідним знаком кутом обертання φ, який залежно від часу t відображає **закон обертального руху твердого тіла**

$$\varphi = f(t). \tag{25}$$

Кут обертання φ вважається додатним, якщо відкладений від нерухомої півплощини в напрямку проти ходу стрілки годинника (дивлячись з додатного кінця осі Az), та від'ємним, якщо за стрілкою годинника. Одиницею вимірювання кута обертання φ є радіан.

Основними кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є кутова швидкість ω та кутове прискорення ε (рисунок 19).

3.1 Кутова швидкість та кутове прискорення тіла

Кутова швидкість ω характеризує зміну кута обертання тіла з плином часу (рисунок 19).

Кутова швидкість тіла в даний момент часу ω чисельно дорівнює першій похідній від кута обертання за часом

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{26}$$

Знак кутової швидкості визначає напрямок обертання тіла, якщо:

- $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ > 0 – обертання тіла відбувається проти ходу стрілки годинника;
- $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ < 0 – обертання тіла відбувається за ходом стрілки годинника;
- $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ = 0 – має місце зупинка або зміна напрямку обертання.

Одиниці вимірювання кутової швидкості - радіан за секунду або одиниця за секунду (с $^{-1}$).

Кутове прискорення ε характеризує зміну кутової швидкості тіла з плином часу (рисунок 19).

Кутове прискорення тіла в даний момент часу ε чисельно дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута обертання тіла за часом

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{27}$$

Одиниця вимірювання кутового прискорення - радіан за секунду у квадраті або одиниця за секунду у квадраті (с $^{-2}$).

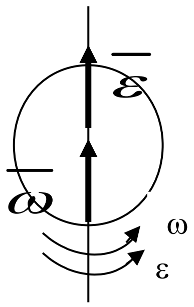
Обертання тіла вважається:

- прискореним, якщо модуль кутової швидкості з плином часу зростає, тобто величини ω та ε співпадають за знаком: ω >0 і ε >0 (рисунок 20);

- сповільненим, якщо модуль кутової швидкості з плином часу зменшується, тобто величини ω та ε протилежні за знаком: ω > 0 і ε < 0 (рисунок 21);

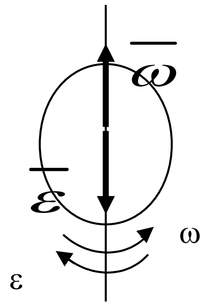
- **рівномірним**, якщо кутова швидкість тіла постійна $\omega = const$ та ε = 0.

Вектори кутової швидкості $\overline{\omega}$ та кутового прискорення $\overline{\varepsilon}$ спрямовуються вздовж осі обертання тіла в тому напрямку, звідки обертання видно проти ходу стрілки годинника. Такі вектори визначають одразу і модулі кутової швидкості та прискорення, і вісь обертання, і напрямок обертання навколо цієї осі (рисунки 20 та 21). Вектори $\overline{\omega}$ і $\overline{\varepsilon}$ не мають точки прикладання, є **ковзними умовними векторами.**



> 0
> 0
обертання
прискорене

Рисунок 20



> 0
< 0
обертання
сповільнене

Рисунок 21

Якщо кутова швидкість тіла весь час руху залишається постійною $\omega = const$, то обертання тіла називається **рівномірним**. Закон рівномірного обертання

$$\varphi = \omega \cdot t. \tag{28}$$

Наслідком закону (28) є рівняння кутової швидкості

$$\omega = \frac{\varphi}{t}. \tag{29}$$

Швидкість рівномірного обертання часто визначають **кількістю обертів** за хвилину n (об./хв). За один оберт тіло обертається на кут 2π, а за n обертів - на $2\pi n$, такий оберт створюється за час t = 1 хвилина = 60 секунд. Тоді із рівняння (29) виходить

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0{,}1n. \tag{30}$$

Якщо кутове прискорення тіла весь час руху залишається постійним $\varepsilon = const$, то обертання тіла називається **рівнозмінним**.

Закон рівнозмінного обертання

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}. \qquad (31)$$

Кутова швидкість рівнозмінного обертання

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t. \qquad (32)$$

Якщо величини ω та ε мають однакові знаки, обертання буде рівноприскореним, а якщо різні - рівносповільненим.

3.2 Швидкість та прискорення точки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі

Кінематичні характеристики окремих точок тіла різні, їх можна називати лінійними або обертальними (поворотними).

Швидкість V **точки тіла**, що обертається навколо нерухомої осі, чисельно дорівнює добутку кутової швидкості тіла ω на відстань від цієї точки до осі обертання R (рисунок 22)

$$V = \omega \cdot R. \qquad (33)$$

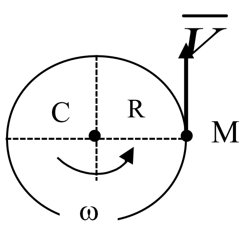


Рисунок 22

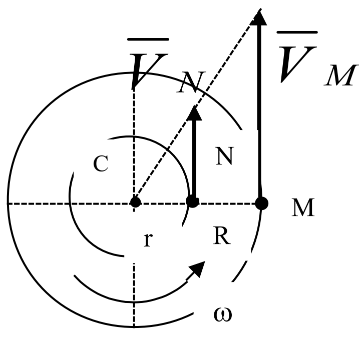


Рисунок 23

Вектор швидкості $\overline{V}$ спрямований по дотичній до кола обертання ($\overline{V} \perp R$), тобто перпендикулярно до площини, яка проходить через вісь обертання та точку М (рисунок 22).

Для всіх точок тіла ω в даний момент часу має однакове значення, тому, враховуючи рівняння (33), очевидно, що швидкості точок тіла при обертанні навколо нерухомої осі пропорційні відстаням від цих точок до осі обертання, тобто залежно від радіуса обертання розподіляються за лінійним законом (рисунок 23):

$$V_M = \omega \cdot R, \qquad V_N = \omega \cdot r.$$

Прискорення точки тіла $\overline{a}$ при обертанні складається з дотичного $\overline{a^\tau}$ (обертального $\overline{a^{ОБ}}$) та нормального $\overline{a^n}$ (доцентрового $\overline{a^Д}$).

Дотичне прискорення a^τ залежить від знака алгебраїчної величини кутового прискорення тіла ε і радіуса обертання R:

$$\left(a^\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{R \cdot d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon\right), \qquad a^\tau = R \cdot \varepsilon. \qquad (34)$$

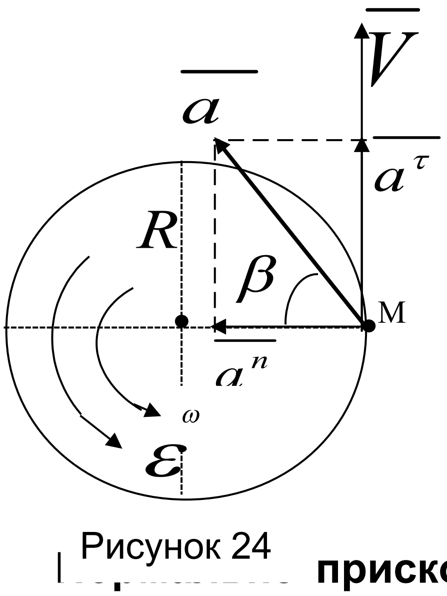


Рисунок 24

Вектор $\overline{a^\tau}$ спрямований по дотичній до траєкторії, якою є коло обертання ($\overline{a^\tau} \perp R$), тобто вздовж вектора швидкості $\overline{V}$ точки в напрямку кутового прискорення ε (у напрямку руху, якщо тіло обертається прискорено, або протилежно, якщо тіло обертається сповільнено) (рисунок 24).

прискорення a^n точки залежить від кутової швидкості ω обертання тіла та радіуса обертання R:

$$\left(a^n = \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} = \omega^2 \cdot R\right), \qquad a^n = \omega^2 \cdot R. \qquad (35)$$

Вектор нормального $\overline{a^n}$ прискорення завжди спрямований вздовж радіуса R до центра обертання, тобто від точки М до точки С (рисунок 24).

Прискорення (повне) $\overline{a}$ точки тіла визначають як векторну суму дотичного $\overline{a^\tau}$ та нормального $\overline{a^n}$ прискорень (рисунок 24)

$$\overline{a} = \overline{a^\tau} + \overline{a^n}. \qquad (36)$$

Модуль повного прискорення

$$a = \sqrt{(a^\tau)^2 + (a^n)^2} = R \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (37)$$

Кут β, який визначає відхилення вектора повного прискорення $\overline{a}$ від радіуса описаного точкою кола R, визначається за формулою

$$tg\beta = \frac{a^\tau}{a^n} = \frac{R \cdot \varepsilon}{R \cdot \omega^2} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \qquad (38)$$

Значення ε та ω в даний момент для всіх точок тіла однакові, тоді із формул (37) та (38) виходить, що прискорення всіх точок твердого тіла при обертанні пропорційні їх відстаням до осі обертання і в даний момент часу формують однаковий кут β з радіусами описаних кіл. Таким чином, β не залежить від положення точки в тілі, тобто однаковий для всіх точок тіла (рисунок 25).

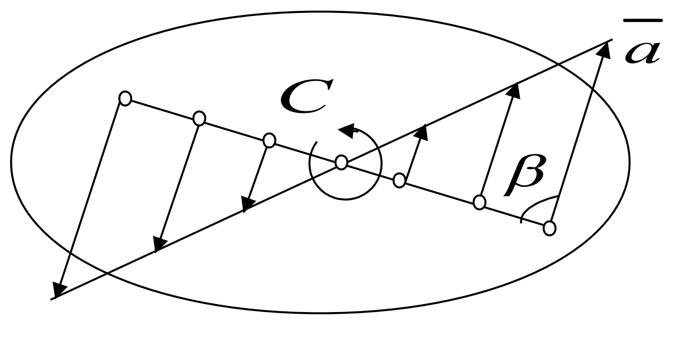


Рисунок 25

Формули (33) - (38) дозволяють визначити швидкість та прискорення будь-якої точки тіла, якщо відомий закон обертання тіла та відстань даної точки до осі обертання. За цими формулами можна, знаючи рух однієї точки тіла, визначити рух будь-якої іншої його точки, а також характеристики руху тіла в цілому.

