

БУДІВЕЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра « Будівельна механіка і гідравліка »

Е.Д. Чихладзе, Ю.В. Глазунов

**БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА
ЗАЛІЗНИЧНОГО РУХОМОГО СКЛАДУ**

Конспект лекцій

Харків - 2013

Чихладзе Е.Д., Глазунов Ю.В. Будівельна механіка залізничного рухомого складу: Конспект лекцій. – Харків, УкрДАЗТ, 2013. – 232 с.

Конспект лекцій з будівельної механіки залізничного рухомого складу рекомендується для студентів спеціальності 7.100501 «Рухомий склад та спеціальна техніка на залізничному транспорті» спеціалізації 7.100501.03 «Виробництво, експлуатація та ремонт вагонів».

Іл. 143, табл. 4, бібліограф. – 16 назв.

Конспект розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри 10 березня 2011 р., протокол № 10.

Рецензент

доц. С.Ю. Берестянська

Е.Д. Чихладзе, Ю.В. Глазунов

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА
ЗАЛІЗНИЧНОГО РУХОМОГО СКЛАДУ

Конспект лекцій

Відповідальний за випуск Глазунов Ю.В.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 14.04.11 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 5,0. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗАЛІЗНИЧНОГО
ТРАНСПОРТУ

БУДІВЕЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра «Будівельна механіка і гідравліка»

Е.Д. Чихладзе, Ю.В. Глазунов

**БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА
ЗАЛІЗНИЧНОГО РУХОМОГО СКЛАДУ**

Конспект лекцій
для студентів спеціальності 7.100501 «Рухомий склад та
спеціальна техніка на залізничному транспорті» спеціалізації
7.100501.03 «Виробництво, експлуатація та ремонт вагонів»

Харків 2013

Чихладзе Е.Д., Глазунов Ю.В. Будівельна механіка залізничного рухомого складу: Конспект лекцій. – Харків, УкрДАЗТ, 2013. – 232 с.

Конспект лекцій з будівельної механіки залізничного рухомого складу рекомендується для студентів спеціальності 7.100501 «Рухомий склад та спеціальна техніка на залізничному транспорті» спеціалізації 7.100501.03 «Виробництво, експлуатація та ремонт вагонів».

Іл. 143, табл. 4, бібліограф. – 16 назв.

Конспект розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри 10 березня 2011 р., протокол № 10.

Рецензент

доц. С.Ю. Берестянська

ЗМІСТ

Передмова	7
Модуль I	
1 Вступ до курсу	9
.....	
1. Предмет курсу «Будівельна механіка». Значення курсу для інженера-механіка	9
.....	
1. Зв'язок курсу будівельної механіки з загальнонауковими, загальноінженерними і спеціальними дисциплінами	11
.....	
1. Коротка історія розвитку курсу будівельної механіки. Досягнення науки щодо міцності, жорсткості та стійкості стержнів	12
.....	
1. Роль вітчизняних вчених у розвитку будівельної механіки	14
.....	
2 Загальні положення	15
.....	
2. Мета і завдання курсу будівельної механіки	15
1	
2. Види споруд і їх особливості. Реальна будівля та її розрахункова схема	16
.....	
2. Класифікація навантажень	20
3	
2. Кінематичний аналіз розрахункових схем	21
4	
2. Поняття ступеня свободи і в'язі. Число ступенів свободи систем, складених з дисків	22
.....	
2. Визначення кількості ступенів свободи для шарнірно-стержневих систем	25
6	
2. Характерні ознаки незмінюваності систем. Способи	

7	конструювання геометрично незмінюваних систем	26
	
2.	Миттєво змінювані системи	29
8	
3	Теорія переміщень	32
	
3.	Загальні положення	32
1	
3.	Дійсна робота зовнішніх сил. Теорема Клапейрона	32
2	
3.	Можлива робота зовнішніх сил	35
3	
3.	Робота зовнішніх сил, виражена через внутрішні сили	38
4	
3.	Теорема Бетті про взаємність можливих робіт	43
5	
3.	Формула Мора для визначення переміщень. Практичні	
6	способи обчислення інтегралів Мора	46
	
3.	Формули Верещагіна, Сімпсона-Корноухова	50
7	
3.	Матрична форма обчислення переміщень	59
8	
3.	Переміщення від дії температури і зсуву опорних чи	
9	інших в'язей	64
	
4	Приклади розв'язання задач	69
	
4.	Задача 1. Розрахунок плоских статично невизначних	
1	рам методом переміщень	69
	
	4.1.1 Основні теоретичні положення	69
	
	4.1.2 Визначення ступеня кінематичної невизначності	
	(кількості невідомих)	69
	

4.1.3 Розрахункова схема рами з елементами, які розтягуються	72
.....	
4.1.4 Основна система	72
.....	
4.1.5 Канонічні рівняння методу переміщень при розрахунку при дії зовнішнього навантаження	74
.....	
4.1.6 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь	75
.....	
4.1.6.1 Загальний спосіб	75
.....	
4.1.6.2 Статичний спосіб	79
.....	
4.1.6.3 Перевірка правильності визначення реактивних зусиль і моментів	84
.....	
4.1.6.4 Розв'язання системи лінійних рівнянь у матричній формі	85
.....	
4.1.7 Побудова епюр M , Q , N у заданій системі	87
.....	
4.1.8 Розрахунок на вплив температури	88
.....	
4.1.9 Розрахунок на зміщення опорних в'язей	91
.....	
4. Розрахунок нерозрізних балок	93
2	
4.2.1 Запис рівняння трьох моментів	94
.....	
4.2.2 Побудова епюр згинальних моментів в однопрогонових балках головної системи від зовнішніх навантажень	95
.....	
4.2.3 Обчислення фіктивних реакцій	98
.....	
4.2.4 Розв'язання системи рівнянь трьох моментів	10
.....	0

4.2.5 Побудова епюр згинальних моментів і поперечних сил у нерозрізній балці	10
.....	1
4.2.6 Добір перерізу балки	10
.....	6
4.2.7 Визначення переміщення в точці прикладення сили F_2 за допомогою методу Максвелла-Мора	10
.....	9
4.2.8 Контроль і розрахунок балки на ПЕОМ	11
.....	1
Модуль II	
5 Методи розрахунку статично невизначних систем	11
...	2
5.1 Метод сил. Визначення ступеня статичної невизначності. Основна система і зайві невідомі	11
...	2
5.2 Система канонічних рівнянь. Контроль обчислення коефіцієнтів і вільних членів систем канонічних рівнянь. Визначення невідомих	11
.....	4
5.3 Побудова епюр внутрішніх сил у заданій статично невизначній системі та їх перевірка	11
.....	8
5.4 Розрахунок систем при дії температури. Розрахунок систем при заданому зміщенні опор	12
.....	4
5.5 Матрична форма розрахунку статично невизначних систем за методом сил. Застосування комп'ютера для даного розрахунку	12
.....	6
5.6 Метод переміщень. Основна система і невідомі. Канонічні рівняння	13
.....	1
5.7 Способи визначення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь. Визначення невідомих	13
.....	5
5.8 Побудова епюр внутрішніх сил у заданій статично невизначній системі. Контроль обчислень. Розрахунок	

при заданому зміщенні опор	15
.....	0
5. Метод скінчених елементів. Основна концепція	
9 методу. Типи скінчених елементів	15
.....	4
5.10 Функції форми і матриця жорсткості елемента.	
Залежності для скінченого елемента при перетворенні	
координат	15
.....	7
6 Особливості розрахунку статично невизначних	
балок і ферм	16
.....	5
6. Розрахунок нерозрізних балок на жорстких опорах.	
1 Рівняння трьох моментів	16
.....	5
6. Особливості розрахунку при дії температури і задані	
2 зміщення опор. Лінії впливу внутрішніх сил у	
нерозрізних балках	17
.....	7
6. Розрахунок статично невизначних ферм при дії	
3 нерухомого навантаження	18
.....	4
6. Особливості вибору основної системи та обчислення	
4 коефіцієнтів канонічних рівнянь	18
.....	8
6. Особливості розрахунку статично невизначних ферм	
5 при дії температури і задане зміщення опор. Матрична	
форма розрахунку	19
.....	6
6. Розрахунок статично невизначних ферм при дії	
6 рухомого навантаження	20
.....	4
6. Побудова ліній впливу зайвих невідомих і внутрішніх	
7 сил у стержнях ферми. Застосування комп'ютера для	
побудови ліній впливу	20
.....	6
7 Приклади розв'язання задач	21

.....	3
7. Розрахунок плоских статично невизначних рам	
1 методом сил	21
.....	3
7.1.1 Визначення ступеня статичної невизначності	21
.....	4
7.1.2 Вибір основної системи	21
.....	4
7.1.3 Система канонічних рівнянь	21
.....	8
7.1.4 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь	21
.....	9
7.1.5 Перевірка правильності обчислення коефіцієнтів і вільних членів	22
.....	0
7.1.6 Розв'язання системи канонічних рівнянь	22
.....	2
7.1.7 Перевірка правильності розв'язання системи канонічних рівнянь	22
.....	3
7.1.8 Побудова епюри M у заданій статично невизначній системі	22
.....	4
7.1.9 Перевірка правильності побудови епюри M	22
.....	4
7.1.10 Побудова епюр Q і M	22
.....	6
7.1.11 Перевірка правильності побудови епюр Q і N	23
.....	1
Список літератури	23
.....	2

ПЕРЕДМОВА

Даний конспект лекцій складається із 7 розділів. У першому розділі «Вступ до курсу» формулюються предмет і завдання курсу; показано зв'язок курсу будівельної механіки з загальнонауковими, загальноінженерними і спеціальними дисциплінами; надано гіпотези будівельної механіки; викладено коротку історію розвитку курсу будівельної механіки; вказано про досягнення науки щодо міцності, жорсткості та стійкості стержнів; про роль вітчизняних вчених у розвитку будівельної механіки; визначено значення курсу «Будівельна механіка» для інженера-механіка.

