

**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

**ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ  
ТА ТЕХНОЛОГІЙ**

**Кафедра автоматики та комп'ютерного телекерування рухом  
поїздів**

**ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ  
ЗА КВАДРАТИЧНИМ ПОКАЗНИКОМ ЯКОСТІ  
СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
до лабораторних робіт  
з дисципліни**

***«ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ  
АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»***

**Харків 2020**

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри автоматики та комп'ютерного телекерування рухом поїздів 10 березня 2020 р., протокол № 7.

Методичні вказівки містять завдання та матеріали для підготовки та виконання двох лабораторних робіт з дисципліни «Теорія оптимальних систем автоматичного керування». До кожної з робіт додано стислі відомості з теорії. Виконання всіх робіт здійснюється на ПК за допомогою пакетів Control System та Simulink програмної оболонки Matlab.

Призначено для студентів магістратури денної та заочної форм навчання за спеціальністю «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології».

Укладачі:

проф. В. Ш. Хісматулін,  
доц. О. О. Сосунов

Рецензент  
доц. А. А. Прилипко

## ЗМІСТ

1 Дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом 1.....	4
2 Дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом 2 .....	20
Список літератури.....	35
Додаток А. Форми функціонала якості та квадратичний показник якості керування.....	36
Додаток Б Принцип максимуму Л. С. Понтрягіна.....	42
Додаток В Застосування принципу максимуму для задач з квадратичним показником якості керування.....	48
Додаток Г Керованість об'єкта та критерії керованості.....	53

# **1 ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ЗА КВАДРАТИЧНИМ ПОКАЗНИКОМ ЯКОСТІ КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМ СТАЦІОНАРНИМ ОБ'ЄКТОМ 1**

## **1.1 Мета роботи**

1 Засвоїти постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування об'єктом.

2 Ознайомитись з методикою синтезу керування об'єктом, оптимального за квадратичним показником якості, на підставі принципу максимуму Л.С. Понтрягіна.

3 Дослідити процеси у системі при керуванні, оптимальному за квадратичним показником якості, та зробити рекомендації для практичного застосування.

## **1.2 Програма роботи**

1 Синтез та аналітичне дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом 1.

2 Експериментальне дослідження оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування лінійним стаціонарним об'єктом 1.

## **1.3 Підготовка до роботи**

1 За рекомендованою літературою [1-5] та конспектом лекцій у позааудиторний час ознайомитися з метою та вивчити:

- програму і вказівки щодо виконання роботи;
- теоретичні положення за темою роботи: постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування; формулювання принципу максимуму Л.С. Понтрягіна; умови, достатні для існування оптимального керування; постановку та розв'язання задачі синтезу оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом на підставі принципу максимуму Л.С. Понтрягіна.

2 Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.

3 Підготувати відповіді на контрольні запитання.

## 1.4 Короткі відомості з теорії

### 1.4.1 Коротка характеристика задачі оптимального керування заданим об'єктом

Існує безліч практично важливих задач, при вирішенні яких необхідно здійснювати керування об'єктами з найбільшою ефективністю. Деякі з цих завдань вимагають мінімального часу для досягнення необхідного результату. Інші мають на меті досягнення найбільшої точності відтворення заданого діяння. По-третє, ставиться завдання мінімальної витрати енергії для досягнення поставленої мети. Нерідкі випадки, коли необхідно задовольнити цілу низку суперечливих вимог. Всі такі завдання відносяться до класу задач оптимального керування.

Загальною для таких систем є вимога створення такої сукупності керуючих діянь, при яких досягається екстремальне значення деякого показника якості. Система автоматичного керування (САК), *що реалізує в будь-якому сенсі оптимальне керування, називається оптимальною в тому ж сенсі* (наприклад, за швидкодією, за квадратичним показником якості та ін.).

*Правило, за допомогою якого обирається екстремальне значення показника якості в системі керування об'єктом, називається критерієм оптимальності цієї системи.*

У зміст задачі синтезу оптимального керування входять такі вихідні дані:

- 1) інформація про об'єкт керування;
- 2) інформація про зовнішні діяння;
- 3) інформація про мету керування;
- 4) інформація про показник якості та критерій оптимальності керування;
- 5) інформація про обмеження, що накладаються на величини діянь і на об'єкт керування.

На підставі зазначених вихідних даних необхідно знайти закон керування, який реалізує поставлену мету керування при накладених обмеженнях і забезпечує екстремальне значення заданого показника якості.

Завдання даного класу відносяться до варіаційних задач оптимального керування. Застосування методів теорії варіаційного числення вимагає цілком певної математичної формалізації всіх вихідних даних і застосування специфічних методів розв'язання варіаційних задач.

#### 1.4.2 Математична формалізація задачі оптимального керування лінійним стаціонарним об'єктом

Математична модель об'єкта керування задається за допомогою системи диференціальних рівнянь стану. Якщо об'єкт є лінійним та стаціонарним, система диференціальних рівнянь стану записується у такій векторно-матричній формі:

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A} \times \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \times \mathbf{u}(t), \quad (1.1)$$

де  $\mathbf{z}^T(t) = \{z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)\}$  –  $n$ -вимірний вектор стану;

$\mathbf{u}^T(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)\}$  –  $k$ -вимірний вектор керування;

$\mathbf{A}$  –  $n \times n$  постійна матриця стану;

$\mathbf{B}$  –  $n \times k$  постійна матриця керування.

Мета керування формулюється як переведення об'єкта з деякого початкового стану  $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$  у кінцевий стан  $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$ . Початковий та кінцевий стани можуть бути фіксованими (задача з закріпленими кінцями), частково заданими або нефіксованими (задача з вільними кінцями). Моменти початку та закінчення керування також можуть бути заданими або невизначеними (задача з фіксованим або нефіксованим часом керування).

Показник якості керування  $J$  подається як функціонал – величина, чисельне значення якої залежить від вибору вектора керування  $\mathbf{u}(t)$ , вектора стану  $\mathbf{z}(t)$  та часу керування (дивись додаток А).

$$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (1.2)$$

де  $\Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k]$  – показник якості у кінці керування;

$L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]$  – функція, що визначає якість на всьому інтервалі керування (функція Лагранжа або лагранжіан).

Критерій оптимальності керування полягає у досягненні мінімуму заданого показника якості

$$J \rightarrow \min_{\mathbf{u}(t)} \quad (1.3)$$

Обмеження накладаються у загальному випадку на компоненти як вектора керування, так і вектора стану об'єкта. Вони задаються у вигляді умов належності векторів  $\mathbf{z}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  до деяких множин

$$\mathbf{z}(t) \in \mathbf{Z}_t, \mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}_t. \quad (1.4)$$

Для розв'язання задачі синтезу оптимального керування застосовуються методи теорії варіаційного числення. Один з методів заснований на принципі максимуму Л.С. Понтрягіна [1-5]. Він надає умови, що накладаються на оптимальне керування (дивись додаток Б). Ці умови є необхідними, але, в загальному випадку, не є достатніми.

Квадратичний показник якості керування є окремим випадком функціонала якості (1.2) та детально розглядається у додатку А.

Специфіка застосування принципу максимуму для задач з квадратичним показником якості наведена у додатку В.

## **1.5 Вказівки щодо виконання роботи**

### **1.5.1 Синтез та аналітичне дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом 1**

*Постановка задачі.* Динаміка об'єкта керування описується диференціальним рівнянням «вхід-вихід» другого порядку (рисунок 1.1)

$$y''(t) = u(t), \quad (1.5)$$

де  $y(t)$  – вихідна величина;

$u(t)$  – керуюче діяння.

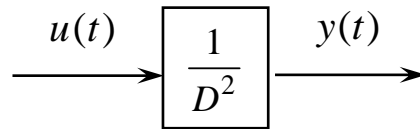


Рисунок 1.1 – Схема математичної моделі об'єкта керування

Максимальна величина  $u_{\max}$  керуючого діяння  $u(t)$  необмежена

$$|u(t)| < u_{\max} = \infty. \quad (1.6)$$

Метою керування є переведення об'єкта з заданого початкового стану  $y(t_0) = y_0$   $y'(t_0) = y'_0$  в кінцевий стан  $y(t_k = \infty) = 0$ ,  $y'(t_k = \infty) = 0$ , де  $t_0 = 0$  – фіксований момент початку, а  $t_k = \infty$  – фіксований, але нескінчений момент завершення керування.

Критерій оптимальності – мінімум квадратичного показника якості керування

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{y^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{y'^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right) dt, \quad (1.7)$$

де  $\frac{1}{y_m^2}$  – ваговий коефіцієнт першого доданка;

$\frac{\tau^2}{y_m^2}$  – ваговий коефіцієнт другого доданка;

$\tau$  – деяка константа, що має розмірність часу, величина якої впливає на показники якості перехідного процесу – час регулювання та пере регулювання;



$\frac{1}{u_m^2}$  – ваговий коефіцієнт третього доданка.

Знайти та проаналізувати закон оптимального керування.

**Математична формалізація задачі.** Оберемо за координати стану вихідну величину та її першу похідну

$$z_1(t) = y(t), \quad z_2(t) = y'(t). \quad (1.8)$$

Початковий стан об'єкта  $z_1(t_0) = z_{10} = y_0$ ,  $z_2(t_0) = z_{20} = y'_0$ , кінцевий стан  $z_1(t_k = \infty) = 0$ ,  $z_2(t_k = \infty) = 0$ .

Система диференціальних рівнянь стану має такий вигляд:

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t); \\ z_2'(t) &= u(t). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Звідси нескладно встановити, що матриця стану  $\mathbf{A}$  та матриця керування  $\mathbf{B}$  матричного рівняння стану (1.1) дорівнюють

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Показник якості керування (1.2) запишемо у вигляді функціонала Лагранжа

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), u(t), t] dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( \frac{z_1^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{z_2^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right) dt, \quad (1.10)$$

де  $L[\mathbf{z}(t), u(t), t] = \frac{1}{2} \left( \frac{z_1^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{z_2^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right)$  – функція

Лагранжа.

Критерій оптимальності керування полягає у досягненні мінімуму заданого показника якості

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{z_1^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{z_2^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right) dt \rightarrow \min_{u \in U_t} \quad (1.11)$$

Отже, маємо задачу синтезу оптимального керування з закріпленими кінцями при фіксованому, але нескінченному часі закінчення керування (дивись додаток Б).

Для квадратичного показника якості, на відміну від задач на максимальну швидкодію, керованість об'єкта (дивись додаток Г) *не є необхідною умовою (!)* існування оптимального керування [2]. Проте керованість об'єкта є достатньою умовою існування єдиного оптимального керування.

З метою аналізу керованості об'єкта розглянемо матриці  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  і  $\mathbf{M} = |\mathbf{B} \ \mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ .

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матриця  $\mathbf{M}$  – квадратна, її визначник

$$\det(\mathbf{M}) = -1 \neq 0. \quad (1.12)$$

Заданий об'єкт є керованим, тому що ранг матриці  $\mathbf{M}$  дорівнює порядку об'єкта. Таким чином, для заданого об'єкта принцип максимуму надає необхідні і достатні умови оптимальності.

