

**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

**ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ
ТА ТЕХНОЛОГІЙ**

Кафедра інформаційних технологій

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**до лабораторних робіт
з дисципліни**

«ЦИФРОВІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ»

Харків – 2020

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри інформаційних технологій 25 листопада 2019 р., протокол № 7.

У методичних вказівках викладено основні питання про дослідження цифрових систем керування (ЦСК) та їх передавальних функцій з метою набуття навичок подальшого їх синтезу.

Методичні вказівки призначено для студентів спеціальностей 126 — Інформаційні системи та технології та 123 — Комп'ютерна інженерія, які вивчають дисципліну «Цифрові системи керування», денної та заочної форм навчання.

Укладачі:

доценти Б. Т. Ситнік,
В. О. Бриксін

Рецензент

проф. М. А. Мірошник

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 Дослідження ЦСК із кінцевою тривалістю перехідного процесу.....	5
2 Дослідження стійкості і якості імпульсної системи.....	15
3 Дослідження цифрових керуючих фільтрів.....	24
4 Дослідження систем керування з цифровою корекцією.....	31
5 Моделювання типових випадкових процесів для дослідження цифрових систем керування.....	42
6 Дослідження цифрової системи при випадкових впливах.....	57
Список літератури.....	68

ВСТУП

Науково-технічний прогрес на залізничному транспорті визначається рівнем автоматизації технологічних процесів, підвищенням їхньої ефективності на основі широкого впровадження мікропроцесорних систем керування. Реалізація цих завдань неможлива без підготовки висококваліфікованих фахівців, здатних розробляти, впроваджувати й застосовувати в різних галузях убудовані мікропроцесорні системи керування. Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни «Цифрові системи керування» (ЦСК) призначені для закріплення студентами знань, одержаних на лекційних і практичних заняттях відповідно до робочої навчальної програми за дисципліною «Цифрові системи керування».

До виконання лабораторних робіт допускаються студенти, що пройшли інструктаж з техніки безпеки і успішно пройшли контрольне опитування. Звіт з лабораторної роботи складається кожним студентом окремо. Захист виконаної роботи відбувається під час наступного заняття. Під час перебування у лабораторії студенти повинні суворо дотримуватися вимог техніки безпеки щодо роботи з комп'ютерною технікою. Інструктаж з техніки безпеки проводить викладач на початку лабораторних занять, про що кожен студент і викладач засвідчують у лабораторному журналі.

Видання може бути використане студентами інших напрямів підготовки при вивченні ними питань систем автоматичного керування.

У результаті проведення лабораторних робіт студенти повинні знати: методи аналізу і синтезу ЦСК, методику дослідження ЦСК із кінцевою тривалістю перехідного процесу, методику дослідження стійкості і якості імпульсної системи, методику дослідження цифрових керуючих фільтрів, методику дослідження систем керування з цифровою корекцією, методику моделювання типових випадкових процесів для дослідження цифрових систем керування, методику дослідження цифрової системи при випадкових впливах.

Наприкінці кожної роботи наведені порядок виконання дослідження, можливі теми навчально-дослідницької роботи,

контрольні запитання та завдання, відповіді на які дозволяють визначити ступінь готовності студентів до виконання лабораторної роботи, питання підвищеної складності.

Дослідження ЦСК виконуються за допомогою програмного комплексу ТЦСУ.ЕХЕ, який встановлюється у навчальні ПЕОМ.

1 ДОСЛІДЖЕННЯ ЦСК ІЗ КІНЦЕВОЮ ТРИВАЛІСТЮ ПЕРЕХІДНОГО ПРОЦЕСУ

Мета дослідження. Вивчення методів синтезу, корекції й моделювання цифрових систем із заданою кінцевою тривалістю перехідного процесу й астатизмом визначеного порядку.

При синтезі ряду цифрових і імпульсних автоматичних систем доцільно ставити вимогу завершення перехідного процесу за задане кінцеве число періодів дискретності T . Наприклад, це характерно для систем керування рухом роботів і інших робочих механізмів, систем програмної зміни параметрів руху об'єктів транспорту.

Щоб перехідний процес в автоматичній системі цілком закінчувався за N періодів дискретності, її дискретна передатна функція повинна мати вигляд

$$H(z) = B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots + B_N z^{-N} \quad (1.1)$$

і відповідати нерекурсивному імпульсному фільтру. Тут коефіцієнти B_i визначають значення гратчастої вагової функції системи $W[n] = z^{-1}\{H(z)\}$. Оскільки вираз (1.1) можна трактувати як ряд Лорана, одержимо

$$W[n] = \begin{cases} B_n & \text{при } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{при } n < 0 \text{ і } n > N \end{cases} \quad (1.2)$$

З цієї причини системи з дискретною передатною функцією (1.1) називають також системами з кінцевою ваговою функцією чи кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ – системи).

Зазначимо, що в ЦСК з інерційним об'єктом керування (ОК) реакція системи на кінцеву зміну вхідного впливу не може бути миттєвою і гратчаста вагова функція $W[n]$ не може мати стрибок при $n=0$, Тому далі будемо вважати, що $B_0=0$.

З (1.1) можна одержати дискретну передатну функцію системи для помилки (при $B_0=0$)

$$H_e(z)=1-H(z)=1-B_1z^{-1}-B_2z^{-2}-\dots-B_Nz^{-N}. \quad (1.3)$$

При синтезі системи, як правило, ставлять вимогу нульової сталої помилки відпрацьовування вхідного впливу у вигляді степеневого полінома деякого порядку (вимога астатизму), що накладає на коефіцієнти $\{B_i\}_1^N$ певні обмеження.

При вхідному впливі у вигляді одиничної східчастої гратчастої функції $g[n] = 1[n]$, що має z -зображення $G(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$, зображення помилки буде

$$E(z) = H_e(z)G(z) = \frac{1 - B_1z^{-1} - B_2z^{-2} - \dots - B_Nz^{-N}}{1 - z^{-1}}. \quad (1.4)$$

Вимогу нульової помилки в сталому режимі запишемо з використанням теореми про кінцеве значення у вигляді $e_{уст} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = 0$.

З огляду на (1.4) ця вимога буде виконана при $H_e(z)=0$, де $z = 1$ чи

$$B_1 + B_2 + \dots + B_N = 1. \quad (1.5)$$

Наявність кореня $z=1$ дозволяє відповідно до теореми Вієтта подати дискретну передатну функцію для помилки у вигляді

$$H_e(z) = (1 - z^{-1})Q_{N-1}(z), \quad (1.6)$$

де $Q_{N-1}(z) = 1 + q_1z^{-1} + \dots + q_{N-1}z^{-(N-1)}$ – поліном $(N-1)$ -го ступеня відносно z^{-1} .

Аналогічним чином можна показати, що при вхідному впливі у вигляді полінома $(\nu-1)$ -го ступеня $(1 \leq \nu \leq N)$, коли для нульової сталої помилки система повинна мати астатизм ν -го порядку, дискретна передатна функція для помилки повинна бути подана у вигляді

$$H_e(z) = (1 - z^{-1})^\nu Q_{N-\nu}(z). \quad (1.7).$$

У цьому випадку залишаються вільними для вибору лише коефіцієнти полінома $Q_{N-\nu}(z)$, що дозволяє зафіксувати таке ж число точок перехідного процесу в системі, а не всі N точок цього процесу.

Таким чином, формально без урахування особливостей реалізації ЦСК можна при $\nu = 0$ забезпечити будь-яку необхідну форму перехідної характеристики системи, вибравши коефіцієнти відповідно до формули (1.2) (при $B_0 = 0$). При $0 < \nu < N$ можливості керування формою перехідного процесу обмежені, а при $\nu = N$ вони відсутні. В останньому випадку величина $N = \nu$ характеризує мінімальну досяжну тривалість перехідного процесу в системі з астатизмом ν -го порядку.

Однак на практиці існують додаткові обмеження на коефіцієнти $\{B_i\}_1^N$, зв'язані з необхідністю забезпечення грубості системи з визначеною незмінною частиною. Якщо система є замкнутою з одиничним зворотним зв'язком, то дискретна передатна функція її розімкнутого контура для виконання умови (1.1) повинна мати вигляд

$$W(z) = \frac{H(z)}{1 - H(z)}. \quad (1.8)$$

Вона відповідає послідовному з'єднанню (рисунок 1.1) цифрового керуючого пристрою ЦО з дискретною передатною функцією $D(z)$, яку можна вибирати, і незмінної приведені безупинної частини з дискретною передатною функцією

$$W_0(z) = \frac{z-1}{z} * Z \left\{ \frac{W_H(p)}{p} \right\}. \quad (1.9)$$

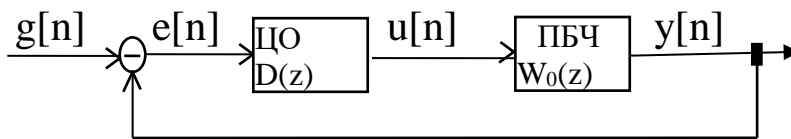


Рисунок 1.1 – Система з одиничним зворотним зв'язком

Тому якщо коефіцієнти передачі лінеаризованих АЦП і ЦАП вважати одиничними, то

$$W(z) = D(z)W_0(z). \quad (1.10)$$

Для виконання вимог щодо грубості системи необхідно, щоб дискретна передатна функція $H(z)$ містила, як свої нулі, всі ті нулі дискретної передатної функції $W_0(z)$, модуль яких дорівнює чи більше одиниці. Крім того, необхідно, щоб дискретна передатна функція $H_e(z) = 1 - H(z)$ містила, як свої нулі, всі ті полюси $W_0(z)$, модуль яких дорівнює чи більше одиниці.

Досліджуються ЦСК, у яких безупинні об'єкти керування можуть мати передатні функції $W_H(p)$ трьох варіантів, поданих у таблиці 1.1. Відповідні їм, при використанні екстраполятора нульового порядку, дискретні передатні функції приведеної безупинної частини $W_0(z)$, визначені за формулою (1.9), також подано в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Передатні функції об'єктів керування і приведеної безупинної частини ЦСК

Об'єкт керування	$W_H(p)$	$W_0(z)$
1 Нейтрально-стійкий 1-го порядку	$\frac{K_H}{p}$	$\frac{K_H T z^{-1}}{1 - z^{-1}}$
2 Хитливий 1-го порядку	$\frac{K_H}{-1 + T_H p}$	$\frac{K_H (d-1) z^{-1}}{1 - d z^{-1}},$ где $d = e^{T/T_H} > 1$
3 Нейтрально-стійкий 2-го порядку	$\frac{K_H}{p^2}$	$\frac{K_H T^2 (1 + z^{-1}) z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^2}$

Якщо потрібно забезпечити мінімальну тривалість перехідного процесу при астатизмі першого порядку, тобто при $\nu = 1$, то без урахування вимог щодо грубості системи відповідно до (1.7) при $N = \nu$ одержимо $H_e(z) = 1 - z^{-1}$, відкіля $H(z) = 1 - H_e(z) = z^{-1}$.

При цьому для дискретної передатної функції розімкнутого контура системи формула (1.8) дає

$$W(z) = \frac{T z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad (1.11)$$

а відповідну (1.11) дискретну передатну функцію цифрового керуючого пристрою варто визначити з урахуванням (1.10) у вигляді

$$D(z) = \frac{W(z)}{W_0(z)}.$$

Для стійкого, нейтрально-стійкого і для хитливого об'єктів керування першого порядку (варіанти 1 і 2 у таблиці 1.1) необхідні функції $D(z)$ подано у таблиці 1.2 (рядки 1 і 2). Однак, зауважимо, що функція $H_e(z) = 1 - z^{-1}$ має нуль $z = 1$, що збігається з полюсом функції $W_0(z)$ першого варіанта, але не збігається з полюсом $z = d$ функції $W_0(z)$ другого варіанта, що порушує умову грубості ЦСК.

При урахуванні вимоги грубості у випадку хитливого об'єкта керування варто прийняти $H_e(z) = (1 - z^{-1})(1 - d z^{-1})$, тоді

$$W(z) = \frac{(1 + d - d z^{-1}) z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - d z^{-1})}. \quad (1.12)$$

Відповідна (1.12) функція $D(z)$, що забезпечує грубість системи, також подана в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 Дискретні передатні функції цифрового керуючого пристрою

	Порядок астатизму ЦСК ν	Варіант $W_H(p)$ за таблицею 1.1	D(z) Без урахування грубості	D(z) З урахуванням грубості
1	1	1	$\frac{1}{K_H T}$	$\frac{1}{K_{H1} T}$
2	1	2	$\frac{1}{K_H (d-1)} * \frac{1-dz^{-1}}{1+z^{-1}}$	$\frac{1}{K_H (d-1)} * \frac{1+d-dz^{-1}}{1+z^{-1}}$
3	2	3	$\frac{2}{K_H T^2} * \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$	$\frac{2}{K_H T^2} * \frac{5-3z^{-1}}{4+3z^{-1}}$
4	2	3	Додаткова вимога: $\Delta f_{\nu} T \rightarrow \min$	$\frac{2T}{K_H T^2} * \frac{7-3z^{-2}}{8+9z^{-1}+3z^{-2}}$

Якщо потрібно забезпечити мінімальну тривалість перехідного процесу при астатизмі другого порядку, тобто при $\nu = 2$, то без урахування вимог грубості системи за формулою (1.7) при $N = \nu$ одержимо $H_e(z) = (1 - z^{-1})^2$, відкіля $H(z) = 1 - H_e(z) = (2 - z^{-1})z^{-1}$.

Для дискретної передатної функції розімкнутого контуру системи формула (1.8) дає

$$W(z) = \frac{(2 - z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}. \quad (1.13)$$

Однак вона не забезпечує грубості системи, оскільки функція $W_0(z)$ має нуль $z = -1$, не наявний у функції $H(z)$. Щоб врахувати вимогу грубості, скористаємося формулою (1.7) при $N = \nu + 1 = 3$ і прийнемо

$$H_e(z) = (1 - z^{-1})^2 (1 + q_1 z^{-1}).$$

Тоді

$$H(z) = 1 - H_e(z) = (2 - q_1)z^{-1} - (1 - 2q_1)z^{-2} - q_1 z^{-3}.$$

Величину коефіцієнта q_1 визначимо з умови $H(-1)=0$, відкіля $q_1 = 3/4$. Для розімкнутого контура системи замість (1.13) одержимо

$$W(z) = \frac{(1+z^{-1})(5-3z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(4+3z^{-1})}. \quad (1.14)$$

Відповідна (1.14) дискретна передатна функція цифрового керуючого пристрою $D(z)$, що враховує вимогу грубості системи, подана в таблиці 1.2.