У другому розділі «Загальні положення» наведено відомості про види споруд та їх особливості; наведено приклад реальної будівлі та її розрахункової схеми; надано класифікацію навантажень; наведено кінематичний аналіз розрахункових схем.

У третьому розділі «Теорія переміщень» наведено відомості про дійсну і можливу роботу зовнішніх сил; роботу зовнішніх сил, виражену через внутрішні сили; сформульовано теорему Бетті про взаємність можливих робіт.

У четвертому розділі «Методи розрахунку статично невизначних систем» сформульовано метод сил, визначення ступеня статичної невизначності, основну систему і зайві невідомі; систему канонічних рівнянь, контроль обчислення коефіцієнтів і вільних членів систем канонічних рівнянь, визначення невідомих; наведено приклад побудови епюр внутрішніх сил у заданій статично невизначній системі та їх перевірки; розрахунок систем на дію температури та задане зміщення опор; наведено відомості про матричну форму розрахунку статично невизначних систем за методом сил, застосування комп'ютера для цього розрахунку.

У п'ятому розділі «Особливості розрахунку статично невизначних балок і ферм» наведено приклад розрахунку нерозрізних балок на жорстких опорах; подано рівняння трьох

моментів; показано особливості розрахунку на дію температури і задані зміщення опор, лінії впливу внутрішніх сил у нерозрізних балках; надано розрахунок статично невизначених ферм на дію нерухомого навантаження; наведено відомості про особливості вибору основної системи та обчислення коефіцієнтів канонічних рівнянь, особливості розрахунку статично невизначених ферм на дію температури і задані зміщення опор; наведено матричну форму розрахунку; показано розрахунок статично невизначених ферм на дію рухомого навантаження; наведено приклад побудови ліній впливу зайвих невідомих і внутрішніх сил у стержнях ферми; вказано про застосування комп'ютера.

У шостому розділі «Методи розрахунку статично невизначених систем» наведено метод переміщень; показана основна система і невідомі; надано роз'яснення канонічних рівнянь; способи визначення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь. Надано приклад побудови епюр внутрішніх сил у заданій статично невизначеній системі; показано контроль обчислень; розрахунок на задані зміщення опор.

У сьомому розділі «Методи розрахунку статично невизначених систем» (продовження) надано розрахунок нерозрізних балок на жорстких опорах; розв'язання рівняння трьох моментів. Визначено особливості розрахунку при дії температури і заданому зміщенні опор. Показано лінії впливу внутрішніх сил у нерозрізних балках. Наведено розрахунок статично невизначених ферм при дії нерухомого навантаження.

МОДУЛЬ I

1 Вступ до курсу

1.1 Предмет курсу “Будівельна механіка”. Значення курсу для інженера-механіка

Будівельна механіка – наука, що вивчає методи розрахунку і займається розробленням принципів розрахунків споруд на міцність, жорсткість і стійкість при різних діях зовнішнього навантаження. Якщо об’єктом вивчення в опорі матеріалів були переважно окремі елементи споруди, то об’єктом вивчення в будівельній механіці, як правило, буде ціла споруда, складена з цих елементів.

Цим визначено принципове розходження між будівельною механікою й опором матеріалів. Проте чітке розмежування обох наук ускладнено, оскільки багато граничних питань можуть бути віднесені до будь-якої з них.

Міцність, стійкість і жорсткість споруди залежать як від матеріалу, розмірів і форми її елементів, так і від внутрішніх сил, що виникають і розвиваються в споруді при дії на неї зовнішнього навантаження або інших факторів. Тобто розміри міцних і стійких елементів споруди з даного матеріалу та їх форма залежать від величини внутрішніх сил у цих елементах. У результаті дії цих сил визначаються деформації елементів і всієї споруди в цілому.

Отже, *основне завдання будівельної механіки* пролягає в розробленні методів визначення внутрішніх сил і їх переміщень при розрахунку споруд. Будівельна механіка вивчає методи розрахунку споруд як систем, які складаються з ряду з’єднаних між собою стержнів, пластин і оболонок під дією зовнішніх навантажень при деяких допущеннях.

При визначенні внутрішніх сил треба мати на увазі, що будь-яка споруда під навантаженням змінює свою форму – деформується. З огляду на порівняно малі зміни форми споруди при її деформації, для спрощення розрахунку внутрішні сили звичайно визначають приблизно за початковим, недеформованим станом споруди.

У багатьох випадках (але не завжди) точність визначення внутрішніх сил практично прийнятна. Але не завжди точність визначення внутрішніх сил за недеформованим станом достатня. Про це необхідно пам'ятати, особливо при розрахунках, коли деформація споруди може бути значною.

Ми будемо розглядати як аналітичні методи розв'язання задач будівельної механіки (розв'язання за допомогою формул), так і чисельні методи, тобто розв'язання з використанням електронно-обчислювальних машин, коли точна задача замінюється наближеною або розв'язується наближеними методами.

Сучасний інженер-механік при проектуванні використовує в основному різні готові прикладні програми, за допомогою яких можна розрахувати будь-які параметри конструкції, підібрати її оптимальний варіант, можна побачити її на екрані під будь-яким кутом. Тобто якщо уміти користуватися програмою, можна позбавитися необхідності рутинних ручних розрахунків.

Однак для цього потрібно знати, за якими параметрами необхідно оптимізувати споруду, за якою ознакою підбирати розмір перерізу, яким умовам повинні задовольняти той або інший елемент чи конструкція в цілому та як перевірити виконання цих умов. Для того щоб використати програму, необхідно уміти обрати прийнятну розрахункову схему і знати, який метод для розв'язання даної задачі можна застосувати.

Тому необхідно знати основні положення і розрахункові методи будівельної механіки. Курс будівельної механіки зі спеціальності “Вагони” включає такі теми:

- теорія переміщень;
- способи розрахунку статично невизначних систем методом сил, переміщень і змішаним методом;
- особливості розрахунку статично невизначних балок і ферм.

Положення, розроблені будівельною механікою, дають можливість інженеру-проектувальнику визначати діючі в елементах спорудження внутрішні зусилля. Розрахунок надає можливість розглянути дію статичних і динамічних сил на будь-який елемент і визначити ті напруження, які виникають у матеріалі або в деяких вузлах елементів від різних поєднань можливих навантажень.

1.2 Зв'язок курсу будівельної механіки з загальнонауковими, загальноінженерними і спеціальними дисциплінами

Відповідно до мети курсу будівельна механіка тісно пов'язана з цілим комплексом наук: *опором матеріалів, теорією пружності, теорією пластичності*. У будівельній механіці розглядаються ті самі питання, що і в опорі матеріалів, але відносно споруди в цілому, а не її окремих елементів.

У *теорії пружності і теорії пластичності* ставиться завдання визначення напружено-деформованого стану більш точними методами, ніж у будівельній механіці й опорі матеріалів.

Будівельна механіка вивчає методи розрахунку споруд як систем, що складаються з ряду з'єднаних між собою стержнів, пластин та оболонок під дією зовнішніх навантажень при деяких допущеннях. *Будівельна механіка* займається розробленням методів визначення внутрішніх зусиль і деформацій, вивченням умов стійкості. Отже, звичайно, *будівельна механіка* базується на положеннях, встановлених *теоретичною механікою і опором матеріалів*.

Якщо *теоретична механіка* вивчає рух і рівновагу абсолютно твердих тіл, то *будівельна механіка* враховує реальні властивості матеріалів споруд, використовуючи при цьому дані опору матеріалів. Однак, на відміну від опору матеріалів, об'єктом вивчення якого є окремий елемент і міцність матеріалу, *будівельна механіка* займається переважно розрахунком системи брусків або стержнів, з яких складається споруда.

Завданням будівельної механіки, крім розроблення методів розрахунку споруд, є створення нових, ефективних, найбільш економічних і раціональних схем таких споруд. У будівельній механіці використовуються порівняно прості математичні

методи, доступні для звичайних інженерних розрахунків (менш важливі фактори в розрахунках не враховуються). Уводяться спрощені гіпотези при формулюванні основних передумов розрахунку, про які йтиметься далі.

Тільки якщо спиратися на точний розрахунок, а отже, на закони і положення будівельної механіки, можна будувати швидко, дешево і міцно. Завдяки точним розрахункам можна створити найбільш економічну конструкцію, зробити її якнайлегшою, надати можливість звести споруду в короткий строк.

У будівельній механіці для розв'язання задач застосовується математичний метод, тобто наявним є близький зв'язок механіки з математикою. Деякі математичні методи зароджувалися та одержували розвиток саме в тісному зв'язку з проблемами механіки.

Оскільки завданням будівельної механіки є вивчення способів розрахунку споруд на міцність, стійкість і жорсткість і ми враховуємо реальні фізичні тіла, з яких складаються конструкції, необхідно враховувати їх фізичні властивості. Це твердження вказує на зв'язок будівельної механіки з *фізикою, опором матеріалів, будівельними матеріалами*.

1.3 Коротка історія розвитку курсу будівельної механіки. Досягнення науки щодо міцності, жорсткості та стійкості стержнів

Початковий період історії будівельної механіки тісно пов'язаний з історією механіки взагалі. Досвід, накопичений у практиці будівництва греками та римлянами, був значно утрачений у середні віки, і тільки в епоху Відродження ця майстерність досягла колишнього рівня. В епоху Відродження були зроблені перші спроби усвідомити роботу спорудження (Леонардо да Вінчі, 1452-1519 рр.).