**Синтез закону оптимального керування.** Використовуючи форму функціонала якості (1.10), визначимо матриці  $\mathbf{Q}$  та  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} y_m^{-2} & 0 \\ 0 & \tau^2 \cdot y_m^{-2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{u_m^2}. \quad (1.13)$$

Використовуючи матриці **A**, **B**, **Q** та **R**, складемо матричне алгебраїчне рівняння Ріккати (дивись додаток В) для визначення симетричної матриці  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^T = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix}$ :

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} - \\ & -u_m^2 \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_m^{-2} & 0 \\ 0 & \tau^2 \cdot y_m^{-2} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Звідси отримуємо систему скалярних рівнянь

$$\begin{cases} u_m^2 \cdot \gamma_{12}^2 - y_m^{-2} = 0; \\ 2\gamma_{12} - u_m^2 \cdot \gamma_{22}^2 + \tau^2 \cdot y_m^{-2} = 0; \\ \gamma_{11} - u_m^2 \cdot \gamma_{12} \cdot \gamma_{22} = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Послідовно розглядаючи отримані рівняння, знайдемо всі розв'язки цієї системи. Проаналізуємо ці розв'язки.

Перший розв'язок

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}; \\ \gamma_{22} &= u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}; \\ \gamma_{11} &= u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Другий розв'язок

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= -y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}; \\ \gamma_{22} &= -u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} - 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}; \\ \gamma_{11} &= u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} - 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Третій розв'язок

$$\begin{aligned}\gamma_{12} &= y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}; \\ \gamma_{22} &= -u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}; \\ \gamma_{11} &= -u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}.\end{aligned}\quad (1.18)$$

Четвертий розв'язок

$$\begin{aligned}\gamma_{12} &= -y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}; \\ \gamma_{22} &= u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} - 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}; \\ \gamma_{11} &= -u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} - 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}.\end{aligned}\quad (1.19)$$

Матриця  $\Gamma$  повинна бути, по-перше, додатно визначеною, по-друге, дійсною.

Умови додатної визначеності

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &> 0; \\ \gamma_{11} \cdot \gamma_{12} - \gamma_{12}^2 &> 0.\end{aligned}\quad (1.20)$$

Умові (1.20) не задовольняють третій та четвертий розв'язки, тому що  $\gamma_{11}^{(3,4)} < 0$ .

Другий розв'язок не задовольняє одночасно умови додатної визначеності та дійсності матриці  $\Gamma$ .

Тільки перший розв'язок не суперечить всім вимогам, що накладаються на матрицю  $\Gamma$ . Таким чином, матриця  $\Gamma$  має вигляд

$$\Gamma = \begin{vmatrix} u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} & y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} \\ y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} & u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} \end{vmatrix}. \quad (1.21)$$

За допомогою виразу (1.21) отримуємо матрицю коефіцієнтів підсилення  $\mathbf{K}$  оптимального регулятора

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \times \mathbf{B}^T \times \Gamma = u_m^2 |0 \quad 1| \times$$

$$\times \begin{vmatrix} u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} & y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} \\ y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} & u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} \end{vmatrix} = (1.22)$$

$$= u_m^2 \begin{vmatrix} y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} & u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} \end{vmatrix}.$$

Таким чином, оптимальне за мінімумом квадратичного показника якості керування має вигляд

$$u^*(t) = -\mathbf{K} \times \mathbf{z}^*(t) = -\frac{u_m}{y_m} z_1^*(t) + u_m \sqrt{\tau^2 y_m^{-2} + 2y_m^{-1} u_m^{-1}} \cdot z_2^*(t) =$$

$$(1.23)$$

$$= -\frac{u_m}{y_m} \left( z_1^*(t) + \sqrt{\tau^2 + 2 \frac{y_m}{u_m}} \cdot z_2^*(t) \right).$$

Структура оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування наведена на рисунку 1.2.

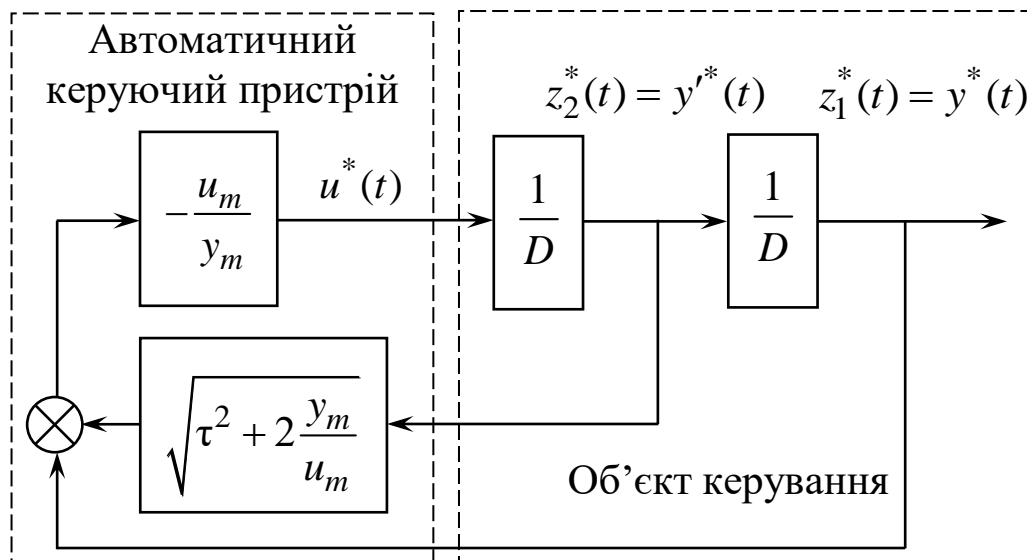


Рисунок 1.2 – Алгоритмічна структура оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування заданим об'єктом

**Аналіз процесів в оптимальній системі керування.**  
 Проаналізуємо процеси в оптимальній системі керування та встановимо зв'язок між показниками якості у перехідному режимі цієї системи та параметрами функціонала якості (1.7).

Для цього складемо матрицю стану оптимальної системи та диференційні рівняння стану

$$\mathbf{z}'^*(t) = \mathbf{A}\mathbf{c} \times \mathbf{z}^*(t), \quad (1.24)$$

$$\text{де } \mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \times \mathbf{K} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{u_m}{y_m} & -\frac{u_m}{y_m} \sqrt{\tau^2 + 2 \frac{y_m}{u_m}} \end{vmatrix}. \quad (1.25)$$

Враховуючи (1.24) та (1.25), отримуємо

$$\begin{aligned} z_1'^*(t) &= z_2^*(t); \\ z_2'^*(t) &= -\frac{u_m}{y_m} z_1^*(t) - \frac{u_m}{y_m} \sqrt{\tau^2 + 2 \frac{y_m}{u_m}} \cdot z_2^*(t). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Якщо врахувати, що  $z_1^*(t) = y^*(t)$ ,  $z_2^*(t) = y'^*(t)$ , тоді друге рівняння системи (1.26) набуде вигляду

$$y''^*(t) + \frac{u_m}{y_m} \sqrt{\tau^2 + 2 \frac{y_m}{u_m}} \cdot y'^*(t) + \frac{u_m}{y_m} y^*(t) = 0. \quad (1.27)$$

Таким чином, оптимальна система керування для заданого об'єкта (1.5) є ланкою другого порядку (лінійною САК!) та для її аналізу доступні всі загальновідомі методи аналізу лінійних САК.

Частота  $\omega_0$  власних незгасаючих коливань

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{u_m}{y_m}}, \quad (1.28)$$

а відносний коефіцієнт згасання  $\xi$  коливань

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\omega_0^2 \cdot \tau^2 + 2}. \quad (1.29)$$

Якщо обрати  $\tau = 0$ , тоді  $\xi = \sqrt{2}/2 \approx 0.7$ , що відповідає мінімальній тривалості перехідного процесу при фіксованій величині частоти  $\omega_0$  власних незгасаючих коливань. При цьому величина перерегулювання  $\sigma$  не перевищує 4 %. Якщо перерегулювання є небажаним, обравши  $\tau$  так, щоб

$$\omega_0^2 \cdot \tau^2 \geq 2, \quad (1.30)$$

отримуємо  $\xi \geq 1$ , внаслідок чого перехідний процес буде аперіодичним (монотонним).

Таким чином, вибором параметрів  $u_m, \tau, u_m$  функціонала якості (1.7) можна, залишившись у рамках оптимальної структури, надати системі керування потрібних динамічних властивостей.

### 1.5.2 Експериментальне дослідження оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування лінійним стаціонарним об'єктом 1

Дослідження проводиться за допомогою пакета програм Simulink програмної оболонки Matlab. Експеримент полягає у реєстрації оптимального керування  $u^*(t)$ , оцінки величини квадратичного показника якості керування  $J$ , керованої величини  $y^*(t) = z_1^*(t)$  та оцінки показників якості перехідного режиму – часу регулювання  $t_p$  і перерегулювання  $\sigma$  в залежності від величини параметра функціонала якості (1.7) –  $\tau$ .

Відкрити файл **Quadr\_2\_int**. Схему проведення експерименту в пакеті Simulink зображено на рисунку 1.3. Вона складається з моделі САК (**Integrator1, Integrator2**), блоків формування оптимального керування (**Gain, Gain1**), блоків формування оцінки квадратичного показника якості (**Gain2,**

**Gain3, Gain4, Gain5, Product, Product1, Product2, Integrator**), блока формування перехідної характеристики для оцінки показників якості перехідного режиму – часу регулювання  $t_p$  і перерегулювання  $\sigma$  (**Constant**) та двох віртуальних осцилографів – триканального і одноканального (**Scope, Scope1**).

На верхньому екрані триканального осцилографа спостерігається оптимальне керування  $u^*(t)$ , на середньому – оцінка величини квадратичного показника якості керування  $J$ , на нижньому – керована величина  $y^*(t) = z_1^*(t)$ .

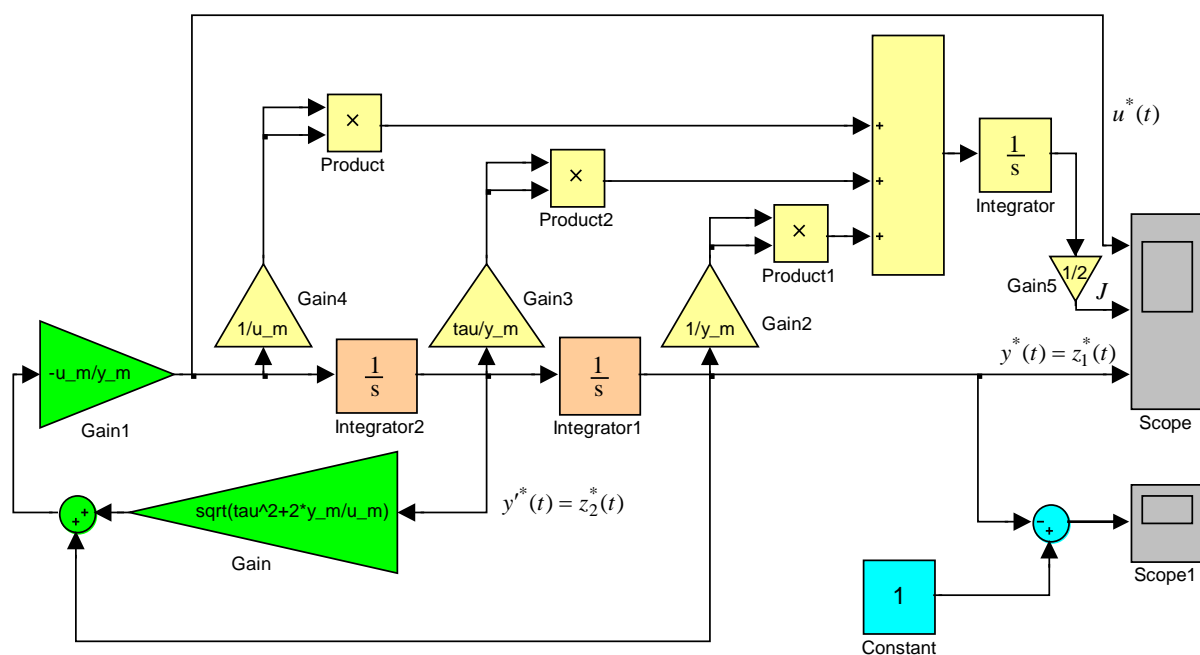


Рисунок 1.3 – Схема проведення експерименту

На екрані одноканального осцилографа спостерігається перехідна характеристика для оцінки часу регулювання  $t_p$  і перерегулювання  $\sigma$ .