4 ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Плоскопаралельним або **плоским** рухом твердого тіла називається такий рух, при якому всі точки тіла рухаються у площинах, паралельних деякій нерухомій площині, що називається базовою.

Плоский рух здійснюють багато часток механізмів та машин, наприклад, колесо, що котиться на прямолінійній ланці шляху, шатун в кривошипно - шатунному механізмі, колесо в планетарному механізмі.

Для вивчення плоского руху абсолютно твердого тіла достатньо розглянути рух однієї **плоскої фігури** S (перерізу) в нерухомій (базовій) площині Oxy. Площину Oxy поєднують з площиною рисунка, тоді тверде тіло зображують тільки плоскою фігурою S. Положення плоскої фігури S у площині Oxy визначається положенням будь-якого проведеного в ній прямолінійного відрізка АВ. У свою чергу, положення відрізка можна визначити координатами однієї точки, наприклад, точки А, x_A та y_A, а також кутом φ, який створює відрізок АВ з віссю Ox. Точку А, обрану для визначення положення плоскої фігури S, називають **полюсом** (рисунок 26).

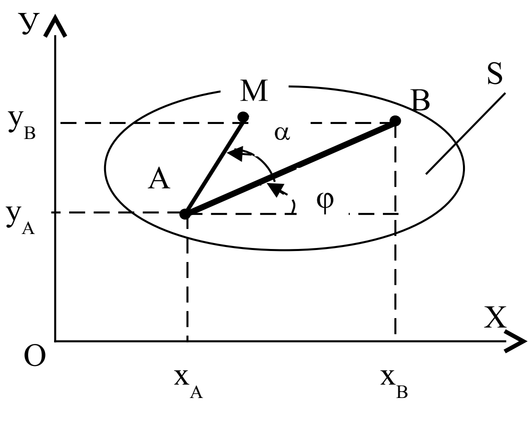


Рисунок 26

S – плоска фігура,
AB = const – відрізок абсолютно твердого тіла,
X_A, Y_A, X_B, Y_B – координати точок А і В,
φ – кут обертання відрізка,
α – кут обертання відрізка АМ,
точка А – **полюс.**

Під час руху тіла величини x_A, y_A та φ будуть змінюватись. Для визначення закону плоского руху, тобто для визначення положення тіла у просторі в будь-який момент часу треба знати залежності x_A, y_A та φ від часу t.

Закон плоскопаралельного руху

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \tag{39}$$

Рівняння $x_A = f_1(t)$ та $y_A = f_2(t)$ є рівняннями **поступального руху полюса А**, а рівняння $\varphi = f_3(t)$ описує закон **обертального руху** плоскої фігури навколо полюса.

Плоскопаралельний рух твердого тіла складається з поступального, при якому всі точки тіла рухаються як полюс, та обертального руху навколо полюса (обертальний рух тіла створюється навколо осі, що перпендикулярна до базової площини та проходить через полюс А, для скорочення, рух вважають обертанням навколо полюса А).

Обертальна частина руху не залежить від обрання полюса, а поступальна залежить.

Основні кінематичні характеристики плоского руху тіла

- швидкість $\overline{V_A}$ та прискорення $\overline{a_A}$ поступального руху полюса;
- кутова швидкість ω та кутове прискорення ε обертального руху навколо полюса.

Траєкторія довільної точки М (рисунок 26) плоскої фігури визначається відстанню від точки М до полюса А та кутом обертання α навколо полюса:

$$x = x_A + AM \cdot \cos(\varphi + \alpha), \quad y = y_A + AM \cdot \sin(\varphi + \alpha), \tag{40}$$

де x_A, y_A та φ - відомі за рівняннями (39) функції часу.

Рівняння (40) одночасно визначають закон руху довільної точки М в площині Oxy і рівняння її траєкторії у параметричному вигляді. Стандартне рівняння траєкторії можна отримати, виключивши із системи (40) час t.

4.1 Визначення швидкостей точок тіла

4.1.1 Теорема про швидкості точок та її наслідки

Плоскопаралельний рух твердого тіла складається з поступального руху, при якому всі точки тіла рухаються зі швидкістю полюса $\overline{V_A}$, та обертального руху навколо цього полюса. Швидкість будь-якої точки М тіла складається геометрично із швидкостей, які вона отримує у кожному з цих рухів.

Теорема про швидкості точок:

Швидкість будь-якої точки М тіла дорівнює геометричній сумі швидкості точки А, прийнятої за полюс, та швидкості точки М в її обертанні разом з тілом навколо цього полюса А.

$$\overline{V_M} = \overline{V_A} + \overline{V_{MA}}. \tag{41}$$

Швидкість точки М в її обертанні навколо полюса А дорівнює

$$V_{MA} = \omega \cdot MA, \tag{42}$$

де ω - кутова швидкість обертального руху тіла навколо полюса.

Вектор $\overline{V_{MA}}$ спрямований по дотичній до кола радіуса МА, за яким обертається точка М навколо полюса А, тобто $\overline{V_{MA}} \perp MA$

у напрямку обертання (за ω) (рисунок 27).

Швидкість точки М $\overline{V_M}$ визначається діагоналлю паралелограма, побудованого при точці М на швидкості полюса А, перенесеній у точку М, і швидкості точки М при обертанні навколо полюса А (рисунок 27).

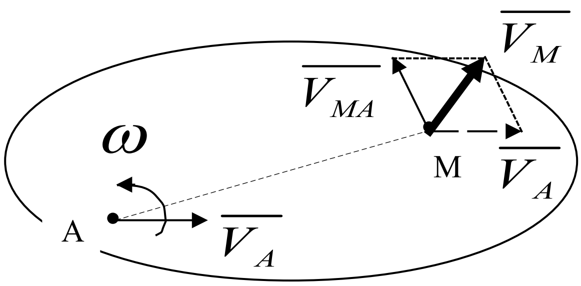


Рисунок 27

Точка А – полюс,

$\overline{V_A}$ – швидкість поступального руху полюса,

ω – кутова швидкість тіла,

$$V_{MA} = \omega \cdot MA, \qquad \overline{V_{MA}} \perp MA,$$

$$\overline{V_M} = \overline{V_A} + \overline{V_{MA}}.$$

Наслідок 1

Проекції швидкостей точок плоскої фігури (твердого тіла) на вісь, що проходить через ці точки, однакові.

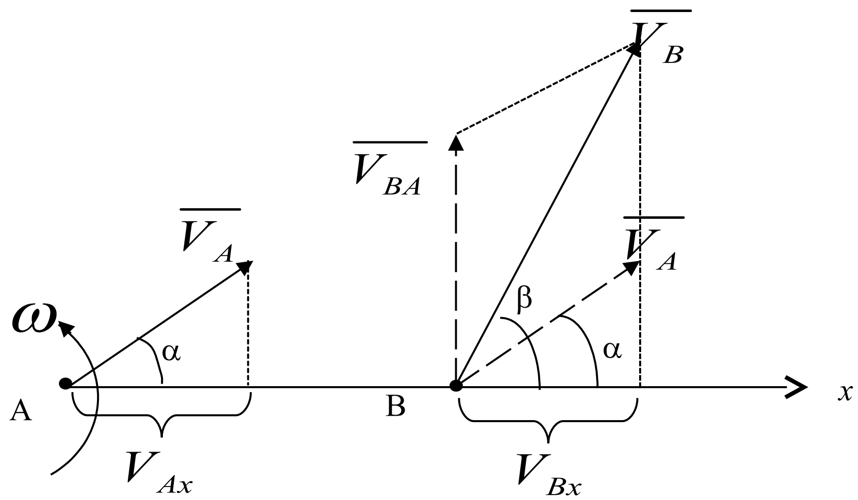


Рисунок 28

Якщо в даний момент часу відома швидкість $\overline{V_A}$ точки А плоскої фігури, напрямок її обертання та модуль кутової швидкості фігури ω (рисунок 28), швидкість точки В визначається як $\overline{V_B} = \overline{V_A} + \overline{V_{BA}}$, де швидкість обертання В навколо А дорівнює $V_{BA} = \omega \cdot BA$ і спрямовується $\overline{V_{BA}} \perp BA$ (рисунок 28).

Проекція швидкості $\overline{V_{BA}}$ на вісь Ox $V_{BAx} = 0$, тому що $\overline{V_{BA}} \perp Ox$. Тоді проекція швидкості точки В, знайдена як $V_{Bx} = V_{Ax} + V_{BAx}$, надасть рівняння $V_{Bx} = V_{Ax}$ і $Aa = Bb$, тобто проекції швидкостей однакові.

Наслідок 2

Кінці швидкостей точок незмінного відрізка лежать на одній прямій та розділяють цю пряму на частини, пропорційні відстаням між відповідними точками відрізка.