Перші спроби установити безпечні розміри елементів споруд аналітичним методом належать до XVII ст. і пов'язані з ім'ям Г. Галілея (1564-1642 рр.). Г. Галілей першим в історії людства розглянув питання про міцність і першим намагався його вирішити; він вивчав стан тіл у момент їх зруйнування без

урахування шляхів та етапів, через які тіло проходить у такій ситуації.

Розвитку будівельної механіки та її відокремленню в самостійну науку сприяли Р. Гук, Я. Бернуллі, Ф. Маріотт, Ш. Кулон.

Будівельна механіка XVIII ст. з її методами пошуків граничного стану не мала можливості відповісти на таке питання: як же працює балка під тим навантаженням, для дії якого вона була створена? Намагання Фур'є розрахувати статично невизначну балку на трьох опорах Сен-Венан називає останньою спробою розрахунку конструкції без урахування її пружних властивостей.

Практична діяльність випереджає розвиток будівельної механіки, і поступово визріває необхідність ламання сформованої методики розрахунку споруд з граничного стану. Розпочав займатися цим питанням І.П. Кулібін (1735-1818 рр.), а завершив Нав'є, який досліджував роботу споруджень під навантаженням з розрахунком в експлуатаційній стадії.

При формуванні будівельної механіки як самостійної науки досліди Нав'є (1826 р.) сприяли переходу на розрахунок за допустимими напруженнями. Недоліком цього розрахунку є те, що неможливо достатньо точно встановити величину запасу міцності з причини, що недостатньо приділялося уваги граничному стану споруд, як зазначав І.П. Кулібін.

Тільки при поєднаному врахуванні поводження споруди в робочому і граничному станах можна дати відповідь на питання про величину дійсного запасу міцності з забезпеченням при цьому найбільшої економічності та недопущенням втрати міцності та довговічності.

Великий внесок у розвиток будівельної механіки зробили російські вчені. Ще у XVIII ст. геніальний російський інженер І.П. Кулібін першим у світі запропонував розкісну систему в проекті одноаркового моста через річку Неву (1773 р.). Особиста заслуга Кулібіна полягає в тому, що він, створюючи конструкцію моста, розробив методи і прилади для експериментального дослідження мостової споруди, а також теорію випробування моста на моделі та першим застосував властивості вірьовочного багатокутника для розрахунку статично визначних систем.

У 40-50-х рр. ХІХ ст. наш співвітчизник, талановитий інженер Д.І. Журавський першим розробив теорію розрахунку мостових ферм. Він установив та обґрунтував закон зміни зусиль у стержнях ферми, вперше розрахував ферму як шарнірно-стержневу систему, всебічно висвітлив невідоме до того часу явище сколювання при згині, вивів формулу для визначення дотичного напруження в брусі прямокутного перерізу та розробив метод розрахунку складених з брусків балок.

Подальшому розвитку теорії розрахунку ферм сприяв своїми роботами в галузі мостобудування М.О. Белелюбський (1845-1922 рр.). У 1885 р. він склав перший повний курс будівельної механіки в Росії та створив першу лабораторію випробування будівельних матеріалів.

У розвитку теорії розрахунку ферм велику роль відіграв Л.Д. Проскураков (1858-1926 рр.). У своїй роботі “До розрахунку крізних ферм” він визначив методи проектування статично визначних ферм з трикутною решіткою. Л.Д. Проскураков широко впровадив у практику розрахунку графоаналітичні методи і тому його цілком заслужено називають основоположником графоаналітичного методу в будівельній механіці.

Із закордонних вчених того часу, які сприяли прогресу будівельної механіки, слід назвати Клапейрона, Максвелла, Мора, Кастильяно, Бетті та інших.

1.4 Роль вітчизняних вчених у розвитку будівельної механіки

Значний внесок у розвиток теорії розрахунку споруд зробили радянські вчені. Всьому світу відомі праці А.Н. Крилова стосовно будівельної механіки корабля; роботи М.С. Стрелецького в галузі будівельної механіки мостових конструкцій, теорії надійності, а також з розрахунку складних статично невизначних систем.

Великий внесок у розвиток галузі будівельної механіки зробили такі вчені: П.Л. Пастернак (методика розрахунку статично невизначних систем); І.М. Рабинович (дослідження й узагальнення розробок стосовно статички та динаміки споруд); В.З. Власов (дослідження з питань теорії тонкостінних стержнів і оболонок); А.А. Гвоздєв (розрахунок статично невизначних

систем і теорія розрахунку споруд з граничного стану); А.Ф. Смирнов (застосування матричної форми розрахунку і використання обчислювальної техніки).

Великий внесок у розвиток будівельної механіки зробили Б.Н. Жемочкін, Н.І. Безухов, А.Р. Ржаницин та інші.

Необхідно відмітити також плідну роботу А.Н. Динника стосовно динаміки та стійкості споруд; праці Б.Н. Горбунова щодо розрахунку споруд з урахуванням пластичних деформацій, розрахунку просторових систем, рамних конструкцій і тонкостінних стержнів.

Основні роботи Н.В. Корноухова присвячені питанням стійкості конструкцій у границях і за межами пружності, розробленню інженерних методів розрахунку конструктивних елементів. Також він розробив загальну теорію об'єднаного розрахунку стержневих систем на міцність і стійкість відносно деформованої схеми.

Д.В. Вайнберг, використовуючи методи функцій комплексної змінної, розробив точні та приблизні методи розв'язання ряду важливих технічних задач стосовно складних пластин, дисків.

Широке теоретичне трактування на підставі вивчення фізичної сутності явищ, прагнення до аналізу, глибина висвітлення досліджень є характерними не тільки для наукової, але й для навчальної літератури з будівельної механіки.

Так, підручник Е.Д. Чихладзе "Будівельна механіка", на основі якого підготовлено даний конспект лекцій, відповідає програмі курсів для транспортних ВНЗ, відрізняється більш поглибленим розглядом методів розрахунку стержневих систем і поширенням цих методів на системи нестержневі (континуальні). Підручник містить велику кількість докладних прикладів розрахунку, що сприяють кращому засвоєнню навчального матеріалу і застосуванню його в практичній діяльності.

2 Загальні положення

2.1 Мета і завдання курсу будівельної механіки

Як було зазначено вище, *будівельна механіка* – наука, що займається розробленням принципів і методів розрахунку споруд на міцність, жорсткість і стійкість. Якщо об'єктом вивчення в опорі матеріалів були переважно окремі елементи споруди, то об'єктом вивчення в будівельній механіці, як правило, буде ціла споруда, із них складена. Таким є принципове розходження між будівельною механікою й опором матеріалів. Проте суворе розмежування обох наук ускладнено, оскільки багато граничних питань можуть бути віднесені до будь-якої з них.

Міцність, стійкість і жорсткість споруди залежать як від матеріалу, розмірів і форми її елементів, так і від внутрішніх сил, що виникають і розвиваються в споруді при дії на неї навантаження або інших факторів. Можна сказати так, що розміри міцних і стійких елементів споруди з даного матеріалу і форми визначаються величинами внутрішніх сил у цих елементах. Також внутрішніми силами визначаються деформації елементів і всієї споруди в цілому.

Із сказаного випливає: *основна задача будівельної механіки* полягає в розробленні методів визначення внутрішніх сил у спорудах і їх переміщень.

При визначенні внутрішніх сил треба мати на увазі, що будь-яка споруда під навантаженням змінює свою форму – деформується. Відповідно до вимог внутрішні сили варто було б визначати у споруді, що знаходиться в деформованому стані з урахуванням поведінки навантаження під час деформації споруди. Проте це викликає великі труднощі, оскільки внутрішні сили споруди в деформованому стані і його деформації взаємозалежні.

Навіть якщо матеріал споруди діє за законом Гука, то, як правило, лінійної залежності між переміщеннями і навантаженнями не буде. Ще більше ускладнюється задача у випадках, коли матеріал споруди не діє за законом Гука або працює за його межею. З огляду на порівняно малі зміни форми споруди при її деформації, для спрощення розрахунку внутрішні сили звичайно визначають приблизно за початковим, недеформованим станом споруди.

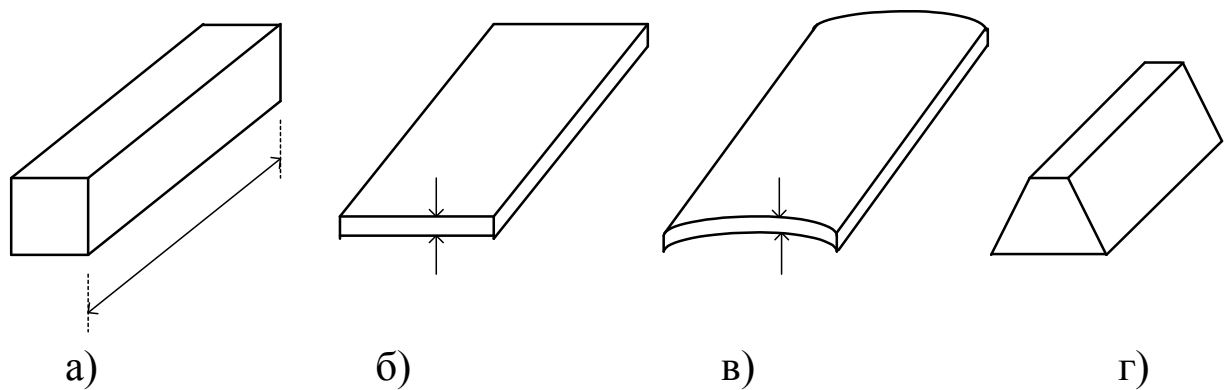
У багатьох випадках (але не завжди) точність визначення внутрішніх сил практично прийнятна. Про те, що не завжди точність визначення внутрішніх сил за недеформованим станом є

достатньою, необхідно пам'ятати, особливо при розрахунках, коли деформація споруди може бути значною.