Для підвищення точності моделювання у вікні Simulink натиснути кнопку **Simulation**, відкрити вікно **Configuration Parameters** та встановити відносну точність **Relative Tolerance** рівною  $1e^{-6}$ .

У командному рядку Matlab ввести команду

$$u\_m = 1; y\_m = 1; tau = 0.$$



Встановити початкові умови  $z_0$ ,  $z_{10}$ ,  $z_{20}$  для інтеграторів **Integrator**, **Integrator1**, **Integrator2** рівними 0, 1 та 0 відповідно. Ці блоки відкриваються подвійним натисненням лівою кнопкою миші на відповідний інтегратор. Початкові умови встановлюються у рядку **Initial Condition**.

Провести дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування заданим об'єктом натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів. У разі необхідності для зручності спостереження величин на екранах осцилографів натиснути кнопку “**Бінокль**” (**Autoscale**).

Занести оптимальне значення квадратичного показника якості керування  $J_{\text{опт}}$ , час регулювання  $t_p$  і перерегулювання  $\sigma$  у відповідні рядки таблиці 1.1.

Провести аналогічні дослідження для величин параметра  $\tau = 0.5, 1, \sqrt{2}, 2$ , задаючи їх у командному рядку Matlab.

Зменшити «вартість» енергії керування. Для цього в командному рядку Matlab ввести команду

$$u_m = 5.$$

Таблиця 1.1

$u_m = 1$	$\tau, \text{с}$	0	0.5	1	$\sqrt{2}$	2
	$J_{\text{опт}}, \text{с}$					
	час регулювання $t_p, \text{с}$					
	перерегулювання $\sigma, \%$					
$u_m = 5$	$\tau, \text{с}$	0	0.5	1	$\sqrt{2}$	2
	$J_{\text{опт}}, \text{с}$					
	час регулювання $t_p, \text{с}$					
	перерегулювання $\sigma, \%$					

Провести дослідження для величин параметра  $\tau = 0, 0.5, 1, \sqrt{2}, 2$ , задаючи їх у командному рядку Matlab.

Побудувати графіки експериментальних залежностей  $J_{\text{опт}} = J_{\text{опт}}(\tau)$ ,  $t_p = t_p(\tau)$ ,  $\sigma = \sigma(\tau)$  від величини параметра  $\tau$  для двох значень  $u_m$  (1 та 5), занести їх до звіту, зробити висновки.

## 1.6 Зміст звіту

- 1 Назва і мета роботи.
- 2 Рівняння «вхід-вихід», схема математичної моделі досліджуваного об'єкта керування, функціонал якості керування та критерій оптимальності.
- 3 Хід та результати аналітичного дослідження: розрахунок матриці коефіцієнтів підсилення  $\mathbf{K}$ , оптимального керування  $u^*(t)$  (рівняння (1.21 – 1.23); рівняння «вхід-вихід» оптимальної системи керування та параметри отриманої коливальної ланки (рівняння (1.26 – 1.30)).
- 4 Схема проведення експерименту.
- 5 Таблиці і графіки експериментальних залежностей.
- 6 Висновки з роботи.

## Контрольні питання

- 1 Поясніть поняття «оптимальне керування».
- 2 Чим відрізняється оптимальна система автоматичного керування від інших систем свого класу?
- 3 Поясніть поняття «показник якості».
- 4 Поясніть поняття «функціонал якості».
- 5 Які форми функціоналів якості застосовуються в загальній теорії оптимального керування?
- 6 Поясніть поняття «критерій оптимальності».
- 7 Які вихідні дані входять у зміст задачі синтезу оптимального керування?
- 8 Поясніть поняття «вектор стану».
- 9 Що зв'язує між собою рівняння стану?
- 10 Який об'єкт називається керованим?
- 11 Поясніть поняття «критерій керованості».
- 12 Як за рівнянням стану з'ясувати керованість об'єкта?
- 13 Як зв'язані стійкість об'єкта і керованість об'єкта?

- 14 Поясніть поняття «лагранжіан».
- 15 Поясніть поняття «гамільтоніан».
- 16 Поясніть поняття «канонічна система рівнянь».
- 17 Як зв'язані канонічна система рівнянь і гамільтоніан?
- 18 Як зв'язані канонічна система рівнянь і лагранжіан?
- 19 Як знаходиться максимум функції за її аналітичним виразом?
- 20 Надайте формулювання принципу максимуму.
- 21 В якому випадку принцип максимуму надає не тільки необхідні, але і достатні умови існування оптимального керування об'єктом?
- 22 У чому полягає специфіка оптимального за мінімумом квадратичного показника якості керування лінійним стаціонарним об'єктом?
- 23 Надайте необхідні та достатні умови додатної визначеності квадратичної форми.
- 24 Як за відомими матрицями **R**, **B**, **G** розрахувати матрицю коефіцієнтів підсилення **K**?
- 25 Яке рівняння задовольняє матриця **G**?
- 26 Які умови накладаються на матрицю **G**?
- 27 Чому керованість об'єкта не є необхідною умовою існування єдиного оптимального за мінімумом квадратичного показника якості керування лінійним стаціонарним об'єктом?
- 28 Як зв'язані квадратичний показник якості і поліпшена інтегральна оцінка?
- 29 Як можна, залишившись у рамках оптимальної за квадратичним показником якості структури, надати системі керування потрібних динамічних властивостей?
- 30 Запропонуйте можливий варіант реалізації системи керування, наближеної до оптимальної, якщо фактична величина керуючого діяння, оптимального за квадратичним показником якості, буде перевищувати реальні можливості керуючого пристрою (наприклад, при обмеженні  $|u(t)| \leq U_{\max}$ ).
- 31 У чому полягає основне практичне значення теорії оптимального керування?

## **2 ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ЗА КВАДРАТИЧНИМ ПОКАЗНИКОМ ЯКОСТІ КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМ СТАЦІОНАРНИМ ОБ'ЄКТОМ 2**

### **2.1 Мета роботи**

1 Засвоїти постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування об'єктом.

2 Ознайомитись з методикою синтезу керування об'єктом, оптимального за квадратичним показником якості, на підставі принципу максимуму Л.С. Понтрягіна.

3 Дослідити процеси у системі при керуванні, оптимальному за квадратичним показником якості, та зробити рекомендації для практичного застосування.

### **2.2 Програма роботи**

1 Синтез та аналітичне дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом 2.

2 Експериментальне дослідження оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування лінійним стаціонарним об'єктом 2.

### **2.3 Підготовка до роботи**

1 За рекомендованою літературою [1-5] та конспектом лекцій у позааудиторний час ознайомитися з метою та вивчити:

- програму і вказівки щодо виконання роботи;
- теоретичні положення за темою роботи: постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування; формулювання принципу максимуму Л.С. Понтрягіна; умови, достатні для існування оптимального керування; постановку та розв'язання задачі синтезу оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом на підставі принципу максимуму Л.С. Понтрягіна.

2 Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.

3 Підготувати відповіді на контрольні запитання.

## 2.4 Короткі відомості з теорії

### 2.4.1 Коротка характеристика задачі оптимального керування заданим об'єктом

Існує безліч практично важливих задач, при вирішенні яких необхідно здійснювати керування об'єктами з найбільшою ефективністю. Деякі з цих завдань вимагають мінімального часу для досягнення необхідного результату. Інші мають на меті досягнення найбільшої точності відтворення заданого діяння. По-третє, ставиться завдання мінімальної витрати енергії для досягнення поставленої мети. Нерідкі випадки, коли необхідно задовольнити цілу низку суперечливих вимог. Всі такі завдання відносяться до класу задач оптимального керування.

Загальною для таких систем є вимога створення такої сукупності керуючих діянь, при яких досягається екстремальне значення деякого показника якості. ***САК, що реалізує в будь-якому сенсі оптимальне керування, називається оптимальною в тому ж сенсі*** (наприклад, за швидкодією, за квадратичним показником якості та ін.).

***Правило, за допомогою якого обирається екстремальне значення показника якості в системі керування об'єктом, називається критерієм оптимальності цієї системи.***

У зміст задачі синтезу оптимального керування входять такі вихідні дані:

- 1) інформація про об'єкт керування;
- 2) інформація про зовнішні діяння;
- 3) інформація про мету керування;
- 4) інформація про показник якості та критерій оптимальності керування;
- 5) інформація про обмеження, що накладаються на величини діянь і на об'єкт керування.

На підставі зазначених вихідних даних необхідно знайти закон керування, який реалізує поставлену мету керування при накладених обмеженнях і забезпечує екстремальне значення заданого показника якості.

Завдання даного класу відносяться до варіаційних задач оптимального керування. Застосування методів теорії

варіаційного числення вимагає цілком певної математичної формалізації всіх вихідних даних і застосування специфічних методів розв'язання варіаційних задач.

#### 2.4.2 Математична формалізація задачі оптимального керування лінійним стаціонарним об'єктом

Математична модель об'єкта керування задається за допомогою системи диференціальних рівнянь стану. Якщо об'єкт є лінійним та стаціонарним, система диференціальних рівнянь стану записується у такій векторно-матричній формі:

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A} \times \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \times \mathbf{u}(t), \quad (2.1)$$

де  $\mathbf{z}^T(t) = \{z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)\}$  –  $n$ -вимірний вектор стану;

$\mathbf{u}^T(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)\}$  –  $k$ -вимірний вектор керування;

$\mathbf{A}$  –  $n \times n$  постійна матриця стану;

$\mathbf{B}$  –  $n \times k$  постійна матриця керування.

Мета керування формулюється як переведення об'єкта з деякого початкового стану  $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$  у кінцевий стан  $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$ . Початковий та кінцевий стани можуть бути фіксованими (задача з закріпленими кінцями), частково заданими або нефіксованими (задача з вільними кінцями). Моменти початку та закінчення керування також можуть бути заданими або невизначеними (задача з фіксованим або нефіксованим часом керування).

Показник якості керування  $J$  подається як функціонал – величина, чисельне значення якої залежить від вибору вектора керування  $\mathbf{u}(t)$ , вектора стану  $\mathbf{z}(t)$  та часу керування (дивись додаток А).

$$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (2.2)$$

де  $\Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k]$  – показник якості у кінці керування;

$L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]$  – функція, що визначає якість на всьому інтервалі керування (функція Лагранжа або лагранжіан).

