ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра «Вища математика»

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
і завдання з дисципліни
«*ВИЩА МАТЕМАТИКА*»
для студентів спеціальності ТСМ та СКС

Харків – 2012

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 11 жовтня 2010 р., протокол № 2.

Методичні вказівки призначено для студентів денної форми навчання спеціальностей СКС та ТСМ.

Укладачі:

доценти О.О. Думіна
О.І. Удодова

Рецензент

старш. викл. Ю.С. Шувалова

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
і завдання з дисципліни
«*ВИЩА МАТЕМАТИКА*»
для студентів спеціальності ТСМ та СКС

Відповідальний за випуск Думіна О.О.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 8.12.10 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 0,75. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

методичні вказівки і завдання з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

для студентів спеціальності ТСМ та СКС

Харків – 2012

Методичні вказівки розглянуто й рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики УкрДАЗТ, протокол № 2 від 11 жовтня 2010 р.

Методичні вказівки призначено для студентів денної форми навчання спеціальностей СКС та ТСМ.

Укладачі:
доценти О.О. Думіна
О.І. Удодова

Рецензент
старш. викл. Ю.С. Шувалова

ВСТУП

У методичних вказівках розкрито основні теоретичні положення розділу “Множини” курсу дискретної математики, наведені приклади розв’язання задач з розгорнутими поясненнями, варіанти завдань для виконання самостійних робіт, список навчальної літератури.

Методичні вказівки рекомендовані для студентів денної форми навчання спеціальності “Спеціалізовані комп’ютерні системи” та „ТСМ” і призначені для виконання самостійних робіт.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ПОНЯТТЯ

1.1 Множини

У повсякденному житті і практичній діяльності часто потрібно говорити про деякі сукупності різних об’єктів, предметів, понять, чисел, символів тощо. Наприклад, сукупність деталей механізму, аксіом геометрії, чисел натурального ряду, літер алфавіту. На основі інтуїтивних уявлень про такі сукупності сформувалося математичне поняття множини. Великий внесок в теорію множин зробив Георг Кантор: « Множина – це багато, що мислиться як єдине ціле». Пізніше, завдяки його дослідженням, теорія множин стала повністю визначеним та обґрунтованим розділом математики, а у теперішній час набула фундаментального значення. Теорія множин є основою для усіх розділів дискретної математики та комп’ютерних наук в цілому, є однією з основ функціонального аналізу, топології, загальної алгебри та у теперішній час проводяться глибокі дослідження у самій теорії множин, що пов’язані з основами математики.

Теорія множин разом із іншими розділами дискретної математики має багато корисних застосувань у програмуванні. Наприклад, вона використовується для побудови систем керування базами даних, при розбудові та організації роботи комп’ютерних мереж, мережі Інтернет.

Множина – це сукупність (система) будь-яких об’єктів довільної природи, що мають деяку загальну ознаку та розглядаються як єдине ціле.

Множини позначають великими літерами латиниці, рідше кирилиці.

Множина задана (визначена), якщо про будь-який об’єкт можна сказати, чи належить він цій множині, чи ні.

Об’єкти, що утворюють множину, будемо називати *елементами* множини і позначати відповідними малими літерами. Якщо елемент a належить множині A, це позначається так: $a \in A$, в іншому випадку пишуть $a \notin A$.

Приклад

M – множина цілих чисел від 0 до 12. Тоді $5 \in M$, $15 \notin M$.

Деякі множини мають загальновизнані позначення: **N** – множина натуральних чисел, **Z** – множина цілих чисел, **Q** – множина раціональних чисел, **R** – множина дійсних чисел, **C** – множина комплексних чисел.

1.2 Способи визначення множин

Множину можна визначити:

переліком усіх об’єктів, що входять до неї (елементів множини).

Приклад 1.2.1

$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ – множина десятинних цифр;

$M = \{2,4,6,8,...\}$ – множина парних чисел;

описом властивостей, які мають елементи множини.

Приклад 1.2.2

Множину парних чисел, що менші 10, можна задати так: $M = \{2,4,6,8\}$ або $M = \{m \mid m = 2n, де\ n - ціле, 1 \le n \le 4\}$, причому справа від вертикальної риски вказана властивість елементів цієї множини (це аналітичне задання множини).

Множина, що не містить жодного елемента, називається *порожньою* та позначається $\varnothing$.

Приклад 1.2.3

Порожні множини:

1) множина квадратних тричленів, що мають більше двох коренів;

2) множина живих людей, вік яких більше 1000 років;

3) множина слонів, що літають.

Множина називається *скінченною*, якщо кількість її елементів виражається деяким числом. Множина, яка не є скінченною, називається *нескінченною*. *Злічена* множина – це множина, усі елементи якої можна перенумерувати $\{ a_1, a_2, ... \}$.

Потужністю множини називається кількість елементів скінченної множини і позначаться $|A|$.

Приклад 1.2.4

1) $|\varnothing| = 0$;

2) $|\{ a, b, c, d \}| = 4$;

3) $\mathbf{N}$ – нескінченна злічена множина.

1.3 Підмножини

Будь-яку частину A' множини A, що вибрана за певною ознакою, називають *підмножиною* і позначають $A' \subset A \Leftrightarrow \{ a \in A' \Rightarrow a \in A \}$. Також запис $A \subset B$ може називатися «*включення*» і читатися «*A* міститься (входить) у *B*», «*B* містить *A*».

Приклад 1.3.1

Включення $A \subset B$ правильне для множин $A = \{ 2, 4 \}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

Приклад 1.3.2

1) Множина *A* складається з усіх чотирикутників;
2) Множина *B* складається з усіх трапецій;
3) Множина *C* складається з усіх паралелограмів;
4) Множина *D* складається з усіх прямокутників;
5) Множина *E* складається з усіх квадратів.