2.2 Види споруд та їх особливості. Реальна будівля і її розрахункова схема

Залежно від конструктивних рішень споруд доцільно виділити ту систему елементів, яка в основному сприймає діюче навантаження. Розрізняють такі характерні **типи систем** (рисунок 2.1):

- стержневі системи;
- системи, складені з елементів, у яких розміри по двох напрямках (довжина і ширина) значно перевершують розмір по третьому напрямку (як відомо, до цих елементів належать пластини, плити, оболонки);
- системи, у яких три розміри того самого порядку (масиви, суцільні середовища, тіла);
- висячі системи.



а) стержень; б) пластина; в) оболонка; г) тіло

Рисунок 2.1 – Схеми систем елементів

Стержневі системи поділяються на **плоскі** і **просторові**. Наприклад, до плоских стержневих систем належать **ферми** (рисунок 2.2, а), **рами** (рисунок 2.2, б), **арки** (рисунок 2.2, в).

Наведемо приклад споруд другого типу. Це пластинчасті системи: несучі конструкції багатопверхових будинків, складені

з плоских панелей, і несучі просторові конструкції у вигляді оболонки.

На рисунку 2.3 показано, наприклад, склепіння-оболонку, складену з плоских панелей.

До масивних систем, у яких всі три розміри мають один порядок, належать гідротехнічні споруди, наприклад греблі (рисунок 2.4).

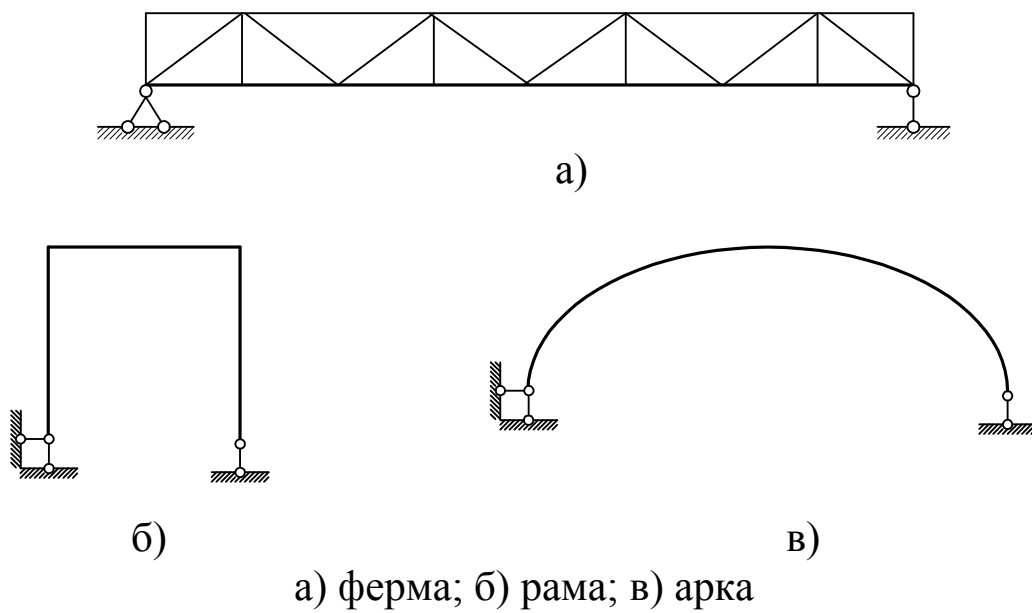


Рисунок 2.2 – Схеми споруд, складені з плоских стержневих систем

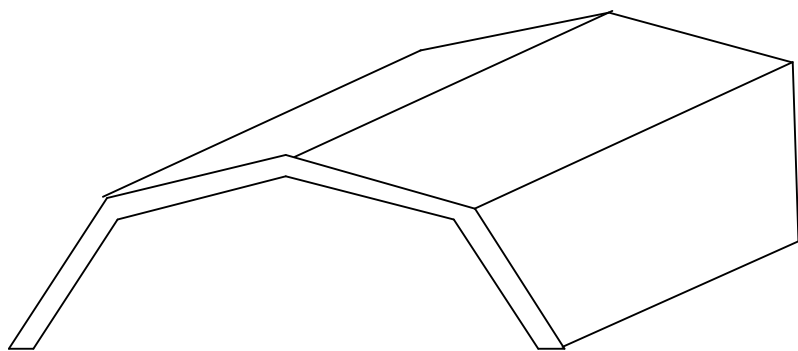


Рисунок 2.3 – Схема склепіння-оболонки

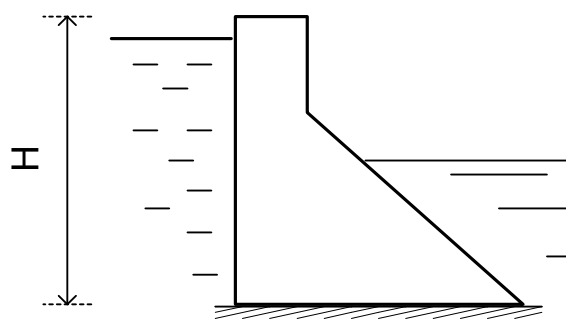


Рисунок 2.4 – Поперечний переріз бетонної греблі

До особливого типу споруд належать висячі системи, за допомогою яких можна перекривати значні прогони (рисунок 2.5).

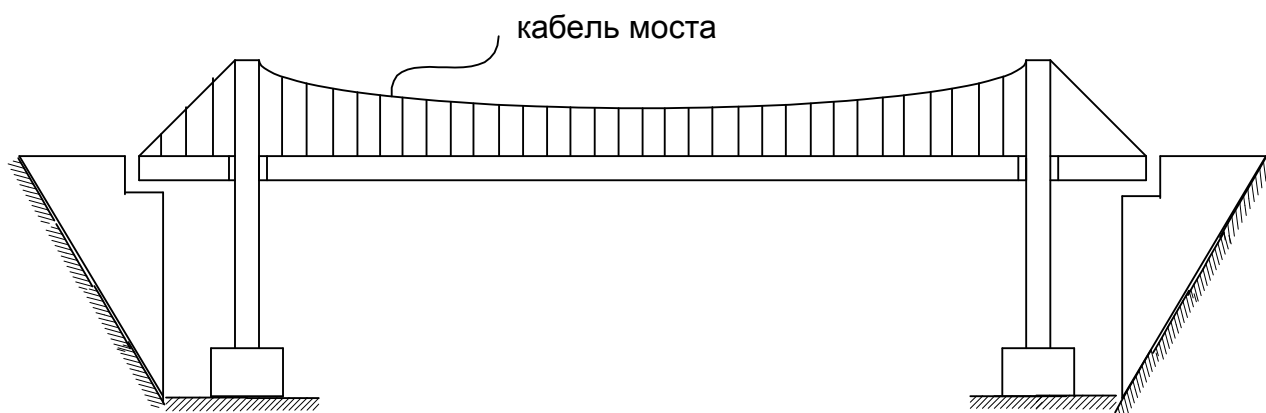


Рисунок 2.5 – Схема висячого моста

У будівельній механіці розглядаються методи визначення зусиль у системах всіх перерахованих типів, проте головна увага приділяється не особливостям розрахунку окремих споруд, а загальним методам аналізу напружено-деформованого стану і принципам, на яких засновані ці методи.

При вивченні курсу опору матеріалів було вказано, як складається розрахункова схема для простих споруд. При графічному зображенні розрахункової схеми кожний стержень зображується однією лінією – віссю стержня. Такий же прийом будемо застосовувати в будівельній механіці.

У будівельній механіці велика увага приділяється аналізу з'єднань елементів. Вузли рам можуть бути трьох типів:

- **жорсткі**, у яких збіжні елементи жорстко з'єднані один з одним – при деформації системи відсутні взаємні повороти перерізів елементів, що примикають;

- *шарнірні*, у яких всі елементи або частина елементів вільно повертаються один відносно одного;

- вузли з *пружно-податливими з'єднаннями* елементів.

Найчастіше зустрічаються споруди, для яких розрахункова схема приймається такою, що складається зі стержнів і пластин. При складанні розрахункових схем доводиться в першу чергу робити схематизацію геометричних форм споруд. Поряд із цим необхідно враховувати властивості матеріалу, із якого передбачається виготовляти їх елементи. У курсі опору матеріалів головна увага приділялася роботі стержнів у межах лінійно-пружних деформацій. І в будівельній механіці значне місце буде відведено цьому виду деформування матеріалу.

При урахуванні нелінійної діаграми деформування матеріалу задача розрахунку споруди належить до розряду так званих фізично нелінійних задач. Звичайно це ускладнює розрахунок і призводить до необхідності приймати якийсь із методів послідовних наближень.

Вибір розрахункової схеми пов'язаний також із діючим на споруду навантаженням.

Таким чином, під *розрахунковою схемою* слід розуміти геометричну схему споруди з діючим навантаженням і даними, що характеризують фізико-механічні властивості матеріалу.

При розрахунку споруд доводиться визначати переміщення окремих точок. У більшості випадків ці переміщення малі порівняно з розмірами споруди або її елементів. Проте зустрічаються задачі, у яких доводиться враховувати зміну геометрії споруди внаслідок можливих переміщень. Такі задачі в багатьох випадках призводять до нелінійних рівнянь і називаються *геометрично нелійними*. Їхні розв'язання звичайно проводяться так само, як і фізично нелінійних задач – методами *послідовних наближень*.

Як приклад можна вказати на розрахунок висячих мостів великих прогонів (рисунок 2.5). Зміна обрису кабелю моста хоча і не дуже велика, але вона істотно позначається на розподілі навантаження, що передається з кабелю на балку. Згинальні моменти в балці істотно змінюються. Таким чином, сама розрахункова схема в процесі завантаження змінюється, ніби

деформується, і тому розрахунок проводиться за деформованою схемою.