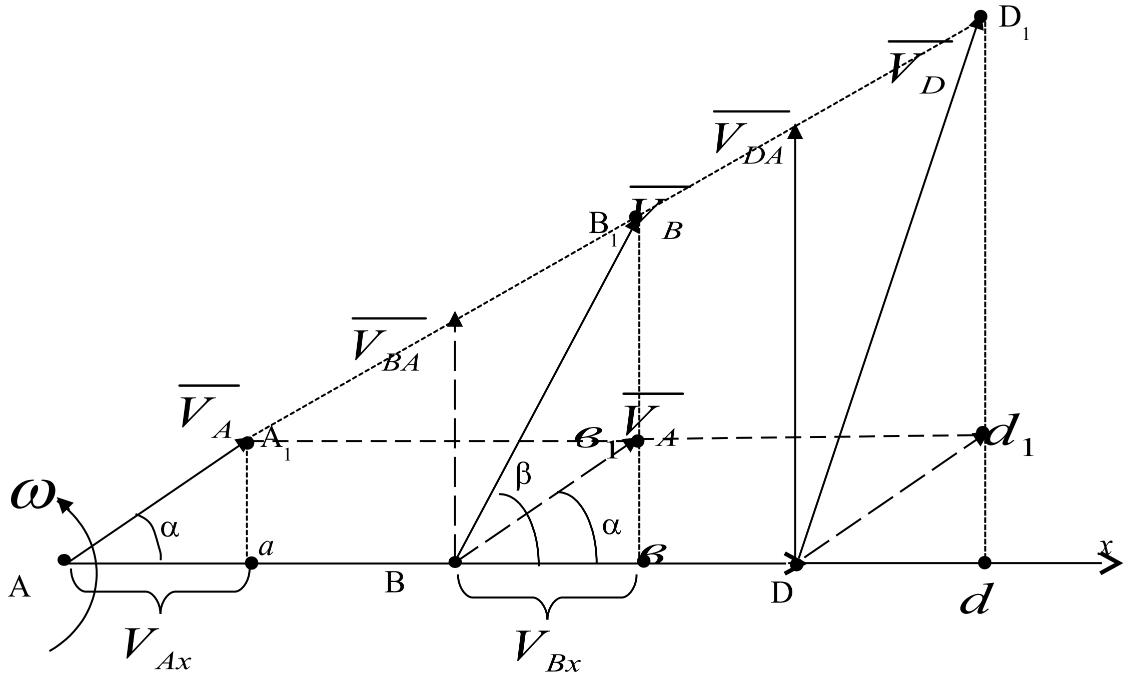


Рисунок 29

Розглядаючи рисунок 29, можна встановити, що $в_1B_1 = V_{AB} = AB \cdot \omega$, $d_1D_1 = V_{AD} = AD \cdot \omega$, звідки $\frac{d_1D_1}{в_1B_1} = \frac{AD}{AB}$. Враховуючи, що $A_1d_1 = AD$ і $A_1в_1 = AB$ як протилежні сторони паралелограмів, $\frac{d_1D_1}{в_1B_1} = \frac{A_1d_1}{A_1в_1}$. Ці співвідношення показують, що $A_1B_1D_1$ - відрізок прямої. Із подібності трикутників $A_1в_1B_1$ та $A_1d_1D_1$ видно, що $\frac{A_1D_1}{A_1B_1} = \frac{A_1d_1}{A_1в_1}$ або $\frac{A_1D_1}{A_1B_1} = \frac{AD}{AB}$ та $\frac{A_1D_1}{D_1B_1} = \frac{AD}{AB}$, тобто відстані між кінцями швидкостей пропорційні відстаням між відповідними точками.

4.1.2 Миттєвий центр швидкостей (МЦШ)

Миттєвий центр швидкостей (*МЦШ* – точка Р) - геометрична точка плоскої фігури, швидкість якої у даний момент часу дорівнює нулю: $\overline{V_P} = 0$.

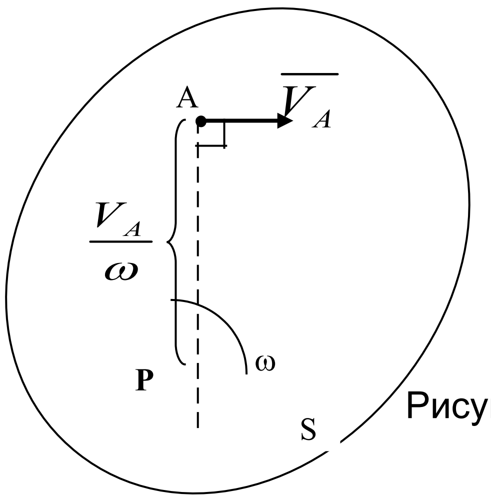


Рисунок 30

МЦШ (Р) плоскої фігури S знаходиться на перпендикулярі до напрямку швидкості полюса $\overline{V_A}$ на відстані, що дорівнює $\frac{V_A}{\omega}$ (рисунок 30).

Якщо ***МЦШ*** розглядається **як полюс**, тоді за теоремою у виразі формули (41) $\overline{V_A} = \overline{V_P} + \overline{V_{AP}} = \overline{V_{AP}}$, враховуючи, що $\overline{V_P} = 0$. Таким чином, швидкість довільної точки тіла, що належить плоскій фігурі, дорівнює швидкості її обертання навколо миттєвого центра швидкостей:

$$\overline{V_A} = \overline{V_{AP}}, \qquad \overline{V_B} = \overline{V_{BP}}, \qquad \overline{V_C} = \overline{V_{CP}} . \tag{43}$$

Швидкість будь-якої точки плоскої фігури (тіла) у кожний момент часу має модуль, що дорівнює добутку кутової швидкості фігури на довжину відрізка від точки до *МЦШ*, і спрямована (рисунок 31) перпендикулярно до цього відрізка в напрямку обертання фігури:

$$V_A = \omega \cdot AP \qquad \overline{V_A} \perp AP,$$

$$V_B = \omega \cdot BP \qquad \overline{V_B} \perp BP, \tag{44}$$

$$V_C = \omega \cdot CP \qquad \overline{V_C} \perp CP.$$

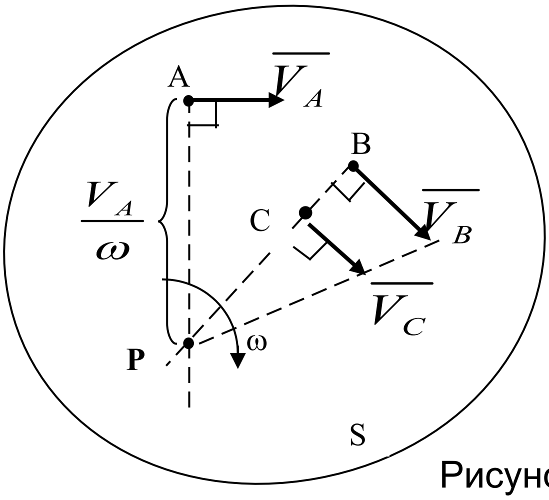


Рисунок 31

Модулі швидкостей точок плоскої фігури (тіла) у кожний момент часу пропорційні відстаням від цих точок до миттєвого центра швидкостей:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}, \qquad \frac{V_A}{V_C} = \frac{AP}{CP}, \qquad \frac{V_B}{V_C} = \frac{BP}{CP},$$

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}. \qquad (45)$$

Випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей

1 Якщо відома швидкість однієї точки тіла $\overline{V_A}$ за величиною та напрямком і кутова швидкість обертання тіла ω, МЦШ (Р) знаходиться на перпендикулярі до $\overline{V_A}$ (рисунок 32) на відстані

АР = $\frac{V_A}{\omega}$.

Швидкість точки В при цьому визначається як $V_B = \omega \cdot BP$ ($\overline{V_B} \perp BP$) та спрямовується у напрямку обертання тіла (за ω).

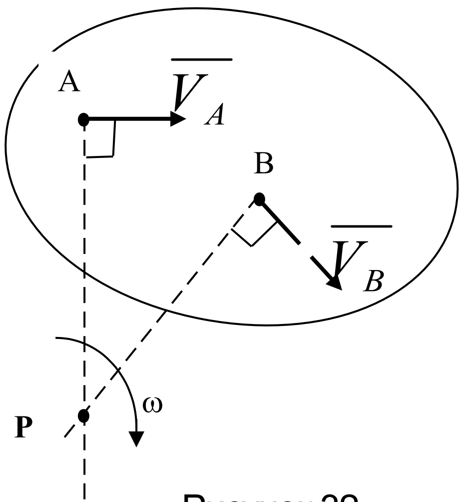


Рисунок 32

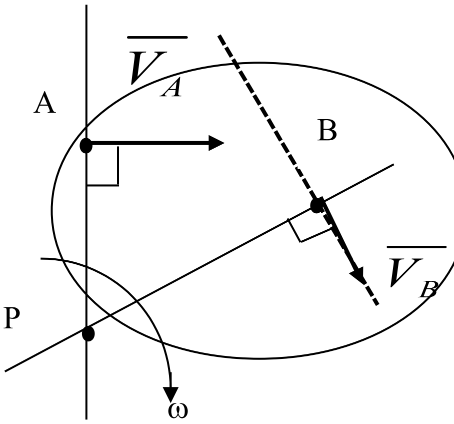


Рисунок 33

2 Якщо відома швидкість однієї точки тіла $\overline{V_A}$ за величиною та напрямком і швидкість $\overline{V_B}$ другої точки В тільки за напрямком, *МЦШ* (Р) знаходиться у точці перетину перпендикулярів до векторів $\overline{V_A}$ і $\overline{V_B}$, а кутова швидкість $\omega = \dfrac{V_A}{AP}$. Напрямок обертання визначається з вектором відомої швидкості $\overline{V_A}$. Модуль швидкості точки В дорівнює $V_B = \omega \cdot BP$ (рисунок 33).

3 Якщо відомі швидкості двох точок тіла $\overline{V_A}$ та $\overline{V_B}$ за величиною та напрямком, $\overline{V_A}$ II $\overline{V_B}$, AB $\perp$ $\overline{V_A}$, $\overline{V_B}$.

3а) $\overline{V_A}$ та $\overline{V_B}$ різні за модулем ($V_A \neq V_B$) та співпадають за напрямком (рисунок 34).

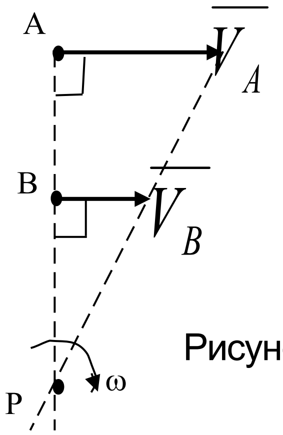


Рисунок 34

Миттєвий центр швидкостей знаходиться на лінії АВ за точкою з меншою швидкістю.

Кутова швидкість $\omega = \dfrac{V_A}{AP} = \dfrac{V_B}{BP}$.