Кожна наступна множина є підмножиною попередньої:

$$A \supset B \supset C \supset D \supset E.$$

Приклад 1.3.3

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

З визначення підмножини бачимо, що будь-яка множина є підмножиною самої себе: $A \subset A$. Будемо вважати, що порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини: $\varnothing \subset A$. Виключивши ці граничні випадки (тобто $\varnothing$, A), ми отримаємо так звані *власні підмножини* множини A, тобто такі, що не є порожніми та не збігаються з A.

Множини A і B *рівні*, якщо одночасно: $A \subset B$ і $B \subset A$ (тобто будь-який елемент A належить B і навпаки). Позначення рівності $A=B$. У випадку рівності множини A і B складаються з одних і тих самих елементів.

Для включення множин справедлива властивість *транзитивності*: якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

Сімейством множини A або *булєаном A* називають множину, елементами якої є тільки усі підмножини множини A. Позначають булєан $B\{A\}$, множину B при цьому називають *простором* і позначають L.

Зазвичай усі множини, з якими мають справу в тому чи іншому випадку, є підмножинами деякої фіксованої множини I. *Універсальною* називається множина, яка містить усі можливі елементи, що зустрічаються в даній задачі. Універсальна множина позначається символом I. Очевидно, що $A \subset I$.

1.4 Операції над множинами

Множини можна комбінувати між собою та отримувати інші множини. Серед несчисленної кількості можливих способів комбінування деякі виявились корисними.

1 *Об'єднання (сума)* двох множин A і B –це множина C, яка складається з усіх тих елементів, що належать **хоча б одній** з множин A і B.

Позначення: $C = A \cup B = A + B$.

$$A + B = A \cup B \overset{def}{=} \{ c_i \mid c_i \in A \ \underline{\text{або}} \ c_i \in B \} \cdot$$

Елементи, що входять до об'єднання множин, треба враховувати лише один раз.

Приклади 1.4.1

1) $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$, тоді $C = A \cup B = \{1;2;3;4;5\}$;

2) $A = (-\infty, 2]$, $B = (1, +\infty)$, тоді $C = A \cup B = R$;

3) якщо A – множина студентів, що не склали перший іспит, B – другий, то $A \bigcup B$ – множина студентів-боржників після двох іспитів (не виключено, що хтось не склав обидва іспити).

2 *Перетин (добуток)* A і B – це множина C, яка містить лише елементи, що входять до A і B **одночасно**.

Позначення: $C = A \cap B$.

$$A \bigcap B \overset{def}{=} \{ c_i \mid c_i \in A \text{ і } c_i \in B \} \cdot$$

Приклад 1.4.2

Нехай $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$, $D = \{10; 11\}$, тоді $C = A \cap B = \{2; 3\}$, $A \cap D = \varnothing$.

Аналогічно визначаються об'єднання та перетин для будь-якої кількості множин $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$.

3 *Різниця* множин A і B – це множина C, що містить усі елементи множини A, що не входять до множини B.

Позначення: $C = A \setminus B$.

$$A \setminus B \overset{def}{=} \{ c_i \mid c_i \in A \text{ і } c_i \notin B \}$$

Приклади 1.4.3

1) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ – множина ірраціональних чисел, а $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R} = \varnothing$.

2) Різницею множин $A = [1,4]$ і $B = [2,3]$ є множина $A \setminus B = [1,2) \bigcup (3,4]$.

3) Різницею множин $B = \{2,4,6,8\}$ і $A = \{1,2,3,4\}$ є множина $B \setminus A = \{6,8\}$.

4 *Симетричною різницею* множин A і B називається множина

$$A \Delta B \overset{def}{=} (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) \cdot$$

5 *Доповнення* до множини визначається як

$$\overline{A} = I \setminus A \overset{def}{=} \{ a_i \mid a_i \notin A \} \cdot$$

Приклад 1.4.4 I – множина студентів у групі. A – множина студентів, що склали перший іспит, тоді $\overline{A}$– множина студентів, що **не** склали перший іспит.

Дії над множинами мають наочний вигляд за допомогою діаграм, на яких множини зображені у вигляді кола і ті області, де розташовані потрібні елементи, виділені кольором (рисунок 1.1). Ці діаграми мають назву *діаграми Ейлера-Венна*.

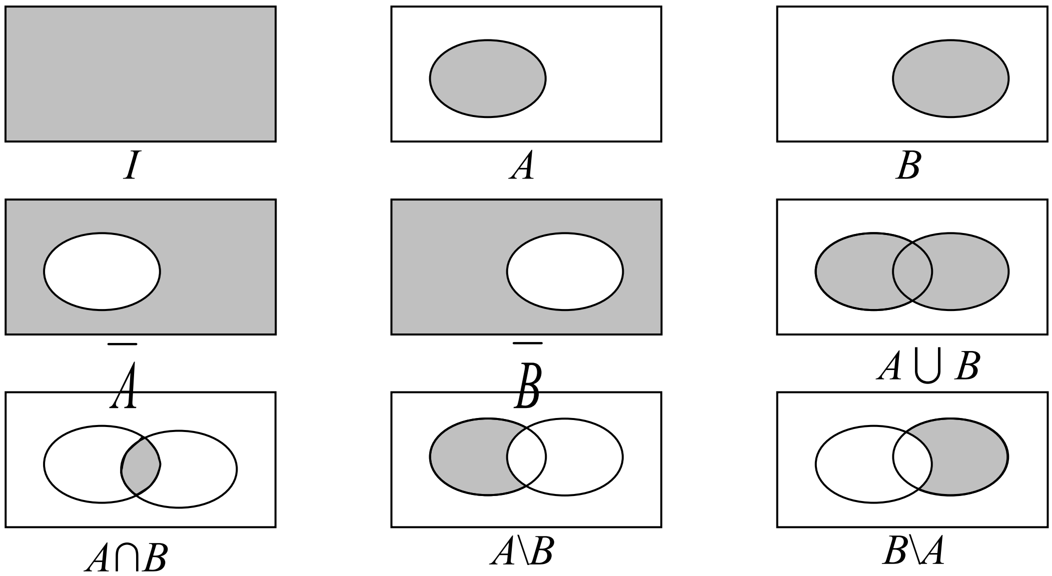

Рисунок 1.1

Є також інший спосіб проілюструвати операції над множинами. Це так звана *таблиця надходження елементів у множину*, у якій розглядаються усі можливі випадки входження обраного елемента до множин A і B та їхні комбінації. Результат належності цього елемента множинам A і B відмічають в перших двох стовпчиках таблиці за правилом: 1 – якщо елемент входить до даної множини, 0 – якщо не входить. Маємо чотири випадки або чотири рядки у таблиці. Стовпчики, що відповідають операціям $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, заповнюємо згідно з визначенням цих операцій (таблиця 1.1). Наприклад, другий рядок в таблиці 1.1 читається так: якщо елемент входить до A, але не входить до B, то він не входить до $\overline{A}$, входить до $A \cup B$, не входить до $A \cap B$, але входить до $A \setminus B$.