Істотно, що ЦСК із дискретною передатною функцією (1.14) синтезована без прийняття яких-небудь спеціальних вимог по запасі стійкості, за формою перехідної характеристики, за шириною смуги пропущення і іншими. При необхідності врахування подібних вимог приходиться збільшувати величину N . Наприклад, якщо крім астатизму другого порядку потрібно забезпечити мінімальну еквівалентну смугу пропущення системи для дискретного білого шуму (безрозмірна величина)

$$\Delta f_{,T} = \sum_{i=1}^N B_i^2, \quad (1.15)$$

то, прийнявши $N=4$, відповідно до (1.7) одержимо

$$H_e(z) = (1-z^{-1})^2 * (1+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}).$$

З умови $H(-1)=0$ чи $H_e(-1)=1$ випливає $q_2 = q_1 - 3/4$, відкіля

$$\begin{aligned} H(z) = 1 - H_e(z) &= (2-q_1)z^{-1} + (q_1-1/4)z^{-2} + (q_1-3/2)z^{-3} - \\ &- (q_1-3/4)z^{-4}, \\ \Delta f_{,T} &= (2-q_1)^2 + (q_1-1/4)^2 + (q_1-3/2)^2 + (q_1-3/4)^2. \end{aligned}$$

Вимога $\Delta f_{,T} \rightarrow \min$ буде виконана при $q_1=9/8$, $q_2=3/8$, тобто при

$$H(z) = \frac{7}{8}z^{-1} + \frac{7}{8}z^{-2} - \frac{3}{8}z^{-3} - \frac{3}{8}z^{-4}.$$

Тоді формула (1.8) дає

$$W(z) = \frac{(1+z^{-1})(z-3z^{-2})z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(8+9z^{-1}+3z^{-2})}. \quad (1.16)$$

Відповідна (1.16) дискретна передатна функція цифрового керуючого пристрою подана в таблиці 1.2.

Дослідження полягають у моделюванні зазначених у таблицях 1.1 і 1.2 передатних функцій приведеної безупинної частини об'єктів і передатних функцій цифрових керуючих пристроїв шляхом їхньої заміни на відповідні різницеві рівняння.

Дослідження ЦСК з кінцевою тривалістю перехідного процесу здійснюється за допомогою моделюючої програми, написаної мовою Visual C++.

ЦО ЦСК моделюється шляхом задання різницевого рівняння, що відповідає дискретній передатній функції $D(z)$ ЦО.

Безупинні ОК ЦСК моделюються за допомогою розрахунку за рекурентними формулами методу трапецій.

Моделююча програма працює в діалоговому режимі і забезпечує можливість задання різних режимів обробки і виведення інформації, що полегшує її аналіз.

У програмі прийнято такі позначення:

G – постійний вхідний вплив $g[n]$;

E – помилка $e[n]$;

U – керуючий вплив $u[n]$ (вихідний сигнал ЦО);

Y – вихід безупинного ОК $y[t]$;

T – період квантування ЦСК, с;

$TMOD$ – час моделювання, с;

$TIME$ – реальний час перехідного процесу, с;

KNN, TN – відповідно коефіцієнт передачі K_N , постійна часу T_N ОК.

Порядок виконання дослідження

1 Увімкнути ПЕОМ, завантажити з робочого столу програму ТЦСУ, у меню вибрати лабораторну роботу «Дослідження ЦСК із кінцевою тривалістю перехідного процесу».

2 Увести ПІБ і номер групи.

3 Працюючи в діалоговому режимі з ПЕОМ задати тип досліджуваного об'єкта (без виконання вимоги грубості чи системи додаткової вимоги для ОК № 3).

4 Увести значення вихідних даних: період квантування $T=0.1$ с; постійний вплив, що *задає*, $G = 1$; часу *моделювання* $TMOD$, визначається дослідним шляхом виходячи з тривалості перехідного процесу, а також, відповідно до номеру вашого варіанта (таблиця 1.3), параметрів ОК.

Таблиця 1.3 – Варіанти завдань

	1	2	3	4	5	6	7	8
KN1	10	9.5	9	10.5	10.2	2.5	11	9.7
KN	10	10.3	10.5	9.5	9.7	11	9	10.7
TN	0.1	0.15	0.12	0.17	0.2	0.07	0.05	0.22
KN2	100	95	92	103	90	97	105	108

5 Запустити програму на виконання натисканням кнопки «Моделювати», експериментально підібрати необхідний час моделювання $TMOD$.

6 Після одержання необхідного результату натиснути кнопку «Додати у звіт».

7 Повторити дослідження з пп.4-6 з урахуванням вимог грубості ЦСК. Виконати дослідження з п.п. 3-6 стосовно до ЦСК із усіма варіантами, що залишилися, ОК (див. таблицю 1.1).

Можливі теми навчально-дослідницької роботи

1 Синтез і дослідження КІХ-систем із заданою формою гратчастої перехідної характеристики.

2 Синтез і дослідження КІХ-систем з визначеною необхідною величиною запасу стійкості.

3 Синтез і дослідження робастних КІХ-систем, що забезпечують обмежену величину дисперсії помилки керування при впливі з обмеженими дисперсіями першої і другої похідних.

Контрольні питання

1 Назвіть приклади систем автоматичного керування, що доцільно синтезувати як КІХ-системи.

2 Який вигляд має дискретна передатна функція ЦСК з кінцевою тривалістю перехідного процесу?

3 Як зв'язані коефіцієнти дискретної передатної функції цифрової КІХ-системи зі значеннями її ґратчастої вагової функції?

4 Чи може ґратчаста вагова функція ЦСК мати ненульове значення при $n = 0$?

5 Який вигляд має дискретна передатна функція ЦСК для помилки, якщо система має астатизм V -го порядку?

6 Назвіть умову гнучкості ЦСК, у якій дискретна передатна функція приведеної безупинної частини має нулі чи полюси поза колом одиничного радіуса?

7 Які об'єкти керування розглядаються в лабораторній роботі і які дискретні передатні функції приведеної безупинної частини їм відповідають?

8 Оцініть мінімальну тривалість перехідного процесу в ЦСК астатизмом V -го порядку. Чи залежить вона від властивостей об'єкта керування?

9 Як при синтезі цифрової КІХ-системи можна врахувати вимогу мінімізації її еквівалентної смуги пропущення для білого шуму?

Питання підвищеної складності

1 Знайдіть зв'язок між значеннями ґратчастої вагової функції і ґратчастої перехідної функції цифрової КІХ-системи. Доведіть, що при $n = 1$ значення цих функцій збігаються, якщо $w[0]=0$.

2 Доведіть справедливність виразу (1.7) у випадку, коли ЦСК має астатизм V -го порядку.

3 Синтезуйте цифрову КІХ-систему з нейтрально-стійким об'єктом керування другого порядку, що володіє астатизмом другого порядку і відсутністю перерегулювання в реакції на східчастий вплив, що задає. При якій мінімальній тривалості перехідного процесу N це можливо?

4 Доведіть справедливість виразу (1.15) для еквівалентної смуги пропускання КІХ-системи.

5 Доведіть, що дискретна передатна функція (1.16) дійсно забезпечує мінімальну еквівалентну смугу пропускання КІХ-системи з астатизмом другого порядку при $N=4$.

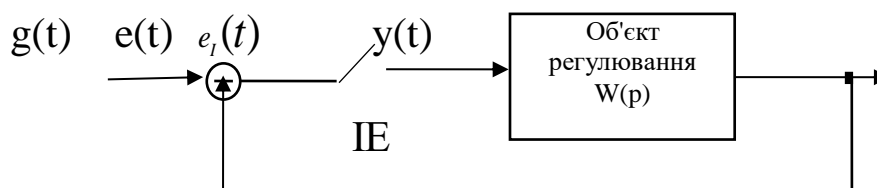
6 Досліджуйте залежність мінімальної досяжної смуги пропускання астатичної КІХ-системи від необхідної тривалості перехідного процесу.

2 ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ І ЯКОСТІ ІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ

Мета дослідження. Дослідження залежності властивостей імпульсної системи керування від значень її параметрів.

Імпульсною системою називають таку систему автоматичного керування, у якій контур чи коло керування періодично замикаються на визначені проміжки часу. Імпульсні системи не усі є цифровими й утворюють більш широкий клас автоматичних систем.

Структурна схема найпростішої замкнутої імпульсної системи зображена на рисунку 2.1.



$W(p)$ – передатна функція безупинної частини, $g(t)$ – вплив, що задає, $y(t)$ – керована величина, $e(t)=g(t)-y(t)$ – помилка керування, $e_i(t)$ – помилка в імпульсному вигляді;

імпульсний елемент (ІЕ) умовно подано як ключ, що замикається на короткий час, на виході якого формується показаний сигнал (рисунок 2.2).

Рисунок 2.1 – Структурна схема найпростішої замкнутої імпульсної системи

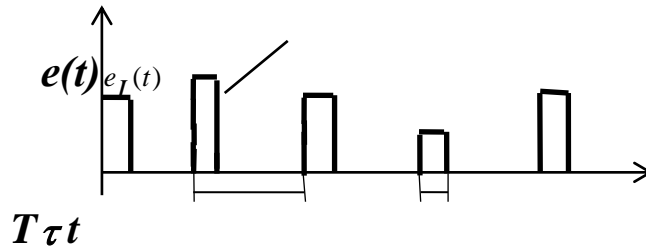


Рисунок 2.2 – Утворення вихідного сигналу імпульсного елемента

Тоді дискретну передатну функцію розімкнутого контура системи можна визначити через *Z-перетворення* за формулою

$$W(z) = Z\left[\frac{1 - e^{-p\tau}}{p} * W_H(p)\right] = \tau * Z[W_H(p)]. \quad (2.1)$$

Остання наближена рівність стає абсолютно точною тільки при $\tau \rightarrow 0$, однак на практиці припустимо її використання при $\tau \ll T$, якщо $\lim_{p \rightarrow \infty} p * W_H(p) = 0$.

Знання дискретної передатної функції $W(z)$, а також зв'язаної з нею співвідношенням (1.12) дискретної передатної функції замкнутої системи $H(z)$ дозволяє досліджувати динамічні властивості системи як імпульсного фільтра, тобто при описі процесів у ній ґратчастими функціями часу. Методи такого дослідження нічим не відрізняються від викладених у п. 1.3 стосовно до лінеаризованих цифрових систем. При використанні частотних методів варто перейти до псевдочастоти $\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$ через W -перетворення.

У цій роботі шляхом моделювання теоретично досліджуються стійкість і показники якості імпульсної системи, безупинна частина якої являє собою модель підсилувача і виконавчого двигуна, з'єднаних через редуктор з об'єктом керування. Передатна функція безупинної частини

$$W_H(p) = \frac{K}{p(1 + T1 * p)(1 + T2 * p)}, \quad (2.2)$$

де $T1$ – постійна часу виконавчого двигуна, $T2$ – постійна часу підсилювача, K – коефіцієнт передачі безупинної частини.

При теоретичному аналізі з метою спрощення викладу будемо вважати, що постійна часу $T2=0$ нехтовно мала і приймемо вираз

$$W_H(p) = \frac{K}{p(1 + T1 * p)}. \quad (2.3)$$

Тоді дискретна передатна функція розімкнутого контура системи відповідно до формули (2.1) складе

$$W(z) = \tau * Z \left[\frac{K}{p(1 + T1 * p)} \right] = \frac{K * \tau * (1 - d) * z}{(z - 1)(z - d)}, \quad (2.4)$$

де $d = e^{-T/T1}$.

Частотну передатну функцію розімкнутого контура системи визначимо за формулою (1.15)

$$W^*(j\lambda) = \frac{rK(1 + \frac{\lambda^2 * T^2}{4})}{j\lambda(1 + j\lambda T)}, \quad (2.5)$$

де $r = \tau / T$ – відносна тривалість імпульсу,

$T_{\text{э}} = \frac{1+d}{1-d} * \frac{T}{2}$ – еквівалентна постійна часу.

Використовуючи кожний з відомих критеріїв стійкості, умову стійкості замкнутої системи можна одержати у вигляді

$$r * K \ll \frac{4T_{\text{э}}}{T^2} = \frac{1+d}{1-d} * \frac{2}{T}. \quad (2.6)$$

При $T \ll T1$ справедливо наближена рівність $T_{\text{э}} = T1$ і умова (2.6) набуває вигляду $r * K < \frac{4T1}{T^2}$.

Показник коливальності M , що характеризує запас стійкості ЦСК, визначимо як максимальне значення АЧХ замкнутої системи

$$\left| H^*(j\lambda) \right| = \left| \frac{W^*(j\lambda)}{1+W^*(j\lambda)} \right| = \frac{rK(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4})}{\sqrt{([rK(1 + \lambda^2 T^{2/4}) - \lambda^2 T_s]^2 + \lambda^2)}}, \quad (2.7)$$

яке досягається на резонансній псевдочастоті $\lambda_{рез}$. Взяти похідну по λ і дорівнявши її до нуля, знайдемо вираз резонансної псевдочастоти

$$\lambda_{рез} = \frac{2}{T} \sqrt{\frac{2rK T_s - 1}{2T_s(4T_s T^{-2} - rK) - 1}} \quad (2.8)$$

при $\frac{1}{2T_s} < rK \frac{4T_s}{T^2} - \frac{1}{2T_s}$.

Величина $\lambda_{рез}$ звичайно близька до частоти коливань вихідної величини ЦСК у перехідному процесі. Підставивши (2.8) у (2.7), знайдемо показник коливальності M .

$$M = \left| H^*(j\lambda_{рез}) \right| = rK \sqrt{\frac{4T_s^2 - T^2}{rK T^2 (4T_s T^{-2} - rK) - 1}}. \quad (2.9)$$

Точність спостереження в сталому режимі можна охарактеризувати через коефіцієнт помилок. Наприклад, при зміні впливу, що задає, (кута повороту) із постійною Ω швидкістю динамічна помилка спостереження в сталому режимі складе

$$e_D = \frac{\Omega}{rK}. \quad (2.10)$$

Добуток, що входить у формули (2.5)-(2.10) r являє собою добротність системи за швидкістю і дорівнює добутку коефіцієнтів передачі всіх ланок розімкнутого контура системи, включаючи імпульсний елемент, оскільки відношення тривалості імпульсу до періоду дискретності є коефіцієнтом передачі імпульсного елемента за постійною складовою. Зауважимо, що

якщо період дискретності малий у порівнянні з тривалістю вагової функції безупинної частини, то систему можна розглядати як квазібезперервну і умовно вважати імпульсний елемент безупинною безінерційною ланкою з коефіцієнтом передачі g , приймаючи до уваги лише постійну складову сигналу на виході імпульсного елемента.

Як видно з формул (2.6), (2.8) і (2.10), при збільшенні коефіцієнта передачі безупинної частини (і, отже, добротності системи за швидкістю) зменшується динамічна помилка спостереження, але запас стійкості падає. Крім того, при цьому збільшується складова помилки спостереження за рахунок шумової перешкоди, що може бути на вході системи.

Співвідношення (2.6), (2.8) і (2.9) приблизно виконуються і при безупинній частині з передатною функцією (2.2), якщо постійна часу T_2 мала і частота T_2^{-1} набагато більше ніж псевдочастота λ_c зрізу АЧХ розімкнутої системи. Однак у загальному випадку наявність постійної часу T_2 приводить до зменшення запасу стійкості системи.