Критерій оптимальності керування полягає у досягненні мінімуму заданого показника якості

$$J \rightarrow \min_{\mathbf{u}(t)} \quad (2.3)$$

Обмеження накладаються у загальному випадку на компоненти як вектора керування, так і вектора стану об'єкта. Вони задаються у вигляді умов належності векторів  $\mathbf{z}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  до деяких множин

$$\mathbf{z}(t) \in \mathbf{Z}_t, \mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}_t. \quad (2.4)$$

Для розв'язання задачі синтезу оптимального керування застосовуються методи теорії варіаційного числення. Один з методів заснований на принципі максимуму Л.С. Понтрягіна [1-5]. Він надає умови, що накладаються на оптимальне керування (дивись додаток Б). Ці умови є необхідними, але, в загальному випадку, не є достатніми.

Квадратичний показник якості керування є окремим випадком функціонала якості (2.2) та детально розглядається у додатку А.

Специфіка застосування принципу максимуму для задач з квадратичним показником якості наведена у додатку В.

## **2.5 Вказівки щодо виконання роботи**

### **2.5.1 Синтез та аналітичне дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом 2**

*Постановка задачі.* Динаміка об'єкта керування описується диференціальним рівнянням «вхід-вихід» другого порядку (рисунок 2.1)

$$T_M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = u(t), \quad (2.5)$$

де  $y(t)$  – вихідна величина;

$T_M$  – постійна часу, с;

$u(t)$  – керуюче діяння.

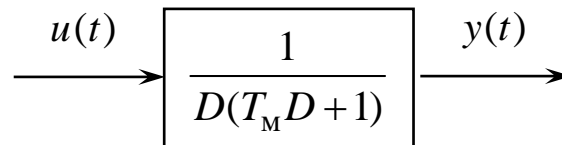


Рисунок 2.1 – Схема математичної моделі об'єкта керування

Максимальна величина  $u_{\max}$  керуючого діяння  $u(t)$  необмежена

$$|u(t)| < u_{\max} = \infty. \quad (2.6)$$

Метою керування є переведення об'єкта з заданого початкового стану  $y(t_0) = y_0$   $y'(t_0) = y'_0$  в кінцевий стан  $y(t_k = \infty) = 0$ ,  $y'(t_k = \infty) = 0$ , де  $t_0 = 0$  – фіксований момент початку, а  $t_k = \infty$  – фіксований, але нескінчений момент завершення керування.

Критерій оптимальності – мінімум квадратичного показника якості керування

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{y^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{y'^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right) dt, \quad (2.7)$$

де  $\frac{1}{y_m^2}$  – ваговий коефіцієнт першого доданка;

$\frac{\tau^2}{y_m^2}$  – ваговий коефіцієнт другого доданка;



$\tau$  – деяка константа, що має розмірність часу, величина якої впливає на показники якості перехідного процесу – час регулювання та пере регулювання;

$\frac{1}{u_m^2}$  – ваговий коефіцієнт третього доданка.

Знайти та проаналізувати закон оптимального керування.

**Математична формалізація задачі.** Оберемо за координати стану вихідну величину та її першу похідну

$$z_1(t) = y(t), \quad z_2(t) = y'(t). \quad (2.8)$$

Початковий стан об'єкта  $z_1(t_0) = z_{10} = y_0$ ,  $z_2(t_0) = z_{20} = y'_0$ , кінцевий стан  $z_1(t_k = \infty) = 0$ ,  $z_2(t_k = \infty) = 0$ .

Система диференціальних рівнянь стану має такий вигляд:

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t); \\ z_2'(t) &= -\frac{1}{T_M} z_2 + \frac{1}{T_M} u(t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Звідси нескладно встановити, що матриця стану  $\mathbf{A}$  та матриця керування  $\mathbf{B}$  матричного рівняння стану (1.1) дорівнюють

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_M} \end{vmatrix}.$$

Показник якості керування (2.2) запишемо у вигляді функціонала Лагранжа

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), u(t), t] dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{z_1^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{z_2^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right) dt, \quad (2.10)$$

де  $L[\mathbf{z}(t), u(t), t] = \frac{1}{2} \left( \frac{z_1^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{z_2^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right)$  – функція Лагранжа.

Критерій оптимальності керування полягає у досягненні мінімуму заданого показника якості

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{z_1^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{z_2^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right) dt \rightarrow \min_{u \in U_t} \quad (2.11)$$

Отже, маємо задачу синтезу оптимального керування з закріпленими кінцями при фіксованому, але нескінченному часі закінчення керування (дивись додаток Б).

Для квадратичного показника якості, на відміну від задач на максимальну швидкодію, керованість об'єкта (дивись додаток Г) *не є необхідною умовою (!) існування оптимального керування* [2]. Проте керованість об'єкта є достатньою умовою існування єдиного оптимального керування.

З метою аналізу керованості об'єкта розглянемо матриці  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  і  $\mathbf{M} = |\mathbf{B} \ \mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ .

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{T_M} \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{T_M} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{T_M} \\ -\frac{1}{T_M^2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{T_M} \\ \frac{1}{T_M} & -\frac{1}{T_M^2} \end{vmatrix}.$$

Матриця  $\mathbf{M}$  – квадратна, її визначник

$$\det(\mathbf{M}) = -\frac{1}{T_M^2} \neq 0. \quad (2.12)$$

Заданий об'єкт є керованим, тому що ранг матриці  $\mathbf{M}$  дорівнює порядку об'єкта. Таким чином, для заданого об'єкта принцип максимуму надає необхідні і достатні умови оптимальності.

**Синтез закону оптимального керування.** Використовуючи форму функціонала якості (2.10), визначимо матриці  $\mathbf{Q}$  та  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} y_m^{-2} & 0 \\ 0 & \tau^2 \cdot y_m^{-2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{u_m^2}. \quad (2.13)$$

Використовуючи матриці  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{Q}$  та  $\mathbf{R}$ , складемо матричне алгебраїчне рівняння Ріккати (дивись додаток В) для визначення

симетричної матриці  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^T = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix}$ :

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} - \\ -u_m^2 \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_M} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{T_M} & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_m^{-2} & 0 \\ 0 & \tau^2 \cdot y_m^{-2} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.14)$$

Звідси отримуємо систему скалярних рівнянь

$$\begin{cases} u_m^2 \frac{\gamma_{12}^2}{T_M^2} - y_m^{-2} = 0; \\ 2 \left( \gamma_{12} - \frac{\gamma_{22}}{T_M} \right) - u_m^2 \frac{\gamma_{22}^2}{T_M^2} + \tau^2 \cdot y_m^{-2} = 0; \\ \gamma_{11} - \frac{\gamma_{12}}{T_M} - u_m^2 \frac{\gamma_{12} \cdot \gamma_{22}}{T_M^2} = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Послідовно розглядаючи отримані рівняння, можна знайти всі розв'язки цієї системи (читачеві рекомендується це зробити самостійно). Однак третє рівняння системи (2.15) та умови дійсності та додатної визначеності матриці  $\Gamma$  призводять до вимоги

$$\gamma_{11} > 0, \quad \gamma_{12} > 0, \quad \gamma_{22} > 0. \quad (2.16)$$

Це дозволяє обрати єдиний розв'язок системи (2.15) і, таким чином, елементи матриці  $\Gamma$  такі:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= u_m^{-1} \cdot y_m^{-1} \sqrt{1 + u_m^2 \left( \tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2T_M \cdot y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} \right)}; \\ \gamma_{12} &= T_M \cdot y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}; \\ \gamma_{22} &= T_M \cdot u_m^{-2} \left( \sqrt{1 + u_m^2 \left( \tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2T_M \cdot y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} \right)} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

За допомогою рівнянь (2.17) отримуємо матрицю коефіцієнтів підсилення  $\mathbf{K}$  оптимального регулятора

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{R}^{-1} \times \mathbf{B}^T \times \Gamma = u_m^2 \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{T_M} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} = \frac{u_m^2}{T_M} \begin{vmatrix} \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} y_m^{-1} \cdot u_m & \left( \sqrt{1 + u_m^2 \left( \tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2T_M \cdot y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} \right)} - 1 \right) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Таким чином, оптимальне за мінімумом квадратичного показника якості керування має вигляд

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -\mathbf{K} \times \mathbf{z}^*(t) = \\ &= -\frac{u_m}{y_m} \cdot z_1^*(t) - \left( \sqrt{1 + u_m^2 \left( \tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2T_M \cdot y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} \right)} - 1 \right) \cdot z_2^*(t). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Структура оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування наведена на рисунку 2.2.

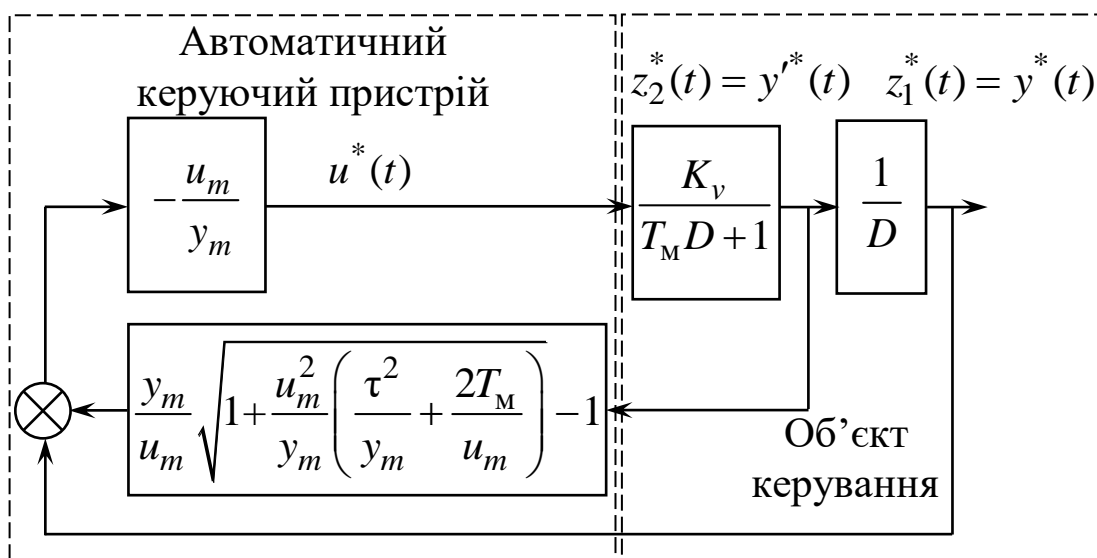


Рисунок 2.2 – Алгоритмічна структура оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування заданим об'єктом

**Аналіз процесів в оптимальній системі керування.** Проаналізуємо процеси в оптимальній системі керування та встановимо зв'язок між показниками якості у перехідному режимі цієї системи та параметрами функціонала якості (2.7).