Таблиця 1.1

A	B	$\overline{A}$	$A\bigcup B$	$A\bigcap B$	$A \setminus B$
1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0

Розглянемо деякі важливі властивості операці об'єднання, перетину і різниці. Нехай A, B, C є підмножинами для I. Тоді (для зручності у подальшому будемо нумерувати формули паралельно, використовуючи звичайну нумерацію та зі штрихом):

1) $A\bigcup B = B\bigcup A$; 1') $A\bigcap B = B\bigcap A$

(ці тотожності виражають *комунікативність* операцій об'єднання та перетину);

2) $A\bigcup(B\bigcup C) = (A\bigcup B)\bigcup C$; 2') $A\bigcap(B\bigcap C) = (A\bigcap B)\bigcap C$

(ці тотожності виражають *асоціативність* операцій об'єднання та перетину);

3) $A\bigcup A = A$; 3') $A\bigcap A = A$

(ці тотожності називаються *законами ідемпотентності*);

4) $A\bigcup(B\bigcap C) = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$;
4') $A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$

(ці тотожності називаються *законами дистрибутивності*);

5) $\overline{(A\bigcup B)} = \overline{A}\bigcap \overline{B}$; 5') $\overline{(A\bigcap B)} = \overline{A}\bigcup \overline{B}$

(ці тотожності називаються *законами де Моргана*);

6) $A\bigcup\varnothing = A$; 6') $A\bigcap I = A$;

7) $A \cup \overline{A} = I$; 7') $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

8) $A \cup I = I$ 8') $A \cap \varnothing = \varnothing$

9) $\overline{\varnothing} = I$; $\overline{I} = \varnothing$;

10) $\overline{\overline{A}} = A$

Доведемо закон де Моргана $\overline{\left(A \cup B\right)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ на основі таблиці надходження елементів до множин (таблиця 1.2).

Таблиця 1.2

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	1	**0**	0	1	**0**
0	1	1	**0**	1	0	**0**
0	0	0	**1**	1	1	**1**

З таблиці 1.2 бачимо, що при різних варіантах надходження елемента до множин *A*, *B* він надходить до правої та лівої частин рівності одночасно (див. четвертий і сьомий стовпчики). Значить, $A \cup B = A \cap B$.

Приклад 1.4.5

Спростити вирази, користуючись властивостями дій над множинами

1) $A \cap \left(\overline{A \cap B}\right)$;

$$A \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = A \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = \left(A \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = \varnothing \cup \left(A \setminus B\right) = A \setminus B;$$

2) $\left(A \setminus B\right) \cap \left(A \cup B\right)$.

Оскільки $A \setminus B \subset A \cup B$, то $\left(A \setminus B\right) \cap \left(A \cup B\right) = A \setminus B$.

Приклад 1.4.6

Чи випливає з $A \setminus B = C$, що $A = B \cup C$? І навпаки, чи випливає з $A = B \cup C$, що $A \setminus B = C$?

Розглянемо перше питання задачі. Запишемо рівність $A = B \cup C$ в іншому вигляді: $A = B \cup C = B \cup (A \setminus B)$. Перевіримо отримане співвідношення $A = B \cup (A \setminus B)$. Бачимо (таблиця 1.3), що стовпчики, які відповідають A і $B \cup (A \setminus B)$ не збігаються, тобто з умови $A \setminus B = C$ не випливає, що $A = B \cup C$. В той же час можна стверджувати, що $A \subset B \cup C$, тому що **усі** числа в стовпчику A **менші** за числа в стовпчику $B \cup C$.

Таблиця 1.3

A	B	$A \setminus B$	$B \cup (A \setminus B)$
0	0	0	**0**
0	1	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**

Розглянемо друге питання: нехай $A = B \cup C$, чи правильно, що в цьому випадку $A \setminus B = C$ (або $(B \cup C) \setminus B = C$)? Третій і четвертий стовпчики не збігаються (таблиця 1.4), тому і ця рівність неправильна. Насправді, $\left(B \cup C\right) \setminus B \subset C$ (**усі** числа в четвертому стовпчику **менші** за числа в третьому стовпчику) .

Таблиця 1.4

B	C	$B \cup C$	$(B \cup C) \setminus B$
0	0	**0**	**0**
0	1	**1**	**1**
1	0	**1**	**0**
1	1	**1**	**0**

Приклад 1.4.7

Довести включення $\left(B \setminus C\right) \setminus \left(B \setminus A\right) \subset A \setminus C$.

Таблиця 1.5

A	B	C	$B \setminus C$	$B \setminus A$	$(B \setminus C) \setminus (B \setminus A)$	$A \setminus C$
1	1	1	0	0	**0**	**0**
1	0	1	0	0	**0**	**0**
0	1	1	0	1	**0**	**0**
0	0	1	0	0	**0**	**0**
1	1	0	1	0	**1**	**1**
1	0	0	0	0	**0**	**1**
0	1	0	1	1	**0**	**0**
0	0	0	0	0	**0**	**0**

Розглядаючи різні варіанти надходження елемента у множини *A*, *B*, *C* (таблиця 1.5), бачимо, що якщо елемент надходить до $\left(B \setminus C\right) \setminus \left(B \setminus A\right)$, то він надходить і до $A \setminus C$, тобто $\left(B \setminus C\right) \setminus \left(B \setminus A\right) \subset A \setminus C$.