При експериментальному дослідженні потрібно одержати залежність гранично припустимого за умовою стійкості системи коефіцієнта передачі безупинної частини від періоду дискретності і від тривалості імпульсу. Крім того потрібно при заданій постійній часу T_2 і при $T_2=0$ визначити коефіцієнт передачі безупинної частини, при якому запас стійкості достатній для одержання малоколивального перехідного процесу з перерегулюванням $\sigma = 30\%$ і виміряти частоту коливань у перехідному процесі.

Дослідження полягають у моделюванні передатних функцій безупинної частини об'єктів і передатних функцій цифрових керуючих пристроїв шляхом їхньої заміни на відповідні різницеві рівняння.

Безупинна імпульсна частина імпульсної системи моделюється на ПЕОМ у цифровій формі. Моделювання безупинної частини здійснюється за допомогою розрахунку за рекурентними формулами методу трапецій. Програма цифрової моделі написана мовою Visual C++ і дозволяє з достатньою точністю відбити реальні процеси, що відбуваються в імпульсній системі. Діалоговий режим роботи програми забезпечує зручність

задання і зміни вихідних параметрів моделі й одержання необхідної інформації.

У програмі прийнято такі позначення:

$G=g_l$ – вплив, що задає $g(t)$;

Y – вихідний сигнал;

$E=G-Y$ ($e=g-y$) – сигнал помилки;

e_l – сигнал помилки в імпульсній формі;

K, T_1, T_2 – відповідно, коефіцієнт підсилення K і постійні часу T_1, T_2 об'єкту регулювання, с;

$T, TAU=\tau$ – відповідно, період квантування і час замикання імпульсного елемента ІЕ, с;

$TIME$ – реальний час t модульованого процесу у секундах, змінюється з дискретністю цифрового моделювання;

$TMOD$ – необхідний відрізок часу моделювання, с.

Порядок виконання дослідження

1 Увімкнути ПЕОМ, з робочого столу завантажити програму ТЦСУ.exe і з меню вибрати лабораторну роботу «Дослідження стійкості і якості імпульсної системи».

2 Увести ПІБ і номер групи, працюючи в діалоговому режимі з ПЕОМ, відповідно до номера варіанта увести вхідні дані, подано в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Варіанти завдань

	1	2	3	4	5	6	7	8
T, c	0.4	0.04	0.04	0.05	0.065	0.075	0.08	0.9
τ, c	0.01	0.002	0.003	0.003	0.006	0.007	0.008	0.01
T_1, c	1	1	1	1	1	1	1	1
T_2, c	0.03	0.025	0.005	0.025	0.03	0.01	0.05	0.03

3 Увести початкове значення коефіцієнта підсилення $K=1000$, сигнал завдання $G = I$ і необхідний часовий інтервал моделювання $TMOD$, що підбирається виходячи із середньої тривалості перехідного процесу в системі (для даного порядку значень параметрів системи $TMOD = 1 \div 1.5$ с).

4 Натиснути кнопку «Моделювати». При цьому можливі дві ситуації:

а) якщо початкове значення коефіцієнта підсилення $K=1000$ більше критичного значення коефіцієнта підсилення ($K_{кр} > K_{кр}$), що відповідає границі стійкості системи, і, отже, система хитлива,

б) якщо $K < K_{кр}$, то система стійка (коливання в перехідному процесі загасають).

Змінюючи значення коефіцієнта підсилення K , відповідно у бік зменшення у випадку а) чи зростання у випадку б), необхідно дослідним шляхом визначити критичне значення коефіцієнта підсилення $K_{кр}$, що відповідає границі стійкості системи, для заданих даних і для $T_2=0$. При тім у перехідному процесі виникають незатухаючі коливання постійної амплітуди.

Для занесення графіка у звіт необхідно натиснути кнопку «Додати у звіт».

5 Дослідним шляхом визначити таке значення коефіцієнта підсилення K , при якому перерегулювання в системі $\sigma = 30\%$.

6 Для знайденого в п.6 коефіцієнта підсилення K визначити добротність системи за швидкістю. Користаючись формулою (3.10), побудувати графік залежності динамічної помилки e від швидкості спостереження Ω при $0 \leq \Omega \leq 20$ град/с.

7 Побудувати графік залежності критичного коефіцієнта підсилення $K_{кр}$ від періоду квантування T імпульсного елемента ІЕ, $K_{кр}=f(T)$; для T змінюється від 0,01 до 0,1 с із кроком дискретності 0,02 с. $K_{кр}$ запам'ятовується натисканням кнопки «Запам'ятати $K_{кр}$ ».

Виконати для заданих вихідних даних і для $T_2=0$.

8 Побудувати графік залежності критичного коефіцієнта підсилення $K_{кр}$ від тривалості імпульсу τ , $K_{кр}=f(\tau)$, для τ змінюється від 0,001 до 0,01 с із кроком 0,002 с. $K_{кр}$ запам'ятовується натисканням кнопки «Запам'ятати $K_{кр}$ ». Виконати для заданих вихідних даних і для $T_2=0$.

Можливі теми навчально-дослідницької роботи

1 Дослідження умов, при яких імпульсну систему можна вважати квазінеперервною і при аналізі динамічних властивостей

системи правомірною заміною імпульсного елемента безупинною безінерційною ланкою.

2 Дослідження залежності запасу стійкості імпульсної системи з передатною функцією безупинної частини (3.2) від величин постійних часу $T1$ і $T2$, а також від співвідношення між ними.

3 Скласти алгоритм і програму функціонування в складі лабораторної установки імпульсного елемента. При цьому можна використовувати підпрограми формування часової затримки й одиночного імпульсу.

Контрольні питання

1 Що називається імпульсною системою керування? Наведіть приклади імпульсних систем.

2 Як зв'язані між собою дійсні і машинні параметри системи, що моделюється?

3 Як за $W(z)$ перейти до частотної передатної функції $W(j\lambda)$?

4 Від яких параметрів залежить стійкість імпульсної системи?

5 Як набрати на безупинній електронній моделі аперіодичну ланку першого порядку, другого порядку, ланку, що інтегрує?

6 Що являє собою псевдочастота λ ? Як за дискретною передатною функцією визначити запас стійкості системи?

7 Як за АЧХ замкнутої системи визначити запас стійкості? Що являє собою резонансна псевдочастота?

8 Як впливає період дискретності імпульсної системи на її стійкість?

9 Як впливає тривалість імпульсу на стійкість імпульсної системи?

10 Як впливає наявність у передатній функції безупинної частини другої постійної часу $T2$ на стійкість імпульсної системи?

11 Від чого залежить динамічна помилка спостереження в імпульсній системі?

12 Які фактори необхідно враховувати при виборі коефіцієнта передачі безупинної частини імпульсної системи?

Питання підвищеної складності

1 Чи можна з умови стійкості імпульсної системи (2.8) одержати умову стійкості безупинної системи з передатною функцією (2.5):

- а) граничним переходом $\tau \rightarrow T$;
- б) граничним переходом $\tau/T \rightarrow 1, T \rightarrow 0$?

2 Отримайте умову стійкості замкнутої системи (2.6) з використанням:

- а) критерію стійкості Гурвіца;
- б) критерію стійкості Михайлова;
- в) критерію стійкості Найквіста.

3 Знайдіть умову, за якої в імпульсній системі з дискретною передатною функцією (1.3) показник коливальності $M=1$, тобто АЧХ замкнутої системи є незростаючою функцією псевдочастоти. Що при виконанні цієї умови можна сказати про величину перерегулювання σ ?

4 Отримайте аналітичну залежність частоти загасаючих коливань у перехідному процесі $\omega_{\text{кол}}$ від резонансної псевдочастоти $\lambda_{\text{рез}}$.

5 Знайдіть вираз для помилки спостереження в імпульсній системі дискретною передатною функцією (2.3) при впливі, що задає, $q(t)=A_0 + A_1t + A_2t^2$, де $A_0=10$ град, $A_1=1$ град/с, $A_2=0,1$ град/с².

6 Використовуючи формулу (2.1) і таблицю Z - перетворень, знайдіть дискретну передатну функцію розімкнутої імпульсної системи з безупинною частиною у вигляді ідеального інтегруючого ланки. Чому цю дискретну передатну функцію не можна одержати з виразу (2.4) граничним переходом $T1 \rightarrow 0$? (Порівняйте відповідні гратчасті вагові функції безупинної частини).

7 З'ясуйте умови стійкості замкнутої імпульсної системи, безупинна частина якої є ідеальною інтегруючою ланкою, використовуючи який-небудь із критеріїв стійкості. Чи можна для цієї мети скористатися виразом (2.6), спрямувавши постійну часу $T1$ до нуля?

3 ДОСЛІДЖЕННЯ ЦИФРОВИХ КЕРУЮЧИХ ФІЛЬТРІВ

Мета дослідження. Вивчення принципів побудови і дослідження динамічних властивостей цифрових керуючих фільтрів.

При розв'язанні задач корекції систем автоматичного керування, а також згладжування, прогнозування, диференціювання, інтегрування, оптимальної фільтрації і інших задач динамічної обробки сигналів часто виникає необхідність включення в автоматичну систему елементів із необхідними цілком визначеними динамічними властивостями. В даний час стало ефективним використання цифрових фільтрів, реалізованих на мікро-ЦОМ чи спеціалізованих мікропроцесорних модулях. Для включення подібного цифрового обчислювача ЦО у систему автоматичного керування, інші ланки якої є безупинними, необхідні АЦП, ЦАП і екстраполятор Е.

Основною математичною моделлю лінеаризованого цифрового фільтра є його дискретна передатна функція $D(z)$.

Частотна передатна функція:

$$D(e^{j\omega T}) = D(z) \Big|_{z = e^{j\omega T}},$$
$$\text{АЧХ } A(\omega) = |D(e^{j\omega T})| \text{ і}$$

$$\text{ФЧХ } \Psi(\omega) = \arg D(e^{j\omega T}).$$

Це періодичні функції частоти ω з періодом $2\pi/T$. При переході до псевдочастоти $\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$ періодичність усувається. Відповідна частотна передатна функція

$$D^*(j\lambda) = D\left(\frac{1 + j\lambda T / 2}{1 - j\lambda T / 2}\right)$$

має дрібнораціональний вигляд, що дозволяє будувати ЛАХ і ЛФХ цифрових фільтрів аналогічно побудові таких характеристик для безупинних динамічних ланок.

На частотах $\omega \leq 0.5\pi / T$ псевдочастота λ приблизно дорівнює ω . Наприклад, на частотах $\omega \leq 0.5\pi / T$ псевдочастота відрізняється від частоти не більше ніж на 2%, тобто вони практично збігаються. Тому можна вважати, що якщо в спектрі вхідного сигналу $x(t)$ відсутні складові на частотах $\omega \leq 0.5\pi / T$, то динамічні властивості цифрового фільтра дуже близькі до динамічних властивостей безупинного фільтра з частотною передатною функцією

$$W_{\phi}(j\omega) = D(j\lambda) \Big|_{\lambda = \omega}^*$$

подачі однакових сигналів на вхід безупинного фільтра і на часовий квантовач цифрового фільтра сигнали на виході безупинного фільтра і на виході екстраполятора цифрового фільтра в дискретні моменти часу $t = nT$ будуть практично збігатися.

При синтезі цифрових систем керування часто виникає зворотна задача – так називана задача дискретної апроксимації безупинного фільтра, коли потрібно знайти дискретну передатну функцію цифрового фільтра, що за своїми динамічними властивостями був би близький до безупинного фільтра з частотною передатною функцією $W_{\phi}(j\omega)$. Одним з найпростіших методів дискретної апроксимації є заміна в частотній передатній функції $W_{\phi}(j\omega)$ частоти ω псевдочастотою λ з наступною

$$\text{підстановкою } j\lambda = \frac{2}{T} * \frac{z-1}{z+1}.$$

Існують і ускладнені методи. Як правило, вимога більшого наближення динамічних властивостей цифрового фільтра до динамічних властивостей безупинного фільтра-прототипу приводить до необхідності використання більш складних алгоритмів роботи ЦОМ. Наприклад, якщо безупинний прототип цифрового фільтра є ідеальною інтегруючою ланкою, тобто $W_{\phi}(j\omega) = k / j\omega$, де k – коефіцієнт передачі, то, використовуючи три різних методи дискретної апроксимації, можна одержати такі дискретні передатні функції цифрового фільтра:

$$D_1(z) = \frac{kT}{z-1} = \frac{kT z^{-1}}{1-z^{-1}}, \quad (3.1)$$

$$D_2(z) = \frac{kT}{2} * \frac{z+1}{z-1} = \frac{kT}{2} * \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}, \quad (3.2)$$

$$D_3(z) = \frac{kT}{3} * \frac{z^2+4z+1}{z^2-1} = \frac{kT}{3} * \frac{1+4z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}. \quad (3.3)$$

Теоретично завжди можна підібрати дуже складну дискретну передатну функцію цифрового фільтра, АЧХ і ФЧХ якого будуть збігатися з відповідними характеристиками безупинного фільтра-прототипу принаймні на частотах

$$\omega \leq 0.5\pi / T.$$

Іноді при дискретній апроксимації завдання ставиться так, щоб забезпечити збіг в моменти часу $t = nT$ не вихідних сигналів безупинного і цифрового фільтрів, а вихідних сигналів усієї системи при включенні в неї або безупинного, або цифрового фільтра. При цьому необхідно враховувати динамічні властивості екстраполятора [3].

Дослідження полягають у моделюванні зазначених у таблиці 3.1 передатних функцій цифрових фільтрів шляхом їх заміни на відповідні різницеві рівняння.