2.3 Класифікація навантажень

У курсі опору матеріалів ми ознайомилися з різноманітними видами навантажень, як-от зосереджені сили і розподілені навантаження, а також із тимчасовими, постійними, статичними і динамічними впливами. Нагадаємо про ці види навантажень.

Постійне навантаження діє безупинно протягом усього терміну служби споруди; до нього належить, наприклад вага споруд. **Тимчасове навантаження** має обмежену тривалість, наприклад вага снігу на покрівлі, дія вітру на стіни, навантаження на міст від потяга, що рухається, і т. п.

Статичні навантаження змінюються в часі настільки повільно, що прискореннями елементів конструкції при переміщеннях можна знехтувати. Інакше кажучи, при цьому не враховуються сили інерції, пов'язані з переміщеннями точок системи.

Динамічні навантаження, на відміну від статичних, змінюють свою величину і положення в порівняно короткі проміжки часу. При дії динамічних навантажень доводиться враховувати сили інерції як самої системи, так і розташованого на ній устаткування.

Крім зовнішніх сил, істотний вплив на споруду має, наприклад, температура, осідання фундаменту, землетрус, дія вогню, хімічна агресія, корозія і т. п. При зміні температури виникають деформації елементів споруди, що за певних умов викликають внутрішні сили і напруження.

Для ряду споруд проводяться розрахунки на дію вогню. При горінні будівлі від дії високої температури різко змінюються механічні характеристики матеріалу, із якого виготовлені її елементи. Разом із цим змінюється й опірність конструкції діючому навантаженню, що часто призводить до завалення конструкції.

Важко передбачити поведінку споруди під час землетрусу. При русі основи споруда відчуває змушені коливання, унаслідок чого виникають динамічні напруження. При цьому

конструкція отримує великі прискорення, виникають значні сили інерції і великі деформації, що часто призводять до руйнації.

Визначення навантажень є одним із питань аналізу взаємодії між спорудами і зовнішнім середовищем. Правильне розв'язання цієї задачі дозволяє створювати надійні й економічні споруди.

2.4 Кінематичний аналіз розрахункових схем

Реальні споруди повинні бути *незмінюваними системами*, спроможними сприймати навантаження без помітної зміни геометрії. *Геометрично незмінюваною* називається така система, у якій зміна форми обумовлюється лише деформацією матеріалу.

Перш ніж виконати детальний розрахунок системи, потрібно проаналізувати її структуру або, як ще говорять, дослідити утворення системи, тобто встановити, чи є вона *геометрично незмінюваною*. Крім того, необхідно знати, чи можливий розрахунок системи за допомогою тільки рівнянь рівноваги, а саме – чи є система *статично визначною* або ж вона – *статично невизначна*.

Розрахункові схеми багатьох споруд мають вигляд кінематичних ланцюгів, складених з окремих частин-дисків. *Диск* – частина стержневої системи, незмінюваність якої доведена.

2.5 Поняття ступеня свободи і в'язі. Число ступенів свободи систем, складених з дисків

Ступенем свободи якого-небудь тіла і системи тіл називається кількість геометричних параметрів, що незалежно один від одного можуть змінюватися під час руху системи (тіла) і визначають її положення.

Плоска фігура (рисунок 2.6, а) має у своїй площині три ступені свободи. Положення її на площині визначається трьома незалежними змінними:

- двома координатами x і y якої-небудь точки A ;
- кутом нахилу φ якої-небудь прямої AB .

Циліндричний шарнір із нерухомою геометричною віссю (рисунок 2.6, б), навколо якої фігура може обертатися, еквівалентний двом в'язям. Дійсно, точка А втрачає два ступені свободи і єдиним незалежним параметром руху залишається кут φ .

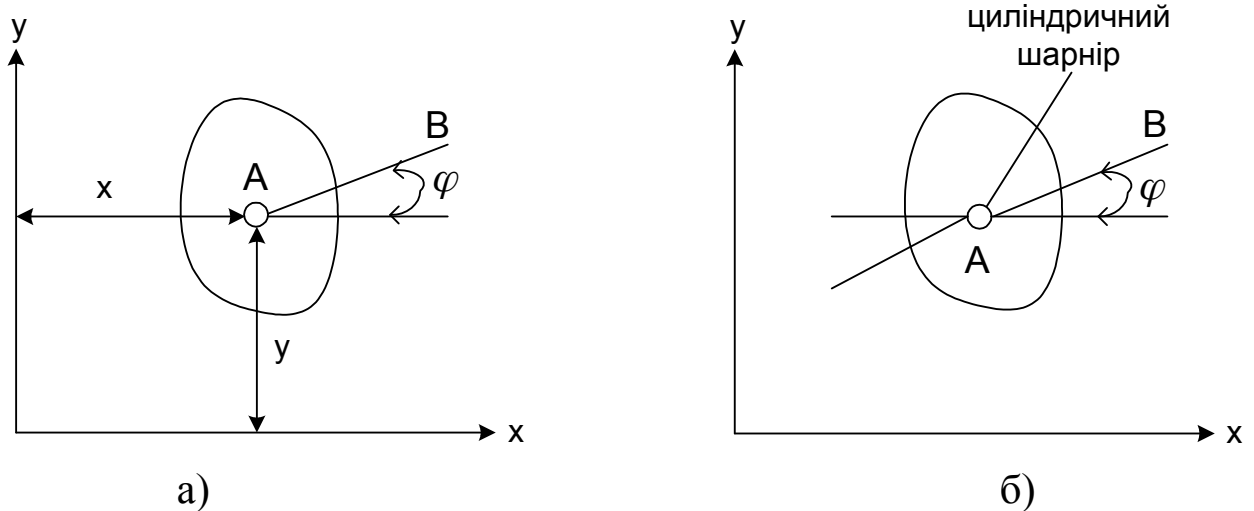


Рисунок 2.6 – Положення плоскої фігури на площині
 Можуть зустрітися іноді такі ланцюги, у яких декілька шарнірів насаджено на одну вісь. Такий шарнір слід розглядати як декілька шарнірів, тому що він стискає взаємний рух декількох дисків. Ми будемо називати його **кратним шарніром**. Так, наприклад, шарнір, що з'єднує між собою три стержні (диски), слід розглядати як здвоєний шарнір (рисунок 2.7).

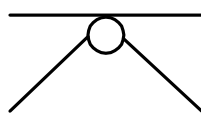


Рисунок 2.7 – Схема здвоєного шарніра

Взагалі шарнір, що з'єднує n дисків, дорівнює $(n - 1)$ простих шарнірів. У зв'язку з тим що диск, нічим не стиснутий у своєму русі, має в площині три **ступені свободи**, то загальна кількість ступенів свободи при ігноруванні зв'язків склала **3D**. Кожний шарнір еквівалентний двом в'язям, а опорний стержень – одній в'язі. На підставі сказаного **ступінь свободи** аналізованого типу споруди можна визначити таким чином:

$$W = 3D - 2Ш - C_0, \quad (2.1)$$

- при $W > 0$ система має рухомість;
- при $W = 0$ кількість в'язей складає необхідний мінімум;
- при $W < 0$ кількість в'язей перевищує мінімум (система рухома).

З формули (2.1) одержимо умову *геометричної незмінюваності і нерухомості* при мінімальній кількості в'язей:

$$3D = 2Ш + C_0. \quad (2.2)$$

Кількість зайвих в'язей ($W < 0$) знайдемо таким чином:

$$Л = C_0 + 2Ш - 3D. \quad (2.3)$$

Визначимо за формулою (2.3) кількість зайвих в'язей, що має замкнутий контур у рамі, показаній на рисунку 2.8, а.

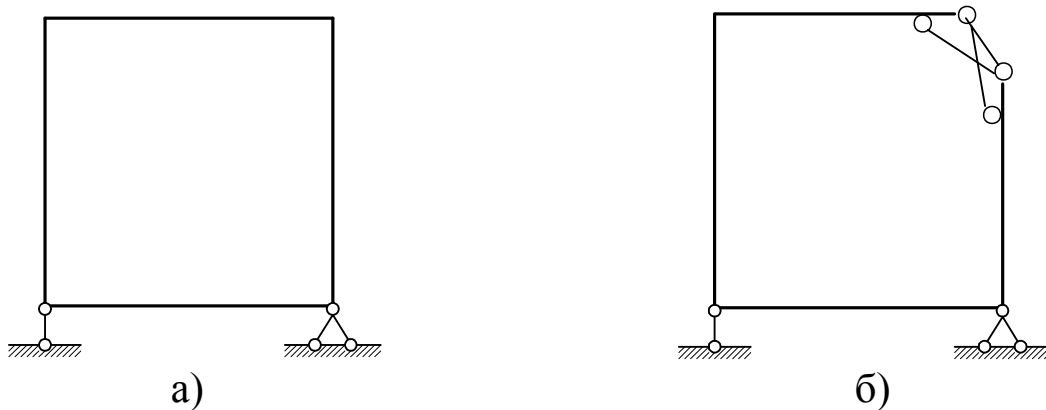


Рисунок 2.8 – Схема рами, що має замкнутий контур

Замкнутий контур можна розглядати як диск із трьома з'єднаними стержнями (дисками) (рисунок 2.8, б). Тут $C_0 = 3$; $Ш = 6$; $D = 4$. Тоді

$$Л = 3 + 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 3.$$

Це означає, що замкнутий безшарнірний контур у рамі має три зайві в'язі.

Для рам, що мають декілька замкнутих контурів (рисунок 2.9), кількість зайвих в'язей може бути визначена за такою простою формулою:

$$L = 3K - Ш, \quad (2.4)$$

де **Ш** – кількість всіх простих шарнірів, включаючи й опорні (при цьому землю треба включати до складу дисків системи).