Розглянемо ще декілька прикладів знаходження різних комбінацій множин

Приклад 1.4.8

Знайти перетин множин

$$A = \left\{ 2n - 1 : n = 1,2,3,4,5 \right\},\ B = \left\{ p : p - \textit{просте число} \right\}.$$

Множини задаються переліком властивостей елементів множин. Перелічимо елементи множини *A*.

$$A = \left\{ 1, 3, 5, 7, 9 \right\}.$$

Просте число — це натуральне число, яке має тільки два натуральних дільники (лише 1 і саме це число).

Перетин множин – це множина, яка складається з елементів, що входять в *A* і *B* одночасно, тобто треба з елементів множини *A* вибрати прості числа.

$$A \bigcap B = \left\{ 1, 3, 5, 7 \right\}.$$

Приклад 1.4.9

Знайти доповнення множини *A* до множини *B*, якщо $A = \left\{ x : 3 < x \le 5 \right\}$, $B = \left\{ x : -1 \le x < 7 \right\}$.

Нарисуємо задані множини на числовій осі (рисунок 1.2).

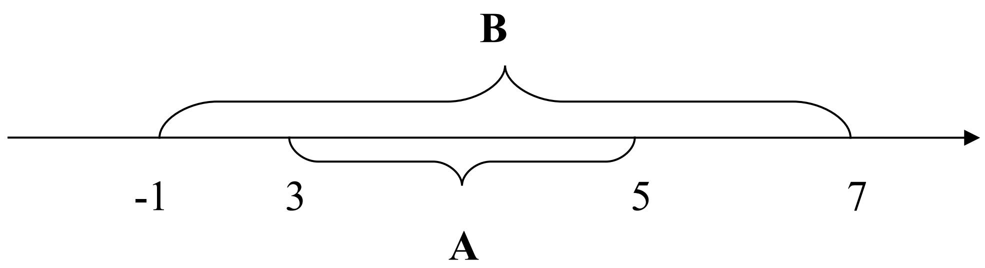

Рисунок 1.2

Доповнення множини A до множини B – це множина C

$$C = [-1;3] \bigcup (5;7).$$

Приклад 1.4.10

Знайти об’єднання множин

$$A = \{2n : n = 2,3,4,5,6,7\},\ B = \{2^n : n = 1,2,3,4\}.$$

Випишемо елементи множин $A = \{4,6,8,10,12,14\}$, $B = \{2,4,8,16\}$. Об’єднанням множин є множина, яка містить всі елементи, що входять або до множини A, або до множини B, або до множин A і B одночасно. $A \bigcup B = \{2,4,6,8,10,12,14,16\}$.

Приклад 1.4.11

Знайти різницю множин $A \backslash B$, якщо $A = \{1,2,3,8\}$, $B = \{2,4,5,7,8\}$.

Різницею множин $A \backslash B$ є множина, яка містить всі елементи множини A, що не входять в множину B. В цьому прикладі це множина $A \setminus B = \{1,3\}$.

Приклад 1.4.12

Знайти множину точок площини, координати яких задовольняють таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} x - 2y \le 4 \\ x^2 + y^2 \le 9 \end{cases}.$$

Побудуємо першу множину $x - 2y \le 4$. Це напівплощина, границя цієї напівплощини – пряма, рівняння границі $x - 2y = 4$. Складемо таблицю для побудови прямої

x	0	4
y	-2	0

Перевіримо, чи належить точка O(0,0) напівплощині $x - 2y \le 4$, для цього підставимо координати точки у рівняння напівплощини

$$0 - 2 \cdot 0 \le 4,$$
$$0 \le 4.$$

Рівняння правильні, тому точка О(0,0) належить півплощині $x - 2y \le 4$. Відносно прямої $x - 2y = 4$ обираємо на півплощину у бік точки О (позначена штриховкою).

Друга множина $x^2 + y^2 \le 9$ – це круг з центром у початку координат і радіусом $R = 3$. Перетин цих множин – шукана множина, що зображена на рисунку 1.3 (перетин штриховок).

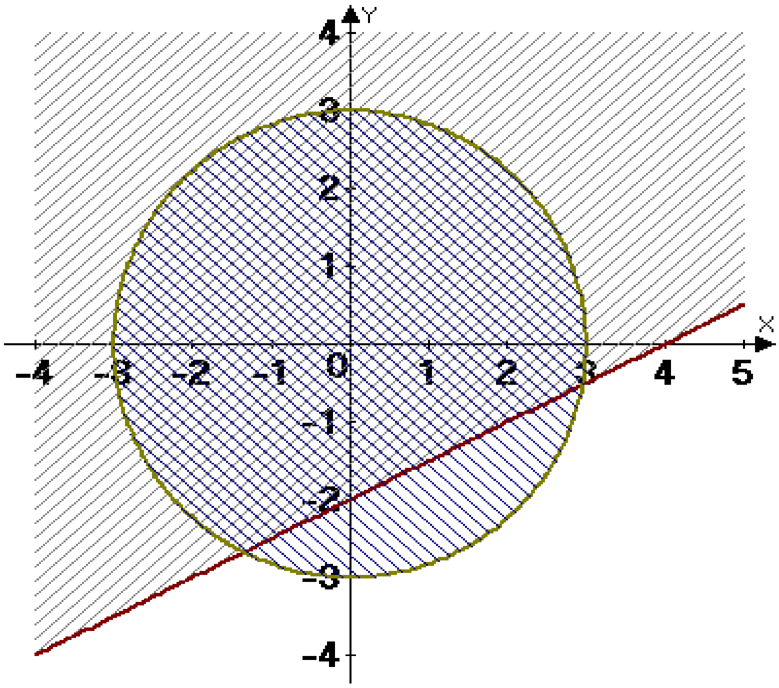

Рисунок 1.3

Приклад 1.4.13 Знайти множину точок площини, координати яких задовольняють таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y-1)^2 \le 1 \\ |x| \le 3 \end{cases}.$$

Множина $(x+3)^2 + (y-1)^2 \le 1$ – це коло з центром у т. М (-3;1) та радіусом $R = 1$. Множина $|x| \le 3$, або $-3 \le x \le 3$ – це вертикальна смуга шириною 6. Перетин множин зображений на рисунку 1.4.