Таблиця 3.1 – Цифрові фільтри

Тип фільтра	Передатна функція	Різницеве рівняння
1	2	3
1 Інтегруючий	$\frac{Tz}{z-1}$	$x_1[n] = Tx[n] + x_1[n-1]$
2 Ізодромний	$b + \frac{Tz}{z-1}$	$x_1[n] = bx[n] + (T-b)x[n-1] + x_1[n-1]$
3 Аналог аперіодичної ланки I-го порядку	$\frac{Tz}{z-\alpha}$	$x_1[n] = Tx[n-1] + \alpha x_1[n-1]$
4 Диференціюючий	$\frac{z-1}{Tz}$	$x_1[n] = \{x[n] - x[n-1]\}T^{-1}$

Продовження таблиці 3.1

1	2	3
5 Диференціюючий із пропорційною складовою	$\frac{z-\beta}{Tz}$	$x_1[n] = \{x[n] - \beta x[n-1]\}T^{-1}$
6 Інтегро-диференціюючий	$\frac{\alpha_1 z}{z-1} + \frac{z-\beta_1}{Tz}$	$x_1[n] = \{x[n] - (1+\beta_1-\alpha_1) \cdot x[n-1] + \beta_1 \cdot x[n-2]\}T^{-1} + x_1[n-1]$
7 Інтегруючий за формулою трапецій	$\frac{T}{2} * \frac{z+1}{z-1}$	$x_1[n] = 0.5Tx[n] + 0.5Tx[n-1] + x_1[n-1]$
8 Інтегруючий за формулою Сімпсона «1/3»	$\frac{T}{3} * \frac{z^2+4z+1}{z^2-1}$	$x_1[n] = \frac{T}{3}x[n] + \frac{4T}{3}x[n-1] + \frac{T}{3}x[n-2] + x_1[n-1]$
9 Смуговий	$\frac{z^{12}-1}{z^{10}(z^2-1)}$	$x_1[n] = x[n] - x[n-12] + x_1[n-2]$

Якщо при дослідженні фільтра № 8 зробити вхідний сигнал у 4/3 рази більшим, ніж для інших ланок, то можна прийняти різницеве рівняння

$$x_1[n] = 0.25Tx[n] + Tx[n-1] + 0.25Tx[n-2] + x_1[n-2].$$

Цифрові керуючі фільтри, задавальник східчастого впливу, генератор низькочастотних коливань моделюються в цифровій формі на ПЕОМ.

Моделююча програма написана мовою Visual C++ і працює в діалоговому режимі.

У програмі прийнято такі позначення :

X – вхідний сигнал фільтра;

Y – вихідний сигнал фільтра;

T – період квантування цифрового фільтра, с;

$TМОД$ – час моделювання, з;

$TIME$ – реальний час модульованого процесу, с;

A, B – коефіцієнти цифрових керуючих фільтрів.

Порядок виконання дослідження

Дослідження перехідних характеристик цифрових керуючих фільтрів

1 Увімкнути ПЕОМ, завантажити з робочого столу програму ТЦСУ.exe і вибрати з меню лабораторну програму “Дослідження цифрових керуючих фільтрів”

2 Увести ПІБ і номер групи, працюючи в діалоговому режимі з ПЕОМ, задати тип досліджуваного фільтра; період квантування $T=0.2$ с; задати величину постійного вхідного сигналу $X=1$; час моделювання $TMOD$ підібрати дослідним шляхом виходячи із середньої тривалості перехідного процесу, якщо вона кінцева, чи, у протилежному випадку, виходячи із середнього часу, необхідного для визначення характеру процесу ($TMOD = 5 \dots 10$ с).

Відповідно до номера вашого варіанта для фільтрів № 2, № 3, № 5, № 6 задати значення коефіцієнтів A , $У$, (див. таблицю 3.2).

3 Натискаючи кнопку «Моделювати», експериментально підібрати необхідний час моделювання $TMOD$.

4 Побудувати графіки перехідних процесів $Y(t)$ при $t = nT$ для всіх типів фільтрів, наведених у таблиці 3.1. Графіки заносяться у звіт при натисканні кнопки «додати у звіт».

5 Операції за пп. 2-4 здійснити для періодів $T=0.4$ і $T=0.2$.

Таблиця 3.2 – Варіанти завдань

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0.5	0.45	0.52	0.43	0.55	0.4	0.6	0.58
A'	0.7	0.65	0.6	0.72	0.75	0.78	0.62	0.8
У	0.7	0.66	0.75	0.72	0.8	0.62	0.6	0.78
B'	0.5	0.4	0.45	0.52	0.48	0.55	0.6	0.58
V	1.1	1	0.9	1.2	1.4	0.8	1.5	1.6

Дослідження АЧХ цифрових керуючих фільтрів

1 Задати тип досліджуваного фільтра № 7; період квантування $T=0,2$ с, частоту ω вхідного гармонійного сигналу з одиничною амплітудою $XM=1$, $X = \sin(\omega T)$ відповідно до таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 – Дані для побудови АЧХ

f, Гц	0.08	0.1	0.3	0.4	0.64	0.8	0.95	1.1	1.3
ω , с ⁻¹	0.50	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	1.0	2.0

2 Задати час моделювання ***TMOD***, необхідний для визначення амплітуди вихідного сигналу.

3 Для кожного значення частоти ω гармонічного вхідного сигналу відповідно до таблиці 3.3 запам'ятати амплітуду вихідного сигналу фільтра $U_{вих}$ натисканням кнопки «Запам'ятати $U_{вих}$ ».

4 Операції за пп. 1-3 здійснити для фільтра № 2.

Можливі теми навчально-дослідницької роботи

1 Дослідження впливу похибки установки необхідних значень коефіцієнтів різницевого рівняння на динамічні властивості цифрових фільтрів.

2 Порівняльне дослідження ФЧХ цифрових фільтрів (наприклад, що диференціюють), отриманих різними методами дискретної апроксимації безупинного фільтра-прототипу.

3 Дослідження різних варіантів побудови цифрових смугових фільтрів.

4 Дослідження варіантів реалізації коригувальних ланок з передатними функціями, поданими в таблиці 3.1. Зокрема, дослідження різних конфігурацій мікропроцесорного блоку, його алгоритмічного і програмного забезпечення.

Контрольні питання

1 Що таке дискретний (імпульсний) фільтр?

2 Чому фільтри, реалізовані на керуючій ЦОМ, є дискретними і не можуть бути безупинними?

3 Як за дискретною передатною функцією цифрового фільтра перейти до його різницевого рівняння?

4 Що обмежує можливу складність дискретної передатної функції цифрового фільтра?

5 Назвіть часові характеристики фільтра. Як вони зв'язані з дискретною передатною функцією фільтра?

6 Як від дискретної передатної функції цифрового фільтра перейти до його частотної передатної функції, до АЧХ і ФЧХ?

7 Чим зручне використання псевдочастоти при побудові частотних характеристик цифрових фільтрів? Як будуються логарифмічні частотні характеристики?

8 Чи збігаються експериментально отримані і теоретичні перехідні характеристики дискретних фільтрів? Якщо ні, то поясніть можливі причини їхнього розходження.

9 Як ставиться задача дискретної апроксимації безупинного фільтра?

10 Як знайти передатну функцію безупинного фільтра, що за своїми динамічними властивостями близький до дискретного фільтра з дискретною передатною функцією $D(z)$?

11 Коли виникає необхідність використання ускладнених методів дискретної апроксимації?

12 Чим відрізняються динамічні властивості дискретних інтегруючих фільтрів різної складності за експериментальними даними і теоретично?

13 На якій елементній базі можлива реалізація цифрових керуючих фільтрів, назвіть переваги і недоліки різних варіантів їхньої реалізації.

14 Як впливає розрядність цифрового обчислювача на точність реалізації необхідних динамічних властивостей цифрового фільтра?

Питання підвищеної складності

1 Чим відрізняється керуюча ЦОМ від спеціалізованого цифрового обчислювача?

2 Для наведених у таблиці 3.1 дискретних фільтрів оцініть час обчислення значення вихідної величини на керуючій ЦОМ якого-небудь визначеного типу.

3 Отримайте вираз (3.1) для перехідної характеристики дискретного фільтра.

4 На вхід дискретної ізодромної ланки (таблиця 3.1) поданий гармонічний сигнал з частотою Ω . У скільки разів зміниться амплітуда вихідного гармонічного сигналу при збільшенні періоду дискретності в 2 рази?

5 Доведіть, що дискретні передатні функції всіх дискретних інтегруючих фільтрів містять у знаменнику множник $(z - 1)$.

6 Чи зміниться форма АЧХ цифрового фільтра при множенні (чи розподілі) його дискретної передатної функції на z ?

7 Доведіть, що в принципі завжди можна підібрати дискретну передатну функцію цифрового фільтра, АЧХ і ФЧХ якого на частотах $\omega \leq 0.5\pi / T$ будуть збігатися з відповідними характеристиками безупинного фільтра-прототипу з будь-якою необхідною точністю.

8 Дискретна передатна функція цифрового фільтра, що здійснює чисельне інтегрування за формулою «прямокутників з надлишком», дорівнює $kz(z - 1)^{-1}$. При множенні її на передатну функцію екстраполятора нульового порядку одержимо $\frac{kz}{z-1} * \frac{z-1}{z^p} = \frac{k}{z^p}$. Чи означає це, що при $k = 1c^{-1}$ сигнал на виході екстраполятора буде точно дорівнювати інтегралу від вхідного сигналу фільтра?

9 Запропонуйте методику вибору розрядності цифрового обчислювача при реалізації цифрового фільтра з необхідними динамічними властивостями. Розгляньте приклад її використання.

4 ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ З ЦИФРОВОЮ КОРЕКЦІЄЮ

Мета дослідження. Вивчення методів корекції систем автоматичного керування із застосуванням мікропроцесорів чи мікро-ЦОМ, включених у контур системи.

Системи керування з ЦОМ так само, як і безупинні системи, повинні володіти необхідними якісними показниками (запасом стійкості, точністю, швидкодією). Переважним способом забезпечення необхідних динамічних властивостей таких систем є використання дискретної корекції, реалізованої шляхом вибору визначеного алгоритму роботи ЦОМ. Застосування дискретної корекції у порівнянні з безупинними коригувальними ланками дозволяє більш точно реалізувати бажаний закон керування, спростити перебудову параметрів чи навіть структури коригувального пристрою при зміні умов роботи системи.

Одну з можливих структурних схем ЦОМ при введенні дискретної корекції подано на рисунку 4.1.

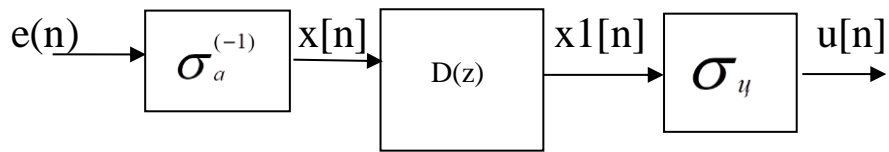


Рисунок 4.1 – Пристрій ЦОМ

Тут $\sigma_a^{(-1)}, \sigma_{ц}$ – коефіцієнти передачі лінеаризованих АЦП ЦАП, $D(z)$ – дискретна передатна функція цифрової коригувальної ланки (ЦКЗ); $W_0(z)$ – дискретна передатна функція приведеної безупинної частини системи (ПБЧ), у випадку використання екстраполятора 0-го порядку має вигляд (1.7).

Для цієї структурної схеми дискретна передатна функція розімкнутого контура системи відповідно до формули (2.9)

$$W(z) = \sigma_a^{(-1)} * \sigma * D(z) * W_0(z) .$$

Якщо відома бажана дискретна передатна функція розімкнутого контура системи $W_{ж}(z)$, то з умови $W(z) = W_{ж}(z)$ можна визначити дискретну передатну функцію ЦОМ.

$$D(z) = \frac{W_{ж}(z)}{W_0(z)} * \frac{\sigma_a}{\sigma_w} . \quad (4.1)$$

При дослідженні керуюча ЦОМ і безупинні елементи систем керування моделюються в цифровій формі на ПЕОМ IBM.

Структурна схема дискретної системи стабілізації положення відповідає типовій схемі, показаній на рисунку 4.2.

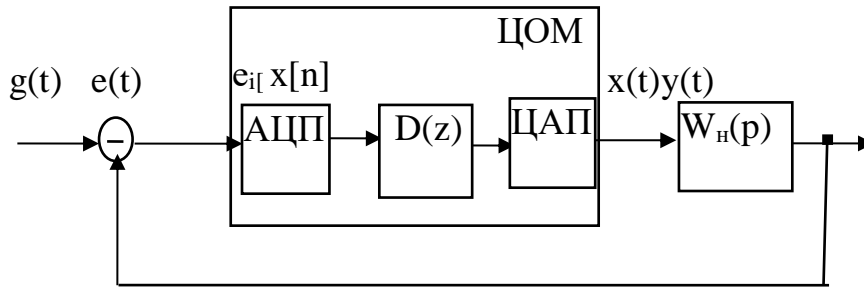


Рисунок 4.2 – Структурна схема дискретної системи стабілізації

Тут $W_H(p)$ – передатна функція безупинного об'єкта керування (ОК), $g(t)$ – сигнал задавального впливу; $y(t)$ – вихідний сигнал; $e(t) = g(t) - y(t)$ – сигнал помилки; $e_i[n]$ – сигнал помилки після АЦП, $D(z)$ – дискретна передатна функція ЦОМ; $x[n]$ – вихідний сигнал ЦОМ; $x(t)$ – вихідний сигнал ЦОМ після ЦАП. У роботі прийнята передатна функція ОК, що відповідає інтегруючій ланці другого порядку

$$W_H(p) = \frac{K_H}{p^2}, \quad (4.2)$$

де K_H – коефіцієнт передачі, вимірюваний у секундах мінус другого ступеня.

Наявність в ОК, як ланки системи стабілізації, властивостей подвійного інтегратора фізично пояснюється тим, що при відхиленні виконавчого механізму (ВМ) на деякий малий кут з'являються обертальний момент і кутове прискорення приведеної безупинної частини (ПБЧ), пропорційні величині відхилення ВМ. Тому кутова швидкість пропорційна першому інтегралу, а кут повороту ВМ – другому інтегралу від величини відхилення ВМ. Отже, керуючий вплив (кут відхилення ВМ) і керована величина (кут повороту ВМ) зв'язані між собою передатною функцією (4.2).

З урахуванням (4.2) вираз (2.7) для дискретної передатної функції приведеної безупинної частини можна записати у вигляді

$$W_0(z) = \frac{\sigma_b}{\sigma_a} * \frac{z-1}{z} * z \left[\frac{K_H}{p^3} \right] = \frac{K_0 * T^2}{2} * \frac{z+1}{(z-1)^2},$$

де $K_0 = \sigma_b \sigma_a^{-1} K_{нл}$ – загальний коефіцієнт передачі розімкнутого контура керування.

Перехід до W -перетворення і підстановка $w = j\lambda T / 2$, де λ – псевдочастота, дає частотну передатну функцію приведеної безупинної частини

$$W_0^*(j\lambda) = \frac{K_0^*(1 - j\lambda T / 2)}{(j\lambda)^2}.$$

Якщо вибрати бажану частотну передатну функцію у вигляді

$$W_{жс}^*(j^*\lambda) = \frac{K_0^*(1 + j\lambda\tau)(1 - j\lambda T / 2)}{(j\lambda)^2},$$

то частотна передатна функція дискретного коригувального пристрою буде

$$D(j\lambda) = \frac{W_{жс}^*(j\lambda)}{W_0^*(j\lambda)} = 1 + j\lambda\tau. \quad (4.3)$$

Такий коригувальний пристрій повинний забезпечувати підйом верхніх псевдочастот до нескінченності, що приводить до появи нестійкості в самому дискретному коригувальному пристрої. Тому доцільно прийняти бажану передатну функцію у вигляді

$$W_{жс}^*(j\lambda) = \frac{K_0^*(1 + j\lambda\tau)}{(j\lambda)^2} \cdot \frac{1 - j\lambda T / 2}{1 + j\lambda T / 2}.$$

Це дає частотну передатну функцію коригувального пристрою

$$D(j\lambda) = \frac{W_{жс}^*(j\lambda)}{W_0^*(j\lambda)} = \frac{1 + j\lambda\tau}{1 + j\lambda T / 2}. \quad (4.4)$$

Підставляючи в (4.4) $j\lambda = 2W/T$ і переходячи до змінного z підстановкою $W = (z-1)/(z+1)$, одержуємо дискретну передатну функцію, що повинна реалізуватися на ЦОМ:

$$D(z) = K^*(z-B)/z = B^*(1-B^*z^{-1}), \quad (4.5)$$

де $K = 0,5*(1+2*\tau/T)$, $B = (2*\tau-T)/(2*\tau+T)$, $B=V < 1$.