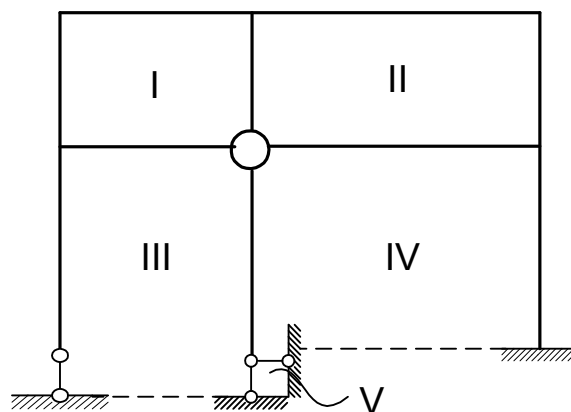


Рисунок 2.9 – До визначення кількості зайвих в'язей у рамах, що мають замкнуті контури

Рама, подана на рисунку 2.9, має **5** замкнутих контурів і **9** простих шарнірів. Відповідно до формули (2.4) кількість зайвих в'язей у ній дорівнює **6**. Для просторових рам ступінь статичної невизначеності можна знайти за формулою

$$L = 6K - 3Ш. \quad (2.5)$$

2.6 Визначення кількості ступенів свободи для шарнірно-стержневих систем

Розглянемо такі системи, у яких стержні (диски) шарнірно з'єднані між собою, причому кожний диск містить два шарніри простих або кратних. **Ступінь свободи** таких систем можна визначати за формулами, що наведені вище (2.1); (2.4), але для них можна вивести й інші формули.

Прийmemo центри шарнірів за окремі точки, що можуть переміщатися в просторі. Кількість таких точок або вузлів позначимо через **У**, кількість дисків або стержнів через **С**,

кількість опорних стержнів – C_0 . Якби вузли не були взаємно з'єднані за допомогою стержнів, то кожний із них мав би:

- у площині два ступені свободи і сумарний ступінь свободи, що дорівнює $2Y$;
- у просторі – $3Y$.

Кожний стержень, що з'єднує дві точки **A** і **B** (рисунок 2.10), виявляється еквівалентним одному зв'язку. На координати цих точок покладається єдина умова – зберігання постійної відстані між ними. Повна кількість в'язей складає $C + C_0$, де C_0 – кількість опорних в'язей.

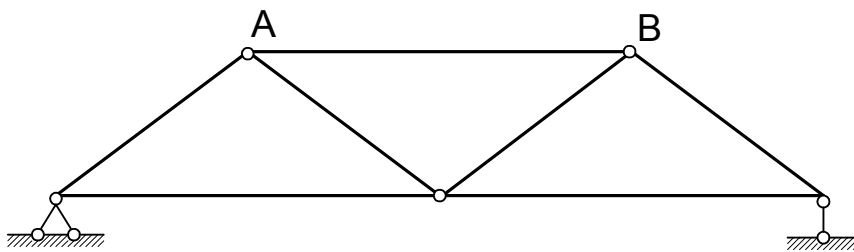


Рисунок 2.10 – До визначення кількості ступенів свободи у фермах

Отже, кількість ступенів свободи шарнірно-стержневої плоскої системи дорівнює

$$W = 2Y - C - C_0. \quad (2.6)$$

У фермі, поданій на рисунку 2.10, $Y = 5$, $C = 7$, $C_0 = 3$ і $W = 0$, тобто конструкція має необхідний мінімум в'язей.

Для просторової ферми

$$W = 3Y - C - C_0. \quad (2.7)$$

2.7 Характерні ознаки незмінюваності систем. Способи конструювання геометрично незмінних систем

Наведемо приклади визначення кількості *ступенів свободи* і наступного аналізу *геометричної структури* споруд. На рисунку 2.11 показана багатопрогонова балка.

Для показаної на рисунку 2.11 розрахункової схеми $D = 5$, $Ш = 4$, $C_0 = 7$, $W = 0$. Система має необхідний мінімум в'язей. Вона статично визначна. Доведемо, що ця балка є геометрично незмінюваною. Для аналізу геометричної структури складемо схему взаємодії (поверхову схему).

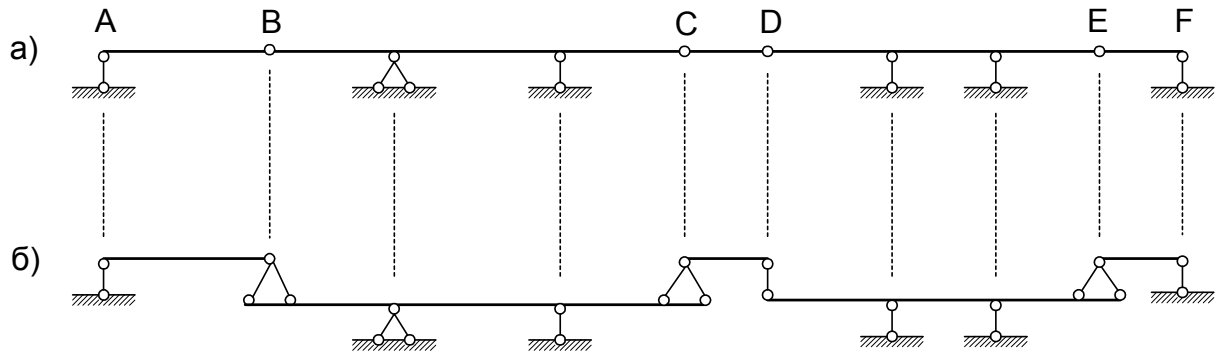
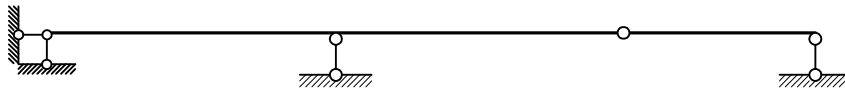


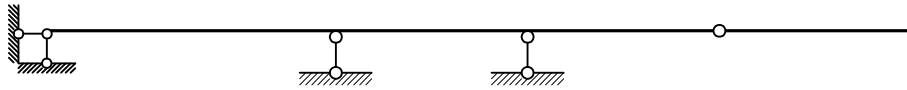
Рисунок 2.11 – Схема багатопрогонової статично визначної балки (а) і схема взаємодії (поверхова схема) її дисків (б)

Диски **BC** і **DE** є головними, вони нерухомо з'єднані з основою наземними опорами. Диски **AB** і **EF** з одного боку спираються на опори **A** і **F**, а з іншого боку – на диски **BC** і **DE**. Диск **CD** не має в'язі з наземними опорами, які по обидва боки спираються на диски **BC** і **DE**. Горизонтальна нерухомість всіх дисків багатопрогонової балки забезпечується однією нерухомою опорою частини (диска) **BC**.

Підрахунок кількості стержнів, дисків, шарнірів є, як бачимо, операцією дуже важливою, особливо в тих випадках, коли досліджувана система більш-менш складна. Проте ці дії недостатні: необхідно виконати аналіз геометричної структури. На підтвердження цього розглянемо ще дві балки, зображені на рисунку 2.12.



a)



б)

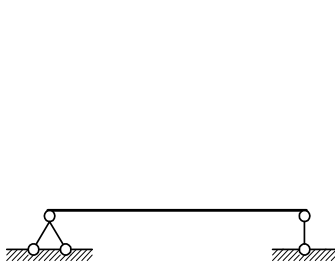
Рисунок 2.12 – До аналізу геометричної незмінюваності споруди

Перша система (рисунок 2.12, а) дійсно *геометрично незмінювана і нерухома*, а друга (рисунок 2.12, б) – має в лівій частині зайвий опорний стержень, а в правій – один ступінь свободи, хоча обидві балки мають однакову кількість стержнів, шарнірів, дисків.

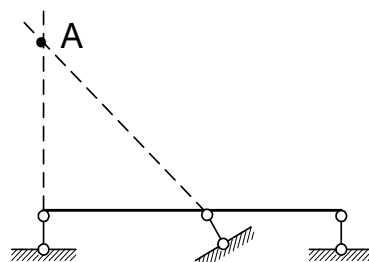
На рисунку 2.13 зображені різноманітні системи, прикріплені до землі за допомогою трьох стержнів.

Системи (рисунок 2.13, в, д) є *змінюваними*, бо стержні, що прикріплюють, перетинаються в одній точці, щодо якої можливий малий поворот. Рама (рисунок 2.13, г) є також *змінюваною*, бо стержні, що прикріплюють, паралельні між собою. Інші системи *незмінювані*. Для всіх систем

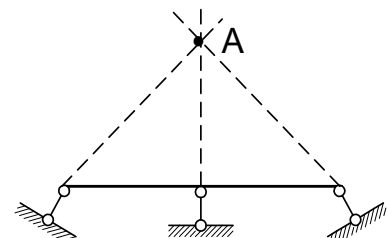
$$D = 1, \quad \text{Ш} = 0, \quad C_0 = 3.$$



a)



б)



в)

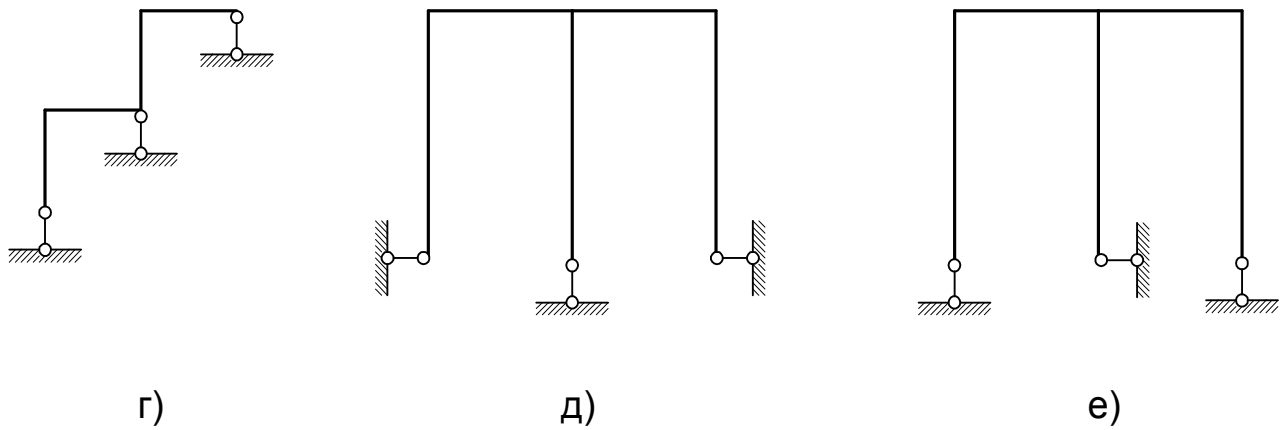


Рисунок 2.13 – Схеми прикріплень плоских споруд до основи

Зазначимо також просте розташування шести опорних стержнів, що завжди гарантує **нерухоме прикріплення** просторового типу (рисунок 2.14): у точці **А** розташовано три опорних стержні, що не лежать в одній площині; у точці **В** площини стержнів не проходять через точку **А**; у точці **С** стержень не перетинає пряму **АВ**.