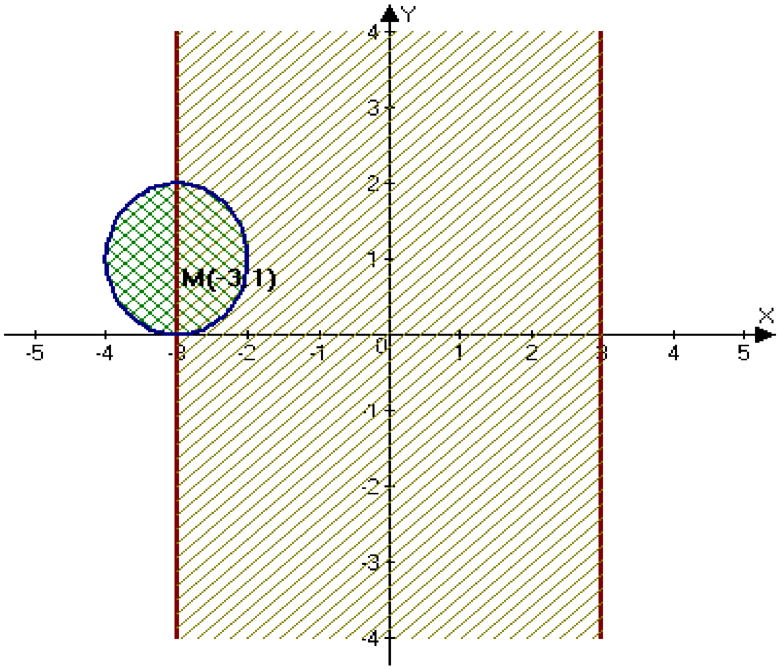

Рисунок 1.4.

1.5 Формула включень та виключень

Нехай скінченна множина A подана як об'єднання деяких скінченних множин A_1, …, A_n: $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Як пов'язані кількості елементів у множині A і в множинах A_1, …, A_n? Для випадку n=2 на це питання відповісти легко.

Нагадаємо, що $|A|$ («потужність множини A») – це кількість елементів у скінченній множині A. Тоді:

1) якщо A_1 і A_2 скінченні множини і $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|. \qquad (1.5.1)$$

2) якщо A_1 і A_2 скінченні множини і $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, то

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|, \qquad (1.5.2)$$

так як спільні елементи множин A_1 і A_2 входять до об'єднання тільки один раз (див. діаграму Венна).

Приклад 1.5.1

З 220 школярів 163 вміють грати у хокей, 175 – у футбол, 24 не вміють грати у ці ігри. Скільки школярів одночасно вміють грати у хокей та у футбол?

Введемо позначення: Ш – множина всіх школярів, |Ш| = 220, Ф – множина школярів, що вміють грати у футбол, |Ф| = 175, Х – множина школярів, що вміють грати у хокей, |Х| = 163, Ф ∩ Х – множина школярів, що вміють грати і у футбол, і у хокей, Ф ⋃ Х – множина школярів, що вміють грати хоча б в одну з ігор – або у футбол, або у хокей. За умовою, 24 школяра не вміють грати в ці ігри, тому

$$|Ф \cup Х| = |Ш| - 24 = 196.$$

За формулою (5.2), $|Ф \cup Х| = |Ф| + |Х| - |Ф \cap Х|$, звідки

$$|Ф \cap Х| = |Ф| + |Х| - |Ф \cup Х| = 175 + 163 - 196 = 142.$$

Відповідь: 142 школяра грають і у футбол, і у хокей.

Насправді формула (5.2) є окремим випадком формули включень і виключень, яка відповідає на питання, що постає на початку розділу, для будь-якого натурального *n*.

Теорема 1.5.1 Якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ – деякі скінченні множини, то

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \left[|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|\right] - \\
&-\left[|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|\right] + \\
&\left[|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|\right] - \ldots + \\
&+(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.
\end{aligned}$$

Пояснимо формулювання цієї теореми. Права частина формули в теоремі є алгебраїчною сумою *n* доданків (кожен у квадратних дужках), що мають переміжно знаки «+» і «–». Перший доданок – сума елементів, що надходять до множин A_1, A_2, ..., A_n, другий – сума елементів, що надходять до перетинів пар множин $A_i \cap A_j$ ($i < j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$), третій – сума елементів, що надходять до потрійних перетинів $A_i \cap A_j \cap A_k$ ($i < j < k$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, n$) тощо. Останній доданок зі знаком $(-1)^{n-1}$, – число елементів у множині $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$. Таке переміжне включення та виключення доданків з метою врахування кожного елемента лише один раз і слугувало причиною для назви цієї формули.

Наслідок Якщо множини A_1, A_2, ..., A_n попарно не перетинаються, то

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|.$$

Приклад 1.5.2

У студентській групі 25 людей. Під час літніх канікул 9 з них від'їжджали у турпоїздки за кордон, 12 – мандрували Україною, 15 – відпочивали на морі в Криму, 6 – мандрували за кордоном і Україною, 7 – були і за кордоном, і в Криму, 8 – мандрували Україною і були у Криму, 3 – брали участь у всіх трьох поїздках. Скільки студентів нікуди не виїжджали?

Нехай:

$К$ – множина студентів, що виїжджали за кордон;

$У$ – множина студентів, що мандрували Україною;

$М$ – множина студентів, що відпочивали на морі у Криму.