3б) $\overline{V_A}$ та $\overline{V_B}$ різні за модулем ($V_A \neq V_B$) і протилежні за напрямком (рисунок 35).

Миттєвий центр швидкостей знаходиться на лінії АВ між точками, ближче до точки з меншою швидкістю.

Кутова швидкість $\omega = \dfrac{V_A}{AP} = \dfrac{V_B}{BP}$.

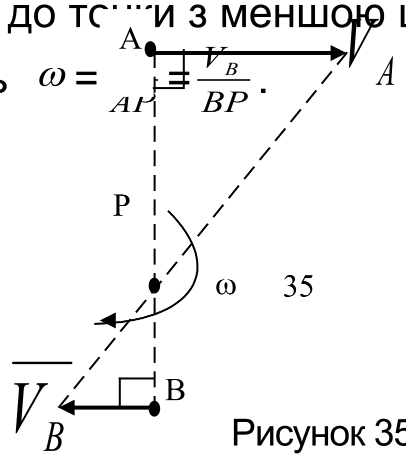


Рисунок 35

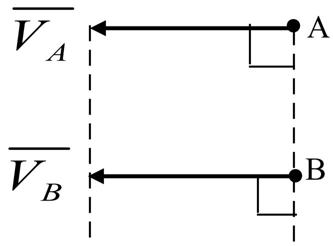


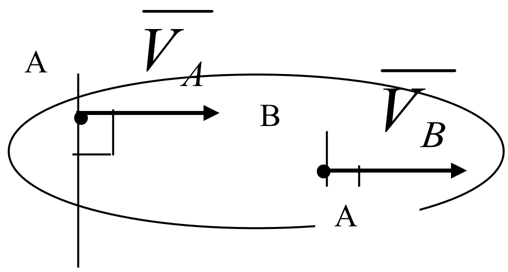
Рисунок 36

3в) $\overline{V_A}$ та $\overline{V_B}$ однакові за модулем ($V_A = V_B$) (рисунок 36).

Миттєвий центр швидкостей знаходиться у нескінченності (AP=∞).

Кутова швидкість $\omega = \dfrac{V_A}{AP} = \dfrac{V_A}{\infty} = 0$.

4 Якщо відомі швидкості двох точок тіла $\overline{V_A}$ та $\overline{V_B}$ за величиною та напрямком, $\overline{V_A}$ II $\overline{V_B}$, $\overline{V_A}$ = $\overline{V_B}$ і AB не перпендикулярний $\overline{V_A}$ і $\overline{V_B}$ (рисунок 37).



Миттєвий центр швидкостей знаходиться у нескінченності (AP=BP=...=∞).

Кутова швидкість $\omega = \dfrac{V_A}{AP} = \dfrac{V_A}{\infty} = 0$.

Рух тіла – миттєво-поступальний ($\overline{V_A}$ = $\overline{V_B}$, $\overline{a_A} \neq \overline{a_B}$).

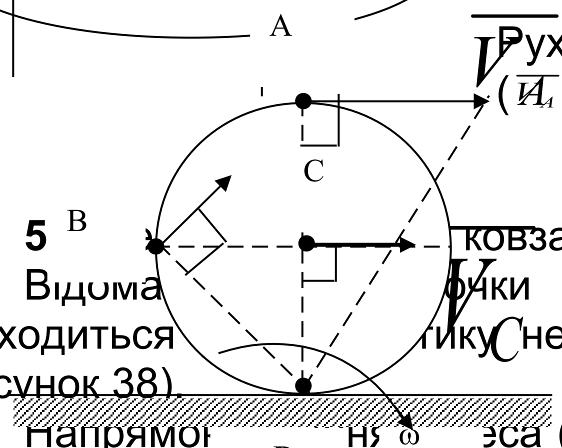


Рисунок 38

5 [illegible] ковзання.

Відома [illegible] точки центра колеса $\overline{V_C}$. *МЦШ* (P) знаходиться [illegible] тику нерухомої та рухомої поверхонь (рисунок 38).

Напрямок [illegible] колеса (напрямок кутової швидкості ω) визначається [illegible] напрямком вект[illegible] поступального руху центра колеса $\overline{V_C}$

$$\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_C}{R},$$

$$V_B = \omega \cdot BP, \quad \overline{V_B} \perp BP,$$

$$V_A = \omega \cdot AP = \omega \cdot 2R, \quad \overline{V_A} \perp AP,$$

$$V_A = 2V_C.$$

4.2 Визначення прискорень точок тіла

4.2.1 Теорема про прискорення точок

Теорема про прискорення точок:

Прискорення довільної точки М тіла дорівнює геометричній сумі прискорення будь-якої іншої точки А, обраної як полюс, та прискорення цієї точки М в її обертанні разом з тілом навколо полюса.

$$\overline{a}_M = \overline{a_A} + \overline{a_{MA}} . \qquad (46)$$

Прискорення точки М в її обертальному русі разом з тілом навколо полюса А складається з дотичного $\overline{a^{\tau}_{MA}}$ та нормального $\overline{a^{n}_{MA}}$, тобто

$$\overline{a}_{MA} = \overline{a^{\tau}_{MA}} + \overline{a^{n}_{MA}} . \qquad (47)$$

Дотичне прискорення точки М в обертанні навколо полюса А дорівнює

$$a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot MA . \qquad (48)$$

Вектор $\overline{a^{\tau}_{MA}}$ спрямований перпендикулярно до відстані від точки М до полюса А ($\overline{a^{\tau}_{MA}} \perp MA$) за напрямком кутового прискорення ε. При прискореному обертанні дотичне прискорення $\overline{a_{MA}^{\tau}}$ спрямоване по відношенню до полюса в бік обертання плоскої фігури, при сповільненому обертанні - протилежно, тобто напрямок $\overline{a_{MA}^{\tau}}$ по відношенню до полюса завжди відповідає напрямку кутового прискорення ε (рисунок 39).

Нормальне прискорення точки М в обертанні навколо полюса А дорівнює

$$a_{MA}^{n} = \omega^{2} \cdot MA. \tag{49}$$

Вектор $\overline{a_{MA}^{n}}$ спрямований з точки М до полюса А ($M \to A$) (рисунок 39).

Модуль прискорення точки М в обертанні разом з тілом навколо полюса А дорівнює

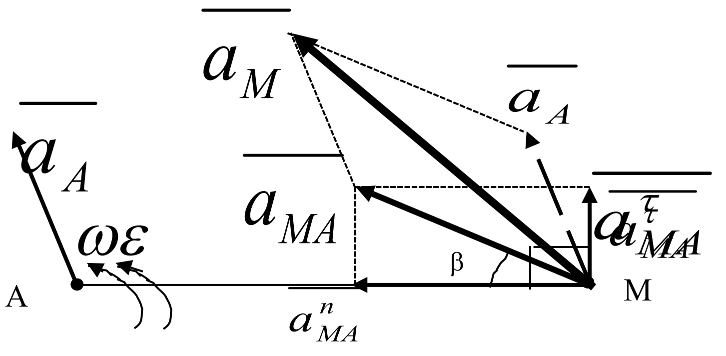
$$a_{MA} = \sqrt{(a_{MA}^{\tau})^{2} + (a_{MA}^{n})^{2}} = MA \cdot \sqrt{\varepsilon^{2} + \omega^{4}}. \tag{50}$$

Напрямок вектора $\overline{a_{MA}}$ знаходиться за допомогою побудови діагоналі прямокутника, складеного векторами $\overline{a_{MA}^{\tau}}$ та $\overline{a_{MA}^{n}}$ (рисунок 39).

Таким чином, поєднуючи теорему (46) та рівняння (48) і (49), отримуємо прискорення точки М

$$\overline{a_M} = \overline{a_A} + \overline{a_{MA}^{\tau}} + \overline{a_{MA}^{n}}. \tag{51}$$

Прискорення точки М $\overline{a_M}$ визначається як діагональ паралелограма прискорень, сторонами якого є прискорення полюса $\overline{a_A}$ та прискорення точки М $\overline{a_{MA}}$ в її обертанні разом з тілом навколо полюса А (рисунок 39).



$$\overline{a_M} = \overline{a_A} + \overline{a_{MA}},$$

$$\overline{a_{MA}} = \overline{a_{MA}^{\tau}} + \overline{a_{MA}^{n}},$$

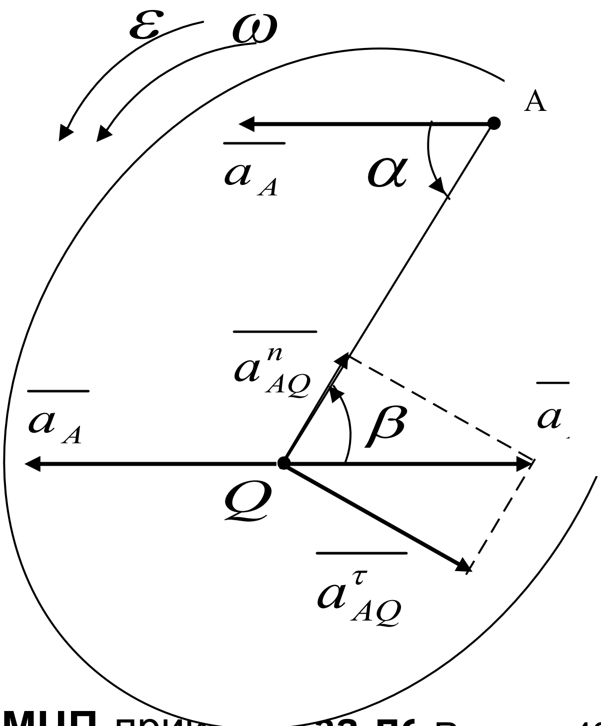
$$tg\beta = \frac{a_{MA}^{\tau}}{a_{MA}^{n}} = \frac{\varepsilon}{\omega^{2}}.$$

Рисунок 39

4.2.2 Миттєвий центр прискорень (МЦП)

Точка Q, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю, називається **миттєвим центром прискорень** (***МЦП***).