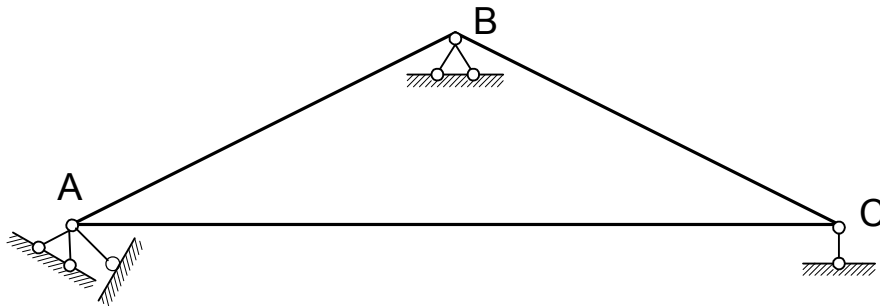


Рисунок 2.14 – Схема розташування опорних стержнів для нерухомого закріплення тіла

2.8 Миттєво змінювані системи

Якщо ми в **геометрично незмінюваній системі** будемо змінювати довжину тих або інших стержнів, то одержимо ряд систем, що мають ту саму структуру, але відрізняються між собою довжиною і нахилом стержнів. Існують проте такі варіації, що мають властивість **геометричної змінюваності**.

Такі системи, існування яких було помічено ще в 1837 р., називаються **миттєво змінюваними**. Назва підказана тим, що

при безупинному варіюванні форми системи, тобто при безупинній зміні якого-небудь із її геометричних параметрів, вона буде **змінюваною** тільки при одному “миттєвому” значенні цього параметра.

Проаналізуємо систему, показану на рисунк 2.15.

Ця система з погляду її незмінюваності має мінімально необхідну кількість стержнів і зв’язків. За формулою (2.1):

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0;$$

за формулою (2.4):

$$L = 3 \cdot 3 - 9 = 0.$$

Система **нерухома і незмінювана**.

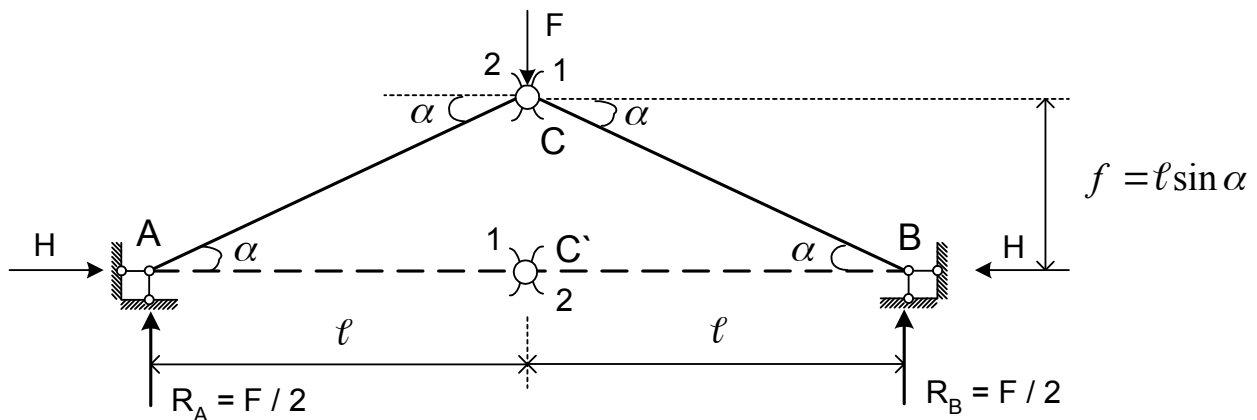


Рисунок 2.15 – До аналізу геометричної змінюваності систем

Будемо тепер варіювати параметром α . При $\alpha = 0$ стержні AC і CB лежать на одній прямій. Якщо ми роз’єднаємо стержні AC і CB у точці C, то правий кінець стержня AC переміститься по колу 2, а лівий кінець BC – по колу 1. Але ці кола мають загальну дотичну, а отже, **загальний нескінченно малий елемент**. Тому з’єднання обох стержнів у точці C не заважає нескінченно малому переміщенню загальної точки C.

Аналізована система ACB – **миттєво змінювана**. Системи, точки яких спроможні переміщатися без зміни геометричних розмірів із точністю до малих вищого порядку, називаються **миттєво змінюваними**.

Інша картина при $\alpha \neq 0$ (система АСВ): кола 1 і 2 не мають загальної дотичної, тому одночасне нескінченно мале переміщення загальної точки С по обох колах неможливе.

Обчислимо горизонтальну реакцію Н. Для цього візьмемо суму моментів лівих сил щодо точки С:

$$\frac{F}{2} \ell - H \cdot \ell \sin \alpha = 0,$$

звідси

$$H = \frac{F}{2 \sin \alpha}.$$

При малому куті α виникає велика горизонтальна реакція. Таким чином, системи, близькі до миттєво змінюваних, погано сприймають навантаження. При $\alpha = 0$ $H = \infty$. Можна сказати, що в миттєво змінюваних системах деякі зусилля рівні *нескінченності*.

Якщо споруда за своєю структурою *геометрично незмінювана*, то система рівнянь статки є *визначною*. Це означає, що при будь-якому навантаженні всі зусилля, обумовлені цією системою рівнянь, будуть визначеними і кінцевими. Якщо система рівнянь *невизначна*, це означає, що при довільному навантаженні рівняння статки або не можна задовольнити ніякими кінцевими значеннями зусиль (всі або деякі зусилля дорівнюють *нескінченності*), або можна задовольнити нескінченною множиною значень зусиль (всі або деякі зусилля дорівнюють *невизначності* або *нескінченності*).

Розглянемо ознаки, за якими можна визначити *миттєву змінюваність*:

- два диски з'єднані трьома і більше стержнями, що перетинаються в одній точці (рисунок 2.16);

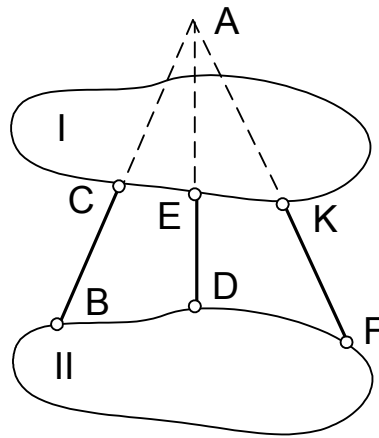


Рисунок 2.16 – Ознака миттєвої змінюваності

- два диски з'єднані шарніром і стержнем, що проходить через шарнір (рисунок 2.17).

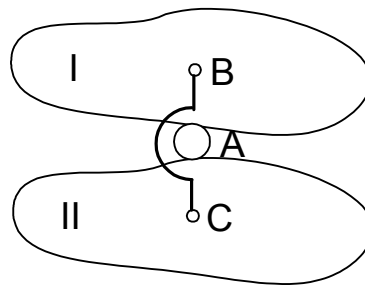


Рисунок 2.17 – Друга ознака миттєвої змінюваності

Враховуючи вищевказане, можна зробити висновок: *система, геометрично незмінювана і така, що не має зайвих в'язей, завжди статично визначна; навпаки, система статично визначна – геометрично незмінювана і не має зайвих в'язей. Кожному навантаженню системи, геометрично незмінюваному і такому, що не має зайвих в'язей, відповідає єдина система значень всіх зусиль, а саме – єдине розв'язання.*

3 Теорія переміщень

3.1 Загальні положення

Переміщенням даної точки споруди називається зміна її координати, викликана деформацією споруди, тобто відносним подовженням (укороченням) або скривленням його стержнів. **Деформації** споруди залежать від згинальних і крутних моментів, поздовжніх і поперечних сил, що виникають у перерізах елементів споруди від заданого зовнішнього навантаження, температури, зсуву опорних або інших в'язей. Тому визначенню переміщень звичайно передують визначення зусиль і побудова відповідних епюр.

Загальний метод визначення переміщень, що тут буде викладений, застосований до **лінійно-деформованих систем**, тобто до таких систем:

- виконані з ідеально пружного матеріалу;
- мають ідеально гладкі, позбавлені тертя шарнірні з'єднання;
- геометричну незмінюваність;
- допускають малі переміщення (наприклад, допустимі переміщення в мостових фермах складають 1/500 – 1/1000 прогону);
- підпорядковуються принципу незалежності дії сил.

До лінійно-деформованої неможна в загальному випадку віднести комбіновану систему. Проте якщо зафіксувати повний розпір H , то і ця система реагує лінійно на будь-яке поперечне навантаження.