Для цього складемо матрицю стану оптимальної системи та диференційні рівняння стану

$$\mathbf{z}'^*(t) = \mathbf{A}\mathbf{c} \times \mathbf{z}^*(t), \quad (2.20)$$

$$\text{де } \mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \times \mathbf{K} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{u_m}{T_M \cdot y_m} & -\frac{1}{T_M} \sqrt{1 + \frac{u_m^2}{y_m} \left( \frac{\tau^2}{y_m} + \frac{2T_M}{u_m} \right)} \end{vmatrix}. \quad (2.21)$$

Враховуючи (2.20) та (2.21), отримуємо

$$\begin{aligned} z_1'^*(t) &= z_2^*(t), \\ z_2'^*(t) &= -\frac{u_m}{T_M \cdot y_m} z_1^*(t) - \frac{1}{T_M} \sqrt{1 + \frac{u_m^2}{y_m} \left( \frac{\tau^2}{y_m} + \frac{2T_M}{u_m} \right)} \cdot z_2^*(t). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Якщо врахувати, що  $z_1^*(t) = y^*(t)$ ,  $z_2^*(t) = y'^*(t)$ , тоді друге рівняння системи (2.22) набуде вигляду

$$y''^*(t) + \frac{1}{T_M} \sqrt{1 + \frac{u_m^2}{y_m} \left( \frac{\tau^2}{y_m} + \frac{2T_M}{u_m} \right)} \cdot y'^*(t) + \frac{u_m}{T_M \cdot y_m} y^*(t) = 0. \quad (2.23)$$

Таким чином, оптимальна система керування для заданого об'єкта (2.5) є ланкою другого порядку (лінійною САК!) та для її аналізу доступні всі загальновідомі методи аналізу лінійних САК.

Частота  $\omega_0$  власних незгасаючих коливань

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{u_m}{T_M \cdot y_m}}, \quad (2.24)$$

а відносний коефіцієнт згасання  $\xi$  коливань

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y_m}{T_M \cdot u_m} + \omega_0^2 \cdot \tau^2 + 2}. \quad (2.25)$$

Якщо параметри  $y_m, u_m, T_M, \tau$  такі, що  $\xi < 1$ , тоді рівняння (2.23) відповідає коливальній ланці. При цьому перехідний процес має коливальний характер та перерегулювання  $\sigma$  завжди не перевищує 4 %. Якщо перерегулювання є небажаним, обравши параметри  $y_m, u_m, \tau$  такі, щоб

$$\frac{y_m}{T_M \cdot u_m} + \omega_0^2 \cdot \tau^2 \geq 2, \quad (2.26)$$

отримуємо  $\xi \geq 1$ , внаслідок чого перехідний процес буде аперіодичним (монотонним).

Таким чином, вибором параметрів  $y_m, \tau, u_m$  функціонала якості (2.7) можна, залишившись у рамках оптимальної структури, надати системі керування потрібних динамічних властивостей.

## 2.5.2 Експериментальне дослідження оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування лінійним стаціонарним об'єктом 2

Дослідження проводиться за допомогою пакета програм Simulink програмної оболонки Matlab. Експеримент полягає у реєстрації оптимального керування  $u^*(t)$ , оцінки величини квадратичного показника якості керування  $J$ , керованої величини  $y^*(t) = z_1^*(t)$  та оцінки показників якості перехідного режиму – часу регулювання  $t_p$  і перерегулювання  $\sigma$  в залежності від величини параметра функціонала якості (2.7) –  $\tau$ .

Відкрити файл **Quadr\_1\_int\_1\_inerc**. Схему проведення експерименту в пакеті Simulink зображено на рисунку 2.3. Вона складається з моделі САК (**Integrator1, Transfer Fcn**), блоків формування оптимального керування (**Gain, Gain1**), блоків формування оцінки квадратичного показника якості (**Gain2, Gain3, Gain4, Gain5, Product, Product1, Product2, Integrator2**), блока формування перехідної характеристики для оцінки показників якості перехідного режиму – часу регулювання  $t_p$  і перерегулювання  $\sigma$  (**Constant**) та двох віртуальних осцилографів – триканального і одноканального (**Scope, Scope1**).

На верхньому екрані триканального осцилографа спостерігається оптимальне керування  $u^*(t)$ , на середньому – оцінка величини квадратичного показника якості керування  $J$ , на нижньому – керована величина  $y^*(t) = z_1^*(t)$ .

На екрані одноканального осцилографа спостерігається перехідна характеристика для оцінки часу регулювання  $t_p$  і перерегулювання  $\sigma$ .

Для підвищення точності моделювання у вікні Simulink натиснути кнопку **Simulation**, відкрити вікно **Configuration Parameters** та встановити відносну точність **Relative Tolerance** рівною  $1e^{-6}$ .

У командному рядку Matlab ввести команду

$$\mathbf{T=1; u\_m = 1; y\_m = 1; tau = 0.}$$

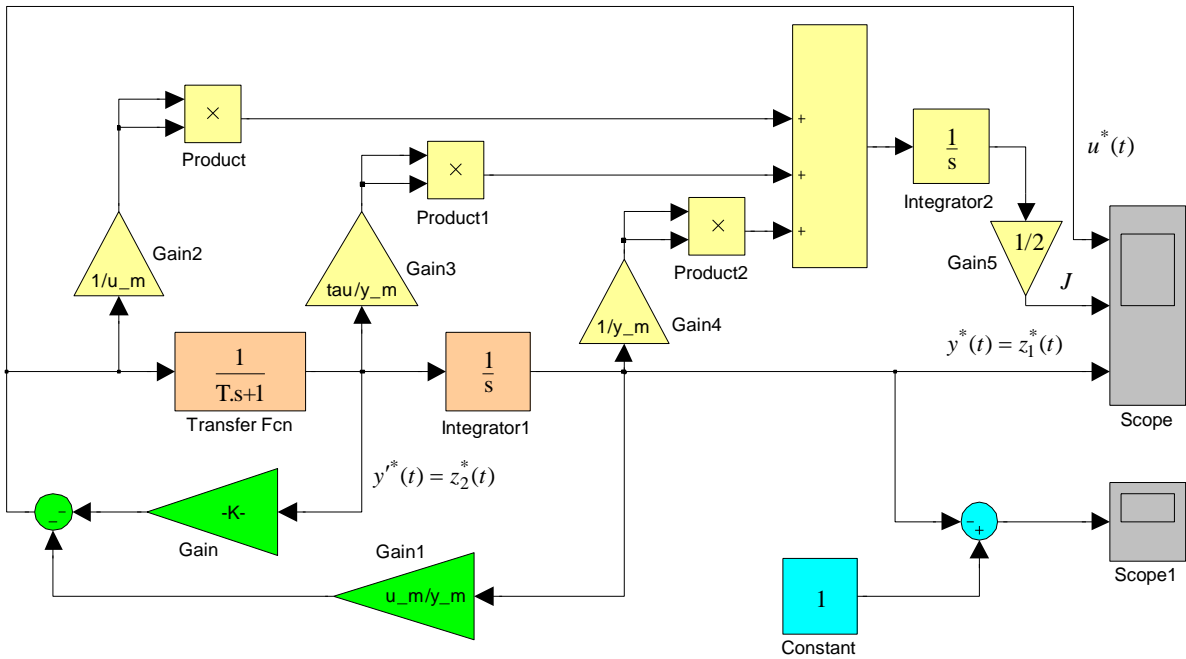


Рисунок 2.3 – Схема проведення експерименту

Встановити початкові умови  $z_{20}$ ,  $z_{10}$  для інтеграторів **Integrator2**, **Integrator1** рівними 0 та 1 відповідно. Ці блоки відкриваються подвійним натисненням лівою кнопкою миші на відповідний інтегратор. Початкові умови встановлюються у рядку **Initial Condition**.

Провести дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування заданим об'єктом натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів. У разі необхідності для зручності спостереження величин на екранах осцилографів натиснути кнопку «**Бінокль**» (**Autoscale**).

Занести оптимальне значення квадратичного показника якості керування  $J_{\text{опт}}$ , час регулювання  $t_p$  і перерегулювання  $\sigma$  у відповідні рядки таблиці 2.1.

Провести аналогічні дослідження для величин параметра  $\tau = 0.5, 1, 1.5, 2$ , задаючи їх у командному рядку Matlab.

Зменшити «вартість» енергії керування. Для цього в командному рядку Matlab ввести команду

$$u\_m = 5.$$



Таблиця 2.1

$u_m = 1$	$\tau, \text{с}$	0	0.5	1	1.5	2
	$J_{\text{опт}}, \text{с}$					
	час регулювання $t_p, \text{с}$					
	перерегулювання $\sigma, \%$					
$u_m = 5$	$\tau, \text{с}$	0	0.5	1	1.5	2
	$J_{\text{опт}}, \text{с}$					
	час регулювання $t_p, \text{с}$					
	перерегулювання $\sigma, \%$					

Провести дослідження для величин параметра  $\tau = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ , задаючи їх у командному рядку Matlab.

Побудувати графіки експериментальних залежностей  $J_{\text{опт}} = J_{\text{опт}}(\tau)$ ,  $t_p = t_p(\tau)$ ,  $\sigma = \sigma(\tau)$  від величини параметра  $\tau$  для двох значень  $u_m$  (1 та 5), занести їх до звіту, зробити висновки.

## 2.6 Зміст звіту

1 Назва і мета роботи.

2 Рівняння «вхід-вихід», схема математичної моделі досліджуваного об'єкта керування, функціонал якості керування та критерій оптимальності.

3 Хід та результати аналітичного дослідження: розрахунок матриці коефіцієнтів підсилення  $\mathbf{K}$ , оптимального керування  $u^*(t)$  (рівняння (2.17 – 2.19)); рівняння «вхід-вихід» оптимальної системи керування та параметри отриманої коливальної ланки (рівняння (2.22 – 2.26)).

4 Схема проведення експерименту.

5 Таблиці і графіки експериментальних залежностей.

6 Висновки з роботи.

## Контрольні питання

- 1 Поясніть поняття «оптимальне керування».
- 2 Чим відрізняється оптимальна система автоматичного керування від інших систем свого класу?
- 3 Поясніть поняття «показник якості».
- 4 Поясніть поняття «функціонал якості».
- 5 Які форми функціоналів якості застосовуються в загальній теорії оптимального керування?
- 6 Поясніть поняття «критерій оптимальності».
- 7 Які вихідні дані входять у зміст задачі синтезу оптимального керування?
- 8 Поясніть поняття «вектор стану».
- 9 Що зв'язує між собою рівняння стану?
- 10 Який об'єкт називається керованим?
- 11 Поясніть поняття «критерій керованості».
- 12 Як за рівнянням стану з'ясувати керованість об'єкта?
- 13 Як зв'язані поняття стійкості об'єкта і керованості об'єкта?
- 14 Поясніть поняття «лагранжіан».
- 15 Поясніть поняття «гамільтоніан».
- 16 Поясніть поняття «канонічна система рівнянь».
- 17 Як зв'язані канонічна система рівнянь і гамільтоніан?
- 18 Як зв'язані канонічна система рівнянь і лагранжіан?
- 19 Як знаходиться максимум функції за її аналітичним виразом?
- 20 Надайте формулювання принципу максимуму.
- 21 В якому випадку принцип максимуму надає не тільки необхідні, але і достатні умови існування оптимального керування об'єктом?
- 22 У чому полягає специфіка оптимального за мінімумом квадратичного показника якості керування лінійним стаціонарним об'єктом?
- 23 Надайте необхідні та достатні умови додатної визначеності квадратичної форми.
- 24 Як за відомими матрицями **R**, **B**, **G** розрахувати матрицю коефіцієнтів підсилення **K**?
- 25 Яке рівняння задовольняє матриця **G**?
- 26 Які умови накладаються на матрицю **G**?

27 Чому керованість об'єкта не є необхідною умовою існування єдиного оптимального за мінімумом квадратичного показника якості керування лінійним стаціонарним об'єктом?