Миттєвий центр прискорень знаходиться на відрізку, який створює з прискоренням полюса (точкою А) $\overline{a_A}$ кут $\alpha = arctg(\varepsilon / \omega^2)$, відкладений від прискорення полюса в бік, що відповідає напрямку кутового прискорення ε, на відстані від полюса $AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ (рисунок 40).



Точка А - полюс.

Точка Q - миттєвий центр прискорень.

Рисунок 40

Якщо **МЦП** прийняти **за п** рискорення будь-якої точки плоскої фігури в дании момент визначається як прискорення цієї точки в обертальному русі фігури навколо миттєвого центра прискорень (рисунок 41)

$$\overline{a_C} = \overline{a_Q} + \overline{a_{CQ}} = \overline{a_{CQ}} \qquad (\overline{a_Q} = 0)\ . \tag{52}$$

Аналогічно, $\overline{a_B} = \overline{a_{BQ}}$, $\overline{a_D} = \overline{a_{DQ}}$. Звідси згідно з (50):

$$a_C = a_{CQ} = CQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ ,$$

$$a_B = a_{BQ} = BQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ , \qquad (53)$$

$$a_D = a_{DQ} = DQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ .$$

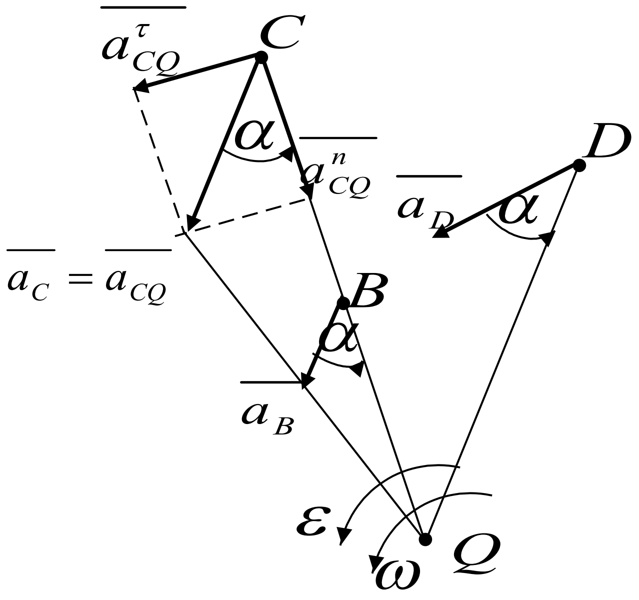


Рисунок 41

Таким чином, $\dfrac{a_B}{a_C} = \dfrac{QB}{QC}$,

$$\frac{a_B}{a_D} = \frac{QB}{QD}\ . \qquad (54)$$

Модулі прискорень точок плоскої фігури в кожний момент часу пропорційні відстаням від цих точок до *МЦП*, а вектори прискорень створюють з відрізками від точок до *МЦП* однаковий кут $\alpha = arctg(\varepsilon / \omega^2)$.

Миттєвий центр прискорень Q та миттєвий центр швидкостей P є різними точками плоскої фігури (рисунок 42).

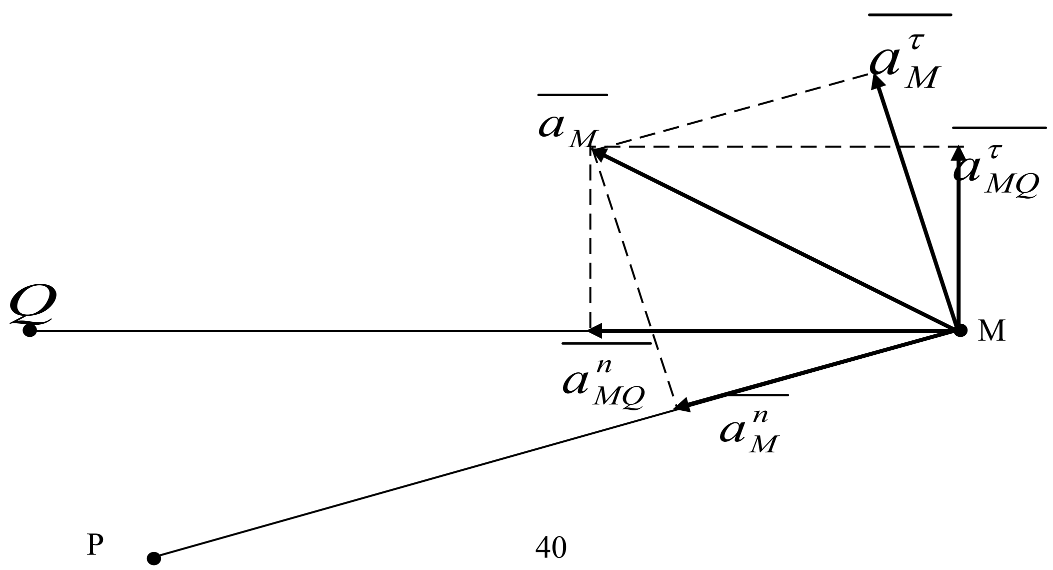


Рисунок 42

Прискорення точки М $\overline{a_M}$ (рисунок 42) розкладені спочатку на дотичне $\overline{a_M^\tau}$ та нормальне $\overline{a_M^n}$, а потім на дотичне $\overline{a_{MQ}^\tau}$ та нормальне $\overline{a_{MQ}^n}$ в обертанні фігури навколо миттєвого центра прискорень Q.

Дотичне $\overline{a_M^\tau}$ та нормальне $\overline{a_M^n}$ прискорення спрямовуються по дотичній та головній нормалі до траєкторії точки М, тобто перпендикулярно до відрізка РМ (вздовж вектора швидкості $\overline{V_M}$) та вздовж відрізка РМ.

Дотичне $\overline{a_{MQ}^\tau}$ та нормальне $\overline{a_{MQ}^n}$ прискорення обертання точки М навколо точки Q спрямовуються перпендикулярно до відрізка QM, що з'єднує точку М з миттєвим центром прискорень, та вздовж цього відрізка.

Таким чином, $\overline{a_{MQ}^\tau}$ та $\overline{a_{MQ}^n}$ не слід плутати з істинними дотичним та нормальним прискореннями точки $\overline{a_M^\tau}$ і $\overline{a_M^n}$.

Випадки визначення положення миттєвого центра прискорень

1 Якщо відома точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент дорівнює нулю, ця точка і є миттєвим центром прискорень.

Кочення без ковзання колеса розглядається при постійній швидкості центра $\overline{V_C}$.

МЦШ - точка Р, тоді швидкість $V_C = CP \cdot \omega = R \cdot \omega$, де R - радіус колеса.

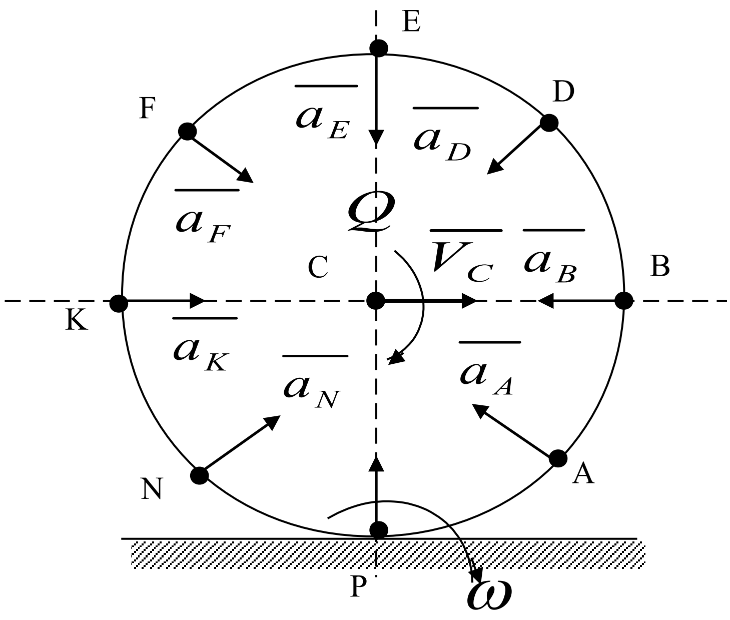


Рисунок 43

Кутова швидкість $\omega = \frac{V_C}{R} = const$. Центр колеса рухається рівномірно прямолінійно, тоді його прискорення $\overline{a_C} = 0$. Таким чином, центр колеса С є миттєвим центром прискорень Q. Обертання колеса рівномірне, тобто прискорення всіх точок колеса (рисунок 43) є доцентровими прискореннями в їх обертальному русі навколо *МЦП* (вектори спрямовуються до *МЦП*) і дорівнюють

$$a_A = a_B = a_D = ... = a_P = R \cdot \omega^2 = \frac{V_C^2}{R}. \tag{55}$$

Миттєвий центр швидкостей Р не маючи швидкості ($\overline{V_P} = 0$), має прискорення (55).

2 Відомі модуль і напрямок прискорення будь-якої точки А плоскої фігури $\overline{a_A}$, а також кутова швидкість ω та кутове прискорення ε фігури.

2.1 Нерівномірне обертання $\omega \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$. У такому випадку миттєвий центр прискорень знаходиться на відрізку, який створює з напрямком прискорення $\overline{a_A}$ кут $\alpha = arctg(\varepsilon / \omega^2)$, відкладений від прискорення точки А в бік, що відповідає напрямку кутового прискорення ε, на відстані від точки $AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ (рисунки 44 і 45).