Передатній функції (4.5) відповідає різницеве рівняння

$$x1[n] = K^*(x[n] - B^*x[n-1]).$$

Якщо коефіцієнт передачі K приєднати до безупинної частини, то різницеве рівняння дискретної коригувальної ланки буде

$$x1[n] = x[n] - B^*x[n-1]. \quad (4.6)$$

Далі розглянемо автодалекомір з цифровим коригувальним (керуючим) фільтром. Структурна схема цього автодалекоміра наведена на рисунку 4.3.

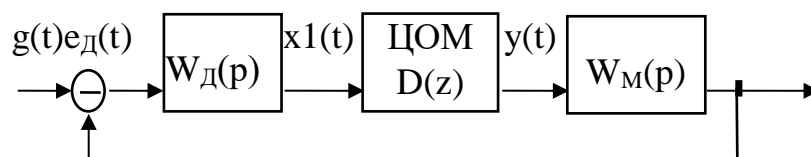


Рис.4.3 – Структурна схема автодалекоміра

Часовий дискримінатор $W_d(p)$ є аперіодичною ланкою першого порядку, а часовий модулятор $W_m(p)$ - безінерційною ланкою, тобто

$$W_d(p) = K_d/(1+T_d P), \quad W_m(p) = K_m,$$

де K_d і T_d – коефіцієнт передачі і постійна часу дискримінатора, K_m – коефіцієнт передачі модулятора.

Нехай бажана частотна передатна функція розімкнутого контура автодалекоміра відповідає безупинній інтегруючій ланці

$$W_B(p) = K_I / (j\omega), \quad (4.7)$$

де K_I – добротність за швидкістю. При цьому автодалекомір буде мати астатизм першого порядку і відпрацьовувати постійний вплив, який задає, без динамічної помилки, що сприяє підвищенню точності спостереження.

Бажаний закон керування теоретично можна було б реалізувати шляхом включення в контур автодалекоміра не цифрового, а безупинного коригувального фільтра з частотною передатною функцією

$$W_\phi(j\omega) = \frac{W_B(j\omega)}{W_D(j\omega)W_M(j\omega)} = \frac{K_I * 1 + j\omega T_D * 1}{j\omega K_D K_M} = \frac{K_\phi (1 + j\omega T_D)}{p}, \quad (4.8)$$

де $K_\phi = K_D^{-1} K_M^{-1}$ – коефіцієнт передачі коригувального фільтра.

Однак на практиці використання цифрового коригувального пристрою часто виявляється кращим.

При побудові необхідного алгоритму роботи цифрового обчислювача не можна скористатися методикою, розглянутою раніше для дискретної системи стабілізації, тому що в даному випадку безупинна динамічна ланка (часовий дискримінатор) передує цифровій частині і при записі частотної передатної функції розімкнутого автодалекоміра використання псевдочастот не зручно. У зв'язку з цим можна не розглядати передатну функцію автодалекоміра і обмежитися вибором дискретної передатної функції цифрового фільтра, що за своїми динамічними властивостями був би близький до безупинного фільтра з передатною функцією (4.8).

Якщо вважати, що період дискретності T малий і в межах смуги пропущення автодалекоміра псевдочастота $\lambda = 2/T * \text{tg}(\omega * T / 2)$ практично збігається з частотою ω , то у формулі (4.8) можна

замінити частоту псевдочастотою і записати частотну передатну функцію цифрового фільтра у вигляді

$$W_{\Phi}^*(j\lambda) = W_{\Phi}(j\omega) = \frac{K_{\Phi}(1 + j\lambda T_D)}{j\lambda} \quad (4.9)$$

при $\omega = \lambda$.

Підставляючи в (4.9) $j\lambda = 2W/T$ і переходячи до змінного z за формулою $W = (z - 1)/(z + 1)$, одержимо дискретну передатну функцію цифрового фільтра

$$D(z) = b_1 \frac{1 - B_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad (4.10)$$

де $b_1 = 0.5K_{\Phi}(2T_D + T)$, $B_1 = (2T_D - T)(2T_D + T)^{-1}$, $B_1 = V$.

Передатній функції (4.10) відповідає різницеве рівняння

$$x_1[n] = b_1(x[n] - B_1x[n-1]) + x_1[n-1].$$

Якщо коефіцієнт V приєднати до часового модулятора, то різницеве рівняння коригувального фільтра можна прийняти у вигляді

$$x_1[n] = x[n] - B_1x[n-1] + x_1[n-1]. \quad (4.11)$$

Дослідження полягають у моделюванні передатних функцій приведеної безупинної частини об'єктів і передатних функцій цифрових керуючих пристроїв шляхом їхньої заміни на відповідні різницеві рівняння.

Дискретна система стабілізації і автодалекомір, що стежить, моделюються в цифровій формі на ПЕОМ ІВМ. Моделювання безупинних елементів систем здійснюється за допомогою розрахунку за рекуррентними формулами методу трапецій.

Програма цифрових моделей написана мовою Visual C++ і дозволяє з необхідною точністю відбити реальні процеси, що відбуваються в досліджуваних системах. Діалоговий режим

роботи програм полегшує процедури введення даних, задання режимів роботи й одержання необхідних результатів.

У програмі прийнято такі позначення:

g – задавальний вплив, $g(t)$;

Y – вихідний сигнал $Y(t)$;

$E = G - Y$ – сигнал помилки $e(t) = g(t) - y(t)$;

EI – сигнал помилки в цифровій формі e_i ;

e_d – вихідний сигнал автодалекоміра, що стежить, e_d ;

x – вихідний сигнал ЦО $x[n]$;

xI – вихідний сигнал ЦО в аналоговій формі $xI(t)$;

$KД$ – коефіцієнт передачі ОК системи стабілізації;

U, V – параметри ЦО у системі стабілізації і автодалекомірі, що стежить;

T – період квантування систем;

$KД, TД$ – відповідно, коефіцієнт передачі $KД$ і постійна часу $TД$ часового дискримінатора автодалекоміра, що стежить;

$KМ$ – коефіцієнт передачі часового модулятора автодалекоміра, що стежить;

$TIME$ – реальний час t моделюючого процесу, у секундах, змінюється з дискретністю цифрового моделювання 0,01с.

$TMOD$ – необхідний відрізок часу моделювання, с.

Порядок виконання дослідження дискретної системи стабілізації ОК

1 Увімкнути ПЕОМ ІВМ, з робочого столу завантажити програму ТЦСУ.exe, з меню вибрати лабораторну роботу «Дослідження систем керування з цифровою корекцією».

2 Увести ПБ і номер групи, працюючи з ПЕОМ у діалоговому режимі, задати процедуру дослідження дискретної системи стабілізації без цифрової корекції (ЦКЗ не підключене), задати період квантування $T=0,1$ с.

3 Відповідно до номера вашого варіанта (таблиця 4.1) задати коефіцієнт передачі $KД$ безупинного ОК, величину постійного впливу, що задає, $G = 1$ і час моделювання $TMOD$, обумовлений дослідним шляхом виходячи із середньої тривалості перехідного процесу в системі.

Таблиця 4.1 – Варіанти завдань

№	1	2	3	4	5	6	7	8
KD	0.06	0.065	0.04	0.05	0.062	0.07	0.08	0.03

4 Натиснути кнопку «Моделювати», одержати графік перехідного процесу $y(t)$.

5 Задати режим цифрової корекції (ЦО підключене).

6 Задати період квантування $T=0,1$ с.

7 Відповідно до номера вашого варіанта задати величину постійного впливу, що задає, $G = 1$, час моделювання TMOD, коефіцієнт передачі KD безупинного ОК, значення коефіцієнтів K і B розрахувати з умов формули (4.5).

Додати результати у звіт.

8 Повторити п.п. 5-6 для $T=0,2$ с.

Дослідження автодалекоміра, що стежить, з цифровим керуючим фільтром

1 Працюючи з ПЕОМ у діалоговому режимі, задати процедуру дослідження автодалекоміра, що стежить, без цифрової корекції (цифровий фільтр не підключений), задати період квантування $T=0,1$ с.

2 Відповідно до номера вашого варіанта (таблиця 4.2), задати параметри досліджуваного автодалекоміра, що стежить: KD , TD , KM , величину постійного впливу, що задає, $G = 1$ і час моделювання TMOD, обумовлений дослідним шляхом виходячи із середньої тривалості перехідного процесу в системі.

Таблиця 4.2 – Варіанти завдань

№	1	2	3	4	5	6	7	8
KD	2.1	2.2	2.15	2	1.9	1.95	1.8	1.85
KM	0.48	0.45	0.46	0.5	0.55	0.52	0.58	0.56
TD	0.01	0.015	0.012	0.014	0.017	0.011	0.013	0.016

3 Натиснути кнопку «Моделювати», одержати графік перехідного процесу $y(t)$.

4 Задати режим цифрової корекції (ЦО підключене).

5 Задати період квантування $T=0,1$ с.

6 Відповідно до номера вашого варіанта задати параметри автодалекоміра KD , TD , KM , значення коефіцієнтів K і B розрахувати з умов формул (4.8) і (4.10), а також задати величину постійного впливу, що задає, $G = 1$ і час моделювання T_{MOD} . Додати результати у звіт.

7 Повторити пп. 5-6 для $T=0,2$ с.

Можливі теми навчально-дослідницької роботи

1 Порівняти дослідження якості розглянутих у роботі систем з дискретною корекцією і відповідних їм систем з безупинною корекцією.

2 Дослідження систем з дискретною корекцією методом моделювання на універсальній ЦОМ.

Контрольні питання

1 З якою метою в системах керування з ЦОМ застосовується дискретна корекція?

2 Що таке дискретна передатна функція приведеної безупинної частини і як її знайти?

3 Як знайти алгоритм роботи ЦОМ, при якому цифрова корекція додасть системі бажаних властивостей?

4 У чому полягає сенс використання дискретної корекції безупинних систем керування і як вона здійснюється?

5 Розповісти про дві системи автоматичного керування, що досліджуються в роботі.

6 Як вибирається бажана частотна передатна функція розімкнутого контура системи стабілізації? Який при цьому виходить алгоритм роботи ЦОМ?

7 Який вигляд має бажана частотна передатна функція розімкнутого контуру автодалекоміра і чому?

8 Чим розрізняються методики перебування дискретного коригувального алгоритму для системи стабілізації і для автодалекоміра? Чому у випадку автодалекоміра використовується більш проста методика?

9 Чому цифровий коригувальний фільтр, що реалізує різницеве рівняння (4.11), може забезпечувати високу якість системи лише при малій величині періоду дискретності?

10 Чому при дослідженні нескоректованої системи кутової стабілізації неправильно було б цілком виключити ПЕОМ із контура системи, як це робиться при дослідженні нескоректованого автодалекоміра?

11 Чим розрізняються перехідні процеси помилково отримані в роботі для скоректованого і для нескоректованого автодалекомірів?

Питання підвищеної складності

1 Для дослідженої системи стабілізації з цифровою корекцією при періоді дискретності $T=0,1$ с визначте чисельне значення запасу стійкості за фазою (аналітично чи графічно за ЛАХ і ЛФХ).

2 Дайте теоретичне обґрунтування отриманим експериментальним даним про залежність форми перехідної характеристики системи стабілізації з цифровою корекцією від величини періоду дискретності.

3 Програмне значення кута повороту виконавчого механізму змінюється за законом $v_{np}(T) = A \cdot \sin(\omega t + F)$, де $A=1$ градус, $\omega=1$ с⁻¹, $F=0$. Впливи, що збурюють, відсутні. Визначте максимальну величину динамічної помилки кутової стабілізації в сталому режимі.

4 Отримайте аналітичний вираз для перехідної характеристики автодалекоміра з цифровим керуючим фільтром (вважаючи систему квазінеперервною) і порівняйте його з експериментальною кривою перехідного процесу. Якщо є розбіжність, поясніть її причини.

5 Робота автодалекоміра відбувається в умовах перешкоди, що після приведення до входу часового дискримінатора можна вважати білим шумом з рівнем спектральної щільності N . Знайдіть величину відносної похибки реалізації бажаної АЧХ розімкнутого автодалекоміра на частоті зрізу. Підберіть ускладнений алгоритм цифрової корекції, що забезпечує за тих самих умов у два рази меншу величину відносної похибки.

6 Підберіть для автодалекоміра ускладнений алгоритм цифрової корекції, що дозволив би забезпечити колишню величину відносної похибки реалізації бажаної АЧХ розімкнутого автодалекоміра при періоді дискретності $T=0,2$ с, тобто в два рази більшому.

7 У скоректованому автодалекомірі при колишніх інших умовах період дискретності цифрового фільтра зменшили від $T=0,1$ с до $T=0,05$ с. Як зміниться тривалість перехідного процесу в автодалекомірі і чому?

5 МОДЕЛЮВАННЯ ТИПОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Мета дослідження. Вивчення методів цифрового моделювання і статистичної перевірки типових випадкових процесів із заданими законами розподілу для дослідження цифрових систем керування.

Одновимірний масив з N деяких цифрових даних x_i характеризується сукупністю статистичних характеристик, перерахованих нижче.

Початкові моменти k -го порядку

$$m_k(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^k .$$

Звичайно $k = 1, 2, 3$ і 4 (точність обчислення m_k при $k > 4$ низька).

Центральні моменти k -го порядку

$$M_k(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i - m_1(x)]^k .$$

Момент $M_1(x) = 0$.

Зв'язок центральних моментів з початковими встановлюється співвідношеннями

$$M_2 = m_2 - m_1^2, \quad M_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3, \quad M_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4,$$

які дозволяють обчислювати M_k по мірі входу x_i (без запам'ятовування масиву x_i).

Середнє значення

$$\bar{x} = m_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

є найбільш ймовірне значення в масиві.

Дисперсія зсуву

$$D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

є найбільш імовірним ступенем відхилення x_i від середнього значення \bar{x} .

Стандартне зміщене відхилення $\sigma = \sqrt{D}$ визначає середньоквадратичну похибку x_i , якщо за точне значення прийняти \bar{x} .

Дисперсія незсуву

$$D_0 = \frac{M_2 N}{N-1} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

застосовується при статистичній обробці чисел x_i з нормальним розподілом.