28 Як зв'язані квадратичний показник якості і поліпшена інтегральна оцінка?

29 Як можна, залишившись у рамках оптимальної за квадратичним показником якості структури, надати системі керування потрібних динамічних властивостей?

30 Запропонуйте можливий варіант реалізації системи керування, наближеної до оптимальної, якщо фактична величина керуючого діяння, оптимального за квадратичним показником якості, буде перевищувати реальні можливості керуючого пристрою (наприклад, при обмеженні  $|u(t)| \leq U_{\max}$ ).

31 У чому полягає основне практичне значення теорії оптимального керування?

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Александров Є. Є., Козлов Є. П., Кузнецов Б. І. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами. Т. 1. Теорія автоматичного керування. Харків : НТУ «ХПІ», 2002. 490 с.

2 Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Москва : Наука, 1969. 384 с.

3 Boscain, U., Piccoli B. Optimal synthesis for control systems on 2-D manifolds. Springer-Verlag, 2004. 262 p.

4 Hull, D. Optimal control theory for Applications. Springer-Verlag, 2003. 384 p.

5 Хісматулін В. Ш., Панченко С. В. Теорія автоматичного керування. Ч. 1. Теорія лінійних неперервних систем автоматичного керування. Харків : УкрДАЗТ, 2008. 239 с.

6 Теорія оптимальних систем автоматичного керування. Лабораторний практикум. Ч. 2. Дослідження оптимальних за швидкодією систем автоматичного керування / В. Ш. Хісматулін, О. В. Нейчев, О. М. Прогонний, О. О. Сосунов. Харків : УкрДУЗТ, 2018. 52 с.

## ДОДАТОК А

### Форми функціонала якості та квадратичний показник якості керування

У варіаційних задачах оптимального керування вимога до якості керування математично виражається забезпеченням екстремуму деякого показника якості  $J$ , який є змінною величиною (функціоналом якості), числове значення якого залежить від вибору вектора керуючих діянь  $\mathbf{u}(t)$ . Функціонал якості може бути простим функціоналом вектора керуючих діянь

$$J = J[\mathbf{u}(t)],$$

але частіше він складним чином залежить від вектора керуючих діянь через усі змінні характеристики керованого процесу, які, у свою чергу, також залежать від вектора керуючих діянь

$$J = J[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t_k), t_k].$$

Залежність функціонала якості від  $\mathbf{z}(t_k)$  має місце тільки в задачах з незакріпленим правим кінцем, а залежність від  $t_k$  – при нефіксованому моменті завершення керування, тому що тільки у цих випадках величини  $\mathbf{z}(t_k)$  і  $t_k$  є змінними, значення яких залежать від вектора керуючих діянь.

В різних задачах, в залежності від їх конкретного смислу, функціонал якості обирається по-різному. В загальній теорії оптимального керування все різноманіття функціоналів якості, що зустрічаються в конкретних задачах, зводиться до трьох типів.

Функціонали першого типу, які мають назву *функціоналів Лагранжа*, надають інтегральну характеристику якості перехідного процесу і витрат на керування при переведенні об'єкта керування з початкового стану до кінцевого стану. Такий функціонал має вигляд

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (\text{A.1})$$

де підінтегральна функція  $L$ , що має назву функція Лагранжа, або лагранжіан, у кожній конкретній задачі обирається в залежності від фізичного смислу задачі і вимог, що накладаються на якість керування.

Функціонали другого типу, які мають назву **функціоналів Майєра**, в задачах з незакріпленим правим кінцем характеризують якість результату керування

$$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k], \quad (\text{A.2})$$

причому безпосередня залежність від  $t_k$  має місце тільки при нефіксованому моменті завершення керування. Функціонали цього типу також часто зустрічаються у багатьох задачах, що мають велике практичне значення.

В задачах з незакріпленим правим кінцем якість керування також може оцінюватися не тільки якістю досягнутого результату, але і якістю керування на всьому інтервалі керування від  $t_0$  до  $t_k$ . В таких задачах якість керування виражається функціоналами третього типу, що мають назву **функціоналів Больца**

$$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt. \quad (\text{A.3})$$

Функціонали третього типу є сумою функціоналів першого і другого типів.

В математичному відношенні функціонали всіх трьох типів (A.1 – A.3) еквівалентні, бо вони можуть бути перетворені один у другий заміною змінних. Однак для зручності розв'язування конкретних задач їх доцільно розглядати незалежно.

Припустимо, що рух об'єкта керування необхідно стабілізувати таким чином, щоб до моменту закінчення керування вектор вихідних величин  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  перейшов

в нульовий стан:  $\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{0}$  (якщо  $\mathbf{y}(t_k) \neq \mathbf{0}$ , задачу можна звести до задачі з нульовим кінцевим станом заміною змінних  $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t_k)$ ).

Визначимо вектор помилки керування  $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{0} - \mathbf{y}(t) = -\mathbf{y}(t).$$

У багатьох прикладних задачах якість досягнутого результату керування можна охарактеризувати величиною суми зважених квадратів компонентів вектора помилки в момент закінчення керування

$$J_1 = \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \cdot e_i^2(t_k), \quad (\text{A.4})$$

де  $\tilde{p}_i$  – невід’ємні числа,  $\tilde{p}_i \geq 0$ .

Вимога  $\tilde{p}_i \geq 0$  виключає можливість взаємної компенсації одних компонентів помилки іншими.

Якщо важливою є якість перехідного процесу по всіх керованих величинах, то показником якості може служити величина

$$J_2 = \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \int_{t_0}^{t_k} e_i^2(t) dt = \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \cdot I_{2i} \quad (\text{A.5})$$

де  $I_{2i} = \int_{t_0}^{t_k} e_i^2(t) dt$  – квадратична інтегральна оцінка якості

перехідного процесу по  $i$ -тому виходу, величина якої, як відомо, досить об’єктивно характеризує перехідний процес.

Таким чином, величина  $J_2$  являє собою зважену суму квадратичних інтегральних оцінок якості керування за всіма наявними виходами. Щоб при зважуванні не відбувалося взаємної компенсації одних квадратичних інтегральних оцінок

іншими, необхідно величинам  $\tilde{q}_i$  надавати тільки невід'ємних значень  $\tilde{q}_i \geq 0$ .

Вимоги до точності керування і якості перехідного процесу, як правило, повинні поєднуватися з вимогами до величини керуючих діянь, причому не завжди ці вимоги вичерпуються накладенням обмежень на їх граничні значення, як, наприклад, в задачі про керування, оптимальне за швидкодією. У багатьох практично важливих задачах мають місце ще й інтегральні вимоги до керуючих дій, що обмежують, наприклад, витрату енергії на керування. Ці вимоги можна охарактеризувати величиною

$$J_3 = \sum_{i=1}^r r_i \int_{t_0}^{t_k} u_i^2(t) dt, \quad (\text{A.6})$$

де  $r_i$  – вагові коефіцієнти, що набувають тільки додатних значень:  $r_i > 0$ .

Вимога суворої додатності всіх коефіцієнтів  $r_i$  пояснюється тим, що тут неприпустимі не тільки взаємна компенсація одних витрат на керування іншими (випадок, коли деякі з  $r_i < 0$ ), але навіть і неврахування деяких з цих витрат, що була б можливою, якби частина компонентів дорівнювала нулю.

Після всього викладеного неважко зрозуміти сенс показника якості вигляду

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \cdot e_i^2(t_k) + \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \int_{t_0}^{t_k} e_i^2(t) dt + \sum_{i=1}^r r_i \int_{t_0}^{t_k} u_i^2(t) dt. \quad (\text{A.7})$$

Показники якості  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  (А.4 – А.6) і більш загальний показник якості  $J$  (А.7) є варіантами **квадратичних показників якості** керування.

Подамо квадратичний показник якості керування у векторно-матричній формі. Для цього введемо в розгляд діагональні матриці:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{P}} &= \text{diag}[\tilde{p}_i], \quad i = 1, 2, \dots, n; \\
\tilde{\mathbf{Q}} &= \text{diag}[\tilde{q}_i], \quad i = 1, 2, \dots, n; \\
\mathbf{R} &= \text{diag}[r_i], \quad i = 1, 2, \dots, r.
\end{aligned}
\tag{A.8}$$

Безпосередніми обчисленнями неважко переконатися в тому, що

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \cdot e_i^2(t_k) &= \mathbf{e}^T(t_k) \times \tilde{\mathbf{P}} \times \mathbf{e}(t_k); \\
\sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \int_{t_0}^{t_k} e_i^2(t) dt &= \int_{t_0}^{t_k} \mathbf{e}^T(t) \times \tilde{\mathbf{Q}} \times \mathbf{e}(t) dt; \\
\sum_{i=1}^r r_i \int_{t_0}^{t_k} u_i^2(t) dt &= \int_{t_0}^{t_k} \mathbf{u}^T(t) \times \tilde{\mathbf{R}} \times \mathbf{u}(t) dt.
\end{aligned}
\tag{A.9}$$

Використовуючи наведені співвідношення (A.8 – A.9), можна загальний показник якості  $J$  (A.7) подати у вигляді

$$\begin{aligned}
J &= \mathbf{e}^T(t_k) \times \tilde{\mathbf{P}} \times \mathbf{e}(t_k) + \\
&+ \int_{t_0}^{t_k} \left[ \mathbf{e}^T(t) \times \tilde{\mathbf{Q}} \times \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t) \times \tilde{\mathbf{R}} \times \mathbf{u}(t) \right] dt.
\end{aligned}
\tag{A.10}$$

При математичній формалізації варіаційних задач опис всіх внутрішніх змінних задачі проводиться за допомогою координат стану. Тому необхідно квадратичний показник якості навести в такому вигляді, щоб в нього увійшли координати стану керованого об'єкта.

Якщо об'єкт лінійний, то вектор вихідних величин зв'язаний з вектором стану рівнянням

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \times \mathbf{z}(t),$$

де  $\mathbf{C}$  – матриця виходу розміром  $k \times n$ .



Для такого об'єкта вектор помилки при нульовому кінцевому стані дорівнює

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{0} - \mathbf{y}(t) = -\mathbf{C} \times \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{e}^T(t) = -\mathbf{z}^T(t) \times \mathbf{C}^T. \quad (\text{A.11})$$

Підставимо (A.11) в (A.10). В результаті отримаємо

$$J = \mathbf{z}^T(t_k) \times \mathbf{C}^T \times \tilde{\mathbf{P}} \times \mathbf{C} \times \mathbf{z}(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} \left[ \mathbf{z}^T(t) \times \mathbf{C}^T \times \tilde{\mathbf{Q}} \times \mathbf{C} \times \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \times \tilde{\mathbf{R}} \times \mathbf{u}(t) \right] dt. \quad (\text{A.12})$$

Позначимо

$$\frac{1}{2} \mathbf{P} = \mathbf{C}^T \times \tilde{\mathbf{P}} \times \mathbf{C}, \quad \frac{1}{2} \mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \times \tilde{\mathbf{Q}} \times \mathbf{C}, \quad \frac{1}{2} \mathbf{R} = \tilde{\mathbf{R}}. \quad (\text{A.13})$$

Матриці  $\mathbf{P}$  і  $\mathbf{Q}$  – це симетричні матриці ( $p_{ij} = p_{ji}$ ,  $q_{ij} = q_{ji}$ ) розмірності  $k \times k$ , але в загальному випадку недиагональні, на відміну від матриць  $\tilde{\mathbf{P}}$  і  $\tilde{\mathbf{Q}}$ .