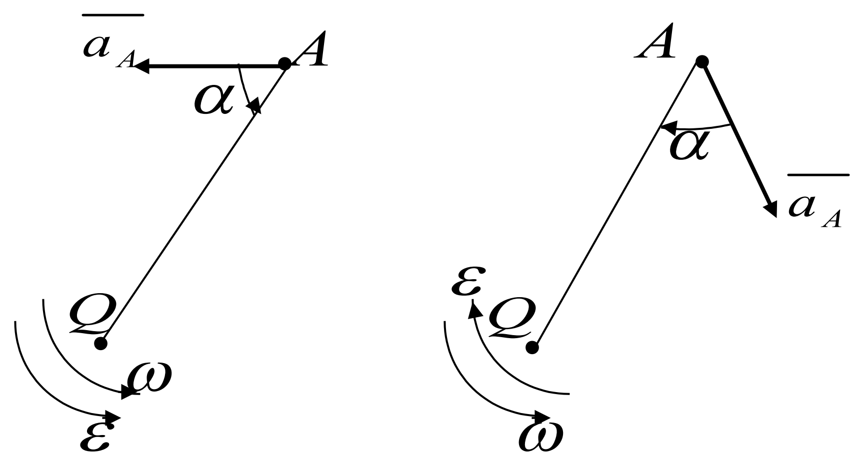


Рисунок 44 - Прискорене обертання плоскої фігури

Рисунок 45 - Сповільнене обертання плоскої фігури

2.2 Рівномірне обертання $\omega \neq 0$, $\varepsilon = 0$ (також момент коли $\varepsilon = 0$ при нерівномірному обертанні) (рисунок 46).

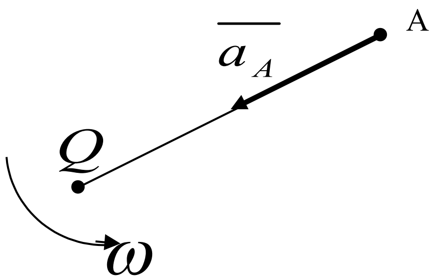


Рисунок 46

У такому випадку $tg\alpha = \varepsilon / \omega^2 = 0$ і $\alpha = 0$, тобто прискорення всіх точок спрямовані до *МЦП*. Відстані від точки до *МЦП* визначаються як $AQ = \dfrac{a_A}{\omega^2}$.

2.3 Момент, коли кутова швидкість стає рівною нулю $\omega = 0$, $\varepsilon \neq 0$ (рисунок 47).

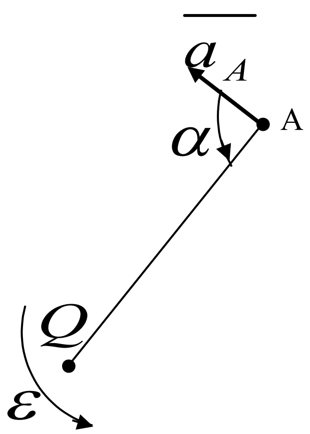


Рисунок 47

У цьому випадку $tg\alpha = \varepsilon / \omega^2 = \infty$ і $\alpha = 90^O$, тобто прискорення всіх точок спрямовані перпендикулярно до відстаней, що з'єднують ці точки з *МЦП*. Відстань визначається як $AQ = \dfrac{a_A}{\varepsilon}$. Кутова швидкість фігури зазвичай стає рівною нулю $\omega = 0$ при зміні напрямку обертання фігури.

2.4 Момент, коли кутова швидкість та кутове прискорення стають рівними нулю при непоступальному русі $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$ (рисунок 48).

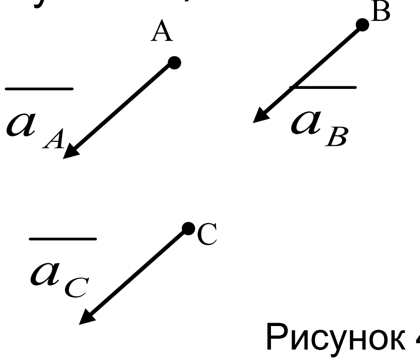


Рисунок 48

Прискорення всіх точок плоскої фігури в даний момент часу геометрично рівні, тому що прискорення будь-якої точки дорівнює прискоренню полюса,

$\overline{a_A} = \overline{a_B} = \overline{a_C}$ і $AQ = \dfrac{a_A}{0} = \infty$.

3 Відомі модулі і напрямки прискорень будь-яких двох точок А і В плоскої фігури $\overline{a_A}$ і $\overline{a_B}$ (рисунок 49).

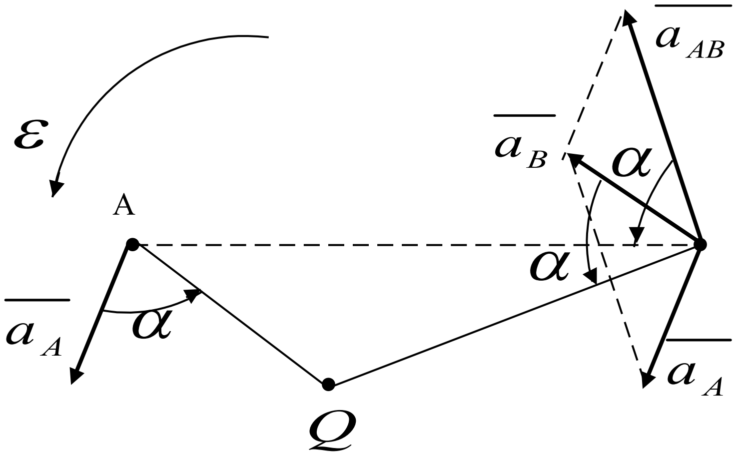


Рисунок 49

Точка А обирається як $\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}}$ за теоремою (46). Стороною паралелограма в точці В встановлюється $\overline{a_{BA}}$, яке визначає кут $\alpha = arctg(\varepsilon / \omega^2)$ з відрізком АВ і напрямок кутового прискорення ε. Точка перетину ліній, відкладених за кутом α в напрямку ε від відомих прискорень точок А і В, є миттєвим центром прискорень Q.

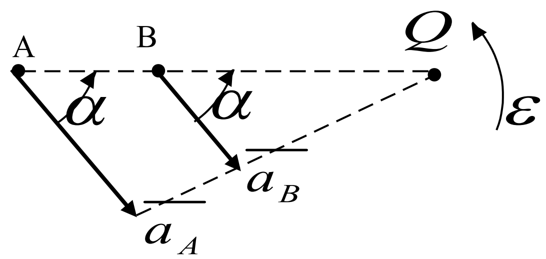
Такий спосіб визначення положення миттєвого центра прискорень не потребує розрахунку кута α. Якщо положення *МЦП* за цим способом визначається графічно, то прискорення точок треба відкладати в масштабі за їх істинними напрямками.

3.1 Прискорення точок $\overline{a_A}$ і $\overline{a_B}$ паралельні ($\overline{a_A} \parallel \overline{a_B}$), різні за модулем ($a_A \neq a_B$) (рисунки 50 - 55)

Положення миттєвого центра прискорень визначається на базі того, що:

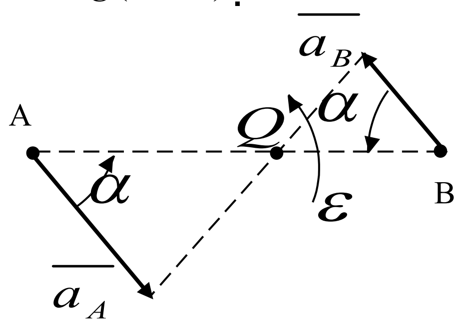
1) модулі прискорень пропорціональні відрізкам, що з'єднують точки з *МЦП* (54) $\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ}$;

2) прискорення точок створюють з відрізками, що з'єднують точки з *МЦП*, однаковий кут $\alpha = arctg(\varepsilon / \omega^2)$.



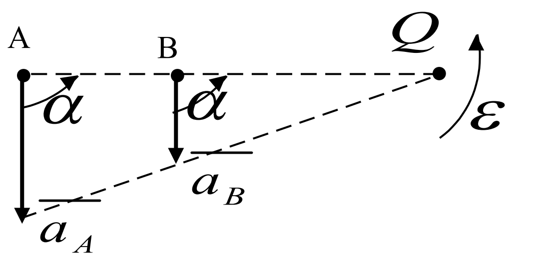
, , ,
вектори і однаково
спрямовані

Рисунок 50



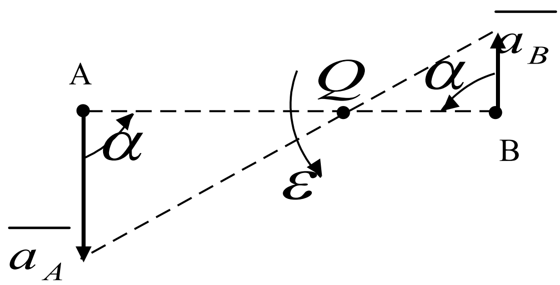
, , ,
вектори і різних
напрямків

Рисунок 51



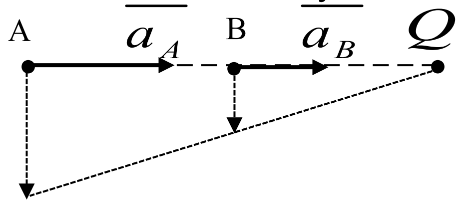
, , ,
,
вектори і однаково
спрямовані

Рисунок 52



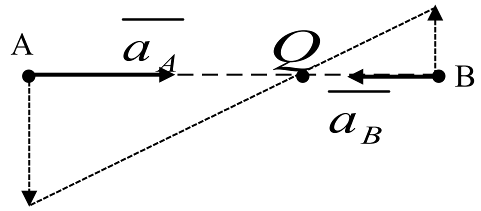
, , ,
,
вектори і різних
напрямків

Рисунок 53



, , ,
,
вектори і однаково
спрямовані

Рисунок 54



, , ,
,
вектори і різних
напрямків

Рисунок 55

3.2 Прискорення точок $\overline{a_A}$ і $\overline{a_B}$ паралельні ($\overline{a_A} \parallel \overline{a_B}$), однакові за модулем ($a_A = a_B$) (рисунок 56).

За теоремою про прискорення точок (46)

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}},$$

але $\overline{a_B} = \overline{a_A}$, тому за формулою (50)

$$a_{BA} = BA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4 = 0}.$$

При $AB \neq 0$, $\varepsilon = 0$, $\omega = 0$ і

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \infty .$$

Миттєвий центр прискорень знаходиться у нескінченності, а прискорення всіх точок плоскої фігури геометрично рівні.