Стандартне відхилення незміщене $\sigma_0 = \sqrt{D_0}$.

Коефіцієнт асиметрії

$$A = \frac{1}{ND^{3/2}} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3 = \frac{M_3}{M_2^{3/2}}$$

характеризує скісність графічної функції щільності розподілу ймовірностей $\mathbf{P}(\mathbf{x})$. При $\mathbf{A} = 0$ вона симетрична, при $\mathbf{A} > 0$ витягнута права, а при $\mathbf{A} < 0$ – ліва ділянка спаду кривої $\mathbf{P}(\mathbf{x})$.

Коефіцієнт ексцесу

$$E = \frac{1}{ND^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3 = \frac{M_4}{M_2^2} - 3$$

характеризує ступінь гостроти піка кривої $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ у порівнянні з $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ для нормального розподілу. Якщо $E > 0$, $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ має більш гострий пік, ніж при нормальному розподілі, якщо $E < 0$ – пік менш гострий.

Допоміжні коефіцієнти

$$\alpha_3 = U_3 = \sqrt{\frac{6(N-1)}{(N+1)(N+3)}}, \quad \alpha_4 = U_4 = \sqrt{\frac{24N(N-2)(N-3)}{(N-1)^2(N+3)(N+5)}}$$

служать для наближеної перевірки гіпотези щодо нормального розподілу x_i . Якщо

$$A < \frac{\alpha_3}{2 \sim 3} \quad \text{і} \quad E < \frac{\alpha_4}{2 \sim 3},$$

то розподіл $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ для масиву x_i можна вважати нормальним.

З теорії інформації відомо, що як корисний сигнал, так і перешкоди, що діють у цифрових системах керування, повинні розглядатися як випадкові процеси. У випадку, коли сигнал є детермінованим, задача побудови алгоритму формування дискретної послідовності, що відповідає цьому сигналу, найчастіше не викликає утруднень.

Математичні моделі випадкових сигналів дуже різноманітні. Метою ж цифрового моделювання є відтворення на ЦОМ випадкової послідовності, адекватної розглянутому сигналу в явному вигляді, як конкретної реалізації $X[N]$ з дискретним часом і кожною наперед заданою точністю. Завдання моделювання полягає тут у відшуканні алгоритмів, що дозволяють формувати

цифрові реалізації модульованих сигналів. У загальному випадку ця задача розв'язується у два етапи: формується послідовність незалежних випадкових чисел з рівномірним розподілом тим чи іншим методом і здійснюється перетворення цієї послідовності в послідовність із заданими статистичними характеристиками. Послідовність, формована на першому етапі, є джерелом випадковості при моделюванні і називається **базовою випадковою послідовністю (БВП)**.

При виборі виду вихідної базової сукупності випадкових чисел враховуються дві умови: мінімальні витрати машинного часу на утворення кожного числа; простота і зручність подальших перетворень.

Практика показала, що ці вимоги у найбільшій мірі задовольняє сукупність випадкових чисел в інтервалі **[0;1]**. Основні параметри такої послідовності такі:

- закон розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x < 0; x > 1; \end{cases}$$

- функція розподілу:

$$F(x) = \int_0^x f(u) du = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

- математичне сподівання:

$$M\{x\} = \int_0^1 xf(x)dx = 0.5 ;$$

- дисперсія:

$$D\{x\} = \int_0^1 (x - M\{x\})^2 f(x)dx = \frac{1}{12} .$$

На ЦОМ реалізації базових випадкових послідовностей формуються за допомогою спеціальної програми. В основі всіх сучасних способів одержання випадкових послідовностей програмним методом лежить деякий рекурентний алгоритм. Це

значить, що кожне наступне число послідовності утвориться з попереднього чи групи попередніх чисел шляхом застосування деякого алгоритму. Оскільки алгоритм твердий, а розрядність чисел обмежена, отримані числа не є суто випадковими. Однак отримана таким способом послідовність поводить себе як випадкова, тобто має статистичні властивості випадкової послідовності чисел. У силу зазначених причин ця послідовність одержала назву **псевдовипадкової** послідовності.

З огляду на особливості цифрового моделювання можна сформулювати основні вимоги до алгоритмів формування базових псевдовипадкових послідовностей:

- сукупність формованих чисел повинна задовольняти встановлені критерії перевірки на випадковість і рівномірність розподілу;
- між числами послідовності повинен існувати дуже малий кореляційний зв'язок;
- кількість операцій, необхідна для обчислення кожного числа, повинна бути якомога меншою;
- період повторюваності послідовності бажано мати якомога більший.

Одна з перших процедур формування рівномірно розподілених послідовностей чисел, називана **методом середини квадрата**, була запропонована Дж. Фон Нейманом. Однак числа послідовності формуються програмою порівняно повільно, і розподіл отриманих чисел в області малих значень істотно відхиляється від рівномірного.

В даний час майже всі стандартні програми обчислення послідовностей базових випадкових чисел, використовуваних на ЕОМ, засновані на конгруентних (подібних) методах, розроблених Лемером.

На другому етапі отримана базова випадкова послідовність перетворюється на послідовність з необхідними статистичними характеристиками. Можливість такого перетворення впливає з такої **теореми**:

якщо випадкова величина Y має щільність розподілу $f(Y)$, то розподіл випадкової величини X

$$x_i = \int_{-\infty}^{y_i} f(z) dz \quad (5.1)$$

є рівномірним в інтервалі $[0;1]$.

Таким чином, для одержання значень випадкової величини Y необхідно вирішити рівняння вигляду:

$$x_i = \int_{-\infty}^{y_i} f(z) dz \quad (5.2)$$

щодо невідомих Y_i , де X_i – послідовність рівномірно розподілених на інтервалі $[0;1]$ випадкових чисел.

Приклад 1. Одержимо із (5.1)-(5.2) випадкову величину Y з релеївським законом розподілу, у якої

$$f(y) = y \sigma^2 \exp(-y^2 / 2 \sigma^2); y \geq 0$$

$$x = F(y) = 1 - \exp(-y^2 / 2 \sigma^2); y \geq 0,$$

де σ – параметр розподілу.

З виразу (5.2) маємо:

$$x = 1 - \exp(-y^2 / 2 \sigma^2); 1 - x = \exp(-y^2 / 2 \sigma^2);$$

$$\ln(1 - x) = -y^2 / 2 \sigma^2; y^2 = 2 \sigma^2 \ln(1 - x);$$

$$y = \sigma \sqrt{-2 \ln(1 - x)} .$$

Оскільки $\ln(1-x)$ і $\ln x$ мають однакові закони розподілу, то формулу можна спростити:

$$y_i = \sigma \sqrt{-2 \ln x_i} . \quad (5.3)$$

Приклад 2. Для експонентного розподілу одержуємо:

;

$$\begin{aligned}
& - f(y) = \lambda \exp(-\lambda y); y \geq 0 \\
& F(y) = 1 - \exp(-\lambda y); y \geq 0 ; \\
& x = 1 - \exp(-\lambda y); 1 - x = \exp(-\lambda y); \\
& y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x),
\end{aligned}$$

чи

$$y_i = -\frac{1}{\lambda} \ln x_i . \quad (5.4)$$

Однак спосіб одержання випадкових чисел із заданим законом розподілу за співвідношеннями (5.1) - (5.2) має обмежену сферу застосування в практиці моделювання систем на ЦОМ, що пояснюється такими обставинами:

- для багатьох законів розподілу інтеграл (5.2) не береться, тобто приходиться вдаватися до чисельних методів розв'язання, що збільшує витрати машинного часу на одержання кожного випадкового числа;

- для випадків, коли інтеграл (5.2) береться в кінцевому вигляді, виходять формули, обчислення яких вимагає великих витрат машинного часу.

Тому в практиці моделювання систем часто користаються наближеними способами перетворення випадкових чисел, які можна поділити так:

- універсальні способи, за допомогою яких можна одержувати випадкові числа із законом розподілу будь-якого виду – до таких способів можна віднести кускову апроксимацію функції розподілу методом Неймана;

- неуніверсальні способи, придатні для одержання випадкових чисел з конкретним законом розподілу – наприклад, способи одержання випадкових послідовностей на основі граничних теорем імовірності.

Нормальне чи гаусеве розподілення випадкових чисел – одне з найбільш важливих і часто використовуваних. Послідовність нормально розподілених чисел можна одержати одним із зазначених наближених методів.

Приклад 3. Використовуючи центральну граничну теорему, маємо: якщо незалежні випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ мають той самий закон розподілу, і якщо кожна величина ξ_i має математичне

сподівання a_1 і середньоквадратичне відхилення σ_1 , то сума величин $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ буде асимптотично прагнути до нормального розподілу з математичним сподіванням $a = na_1$ і середньоквадратичним відхиленням $\sigma = \sqrt{n}\sigma_1$.

Таким чином, для послідовності рівномірно розподілених в інтервалі $[0;1]$ випадкових чисел d_i , величина

$$\xi = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n (d_i - 0.5) \quad (5.5)$$

має розподіл, близький до нормального, з математичним сподіванням, рівним 0, і дисперсією, рівною 1.

Найбільш простий вигляд виразу (5.5) має при $n=12$:

$$\xi(12) = \left(\sum_{i=1}^{12} d_i \right) - 6. \quad (5.6)$$

Описаний спосіб формування нормально розподілених випадкових чисел має, однак, істотні недоліки, оскільки для одержання кожного нормального числа необхідно 12 рівномірно розподілених випадкових чисел, крім того, при формуванні крайніх, які лежать за 3σ , значень цей спосіб дає велику помилку.

Більш точним є метод, що використовує відоме перетворення, відповідно до якого розподіл добутку двох випадкових величин, одна з яких розподілена за законом арккосинуса, а інша має релеївський розподіл, є нормальним.

Приклад 4. Нехай для випадкової величини X щільність розподілу

$$f(x) = x\sigma^{-2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

де

$$\begin{aligned} M\{x\} &= \sqrt{0.5\pi}\sigma, \\ D\{x\} &= (2 - 0.5\pi)\sigma^2, \end{aligned}$$

а для випадкової величини Y

$$f(y) = \left(\pi b \sqrt{1 - \frac{(y-a)^2}{b^2}} \right)^{-1},$$

$$M\{y\} = 0,$$

$$D\{y\} = 0.5.$$

Тоді для пари незалежних, рівномірно розподілених в інтервалі $[0;1]$ випадкових чисел d_1, d_2 випадкові величини

$$\xi = \sqrt{-2 \ln d_1} \cos 2\pi d_2; \quad \eta = \sqrt{-2 \ln d_1} \sin 2\pi d_2 \quad (5.7)$$

будуть мати нормальний розподіл.

Для моделювання випадкових величин з іншими законами розподілу зручно використовувати перетворення нормально розподілених випадкових чисел. З нормально розподілених чисел досить просто одержати послідовності з релеївським законом розподілу, показовими законами розподілу, а також із законом розподілу Райса і χ^2 .

При моделюванні випадкових послідовностей звичайно виникає необхідність їхньої статичної перевірки на випадковість і відповідність деякому закону розподілу. Серед найбільш часто використовуваних тестів перевірки випадковості можна вказати тест перевірки пар, тест перевірки серій, перевірки комбінацій і т.п. У кожному з них числа класифікуються за деякими ознаками і отримані емпіричні частоти виділених класів порівнюються з їхніми математичними сподіваннями за допомогою критеріїв Пірсона чи Колмогорова. Безліч псевдовипадкових чисел, що задовольняє цим тестам, називається локально-випадковою.

Оскільки модульовані числові послідовності є псевдовипадкові, а також у зв'язку з обмеженим інтервалом вибірки неминучі розбіжності між теоретичним, передбачуваним уявленням щільності ймовірності, і статичним, вибіркоvim розподілом.

При статичній перевірці закону розподілу в кожному конкретному випадку необхідно вирішити питання: чи пояснюється ця розбіжність суто випадковими обставинами чи вона зв'язана з неправомірністю гіпотези про обраний закон розподілу? Для відповіді на це питання використовуються

критерії згоди, за допомогою яких оцінюється міра близькості між гіпотетичним і вибірковим розподілами.

Одним із найбільш надійних і універсальних критеріїв згоди є критерій Пірсона, або χ^2 . Відповідно до цього критерію для перевірки закону розподілу випадкової величини x область її значень необхідно розбити на k – інтервалів $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_k, x_{k+1}]$ і порахувати число попадань v_i випадкової величини x у кожен i -й інтервал.

Потім, знаючи закон розподілу $f(x)$, можна знайти теоретичні імовірності P_i попадання випадкової величини в кожний з інтервалів:

$$P_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) d(x). \quad (5.8)$$

Як міру розбіжності теоретичного уявлення про щільність імовірності і емпіричного розподілу береться величина

$$U = \sum_{i=1}^k \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (5.9)$$

де n – довжина вибірки.

Було показано, що за таких умов і досить великої вибірки розподіл $f(n)$ має такі властивості:

- практично не залежить від функції розподілу $f(x)$;
- практично не залежить від довжини вибірки n ;
- залежить від числа обраних інтервалів k ;
- при збільшенні довжини вибірки n прагне до так званого розподілу χ^2 .

Таким чином, алгоритм застосування критерію Пірсона зводиться до такого: область значень випадкової величини розбивається на k -інтервалів (звичайно $k=10 \div 20$) і за вибіркою довжиною кілька сотень чисел визначає число попадань v_i випадкової величини в кожен i -й інтервал.

Відповідно до виразу (5.8) визначаються теоретичні імовірності P_i попадання випадкової величини x у кожен i -й

інтервал. (Якщо інтеграл (5.8) не береться аналітично, наприклад, у випадку нормального закону розподілу, можна вважати його різними чисельними методами).

Визначається міра розбіжності U (5.9) і порівнюється з табличним значенням χ_α^2 для заданого рівня значимості α і $r = K-m-1$ ступенів вільності (звичайно α приймається рівним 0.05, m – кількість параметрів у закону розподілу). Якщо $U < \chi_\alpha^2$, то гіпотеза про закон розподілу $f(x)$ приймається, у протилежному випадку відкидається.

Дослідження полягають у моделюванні формул (5.3), (5.4), (5.6), (5.7) на ПЕОМ за приведеними методиками.

Критерій згоди Колмогорова

Цей критерій застосуємо в тому випадку, коли параметри теоретичного закону розподілу визначаються за даними досліджуваної вибірки. За міру розбіжності статистичного і теоретичного законів розподілу приймається найбільше значення D абсолютної величини різниці статистичної і теоретичної функцій розподілу. Дослідне значення D_q величини D визначається за формулою

$$D_q = \max |F(x) - F(x)|, \quad (5.10)$$

де F – статистична, а F – теоретична функції розподілу.