Тоді множина студентів, що їздили хоча б кудись, $К \cup У \cup М$. Так як 9 + 12 +15 = 36 > 25, то множину $К$, $У$, $М$ перетинаються (це бачимо і безпосередньо з умови задачі, бо деякі студенти були в різних поїздках) і

$$\left|K \cup Y \cup M\right| =$$
$$= \left|K\right| + \left|Y\right| + \left|M\right| - \left|K \cap Y\right| - \left|K \cap M\right| - \left|Y \cap M\right| + \left|K \cap Y \cap M\right|.$$

Маємо

$$|К| = 9,\ |У| = 12,\ |М| = 15,$$
$$|К \cap У| = 6,\ |К \cap М| = 7,\ |У \cap М| = 8,$$
$$|К \cap У \cap М| = 3.$$

Тоді

$$|К \cup У \cup М| = 9+12+15–6–7–8+3=39–21 = 18,$$

а нікуди не виїжджали 25–18 = 7 студентів.

2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1

1

1) перелічити елементи множини M={множина кольорів спектра};

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} |x| \geq 3 \\ x^2 + y^2 \geq 3 \end{cases};$$

3) знайти об'єднання (суму) множин $A = \{\ p : \textit{просте число}, \textit{що менше за } 15\}$, $B = \{\ 2n - 1 : n = 1, 2, 3, 4\}$.

2

1) перелічити елементи множини $M = \{\ \textit{множина додатніх простих чисел}, \textit{які менші за } 40\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} y < |\ x\ | \\ |\ x\ | > 2 \end{cases};$$

3) знайти перетин (добуток) множин $A = \{\ 2n : n = 1, 2, ..., 10\}$, $B = \{\ 3n : n = 1, 2, ..., 10\}$.

3

1) перелічити елементи множини $M = \{\ \textit{множина цілих додатніх степенів } 3, \textit{які менші за } 250\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} x^2+(y-3)^2 \le 9 \\ |y|<2 \end{cases};$$

3) знайти об'єднання (суму) множин $A=\{1,2,4,6,7\}$, $B=\{2^n : n=1,2,3,4\}$.

4

1) перелічити елементи множини
$M=\{$ *множина додатніх чисел, кратних* 5, *які менші за* 47$\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} y-x<3 \\ y-3x \ge 5 \end{cases};$$

3) знайти різницю множин $A \setminus B$, де $A=\{-1,3,6,7,9,4,10,22\}$, $B=\{3,4,9\}$.

5

1) перелічити елементи множини
$M=\{$ *множина різних однокольорових шахматних фігур*$\}$

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} x+y>0 \\ -4x+y>4 \end{cases}$$

3) знайти різницю $A \setminus B$, де $A=\{2n-1 : n=1,2,...,10\}$, $B=\{3n+2 : n=1,2,3,...,10\}$.

6

1) перелічити елементи множини $M=\left\{x:\left(x^2-1\right)\left(x^2-3x-4\right)=0\right\}$

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} x^2+(y+1)^2<81 \\ x>5 \end{cases}$$

3) знайти перетин (добуток) множин $A=\left\{6n-1:n=1,2,...,7\right\}$, $B=\left\{4n-1\right\}$.

7

1) перелічити елементи множини $M=\left\{x:\cos x-2=0\right\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} x-y>1 \\ x^2+y^2>4 \end{cases};$$

3) знайти об’єднання (суму) множин $A=\left\{1,5,8\right\}$, $B=\left\{1,2,8,9,11\right\}$.

8

1) перелічити елементи множини $M=\left\{x:-1\le|x|<1,\ x\in Z\right\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} |x|>2 \\ y-3x<0 \end{cases};$$

3) знайти об’єднання (суму) множин $A=\{1,3,8\}$, $B=\{1,2,8,9,11\}$.

9

1) перелічити елементи множини $M=\{x:\cos^2 x=4\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} x-y>2 \\ |x|\geq 1 \end{cases};$$

3) знайти доповнення множини *A* до множини *B*, якщо $A=\{1,5,8\}$, $B=\{1,2,5,8,9,11\}$.

10

1) перелічити елементи множини $M=\{x:\cos^2 x-\sin 2x=0, -\pi<x<\pi\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} x^2+y^2<3 \\ y>-1 \end{cases};$$

3) знайти перетин (добуток) множин $A=\{x:\sin x=1\}$, $B=\{x:\sin x\leq 1\}$.

11

1) перелічити елементи множини $M=\{x:x^2\sqrt{x}-x=0\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases}(x+3)^2+y^2<1\\ x>-3\end{cases};$$

3) знайти доповнення множини A до B, якщо $A=\{\,x:1<x<2\}$, $B=\{\,x:0<x<4\}$.

12

1) перелічити елементи множини $M=\{\,x:2<x<9,\, x-\textit{просте число}\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2>4\\ x\neq 1\end{cases};$$

3) знайти об'єднання (суму) множин $A=\{\,(x,y):|\,x\,|>2\}$, $B=\{\,(x,y):|\,y\,|<2\}$

13

1) перелічити елементи множини $M=\{\,\textit{множина простих чисел, які менші за }57\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases}x\geq 3\\ x+y\leq 9\end{cases};$$

3) знайти перетин множин $A=\{\,p:\textit{прості числа, менші за }15\}$, $B=\{\,2n-1:n=1,2,3,4\}$.

14

1) перелічити елементи множини $M=\left\{ x:\sqrt{x}-4x=0\right\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} y<x \\ |x|\le 2 \end{cases};$$

3) знайти різницю множин $A \setminus B$, де $A=\left\{ 2n+2:n=1,2,...10\right\}$, $B=\left\{ 2^n:n=1,2,...5\right\}$.

15

1) перелічити елементи множини $M=\left\{ x:x-\sqrt{x}-2=0\right\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} x^2+(y-3)^2\le 25 \\ |y|\ge 2 \end{cases};$$

3) знайти перетин (добуток) множин $A=\left\{ 1,2,3,5,6,7,8\right\}$, $B=\left\{ 2^n:n=1,2,3,4\right\}$.

16

1) перелічити елементи множини $M=\left\{ x:x^4-8x^2-9=0\right\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} y+x\le 3 \\ y-3x\ge 5 \end{cases};$$

3) знайти різницю $A \setminus B$, де $A = \{ -1, 3, 6, 7, 9, 4, 10, 22 \}$, $B = \{ 3, 4, 9, 22 \}$.