Використовуючи введені матриці  $\mathbf{P}$  і  $\mathbf{Q}$  (A.13), квадратичний показник якості (A.12) можна записати в більш компактній формі

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t_k) \times \mathbf{P} \times \mathbf{z}(t_k) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} \left[ \mathbf{z}^T(t) \times \mathbf{Q} \times \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \times \mathbf{R} \times \mathbf{u}(t) \right] dt, \quad (\text{A.14})$$

де  $\frac{1}{2} \left[ \mathbf{z}^T(t) \times \mathbf{Q} \times \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \times \mathbf{R} \times \mathbf{u}(t) \right] = L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]$  – лагранжیان (функція Лагранжа) функціонала (A.14).

## ДОДАТОК Б

### Принцип максимуму Л. С. Понтрягіна

При формулюванні принципу максимуму користуються спеціальними методами математичного опису об'єкта керування, системою допоміжних змінних (спряжених змінних) до вектора стану об'єкта та спеціальним видом функціонала якості – функцією Гамільтона (гамільтоніан).

Рух лінійного об'єкта керування описується *системою лінійних диференціальних рівнянь стану*

$$z'_i(t) = F_i[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{Б.1})$$

де  $\mathbf{z}^T(t) = \{z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)\}$  –  $n$ -вимірний вектор стану;

$\mathbf{u}^T(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)\}$  –  $k$ -вимірний вектор керування.

За системою (Б.1) складається *гамільтоніан  $H$*

$$H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t] = -L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] + \sum_{j=1}^n \psi_j(t) \cdot F_j[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad (\text{Б.2})$$

де  $L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]$  – підінтегральна функція (лагранжіан) функціоналів якості (А.1), (А.3);

$\boldsymbol{\psi}(t) = |\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)|^T$  – вектор *спряжених змінних*, що задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\psi'_i(t) = -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial z_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{Б.3})$$

Системи рівнянь (Б.1) та (Б.3) створюють так звану *канонічну систему рівнянь* варіаційної задачі

$$z'_i(t) = F_i[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] = \frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial \psi_i};$$

$$\psi'_i(t) = -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial z_i};$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$
(Б.4)

Поряд зі скалярною формою запису гамільтоніана (Б.2) і скалярною формою запису канонічної системи (Б.4) застосовуються і векторно-матричні форми запису

$$H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t] = -L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] +$$

$$+\boldsymbol{\psi}^T(t) \times \mathbf{F}[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t];$$
(Б.5)

$$\mathbf{z}'(t) = \frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial \boldsymbol{\psi}};$$

$$\boldsymbol{\psi}'(t) = -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial \mathbf{z}};$$
(Б.6)

де  $\mathbf{F}[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] = [F_1[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t], \dots, F_n[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]]^T$  – вектор правих частин диференціальних рівнянь стану (Б.1);

$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}, \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}}$  – матриці-стовбці, що складені з частинних

похідних гамільтоніана за координатами стану та спряженими змінними

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} = \left[ \frac{\partial H}{\partial z_1}, \frac{\partial H}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial z_n} \right]^T,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}} = \left[ \frac{\partial H}{\partial \psi_1}, \frac{\partial H}{\partial \psi_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \psi_n} \right]^T.$$
(Б.7)

**Принцип максимуму.** Для того щоб керування  $\mathbf{u}^*(t)$  було оптимальним, *необхідно*:

1) щоб існували ненульовий вектор допоміжних змінних  $\boldsymbol{\psi}^*(t)$  (вектор спряжених змінних) і траєкторія стану  $\mathbf{z}^*(t)$ , що задовольняють канонічну систему рівнянь

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{A} \times \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \times \mathbf{u}(t) = \frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t), t]}{\partial \boldsymbol{\psi}}, \\ \psi'_i(t) &= -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t), t]}{\partial z_i}, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

при  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ ,  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}^*(t)$ ,  $\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\psi}^*(t)$  і граничних умовах, що наведені в таблиці Б.1;

2) щоб в будь-який момент часу на інтервалі керування гамільтоніан  $H[\mathbf{z}^*(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), t]$ , який розглядається як функція незалежної змінної  $\mathbf{u}$ , досягав при  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$  свого максимального значення

$$H^*[\mathbf{z}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), t] = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{u}_t} H[\mathbf{z}^*(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), t]; \quad (\text{Б.9})$$

3) щоб в кінцевий момент часу  $t = t_k$  для гамільтоніана  $H^*(t_k)$  було справедливо співвідношення (умови трансверсальності), що наведено в таблиці Б.1.

Таблиця Б.1 – Умови трансверсальності для гамільтоніана  $H^*(t_k) = H^*[\mathbf{z}^*(t_k), \mathbf{u}^*(t_k), \Psi^*(t_k), t_k]$

Тип задачі	Множина цілей керування	Вид функціонала якості	Граничні умови для канонічної системи рівнянь на лівому кінці	Граничні умови для канонічної системи рівнянь на правому кінці	Умови для $H^*$ при $t = t_k$
1	2	3	4	5	6
1 Задача з закріпленими кінцями при фіксованому часі керування	$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ , $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$ , – $t_0, t_k, \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_k$ – фіксовані величини	$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$	$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$ , для $\Psi^*(t_0)$ – умов нема	$\mathbf{z}^*(t_k) = \mathbf{z}_k$ , для $\Psi^*(t_k)$ – умов нема	умов нема
2 Задача з закріпленими кінцями при нефіксованому часі керування	$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ , $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$ – $t_0, \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_k$ – фіксовані величини, $t_k$ – варійована величина	$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$	$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$ , для $\Psi^*(t_0)$ – умов нема	$\mathbf{z}^*(t_k) = \mathbf{z}_k$ , для $\Psi^*(t_k)$ – умов нема	$H^*(t_k) = 0$

Продовження таблиці Б.1

1	2	3	4	5	6
<p>3 Задача з незакріпленим (напіввільним) правим кінцем при фіксованому часі керування</p>	<p><math>\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0</math>,  <math>\mathbf{z}(t_k) \in S_k</math>:  <math>\eta_i [z(t_k)] = 0</math>,  <math>i = 1, 2, \dots, q &lt; n</math>,  <math>\mathbf{z}_0, t_0, t_k</math> – фіксовані величини</p>	$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k)] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$	<p><math>\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0</math>,                  для <math>\Psi^*(t_0)</math> – умов нема</p>	$\Psi^*(t_k) = - \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k)]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)} + \mathbf{a}^T \frac{\partial \Pi[\mathbf{z}^*(t_k)]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)},$ <p><math>\mathbf{a}^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}</math> – довільний вектор, для <math>\mathbf{z}^*(t_k)</math> – умов нема</p>	<p>умов нема</p>
<p>4 Задача з незакріпленим (вільним) правим кінцем при фіксованому часі керування</p>	<p><math>\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0</math>,  <math>\mathbf{z}_0, t_0, t_k</math> – фіксовані величини,  <math>\mathbf{z}(t_k)</math> – довільний вектор</p>	$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k)] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$	<p><math>\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0</math>,                  для <math>\Psi^*(t_0)</math> – умов нема</p>	$\Psi^*(t_k) = - \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)},$ <p>для <math>\mathbf{z}^*(t_k)</math> – умов нема</p>	<p>умов нема</p>

Продовження таблиці Б.1

1	2	3	4	5	6
<p>5 Задача з незакріпленим (напіввільним) правим кінцем при нефіксованому часі керування</p>	<p><math>\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0</math>,  <math>\mathbf{z}(t_k) \in S_k</math>:  <math>\eta_i[\mathbf{z}(t_k), t_k] = 0</math>,  <math>i = 1, \dots, q &lt; n + 1</math>,  <math>\mathbf{z}_0, t_0</math> – фіксовані величини,  <math>t_k</math> – варійована величина</p>	<p><math>J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] +</math>  <math>+ \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt</math></p>	<p><math>\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0</math>,                  для <math>\Psi^*(t_0)</math> – умов нема</p>	<p><math>\Psi^*(t_k) = -</math>  <math>\frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)} +</math>  <math>+ \mathbf{a}^T \frac{\partial \eta[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)}</math>,  <math>\mathbf{a}^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}</math>                  – довільний вектор,                  для <math>\mathbf{z}^*(t_k)</math> – умов нема</p>	<p><math>H^*(t_k) =</math>  <math>\frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial t_k} -</math>  <math>- \mathbf{a}^T \frac{\partial \eta[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial t_k}</math></p>
<p>6 Задача з незакріпленим (вільним) правим кінцем при нефіксованому часі керування</p>	<p><math>\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0</math>,  <math>\mathbf{z}_0, t_0</math> – фіксовані величини,  <math>\mathbf{z}(t_k)</math> – довільний вектор,  <math>t_k</math> – варійована величина</p>	<p><math>J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] +</math>  <math>+ \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt</math></p>	<p><math>\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0</math>,                  для <math>\Psi^*(t_0)</math> – умов нема</p>	<p><math>\Psi^*(t_k) = -</math>  <math>\frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)}</math>,                  для <math>\mathbf{z}^*(t_k)</math> – умов нема</p>	<p><math>H^*(t_k) =</math>  <math>\frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial t_k}</math></p>

## ДОДАТОК В

### Застосування принципу максимуму для задач з квадратичним показником якості керування

Розглянемо специфіку застосування принципу максимуму Л. С. Понтрягіна для знаходження оптимального керування в задачах з квадратичним показником якості (А.14), коли момент завершення керування є нескінченим ( $t_k = \infty$ ), хоч і фіксованим.

Така постановка характерна для важливих практичних задач, коли необхідно не тільки перевести об'єкт з деякого початкового стану в нульовий стан, але й утримувати об'єкт у такому стані необмежено довго.

В цьому випадку перший доданок функціонала якості (А.14) дорівнює нулю і квадратичний показник якості може бути записаний у формі Лагранжа (А.1)

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{z}^T(t) \times \mathbf{Q} \times \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \times \mathbf{R} \times \mathbf{u}(t)] dt. \quad (\text{В.1})$$

Складемо гамільтоніан і канонічну систему рівнянь даної задачі (Б.2)

$$\begin{aligned} H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t)] &= -L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t)] + \boldsymbol{\psi}^T(t) \times \mathbf{z}'(t) = \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t) \times \mathbf{Q} \times \mathbf{z}(t) - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T(t) \times \mathbf{R} \times \mathbf{y}(t) + \\ &\quad + \boldsymbol{\psi}^T(t) \times (\mathbf{A} \times \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \times \mathbf{u}(t)), \end{aligned} \quad (\text{В.2})$$

де вектор спряжених змінних  $\boldsymbol{\psi}(t)$  повинен задовольняти векторне рівняння (Б.3).