При $n \rightarrow \infty$ закон розподілу величини $\lambda = \sqrt{n} D$ незалежно від виду закону розподілу випадкової величини X прагне до закону розподілу Колмогорова. Критичні значення λ_α у залежності від рівня значимості α подано в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Критичні значення λ_α

α	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
λ_α	0.8	0.9	0.97	1.07	1.2	1.36	1.52	1.63	1.95

Якщо дослідне значення

$$\lambda_q = \sqrt{n} D_q < \lambda_q, \quad (5.11)$$

то гіпотеза про згоду теоретичного закону розподілу з даними вибірки приймається.

Для перевірки гіпотези про приналежність двох вибірок обсягів n_1 і n_2 однієї генеральної сукупності використовується критерій згоди Смирнова – Колмогорова. При цьому обчислюється

$$D_{n_1, n_2} = \max |F_1(x) - F_2(x)|$$

$$\lambda_q = \sqrt{\frac{n_1 * n_2}{n_1 + n_2}} * D_{n_1, n_2}$$

де $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – статистичні функції розподілу для першої і другої вибірок. Якщо $\lambda_q < \lambda_\alpha$, то гіпотеза про приналежність двох вибірок обсягів n_1 і n_2 однієї генеральної сукупності приймається.

Порядок виконання досліджень

1 Згідно з номером варіанта, використовуючи стандартну функцію генерування рівномірних випадкових чисел, скласти програму цифрового моделювання числових послідовностей з необхідними законами розподілу (див. таблицю 5.2) і перевірки закону розподілу за критерієм Пірсона.

Таблиця 5.2 – Варіанти завдань

Номер варіанта	1(2)	3(4)	5(6)	7(8)
Закон розподілу	Нормальний за форм. (5.6)	Нормальний за форм. (5.7)	Експонентний $\lambda=1$ (5.4)	Релея $\sigma=1$ (9/3)
Число інтервалів розбивки	10(20)	10(20)	10(20)	10(20)
Довжина вибірки n	200(400)	200(400)	200(400)	200(400)

2 Для заданого числа інтервалів K побудувати гістограму вибірки даної випадкової величини x з обраним законом розподілу.

На підставі порівняння величини мір розбіжності (5.9) і (5.11) і табличного значення зробити висновок про правомірність чи неправомірність гіпотези про закон розподілу випадкової величини

3 Вхідні і обчислені значення занести в таблицю 5.3. Для обчислення необхідних значень потрібно використовувати таблиці 5.4, 5.5.

Таблиця 5.3 – Вхідні дані і обчислені значення p_i^* та p_i

№ інтервалів	i	1	2	k
Границі інтервалів	$x_i \div x_{i+1}$	$[x_1, x_2]$	$[x_2, x_3]$	$[x_k, x_{k+1}]$
Значення середин інтервалів	x_i^*	x_1^*	x_2^*	x_k^*
Число попадань в інтервал	v_i	v_1	v_2	v_k
Експериментальна імовірність попадання в інтервал	$p_i^* = \frac{v_i}{n}$	p_1^*	p_2^*	p_k^*
Теоретична імовірність попадання в інтервал (див. таблицю 5.4)	p_i	p_1	p_2	p_k

Таблиця 5.4 – Значення функції $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0.2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0.3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0.4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0.5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0.6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0.7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0.8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0.9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1.0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1.1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1.2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1.3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1.4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1.5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1.6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1.7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1.8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1.9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2.0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2.1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2.2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2.3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2.4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2.5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2.6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2.8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2.9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3.0	0.49865	3.1	49903	3.2	49931	3.3	49952	3.4	49966	
3.5	49977	3.6	49984	3.7	49980	3.8	49993	3.9	49995	

Таблиця 5.5 – Значення χ_α^2 в залежності від r і p

	$p=1-\alpha$													
$2r$	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
2	0.020	0.040	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386	2.41	3.22	4.60	5.99	1.82	9.21	13.82
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.20	3.36	4.88	5.99	1.78	9.49	11.67	13.28	12.46
6	0.872	1.134	1.635	2.20	3.07	3.83	5.35	1.23	2.56	10.64	12.59	15.03	16.81	22.5
8	1.646	2.03	2.73	3.49	4.59	5.53	1.34	9.52	11.03	13.36	15.51	12.17	20.1	26.1
10	2.56	3.06	3.94	4.86	6.18	1.27	9.34	11.78	13.44	15.99	12.31	21.2	23.2	29.6
12	3.57	4.18	5.23	6.30	1.81	9.03	11.34	14.01	15.81	12.55	21.0	24.1	26.2	32.9
14	4.66	5.37	6.57	1.79	9.47	10.82	13.34	16.22	12.15	21.1	23.7	26.9	29.1	36.1
16	5.81	6.61	1.96	9.31	11.15	12.62	15.34	12.42	20.5	23.5	26.3	29.6	32.0	39.3
18	1.02	1.91	9.39	10.86	12.86	14.44	11.34	20.6	22.8	26.0	22.9	32.3	34.8	42.3
20	2.26	9.24	10.85	12.44	14.58	16.27	19.34	22.8	25.0	22.4	31.4	35.0	31.6	45.3
22	9.54	10.60	12.34	14.04	16.31	12.10	21.3	24.9	21.3	30.8	33.9	31.7	40.3	42.3
24	10.86	11.99	13.85	15.66	12.06	19.94	23.3	21.1	29.6	33.2	36.4	40.3	43.0	51.2
26	12.20	13.41	15.38	11.29	19.82	21.8	25.3	29.2	31.8	35.6	32.9	42.9	45.6	54.1
28	13.56	14.85	16.93	12.94	21.6	23.6	21.3	31.4	34.0	31.9	41.3	45.4	42.3	56.9
30	14.95	16.31	12.49	20.6	23.4	25.5	29.3	33.5	36.2	40.3	43.8	42.0	50.9	59.7

Контрольні питання

1 Сформулюйте відмінні ознаки адитивних і мультиплікативних перешкод.

2 Наведіть функціональну схему алгоритму імітаційного моделювання.

3 Дайте визначення базової випадкової послідовності (БВП) і наведіть значення її параметрів.

4 Сформулюйте основні вимоги до алгоритмів формування БВП.

5 Наведіть приклад процедури формування БВП.

6 Сформулюйте теорему, за допомогою якої потік випадкових чисел з рівномірним законом розподілу перетвориться на потік випадкових чисел з необхідним законом розподілу.

Питання підвищеної складності

1 Виведіть формулу для одержання потоку випадкових чисел з релеївським законом розподілу.

2 Виведіть формулу для одержання потоку випадкових чисел з експонентним розподілом.

3 Як одержати генератор випадкових чисел з нормальним законом розподілу?

4 Як визначити кореляційну функцію ґратчастого процесу?

5 Як визначити спектральну щільність ґратчастого процесу?

Можливі теми навчально-дослідної роботи

1 Цифрові оптимальні фільтри.

2 Робастні системи.

3 Адаптивна фільтрація сигналів.

Звіт про дослідження повинний містити лістинг програми цифрового моделювання і статичної перевірки випадкових послідовностей, ґістограму вибірки випадкової величини з заданим законом розподілу, результати статистичної перевірки гіпотези про закон розподілу.

6 ДОСЛІДЖЕННЯ ЦИФРОВОЇ СИСТЕМИ ПРИ ВИПАДКОВИХ ВПЛИВАХ

Мета дослідження. Вивчення методів моделювання цифрових систем при випадкових впливах і дослідження середньоквадратичної помилки спостереження.

Системи різного призначення, як правило, функціонують при випадкових зовнішніх впливах. Якщо при теоретичному дослідженні цифрової системи, що стежить, використовують її математичну модель у вигляді імпульсного фільтра (див. п.1.2), то впливи повинні описуватися ґратчастими функціями часу. Функціонування системи при випадковому стаціонарному впливі, що задає, $g[n]$ одному впливі *перешкоди* $v[n]$ буде відбуватися з випадковою стаціонарною помилкою $e[n]$, спектральна щільність якої без урахування впливу шумів квантування за рівнем у лінеаризованій системі складе

$$\begin{aligned}
S_e(\lambda) = & H_e(j\lambda)^2 S_g(\lambda) + H_v(j\lambda)^2 S_v(\lambda) + H_e(-j\lambda) H_v(j\lambda) S_{gv}(j\lambda) + \\
& + H_e(j\lambda) H_v(-j\lambda) S_{vg}(j\lambda).
\end{aligned}
\tag{6.1}$$

Тут використані такі функції псевдочастот λ : середній квадрат, при центрованості впливів і помилки, дисперсію помилки спостереження визначають як інтеграл від спектральної щільності за формулою

$$D_e = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_e(\lambda)}{1 + \lambda^2 T^2 / 4} d\lambda.
\tag{6.2}$$

Середньоквадратична величина помилки $e_{ck} = \sqrt{D_e}$ є найбільш розповсюдженою мірою спостереження при випадкових впливах. Вплив особливостей впливів на точність спостереження можна оцінювати роздільно. Якість відпрацьовування системою впливу, що задає, характеризують динамічною помилкою з дисперсією

$$D_{eg} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_g^*(\lambda) |H_e(j\lambda)|^2}{1 + \lambda^2 T^2 / 4} d\lambda.
\tag{6.3}$$

Якість придушення системою впливу, що збурює, (перешкоди) характеризують помилкою від впливу, що збурює, з дисперсією

$$D_{ev} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_v(\lambda) H_v(j\lambda)^2}{1 + \lambda^2 T^2 / 4} d\lambda.
\tag{6.4}$$

При відсутності взаємної кореляції впливів, коли

$$S_{gv}(j\lambda) = S_{vg}(j\lambda) = 0,$$

з урахуванням (6.1)-(6.4) можна стверджувати, що

$$D_{e_{нк}} = D_{eg} + D_{ev} \cdot \quad (6.5)$$

У реальних цифрових системах з безупинним об'єктом керування зовнішні впливи і помилка спостереження є за фізичним змістом безупинними функціями часу. Дисперсії помилки спостереження і її складових, знайдені при усередненні за безупинним часом, можуть трохи відрізнятися від дисперсії стаціонарних ґратчастих функцій, обчислених за формулами (6.2)-(6.4), особливо при значних величинах періоду дискретності T . Аналітичне дослідження цього явища можна виконати з використанням апарата зміщених ґратчастих функцій і відповідних дискретних і частотних передатних функцій [5].

Досліджується безупинний об'єкт керування з передатною функцією

$$W(p) = K_H / p$$

і цифровий керуючий пристрій з дискретною передатною функцією

$$D(z) = K_{ц}$$

при екстраполяторі нульового порядку і таких коефіцієнтах передачі лінеаризованих АЦП і ЦАП, що $\sigma_a^{(-1)} * \sigma_{ц} = 1$. Структурна схема системи показана на рисунку 6.1.

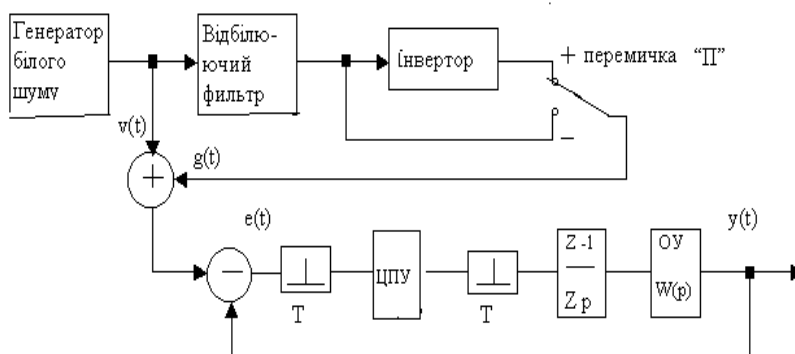


Рисунок 6.1 – Структурна схема системи

Відповідно до (1.9) і (1.10) дискретна передатна функція розімкнутої системи, що стежить, складає

$$W(z) = D(z) \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{W_H(p)}{p}\right] = \frac{K1T}{z-1},$$

де $K1 = K_{Ц} K_H$ – добротність системи за швидкістю.

Дискретна передатна функція замкнутої системи за помилкою при одиничному головному зворотному зв'язку має вигляд

$$H_e(z) = \frac{1}{1+W(z)} = \frac{z-1}{K1T-1+z}. \quad (6.6)$$

Для впливу, що збурює, прикладеного разом із впливом, що задає, до входу системи, дискретна передатна функція замкнутої системи складає

$$H_v(z) = H(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} = \frac{K1T}{K1T-1+z}. \quad (6.7)$$

Відповідні (6.6) і (6.7) частотні передатні функції визначимо у вигляді

$$H_e^*(j\lambda) = \frac{j\lambda}{K1 + (1 - K1T/2)j\lambda}, \quad (6.8)$$

$$H_v^*(j\lambda) = \frac{K1(1 - j\lambda)T/2}{K1 + (1 - K1T/2)j\lambda}. \quad (6.9)$$

Для моделювання безупинних випадкових впливів, що задають й збурюють, моделюється генератор широкосмугового стаціонарного шуму з кореляційною функцією

$$R_u(\tau) = \begin{cases} D_u \left(1 - \frac{\tau}{T_u}\right) & \text{при } \tau \leq T_u, \\ 0 & \text{при } \tau > T_u \end{cases}, \quad (6.10)$$

і спектральною щільністю

$$S_u(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = D_u T_u \left[\frac{\sin(\omega T_u/2)}{\omega T_u/2} \right]^2, \quad (6.11)$$

де $D_{ш}$ – дисперсія шуму, вимірювана у вольтах у квадріті (B^2); $T_{ш}$ – параметр із розмірністю часу, $T_{ш} < T$.

Модульований у цифровій формі генератор білого типу виробляє послідовність нормально розподілених випадкових чисел з нульовим математичним сподіванням і дисперсією $D_{ду}$, тобто дискретний білий шум з кореляційною функцією $R_{ду}(m) = D_{д} \delta_0[m]$, що при проходженні ЦАП і екстраполятора, також модульованих у програмі в цифровій формі, перетвориться в безупинний шум з кореляційною функцією (6.10) і спектральною щільністю (6.11), причому $D_m = D_{dm} \sigma_u^2$.