17

1) перелічити елементи множини $M = \{ x : (x^2 - 4) (x^2 + 3x - 4) = 0 \}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} x + y > 1 \\ -4x + y > 4 \end{cases};$$

3) знайти об'єднання (суму) множин $A = \{ 3n + 1 : n = 1, 2, ..., 8 \}$, $B = \{ 2n + 1 : n = 1, 2, 3, ..., 10 \}$.

18

1) перелічити елементи множини $M = \{ x : 2\cos x - 1 = 0 \}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 < 81 \\ x > 5 \end{cases};$$

3) знайти доповнення множини *A* до *B*, якщо $A = \{ 2, 3, 5, 6 \}$, $B = \{ n + 1 : n = 1, 2, ..., 7 \}$.

19

1) перелічити елементи множини $M = \{ x : -1 \le |x| < 1, x - \textit{ціле число} \}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} x - y \le 1 \\ x^2 + y^2 \le 4 \end{cases};$$

3) знайти об'єднання (суму) множин $A = \{1,5,6,8\}$, $B = \{1,2,8,9,11,12\}$.

20

1) перелічити елементи множини $M = \{x : x^3 - x^5 = 0\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ x + y \le 4 \end{cases};$$

3) знайти перетин (добуток) множин $A = \{1,2,5,6,8,12\}$, $B = \{-1,3,8,9,10,12,15\}$.

Завдання 2

Виконати завдання на основі таблиці входження елементів у множини та зобразити відповідні діаграми Ейлера-Венна.

Довести тотожності

1) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
2) $A \cap B \cap C = A \setminus (A \setminus (B \cap C))$;
3) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$;
4) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$;
5) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$;
6) $-(A \setminus B) = -A \cup (A \cap B)$;
7) $-A \cup (-(B \cup C)) = (-(A \cap B)) \cap (-(A \cap C))$;
8) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
9) $(A \cap B) \cup (A \cap (-B)) = A$;
10) $(A \cup B) \cap (A \cup (-B)) = A$;
11) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
12) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
13) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

14) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$;
15) $A\bigcup B=(A\Delta B)\bigcup (A\cap B)$;
16) $A\bigcup B=A\Delta B\Delta (A\cap B)$;
17) $A\setminus B=A\Delta (A\cap B)$.

Довести включення
18) $A \cap B \subset A \bigcup B$;
19) $(A \cap C) \bigcup (B \cap D) \subset (A\bigcup B) \cap (C \bigcup D)$;
20) $A \setminus C \subset (A \setminus B) \bigcup (B \setminus C)$;
21) $(A \bigcup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \bigcup C$.

Які включення правильні для множин?
22) $A \setminus (B \bigcup C)$ та $(A \setminus B) \setminus C$;
23) $A \bigcup (B \setminus C)$ та $(A \bigcup B) \setminus C$;
24) $(A \setminus B) \bigcup C)$ та $A \bigcup (C \setminus B)$.

Завдання 3

1 За підсумками іспитів з 37 студентів відмінну оцінку з математики мали 15 студентів, з фізики – 16, з хімії – 19, з математики та фізики – 7, з математики та хімії –9, з фізики та хімії – 6, з усіх трьох дисциплін – 4. Скільки студентів отримали хоча б по одній відмінній оцінці?

2 Протягом 30 днів вересня було 12 дощових, 8 вітряних, 4 холодних, 5 дощових та вітряних, 3 дощових та холодних, 2 вітряних та холодних, а один день був дощовий, вітряний та холодний одночасно. Скільки днів у вересні була гарна погода?

3 В класі 35 учнів. З них 20 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний, 10 учнів не відвідують жодного з цих гуртків. Скільки учнів відвідують лише математичний гурток?

4 Староста курсу навів такий звіт про фізкультурну роботу. «Всього 45 студентів. Футбольна секція – 25 людей, баскетбольна секція – 30 людей, шахова секція – 28 людей. Одночасно у футбольній та баскетбольній секції займаються 16 людей, у футбольній та шаховій – 18, у баскетбольній та шаховій – 17. У трьох секціях одразу займаються 15 людей». Поясніть, чому звіт не був прийнятий?

5 В одному з відділів науково-дослідного інституту працюють кілька людей, кожний з яких знає хоча б одну іноземну мову, причому 6 людей знають англійську мову, 6 – німецьку, 7 – французьку, 4 знають англійську та німецьку, 3 – німецьку та французьку, 2 – французьку та англійську, 1 людина знає усі три мови. Скільки співробітників знають лише одну мову?

6 Скільки існує цілих чисел від 1 до 1000, що не діляться ні на 5, ні на 7?

Вказівка. Для підрахунку кількості чисел від 1 до A, що діляться на a, можна використати функцію $y = E(x)$ – ціла частина x (найбільше ціле число, що не перевершує x). Наприклад, кількість чисел від 1 до 100, що діляться на 9, дорівнює $E(100/9)=E(11{,}11...)=11$.

7 Скільки існує цілих чисел від 1 до 100, що не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 5, ні на 7? (див. **вказівку** до задачі 6).

8 Скільки натуральних чисел від 1 до 1000 не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 5? (див. **вказівку** до задачі 6).

9 Вибрана деяка множина натуральних чисел. Відомо, що серед них є 100 чисел, що кратні 2, 115 чисел, що кратні 3, 120 чисел, що кратні 5, 45 чисел, що кратні 6, 38 чисел, що кратні 10, 50 чисел, що кратні 15, 20 чисел, що кратні 30. Скільки елементів у заданій множині?

10 З 100 школярів 40 грають у футбол, а 50 у волейбол. Що можна сказати про кількість школярів, які грають в обидві гри? Про кількість школярів, що грають хоча б в одну з цих ігор?

11 З 80 школярів 40 грають у футбол, а 50 у волейбол. Що можна сказати про кількість школярів, які грають в обидві гри? Про кількість школярів, що грають хоча б в одну з цих ігор?