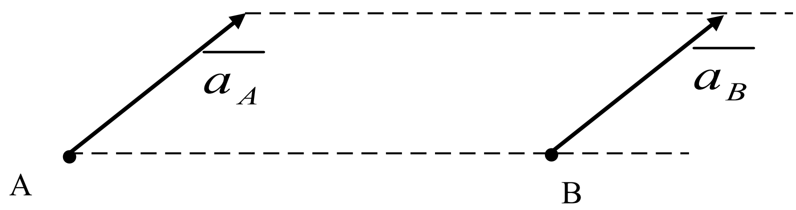


Рисунок 56

5 СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

Складним рухом точки називається такий рух, при якому точка одночасно бере участь у декількох рухах.

Розглядається рух точки одночасно по відношенню до двох (або декількох) систем відліку, із яких одна вважається умовно нерухомою, а друга певним чином рухається відносно першої.

Наприклад, складний рух здійснює пасажир, який іде по вагону, що рухається, або людина, що йде вздовж ескалатора.

Точка М рухається відносно двох систем відліку (рисунок 57).

Oxy - нерухома система відліку, $O_1x_1y_1$ – рухома система відліку.
АВ – траєкторія точки відносно нерухомої системи *Oxy* (———),
A_1B_1 - траєкторія точки відносно рухомої системи $O_1x_1y_1$ (— —),
$A^/B^/$ - траєкторія точки разом з рухомою системою відносно нерухомої системи відліку (- — - —) (рисунок 57).

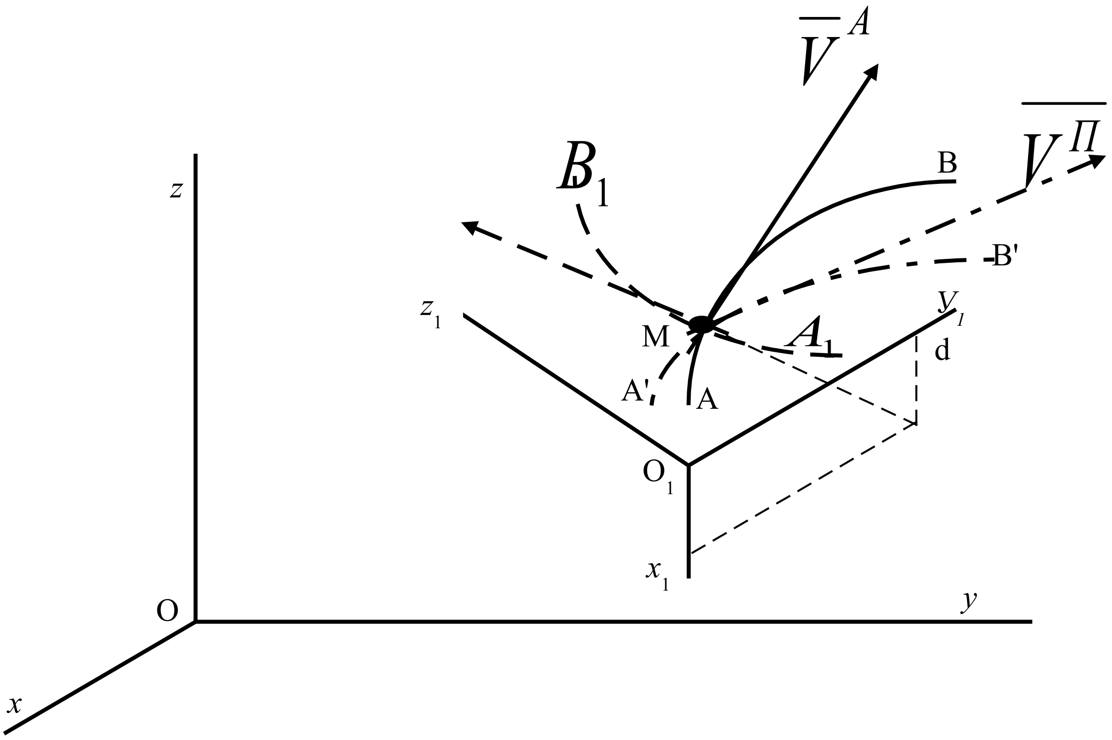


Рисунок 57

Відносним рухом називається рух точки відносно рухомої $O_1x_1y_1$ системи відліку (рисунок 57).

Траєкторія руху точки в її відносному русі – відносна траєкторія A_1B_1.

Швидкість точки щодо рухомої системи відліку – відносна швидкість $\overline{V^B}$ (вектор $\overline{V^B}$ – по дотичній до відповідної відносної траєкторії A_1B_1 в напрямку руху).

Прискорення точки у відносному русі – відносне прискорення $\overline{a^B}$.

Переносним рухом називається рух, який створює рухома система відліку $O_1x_1y_1$ разом з точкою М відносно нерухомої системи Oxy відліку (рисунок 57).

Траєкторія руху точки в її переносному русі – переносна траєкторія $A^/B^/$.

Швидкість точки разом з рухомою системою щодо нерухомої системи відліку – переносна швидкість $\overline{V^П}$ (вектор $\overline{V^П}$ - по дотичній до відповідної переносної траєкторії $A^/B^/$ у напрямку руху).

Прискорення точки у переносному русі – переносне прискорення $\overline{a^П}$.

Абсолютним (або складним) рухом називається рух точки відносно нерухомої Oxy системи відліку (рисунок 57).

Траєкторія руху точки відносно нерухомої системи відліку – абсолютна траєкторія АВ.

Швидкість точки щодо нерухомої системи відліку – абсолютна швидкість $\overline{V^A}$ (вектор $\overline{V^A}$ – по дотичній до відповідної абсолютної траєкторії АВ у напрямку руху).

Прискорення точки в абсолютному русі – абсолютне прискорення $\overline{a^A}$.

Абсолютний рух точки є складним рухом і складається з відносного та переносного рухів.

5.1 Визначення швидкостей точки

Теорема про додавання швидкостей:

При складному русі абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі її відносної та переносної швидкостей.

$$\overline{V^A} = \overline{V^B} + \overline{V^П} . \qquad (56)$$

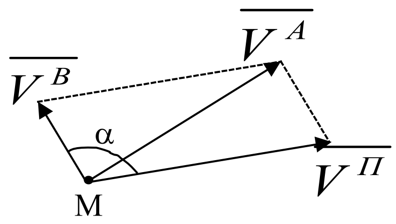


Рисунок 58

$\overline{V^B}$, $\overline{V^П}$, $\overline{V^A}$ – відносна, переносна, абсолютна швидкості точки (рисунок 58).

Фігура, зображена на рисунку 58, називається **паралелограмом швидкостей**.

Напрямок вектора абсолютної швидкості точки $\overline{V^A}$ визначається як діагональ паралелограма, побудованого на векторах відносної $\overline{V^B}$ та переносної $\overline{V^П}$ швидкостей.

Якщо кут між напрямками векторів $\overline{V^B}$ та $\overline{V^П}$ дорівнює α, то модуль абсолютної швидкості визначається за формулою

$$V^A = \sqrt{(V^B)^2 + (V^П)^2 + 2 \cdot V^B \cdot V^П \cdot cos\alpha} . \qquad (57)$$

У випадках, коли розташування векторів $\overline{V^B}$ і $\overline{V^П}$ граничні, визначення напрямку та величини абсолютної швидкості $\overline{V^A}$ спрощується (рисунки 59 і 60).

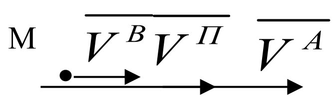


Рисунок 59

Якщо $\alpha = 0$, вектори швидкостей спрямовані вздовж однієї лінії.

$$\overline{V^A} = \overline{V^B} + \overline{V^П} .$$

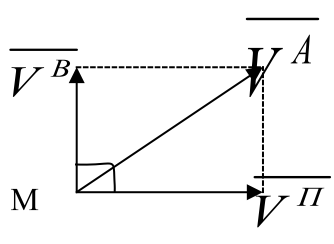


Рисунок 60

Якщо $\alpha = 90^O$ ($\overline{V^B} \perp \overline{V^П}$), вектор $\overline{V^A}$ – діагональ прямокутника.

$$V^A = \sqrt{(V^B)^2 + (V^П)^2} .$$

5.2 Визначення прискорень точки

Для визначення залежностей між абсолютним $\overline{a^A}$, відносним $\overline{a^B}$ та переносним $\overline{a^П}$ прискореннями можна використати теорему про додавання швидкостей (56) і знайти абсолютне прискорення точки в загальному випадку як похідну від вектора абсолютної швидкості

$$\overline{a^A} = \frac{d\overline{V^A}}{dt} = \frac{d\overline{V^B}}{dt} + \frac{d\overline{V^П}}{dt} . \qquad (58)$$

Подальші розрахунки залежать від **характеру переносного руху**.

1 Поступальний переносний рух

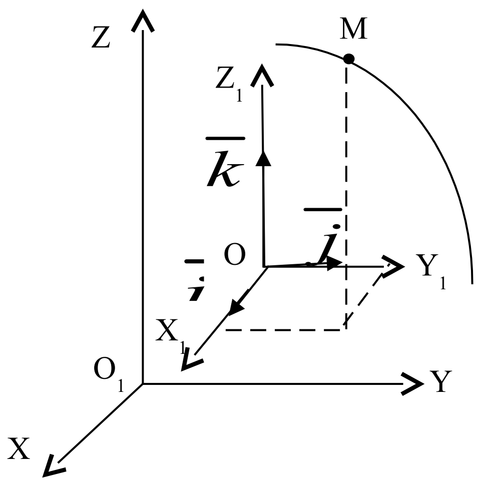


Рисунок 61

Рухома система відліку $O_1x_1y_1$ переміщується відносно нерухомої *Oxy* поступально (рисунок 61).