Моделлю впливу, що задає, приймається випадковий процес, одержуваний при пропущенні білого шуму через формуючий фільтр із частотною передатною функцією

$$W_{\phi}(j\omega) = K_{\phi} / (1 + j\omega T_{д}), \quad (6.12)$$

і моделлю впливу, що збурює, $v(t)$ – безпосередньо білий шум. Отже,

$$S_{Д}(\omega) = W_{\phi\phi}(j\omega)^2 S_u(\omega), \quad S_v(\omega) = S_u(\omega).$$

Вважаючи смугу пропущення досліджуваної системи, що стежить, настільки вузькою, що в межах її ширини виявляються лише частоти $\omega \ll 2/T_{ш}$, то $\sin(\omega T_{ш}/2) = \omega T_{ш}/2$ і з урахуванням (6.11) і (6.12) цілком можна покласти

$$S_g(\omega) = \frac{NK_{\phi}^2}{1 + \omega^2 T_{\phi}^2} = \frac{2D_{д}T_{д}}{1 + \omega^2 T_{д}^2}, \quad (6.13)$$

$$S_v(\omega) = N, \quad (6.14)$$

де

$$N = D_u T_u = D_{шш} \sigma_u^2 T_u, \quad D_g = NK_{\phi}^2 / (2T_{д}), \quad T_{д} \gg T_{ш}.$$

Підкреслимо, що безупинний випадковий вплив має рівномірну спектральну щільність (6.14) тільки на досить низьких частотах. Дисперсія цього впливу кінцева і відповідно до (6.10) складає $R_{III}(0)=D_{III}$. Аналого-цифрове перетворення збурюючого впливу при введенні в цифровий керуючий пристрій слідкувальної системи з періодом T дає ґратчастий випадковий процес $v(n)$ з кореляційною $R_v[m]=D_u\delta_0[m]$ функцією і спектральною щільністю

$$S_v^*(\lambda) = D_u. \quad (6.15)$$

Аналого-цифрове перетворення впливу, що задає, зі спектральною щільністю (6.13) і кореляційною функцією $R_g(\tau) = D_g e^{-|\tau|/T_g}$ дає ґратчастий випадковий процес $g[n]$ з кореляційною функцією $R_g[m] = R_g(\tau)$ при $\tau = mT$ і спектральній щільності

$$S_g^*(\lambda) = \frac{2D_g T_g (1 + \lambda^2 T_g^2 / 4)}{T(1 + \lambda^2 T_g^2)}, \quad (6.16)$$

де $T_g = \frac{1+d}{1-d} \frac{T}{2}$, $d = \exp(-\frac{T}{T_g})$ (у (6.15) і (6.16) не врахований коефіцієнт передачі АЦП).

Оскільки задаючий і збурюючий впливи формуються з використанням одного генератора шуму, вони взаємно корельовані. Безупинні впливи, що задають і збурюють мають взаємні кореляційні функції

$$R_{vg}(\tau) = N w_{\phi\phi}(\tau), \quad R_{gv}(\tau) = R_{vg}(-\tau),$$

де $w_{\phi\phi}(\tau) = L^{(-1)}[W_{\phi\phi}(p)]$ – вагова функція формуючого фільтра і взаємні спектральні щільності

$$S_{vg}(j\omega) = N W_{\phi\phi}(j\omega), \quad S_{gv}(j\omega) = S_{vg}(-j\omega), \quad (6.17)$$

Гратчасті випадкові функції $g[n]$ і $v[n]$ мають взаємні кореляційні функції

$$R_{vg}[m] = N w_{\phi\phi}(mT) = \begin{cases} NK_{\phi} T_d^{-1} \exp(-m/T_d) & \text{при } m \geq 0 \\ 0 & \text{при } m < 0 \end{cases}$$

$$R_{gv}[m] = R_{vg}[-m]$$

і взаємні спектральні щільності

$$S_{vg}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_{vg}[m] z^{-m} = N K_{\phi} / T_g,$$

$$S_{gv}(z) = S_{vg}(z^{(-1)})$$

чи

$$S_{vg}^*(j\lambda) = N K_{\phi} / T_g, \quad S_{gv}^*(j\lambda) = S_{vg}(-j\lambda). \quad (6.18)$$

Спектральні щільності (6.15), (6.16), (6.18) і частотні передатні функції системи (6.8), (6.9) дають усю необхідну інформацію для аналітичного визначення спектральної щільності помилки спостереження і її окремих складових. Зокрема, після виконання інтегрування у виразах (6.3) і (6.4) (з використанням таблиці типових інтегралів від дробнорациональних функцій квадрата частоти [5]) одержимо

$$D_{eg} = \frac{K_{\phi}^2 D_u T_u / (2T_g)}{(1 - K1T/2)(1 + K1dT/(1-d))}, \quad (6.19)$$

$$D_{ev} = \frac{D_u K1T}{2(1 - K1T/2)}, \quad (6.20)$$

$$D_e = D_{eg} + D_{ev} + K_{\phi} \frac{2D_u T_u}{T_g (1+d)(1 - K1T/2)(1 + K1dT/(1-d))}. \quad (6.21)$$

Видно, що третій доданок у правій частині (6.21), що характеризує вплив взаємної корельованості заданого впливу і

впливів, що збурюють, на дисперсію помилки спостереження, може бути позитивним чи негативним у залежності від знака коефіцієнта передачі формуючого фільтра. Якщо при позитивному коефіцієнті обчислена за формулою (6.2) чи знайдена експериментально при дослідженнях величина дисперсії помилки складає $D_E(+)$, а при зміні знака коефіцієнта K_ϕ на негативний $D_E(-)$, то для визначення дисперсії помилки у випадку взаємно некорельованих зовнішніх впливів застосовна формула

$$D_{E(нк)} = (D_E(+) + D_E(-)) / 2, \quad (6.22)$$

яка дає той самий результат, що і формула (6.5). Середньоквадратичне значення помилки $e_{СК}$ визначають добуванням квадратного кореня з дисперсії.

Дослідження полягають у моделюванні відповідних послідовностей випадкових корисних сигналів і перешкод, а також передатних функцій приведеної безупинної частини об'єктів і передатних функцій цифрових керуючих пристроїв шляхом їхньої заміни на відповідні різницеві рівняння.

Генератор білого шуму, що формує фільтр, ЦАП, АЦП, екстраполятор 0-го порядку, неперервний об'єкт керування моделюються в цифровій формі на ПЕОМ ІВМ.

Моделююча програма написана мовою Visual C++ і працює в діалоговому режимі

У програмі прийнято такі позначення:

G – задавальний вплив;

E – похибка спостереження;

V – вплив, що з'явиться;

Y – вихідний сигнал;

$TIME$ – реальний час модульованого процесу, с;

$TMOD$ – час моделювання;

K – коефіцієнт передачі цифрового керуючого фільтра;

K_0 – коефіцієнт передачі неперервного об'єкта керування.

Порядок виконання лабораторної роботи

1 Увімкніть ПЕОМ, з робочого столу завантажте програму ТЦСУ.exe, з меню виберіть лабораторну роботу «Дослідження цифрової системи при випадкових впливах».

2 Уведіть ПІБ і номер групи, працюючи в діалоговому режимі з ПЕОМ, задайте величину коефіцієнта передачі об'єкта керування $K_0=50$ і відповідно до номера Вашого варіанта (таблиця 6.1) – величину коефіцієнта передачі цифрового керуючого фільтра K ; задайте положення перемички П (+).

Таблиця 6.1 – Результати вимірів і обчислень

№	1	2	3	4	5	6	7	8
K	0.18	0.2	0.22	0.16	0.24	0.26	0.15	0.23

3 Задавши час моделювання $T_{MOD} = 2-3$ с, відключивши сигнал перешкоди ($V=0$), натисніть кнопку «Моделювати».

4 Операції за пп. 2-3 повторіть для підключеного сигналу перешкоди ($V \neq 0$).

5 Отримайте значення середньоквадратичної динамічної похибки $ESCKG$ (при відключеному сигналі перешкоди V); $ESKV$ (при відключеному сигналі завдання G) і повної похибки ESK (при підключених сигналах перешкоди V і завдання G), окремо при положенні перемички П $\langle + \rangle$ і $\langle - \rangle$, для різних значень коефіцієнта передачі ОК K_0 , відповідно до таблиці 6.2.

6 Обчисліть середньоквадратичне значення повної похибки для випадку відсутності взаємної кореляції задавальних і збурювальних впливів за формулою

$$ESK_{1HK} = \sqrt{(ESCKG)^2 + (ESKV)^2}$$

і за формулою , що ґрунтується на виразі (6.22)),

$$ESK_{2HK} = \sqrt{((ESK +)^2 + (ESK -)^2) / 2}.$$

Результати обчислень за пп. 5-6 занесіть у таблицю 6.2.

Таблиця 6.2 – Результати обчислень

K_0	50	40	30	20	15	10
$ECKG$						
$ECKV$						
$ECK+$						
$ECK-$						
$ECK1HK$						
$ECK2HK$						

7 Побудуйте графіки функцій $ECKG(K_0)$, $ECKV(K_0)$, $ECK1HK(K_0)$, $ECK2HK(K_0)$.

8 Порівняйте значення функції $ECK1HK(K_0)$ і $ECK2HK(K_0)$. При наявності розбіжності цих значень поясніть її можливі причини.

9 Обчисліть теоретичне значення величин $ECKG$, $ECKV$, $ECK+$, $ECK-$, $ECKHK$ при $K_0=50$, використовуючи формули (6.19)-(6.22), з огляду на те, що $D_{\text{ш}}=1$, $T_{\text{ш}}=0.02$, $K_{\phi}=\pm 10$ (у залежності від положення перемички П), $K_l=K_{K_0}$, $T_d=0.1$.

Можливі теми навчально-дослідної роботи

1 Дослідження точності відстежувальної системи при випадкових впливах з ускладненим видом спектральної щільності.

2 Дослідження відстежувальної системи з оптимальною структурою, що відповідає цифровому вінерівському фільтру.

3 Дослідження адаптивних і робастних методів забезпечення необхідної точності відстежувальної системи при зміні властивостей зовнішніх впливів у межах заданого класу.

Контрольні питання

1 Опишіть математичний апарат дослідження цифрових систем при випадкових впливах.

2 Наведіть імовірнісні і спектрально-кореляційні характеристики дискретних випадкових стаціонарних процесів.

3 Наведіть типові ґратчасті випадкові процеси та їх властивості.

4 У чому полягає призначення формуючих фільтрів і як визначити їх структуру?

5 Які точнісні критерії оптимальності можна використовувати для відстежувальних систем, що функціонують при випадкових впливах?

6 Поясніть методику використання табличних інтегралів для визначення дисперсії похибки.

7 Як можна використовувати теорію оптимальних лінійних стаціонарних фільтрів Н. Вінера при оптимізації структури відстежувальної системи?

Питання підвищеної складності

1 Оцініть теоретичний мінімум сумарної середньоквадратичної похибки дослідженої системи.

2 Розгляньте похибку системи як зміщену ґратчасту функцію $e[n, E]$, дослідіть залежність її середньоквадратичної величини e_c від відносного зсуву $E = [1, 0]$. У скільки разів можуть відрізнятись значення $e_{СК}$ при різних значеннях E ?

3 Дослідіть залежність точності спостереження від величини періоду дискретності T .

4 Доведіть справедливість виразу (6.10) для кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу, що одержується при пропущенні дискретного білого шуму через екстраполятор нульового порядку.

5 Доведіть справедливість виразів (6.18) для взаємних спектральних щільностей задавальних і збурювальних впливів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Ситнік Б. Т. Комп'ютерні системи керування : навч. посіб. Ч. 1. Моделювання систем. Харків : УкрДУЗТ, 2019. 182 с.
- 2 Ситнік Б. Т. Комп'ютерні системи керування : навч. посіб. Ч. 2. Цифрові комп'ютерні системи керування. Харків : УкрДУЗТ, 2019. 141 с.
- 3 Ситнік Б. Т. Цифрові системи автоматичного керування : конспект лекцій. Харків : Транспорт України, 2002. 78 с.
- 4 Острем К., Витенмарк Б. Системы управления с ЭВМ : пер. с англ. Москва : Мир, 1981. 480 с.
- 5 Микропроцессорные системы автоматического управления / под ред. В. А. Бескерского. Ленинград : Машиностроение, 1982. 365 с.
- 6 Изерман Р. Цифровые системы управления : пер. с англ. Москва : Мир, 1984. 541 с.
- 7 Кофрон Дж. Технические способы микропроцессорных систем : практический курс / пер. с англ. Москва : Мир, 1983.
- 8 Романенко В. Д., Ігнатенко Б. В. Адаптивне керування технологічними процесами на базі микро-ЕОМ : навч. посіб. Київ : Вища шк., 1990. 334 с.
- 9 Ажогин В. В., Костюк В. І. Оптимальні системи цифрового керування технологічними процесами. Київ : Техніка, 1982. 175 с.
- 10 Романенко В. Д. Автоматичне настроювання системи безпосереднього цифрового керування процесом нейтралізації. *Адаптивні системи автоматичного керування : зб. наук. праць.* Київ : Техніка, 1972. Вип. 6. С. 33-32.
- 11 Загарий Г. И., Шубладзе А. М. Синтез систем управления на основе критерия максимальной степени устойчивости. Москва : Энергоатомиздат, 1982. 104 с.
- 12 Ажогин В. В., Романенко В. Д., Настроювання цифрових регуляторів в АСУТП за курсом «Керуючі обчислювальні машини й системи». Київ : КПИ, 1983. 53 с.
- 13 ДЕРЖСТАНДАРТ 21693-76. Пристрої регулюючі електричні аналогові з імпульсними й безупинними вихідними сигналами. Харків : ЦНТІ, 1976, 24 с.
- 14 Дода К. Як дрони можуть змінити майбутнє залізничної галузі. Підвищення ефективності і зменшення операційних витрат

залізниць. Безпілотники можуть швидко в цьому допомогти. URL : https://cfts.org.ua/blogs/yak_droni_mozhut_zminiti_maybutne_zalznichno_galuzi_292

15 Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной і ее применение к принятию приближенных решений : пер. с англ. Москва : Мир, 1976. 165 с.

16 Власний рій беспілотників – чи можливо? URL : <http://robotrends.ru/pub/1603/sobstvennyu-roy-bespilotnikov---vozmozhno-li>

17 Роботизовані комплекси й системи URL : <http://ds-robotics.ru/sections/informacziya/robotizirovannyye-kompleksyi-i-sistemy.html>

18 Метод колективного керування групою роботів URL : <http://www.studmedlib.ru/ru/doc/ISBN9785922111416-SCN0004.html>

19 Пегат А. Нечеткое моделирование и управление : пер. с польск. Москва : Біном, 2009. 798 с.

20 Каргин А. О. Введение в интеллектуальные машины. Кн. 1. Интеллектуальные регуляторы. Донецк : Норд-Пресс, 2010. 526 с.

21 Comprehensive approach to modeling dynamic processes in the system of underground rail electric traction /Sergiy Yatsko, Borys Sytnik, Yaroslav Vashchenko, Anatoly Sidorenko, Borys Liubarskyi, Ievgenii Veretennikov, Marina Glebova. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий : международный наукометрический научный журнал*, ISSN 1729-4061 (Online), ISSN 1729-3774. VOL 1. NO 9 (97) (2019). P. 48-57.

22 Construction of an analytical method for limiting the complexity of neural-fuzzy models with guaranteed accuracy / B. Sytnik, V. Bryksin, S. Yatsko, Y. Vashchenko *Восточно-Европейский журнал передовых технологий : международный наукометрический научный журнал*. ISSN 1729-4061 (Online), ISSN 1729-3774. VOL 2, NO 4 (98) (2019). P. 8-13.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт
з дисципліни
«ЦИФРОВІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ»

Відповідальний за випуск Бриксін В. О.

Редактор Решетилова В. В.

Підписано до друку 10.12.19 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 5,00. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,

61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.