12 В колонії знаходиться 500 в’язнів, кожен з яких засуджений хоча б за однією зі статей №А, №В, №С Карного кодексу. Відомо, що до 127 в’язнів застосовувалась стаття А, до 210 – стаття В, до 269 –стаття С, до 80 – одночасно і стаття А, і стаття В, до 20 – статті А і С, до 45 – статті В і С. Чи є в колонії в’язні, що засуджені за усіма трьома статтями та, якщо є, скільки їх?

13 На бал у Санкт-Петербург приїхала відома модниця княгиня Ростовська. Дізнавшись про це, фрейліни купили собі такі ж підвіски, серги та обручки. Зі 115 фрейлін, присутніх на

балу, 31 була в таких же підвісках, 45 – в сергах, 50 – в обручках. 36 фрейлін одягли підвіски та серги, 23 – підвіски та обручки, 27 – обручки та серги. Наймоднішими виявились 15 фрейлін, що одягли і підвіски, і серги, і обручки, як у княгині. Скільки фрейлін не знало про приїзд княгині Ростовської?

14 17 арабів знайшли чарівну лампу з джином та попросили його виконати їх бажання. 9 арабів захотіли багато золота, 4 – великий та красивий палац, 6 – жіночий гарем. Одночасно золото і палац попросили троє, гарем та золото – десять, палац та гарем – троє арабів. Скільки арабів попросили все одночасно, якщо відомо, що джин для кожного виконав бажання?

15 З 21 дня, що проведено у санаторії, 12 днів я приймав лікувальні процедури, 5 днів їздив на екскурсії. Скільки у мене було вільних днів, якщо 3 дні я сполучав лікувальні процедури та екскурсії?

16 У селі 500 літніх жінок дивляться бразильський серіал. З них 155 турбуються за Марію Антоніо, 108 цікавляться життям Педро, 134 хвилює доля Хосе Ігнасіо, 48 жінок турбуються за відносини Марії Антоніо та Хосе Ігнасіо, 35 – хвилюються за Марію Антоніо та Педро, 17 – підозрюють родинні зв’язки Хосе Ігнасіо і Педро, 23 жінки вірять у щастя всіх головних героїв. Скільки жінок у селі, що дивляться серіал, взагалі за жодного з головних героїв не турбуються і не вірять в їх щастя?

17 В племені Майя 37 індіанців. 12 з них на голові носять червоне пір’я, 14 – синє, 17 –біле, 9 – червоне і синє, 5 – червоне і біле, 3 –синє і біле. Чи є в племені індіанці, що носять пір’я усіх трьох кольорів, і якщо є, то скільки?

18 За результатами опитування студентської групи, з 32 людей 12 регулярно читають журнал «Світ ПК», 10 людей читають журнал «Відкриті системи», 8 людей надають перевагу журналу «Знання-Сила», 3 людини читають і «Світ ПК», і «Відкриті системи», 4 людей читають «Світ ПК» і «Знання-Сила», 5 людей – «Відкриті системи» та «Знання-Сила», а 1 людина читає усі три журнали. Скільки людей читають лише «Світ ПК»?

19 В класі 35 учнів. З них 20 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний, 10 учнів не відвідують жодного з цих

гуртків. Скільки учнів відвідують і математичний, і фізичний гуртки?

20 За результатами опитування студентської групи, з 32 людей 18 регулярно читають журнал «Світ ПК», 19 людей читають журнал «Відкриті системи», 15 людей надають перевагу журналу «Знання-Сила», 8 людей читають і «Світ ПК» і «Відкриті системи», 9 людей читають «Світ ПК», і «Знання-Сила», 7 людей – «Відкриті системи» та «Знання-Сила», а 3 людини читають усі три журнали. Скільки людей не читає жодного з вказаних журналів?

21 Зі 100 студентів англійську мову знають 28 студентів, німецьку – 30, французьку – 42, англійську та німецьку – 8, англійську та французьку – 10, німецьку та французьку – 5, усі три мови знають 3 студенти. Скільки студентів не знають жодної з цих мов?

22 В класі 35 учнів. З них 20 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний, 10 учнів не відвідують жодного з цих гуртків. Скільки учнів відвідують лише фізичний гурток?

23 На заміську прогулянку поїхали 92 людини. Бутерброди з ковбасою взяли 47 людей, з сиром – 38 людей, з шинкою – 31 людина, з сиром та ковбасою – 28 людей, з ковбасою та шинкою – 31 людина, з сиром та шинкою – 26 людей, всі три види бутербродів узяли 25 людей. Деякі люди замість бутербродів захопили з собою пиріжки. Скільки людей узяли з собою пиріжки?

24 В одному з відділів науково-дослідного інституту працюють кілька людей, кожний з яких знає хоча б одну іноземну мову, причому 6 людей знають англійську мову, 6 – німецьку, 7 – французьку, 4 знають англійську та німецьку, 3 – німецьку та французьку, 2 – французьку та англійську, 1 людина знає усі три мови. Скільки співробітників у відділі?

Список літератури

1 Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов [Текст] / Ф.А. Новиков. – СПб.: Питер, 2005. – 364 с.

2 Авсеев, Г.Г. Дискретная математика [Текст] / Г.Г. Авсеев, О.М. Абрамов, Д.Э. Ситников. – Харьков: Торсинг, 2003. – 143 с.

3 Гончарова, Г.А. Элементы дискретной математики [Текст] / Г.А. Гончарова, А.А. Мочалин. – М. :Форум-Инфра-М, 2005. – 127 с.

4 Лекции по дискретной математике [Текст] / Ю.В. Капитонова, С.Л. Кривой, А.А. Летичевский, Г.М. Луцкий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 624 с.

5 Кемени, Дж. Введение в конечную математику [Текст] / Дж. Кемени, Дж Снелл, Дж Томпсон. – М.: Мир, 1963. – 486 с.

6 Трохимчук, Р.М. Основи дискретної математики. Практикум [Текст] / Р.М. Трохимчук. – К.: МАУП, 2004. – 163 с.