При поступальному русі для будь-якого положення точки М

$$\frac{d\overline{V^B}}{dt} = \overline{a^B} \quad \text{та} \quad \frac{d\overline{V^П}}{dt} = \overline{a^П} .$$

Таким чином, як виходить із (58), абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного та переносного прискорень

$$\overline{a^A} = \overline{a^B} + \overline{a^П} . \qquad (59)$$

2 Непоступальний переносний рух

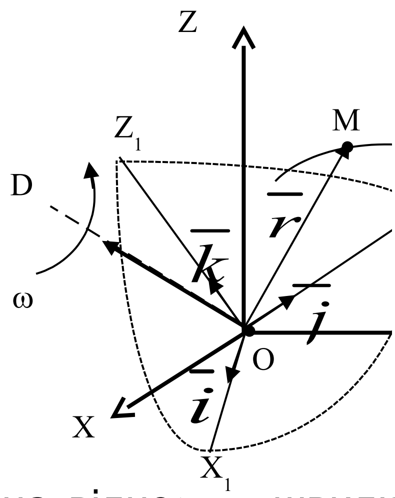


Рисунок 62

Переносний рух – **обертальний** з кутовою швидкістю ω.

OD – вісь обертання рухомої системи відліку $O_1x_1y_1$ відносно нерухомої *Oxy* (рисунок 62).

Вісь обертання може бути нерухомою або миттєвою віссю, коли точка O нерухома.

Похідна відносної швидкості за часом при обертальному переносному русі

$$\frac{d\overline{V^B}}{dt} = \overline{a^B} + \overline{a_1} = \overline{a^B} + (\overline{\omega} \times \overline{V^B}) . \qquad (60)$$

Відносне прискорення $\overline{a^B}$ враховує зміну вектора $\overline{V^B}$ тільки при відносному русі точки M, а додаткова величина $\overline{a_1}$ (60) враховує ту зміну вектора $\overline{V^B}$, яка виникає при його повороті разом з рухомою системою $O_1x_1y_1$ навколо осі *OD*, тобто в переносному русі.

Похідна переносної швидкості за часом при обертальному переносному русі

$$\frac{d\overline{V^П}}{dt} = \overline{a^П} + \overline{a_2} = \overline{a^П} + (\overline{\omega} \times \overline{V^B}) . \qquad (61)$$

Переносне прискорення $\overline{a^П}$ враховує зміну вектора $\overline{V^П}$ тільки в переносному русі, тому що вона знаходиться як прискорення точки, незмінно пов'язаної з осями рухомої системи відліку $O_1x_1y_1$. Додаткова величина $\overline{a_2}$ (61) враховує ту зміну вектора $\overline{V^{П}}$, яка виникає при відносному русі точки.

Таким чином, підставляючи рівняння (60) і (61) у формулу (58), отримано

$$\overline{a^{A}} = \overline{a^{B}} + \overline{a^{П}} + \overline{a_1} + \overline{a_2}. \quad (62)$$

Сума $(\overline{a_1} + \overline{a_2})$ визначається як **прискорення Коріоліса,** яке характеризує зміну вектора відносної швидкості $\overline{V^{B}}$ в переносному русі та вектора переносної швидкості $\overline{V^{П}}$ у відносному русі

$$\overline{a^{K}} = (\overline{a_1} + \overline{a_2}) = 2\,(\overline{\omega} \times \overline{V^{B}}). \quad (63)$$

Тоді рівняння (62) набуває вигляду

$$\overline{a^{A}} = \overline{a^{B}} + \overline{a^{П}} + \overline{a^{K}}, \quad (64)$$

і відображає **теорему Коріоліса:**

Абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі трьох векторів: відносного прискорення $\overline{a^{B}}$, яке характеризує зміну відносної швидкості точки у відносному русі, переносного прискорення $\overline{a^{П}}$, яке характеризує зміну переносної швидкості точки в переносному русі, і прискорення Коріоліса $\overline{a^{K}}$, яке характеризує зміну відносної швидкості точки в переносному русі та переносної швидкості точки у відносному русі.

Якщо переносний рух є поступальним, $\omega = 0$ і прискорення Коріоліса $\overline{a^{K}} = 0$, тобто рівняння (64) набуває вигляду рівняння (59).

Прискорення Коріоліса точки дорівнює подвоєному векторному добутку кутової швидкості переносного руху $\overline{\omega}$ на відносну швидкість точки $\overline{V^{B}}$

$$\overline{a^{K}} = 2\,(\overline{\omega} \times \overline{V^{B}}). \quad (65)$$

Якщо кут між векторами $\overline{V^B}$ та $\overline{\omega}$ визначити через α, то модуль прискорення Коріоліса

$$a^K = 2 \cdot \omega \cdot V^B \cdot \sin\alpha \,. \tag{66}$$

Вектор прискорення Коріоліса спрямований перпендикулярно площині, яка проходить через вектори $\overline{\omega}$ та $\overline{V^B}$, у тому напрямку, звідки найкоротше накладання цих векторів видно проти ходу стрілки годинника.

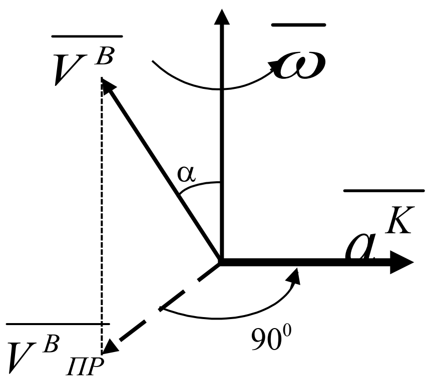


Рисунок 63

Напрямок прискорення Коріоліса (рисунок 63) визначають за **правилом Жуковського**: щоб знайти напрямок $\overline{a^K}$, необхідно спроектувати вектор відносної швидкості $\overline{V^B}$ на площину, перпендикулярну до осі переносного обертання (вектор $\overline{\omega}$), і повернути цю проекцію $\overline{V^B_{ПР}}$ на кут 90^0 у напрямку переносного обертання (за ω, тобто за або проти ходу стрілки годинника залежно від напрямку обертання).

Прискорення Коріоліса $a^K = 2 \cdot \omega \cdot V^B \cdot \sin\alpha = 0$ **дорівнює нулю**, коли:

1) ω = 0, тобто переносний рух не є обертальним (поступальний переносний рух) або має місце миттєва зупинка обертання (або зміна напрямку руху);

2) $V^B = 0$, тобто точка рухається тільки відносно нерухомої системи;

3) $\sin\alpha = 0$, тобто $\alpha = 0$ та $\alpha = 180^O$ - відносний рух точки відбувається за напрямком, паралельним осі переносного обертання ($\overline{V^B}$ II $\overline{\omega}$), або в даний момент часу вектор $\overline{V^B}$ паралельний цій осі.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1 Які існують способи задання руху точки? У чому вони полягають?

2 Яким чином спрямований вектор швидкості точки в даний момент часу?

3 За якими формулами визначається швидкість та прискорення точки при векторному способі задання руху точки?

4 За якими формулами визначаються проекції швидкості та прискорення точки на осі в декартових координатах?

5 За якими формулами визначаються модуль та алгебраїчне значення швидкості точки при натуральному способі задання руху?

6 Які осі називаються натуральними? Як визначаються додатні напрямки цих осей?

7 За якою формулою визначається дотичне прискорення?

8 За якою формулою визначається нормальне прискорення при натуральному способі задання руху?

9 Який рух твердого тіла називається поступальним?

10 У чому полягає теорема про рух точок твердого тіла, що рухається поступально?

11 Що називається законом або рівнянням обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі?

12 Що називається кутовою швидкістю тіла? Кутовим прискоренням?

13 Як у вигляді вектора зображується кутова швидкість тіла?

14 Як виразити залежність між кутовою швидкістю тіла, що обертається, та лінійною швидкістю точки цього тіла?

15 За якими формулами визначають дотичне та нормальне прискорення точки тіла, що обертається? Як спрямовані ці прискорення?

16 Як виразити вектори швидкості, дотичного та нормального прискорення точки тіла, що обертається, у вигляді векторних добутків?

17 Який рух твердого тіла називається плоскопаралельним?

18 На які два рухи можна розкласти рухи плоскої фігури в її площині?

19 Як визначити швидкість довільної точки фігури, коли відомі швидкість однієї з точок цієї фігури та її кутова швидкість?

20 Яку умову задовольняють проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на вісь, яка проходить через ці точки?

21 Яка точка називається миттєвим центром швидкостей плоскої фігури?

22 Як визначити положення миттєвого центра швидкостей, коли відомі напрямки швидкостей двох точок плоскої фігури?

23 За якою формулою можна визначити прискорення будь-якої точки плоскої фігури, якщо відомі прискорення однієї з її точок та кутові швидкість і прискорення фігури?

24 Яка точка називається миттєвим центром прискорень плоскої фігури?

25 Як визначити положення миттєвого центра прискорень, коли відомі прискорення однієї з точок фігури та її кутові швидкість і прискорення?

26 Якою кількістю незалежних між собою величин визначається положення твердого тіла, що має одну нерухому точку?

27 За якою векторною формулою можна визначити швидкість будь-якої точки твердого тіла при сферичному русі?

28 За якими векторними формулами визначають

обертальне та доцентрове прискорення точки твердого тіла при сферичному русі?

29 За якими формулами можна визначити числові значення обертального та доцентрового прискорень точки твердого тіла при сферичному русі?

30 Який рух точки називається абсолютним, відносним, переносним?

31 Що називається переносною швидкістю точки? Переносним прискоренням? Як вони визначаються?

32 У чому полягає теорема додавання швидкостей при складному русі точки?

33 У чому полягає теорема Коріоліса про додавання прискорень при складному русі точки?

34 Який рух здійснює тверде тіло, яке бере участь у двох обертаннях навколо осей, що перетинаються?

35 У чому полягає теорема про складання обертань навколо паралельних осей?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М., 1986.

2 Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. - М., 1984. - Ч. 1 - 2.