Диференціюючи  $H$  за  $\mathbf{z}$ , отримуємо

$$\boldsymbol{\psi}'(t) = -\mathbf{A} \times \boldsymbol{\psi}(t) + \mathbf{Q} \times \mathbf{z}(t).$$



Таким чином, канонічна система рівнянь даної задачі має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{A} \times \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \times \mathbf{u}(t); \\ \boldsymbol{\psi}'(t) &= -\mathbf{A}^T \times \boldsymbol{\psi}(t) + \mathbf{Q} \times \mathbf{z}(t). \end{aligned} \tag{B.3}$$

Припустимо, що існує оптимальне керування  $\mathbf{u}^*(t)$  і відповідні вектори  $\mathbf{z}^*(t)$  та  $\boldsymbol{\psi}^*(t)$ , що задовольняють канонічну систему (B.3) та граничні умови

$$\mathbf{z}^*(0) = \mathbf{z}_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}^*(t) = \mathbf{0}.$$

Для пошуку оптимального керування  $\mathbf{u}^*(t)$  дослідимо гамільтоніан (B.2) на екстремум.

При оптимальному керуванні повинна виконуватись умова досягнення екстремуму  $H$  за  $\mathbf{u}$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*(t)} = 0.$$

Обчислюючи вектор частинних похідних  $H$  за  $\mathbf{u}$ , отримуємо необхідну умову мінімуму

$$-\mathbf{R} \times \mathbf{u}^*(t) + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi}^*(t) = 0.$$

Звідси, якщо оптимальне керування існує, воно повинно мати такий вигляд:

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{R}^{-1} \times \mathbf{B}^T \times \boldsymbol{\psi}(t), \tag{B.4}$$

причому матриця  $\mathbf{R}^{-1}$  існує, тому що матриця  $\mathbf{R}$  додатно визначена. В силу такої ж властивості матриці  $\mathbf{R}$  екстремум, що доставляє гамільтоніану керування  $\mathbf{u}^*(t)$ , є максимумом, а  $\mathbf{u}^*(t)$  є оптимальним керуванням.

Щоб завершити розв'язання задачі, необхідно з (В.4) виключити вектор спряжених змінних  $\boldsymbol{\psi}^*(t)$  та виразити оптимальне керування  $\mathbf{u}^*(t)$  через стан керованого об'єкта. Для цього покажемо, що при  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$  розв'язки  $\mathbf{z}^*(t)$  та  $\boldsymbol{\psi}^*(t)$  канонічної системи (В.3) зв'язані співвідношенням

$$\boldsymbol{\psi}^*(t) = -\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{z}^*(t), \quad (\text{В.5})$$

де  $\boldsymbol{\Gamma}$  – постійна симетрична матриця.

При підстановці в канонічну систему (В.3) рівнянь (В.4) та (В.5) отримуємо дві тотожності

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'^*(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{B} \times \mathbf{R}^{-1} \times \mathbf{B}^T \times \boldsymbol{\Gamma}) \times \mathbf{z}^*(t); \\ -\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{z}'^*(t) &= (\mathbf{A}^T \times \boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{Q}) \times \mathbf{z}^*(t). \end{aligned}$$

Помноживши обидві частини першої тотожності зліва на  $\boldsymbol{\Gamma}$  та складаючи результат перемноження з другою тотожністю, отримуємо

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A}^T \times \boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{Q} + \boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{A} - \boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{B} \times \mathbf{R}^{-1} \times \mathbf{B}^T \times \boldsymbol{\Gamma}) \times \mathbf{z}^*(t).$$

Щоб це співвідношення було тотожністю, необхідно, щоб вираз в дужках дорівнював нулю.

Таким чином, матриця  $\boldsymbol{\Gamma}$  повинна задовольняти матричне алгебраїчне рівняння

$$\mathbf{A}^T \times \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{A} - \boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{B} \times \mathbf{R}^{-1} \times \mathbf{B}^T \times \boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (\text{В.6})$$

Це рівняння називають алгебраїчним рівнянням Ріккати. Матриця  $\boldsymbol{\Gamma}$  є симетричною матрицею, що можна довести шляхом транспонування рівняння (В.6).

Матричне алгебраїчне рівняння Ріккати є нелінійним рівнянням і тому може мати більше одного розв'язку. Виникає

проблема вибору з множини розв'язків цього рівняння такого розв'язку, який би відповідав умовам задачі. Знайдемо додаткові умови, що накладаються на матрицю  $\Gamma$ , які дають можливість єдиного вибору цієї матриці з множини всіх розв'язків матричного алгебраїчного рівняння (В.6).

Нехай  $\Gamma$  – розв'язок рівняння (В.6). Скористуємось співвідношенням (В.5) та виразимо вектор оптимального керування  $\mathbf{u}^*(t)$  через вектор стану  $\mathbf{z}^*(t)$

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K} \times \mathbf{z}^*(t), \quad (\text{В.7})$$

де 
$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \times \mathbf{B}^T \times \Gamma \quad - \quad (\text{В.8})$$

матриця постійних коефіцієнтів підсилення оптимального регулятора (автоматичного керуючого пристрою).

Визначимо, як буде змінюватись стан керованого об'єкта при керуванні вигляду (В.7). Для цього співвідношення (В.7) та (В.8) підставимо у рівняння стану об'єкта (В.3)

$$\mathbf{z}'^*(t) = \mathbf{A} \times \mathbf{z}^*(t) - \mathbf{B} \times \mathbf{R}^{-1} \times \mathbf{B}^T \times \Gamma \times \mathbf{z}^*(t) = \mathbf{A}_c \times \mathbf{z}^*(t), \quad (\text{В.9})$$

де 
$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{B} \times \mathbf{R}^{-1} \times \mathbf{B}^T \times \Gamma = \mathbf{A} - \mathbf{B} \times \mathbf{K} \quad - \quad (\text{В.10})$$

матриця стану оптимальної системи керування, що складається з об'єкта керування та автоматичного керуючого пристрою (регулятора), що здійснює керування відповідно до (В.7).

На керований рух об'єкта даної задачі покладена умова

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}^*(t) = \mathbf{0}.$$

Тому рух, що відповідає рівнянню (В.9), повинен бути асимптотично стійким, який накладає відомі обмеження на матрицю  $\mathbf{A}_c$  і відповідно на матрицю  $\Gamma$ , від якої залежить матриця  $\mathbf{A}_c$ .

Доведено<sup>1</sup>, що керованість об'єкта є достатньою умовою існування єдиної додатно визначеної симетричної матриці  $\Gamma$ , що задовольняє алгебраїчне рівняння Ріккати (В.6), вимоги асимптотичної стійкості оптимальної системи, що має дійсні елементи.

Відмітимо, що, згідно з (В.6) та (В.8), матриця коефіцієнтів підсилення  $\mathbf{K}$  не залежить від стану і повністю визначається завданням матриць  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ . Тому матрицю  $\mathbf{K}$  можна розрахувати до початку роботи системи керування, але для цього попередньо слід розрахувати матрицю  $\Gamma$ .

Для об'єктів високого порядку при розрахунку матриці  $\Gamma$  необхідно використовувати чисельні методи, але для об'єктів не вище другого порядку матриця  $\Gamma$  може бути знайдена і без використання обчислювальних засобів.

Слід також додати, що оптимальне керування  $\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K} \times \mathbf{z}^*(t)$ , може бути реалізовано за допомогою безінерційного лінійного стаціонарного регулятора і, таким чином, оптимальна система керування буде лінійною САК.

---

<sup>1</sup> Керованість об'єкта не є необхідною умовою існування єдиного розв'язку задачі! Доведено, якщо об'єкт не є цілком керованим, але власний рух його некерованих координат асимптотично згасає, тоді існує єдина додатно визначена симетрична матриця  $\Gamma$ , така, що керування (В.7) є оптимальним.

## ДОДАТОК Г

### Керованість об'єкта та критерії керованості

Перед розв'язуванням варіаційних задач оптимального керування необхідно з'ясувати питання принципової можливості реалізувати мету керування шляхом прикладення до об'єкта припустимих керуючих діянь. Відповідь на це питання надає поняття *керованості об'єкта*.

Стан об'єкта керування  $\mathbf{z}_0$ , що описується системою диференціальних рівнянь

$$z'_i(t) = F_i[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad i = 1, \dots, n,$$

називається керованим відносно стану  $\mathbf{z}_k$ , якщо існує вектор припустимих керувань  $\mathbf{u}(t)$ , що переводить за кінцевий інтервал часу  $t_k - t_0$  даний об'єкт із стану  $\mathbf{z}_0$  до стану  $\mathbf{z}_k$ .

Об'єкт називається *керованим*, якщо будь-який його початковий стан  $\mathbf{z}_0$  керований відносно будь-якого кінцевого стану  $\mathbf{z}_k$ .

Вектор керуючих діянь  $\mathbf{u}^T(t) = \{u_1(t), \dots, u_k(t)\}$  належить до класу припустимих, якщо всі функції  $u_1(t), \dots, u_k(t)$  є кусково-неперервними на всьому інтервалі  $t_0 < t < t_k$ .

Зрозуміло, що вирішення варіаційної задачі оптимального керування існує тільки у тому випадку, коли, принаймні, заданий початковий стан об'єкта керований відносно всіх кінцевих станів, що належать заданій множині мети керування. Тому необхідно мати критерій керованості, що дозволить відповісти на принципову можливість реалізувати мету керування.

Проблема керованості найбільш повно вирішена для лінійних стаціонарних об'єктів, стан яких визначається векторно-матричним рівнянням

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A} \times \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \times \mathbf{u}(t). \quad (\Gamma.1)$$

Нижче без доказу наведено критерії керованості таких об'єктів.

Розглянемо матрицю керованості  $\mathbf{M}$ , що будується з матриць  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$  рівняння стану (Г.1)

$$\mathbf{M} = \left| \mathbf{B} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2 \times \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \times \mathbf{B} \right|.$$

Матриця  $\mathbf{M}$  отримується внаслідок розширення рядків матриці  $\mathbf{B}$  шляхом послідовного дописування елементів відповідних рядків добутків матриць  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}^2 \times \mathbf{B}$ , ...,  $\mathbf{A}^{n-1} \times \mathbf{B}$ . Тому матриця  $\mathbf{M}$  має  $n$  рядків та  $n \times k$  стовбців.

**Критерій керованості.** Лінійний стаціонарний об'єкт  $n$ -го порядку, що описується рівнянням стану

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A} \times \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \times \mathbf{u}(t),$$

керований тоді і тільки тоді, коли матриця  $\mathbf{M}$  має ранг  $n$ .

Якщо рівняння стану (Г.1) задане в канонічній формі (Г.2) (або приведене до канонічної форми шляхом лінійного перетворення), в якій матриця стану  $\mathbf{A}$  діагональна

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ \vdots \\ z_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_k(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{Г.2})$$

тоді найбільш доцільно використовувати критерій Гільберта [6].

**Критерій керованості Гільберта.** Лінійний стаціонарний об'єкт  $n$ -го порядку, що описується рівнянням стану (Г.1), керований тоді і тільки тоді, коли жодний рядок матриці  $\mathbf{B}$  не є нульовим (тобто у кожному рядку матриці  $\mathbf{B}$  є хоч один ненульовий елемент).

Визначимо, що критерій керованості не залежить від стійкості об'єкта. Тому об'єкт може бути керованим, навіть якщо він нестійкий при відсутності керування, оскільки керованість об'єкта зв'язана з потенційними можливостями керування.

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ  
ЗА КВАДРАТИЧНИМ ПОКАЗНИКОМ ЯКОСТІ  
СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт  
з дисципліни

*«ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ  
АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»*

Відповідальний за випуск Сосунов О. О.

Редактор Решетилова В. В.

---

Підписано до друку 09.07.20 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 3,0. Тираж 5. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет  
залізничного транспорту,  
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.