Загальні методи перебування переміщень базуються на роботі сил, прикладених до пружної системи. В основу визначення переміщень покладено **принцип можливих переміщень** для деформованої системи, викладений у курсі теоретичної механіки.

3.2 Дійсна робота зовнішніх сил. Теорема Клапейрона

Будемо розрізняти дійсні та можливі переміщення. Поняття можливих переміщень розглянемо далі. Зараз визначимо, що під дійсним переміщенням Δ_{FF} (рисунок 3.1, а) будемо розуміти переміщення, викликане силою F , що змінюється від нуля до остаточного значення (рисунок 3.1, б).

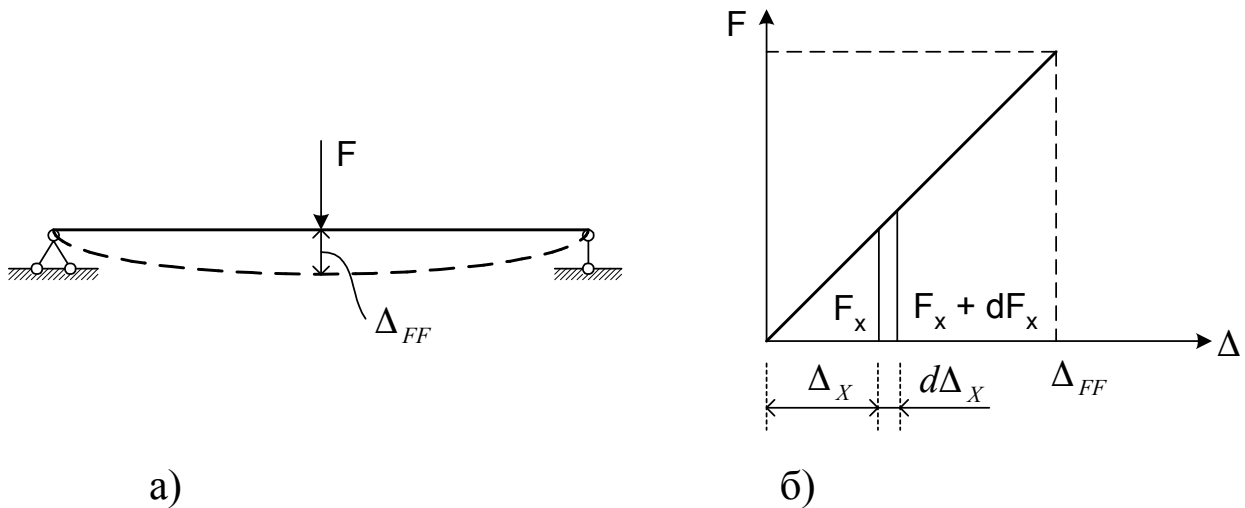


Рисунок 3.1 – До виведення формули для дійсної роботи зовнішніх сил

Через те що сила F змінюється за лінійним законом, можемо записати:

$$\Delta_{FF} = k F, \quad (3.1)$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Елементарна робота зовнішньої сили F буде дорівнювати (рисунок 3.1, б):

$$dW_x = F_x d\Delta_x. \quad (3.2)$$

Повна робота

$$W_x = \int_0^F F_x d\Delta_x. \quad (3.3)$$

Відповідно до формули (3.1)

$$\Delta_x = k F_x; \quad d\Delta_x = k dF_x.$$

Після підстановки цих рівностей у формулу (3.3) знайдемо:

$$W_x = \int_0^F F_x k dF_x = k \frac{F^2}{2} = F \frac{\Delta_{FF}}{2}. \quad (3.4)$$

Дійсна робота зовнішньої сили F дорівнює половині добутку сили на переміщення точки її прикладання щодо напрямку сили (*теорема Клапейрона*).

З'ясуємо, як виражається робота (вираз (3.4)) у випадку статичної дії декількох сил (рисунок 3.2).

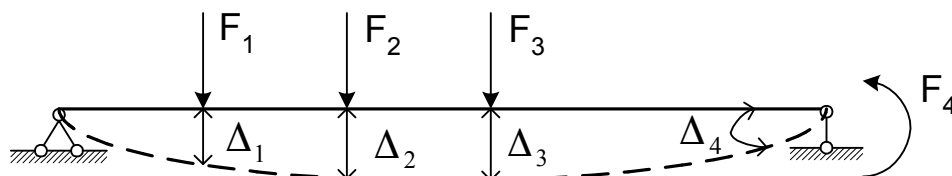


Рисунок 3.2 – До поширення теореми Клапейрона на випадок дії декількох сил

Показані на рисунку 3.2 переміщення є сумарними, тобто

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14}; \\ \Delta_2 &= \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23} + \Delta_{24}; \\ \Delta_3 &= \Delta_{31} + \Delta_{32} + \Delta_{33} + \Delta_{34}; \\ \Delta_4 &= \Delta_{41} + \Delta_{42} + \Delta_{43} + \Delta_{44}.\end{aligned}$$

Тепер уявимо, що всі сили (рисунок 3.2) прикладаються до балки одночасно і при цьому наростають від нульового до остаточного значення, зберігаючи між собою ту саму пропозицію. Тоді рівність (3.4) набуває такого вигляду:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \Delta_i \quad (3.5)$$

і читається так: сумарна робота зовнішніх сил дорівнює напівсумі добутків остаточного значення кожної сили і остаточного значення відповідного їй сумарного переміщення.

3.3 Можлива робота зовнішніх сил

Під *можливими переміщеннями* будемо розуміти дуже малі переміщення точок осі споруди, що припускаються наявними в'язями і які не залежать від заданої системи сил.

Розглянемо балку (рисунок 3.3). Прикладемо до цієї балки силу F , що змінюється від нуля до свого кінцевого значення. У результаті своєї дії сила F викликає переміщення Δ_{FF} і здійснює роботу (3.4).

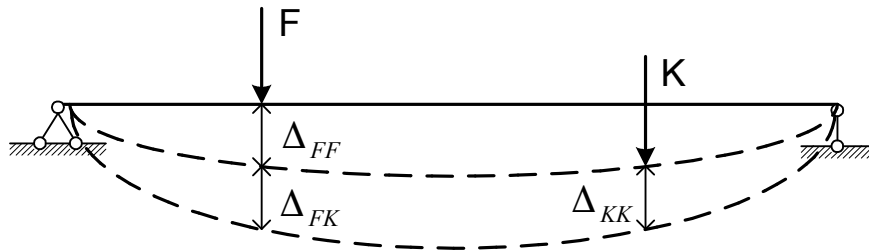


Рисунок 3.3 – До виведення формул для можливої роботи зовнішніх сил

До балки в деформованому стані (деформований стан розглядається лише для ілюстрації, надалі, з огляду на малі переміщення, не будемо робити різниці між початковими та деформованими станами) прикладаємо силу K . Сила K , діючи в такому ж режимі, як і сила F , здійснює роботу на власних переміщеннях Δ_{KK} і втягує в роботу силу F , виключаючи переміщення Δ_{FK} . Через те що переміщення Δ_{FK} не залежить від сили F (сила F залишилася постійною), робота сили F дорівнюватиме множенню сили F на переміщення Δ_{FK} :

$$A_F = F \Delta_{FK}. \quad (3.6)$$

Можлива робота внутрішніх сил на переміщеннях, викликаних силою K , запишеться для плоскої стержневої системи так:

$$A_F = - \sum \int \frac{N_F N_K ds}{EA} - \sum \int \frac{M_F M_K ds}{EJ} - \sum \int \frac{\mu Q_F Q_K ds}{GA}, \quad (3.7)$$

де $\frac{N_K ds}{EA}$, $\frac{M_K ds}{EJ}$, $\frac{\mu Q_K ds}{GA}$ – переміщення, викликані силою K ;

N_F , M_F , Q_F – внутрішні сили, викликані силою F .

Розглянемо тепер можливу роботу зовнішньої сили F при дії температурних переміщень і переміщеннях, викликаних зсувом опорних в'язей (рисунок 3.4).

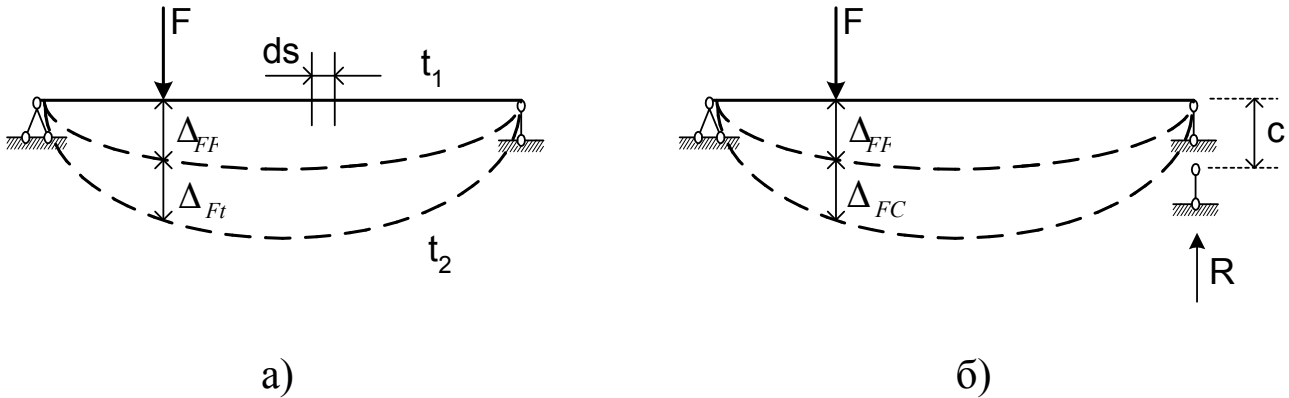


Рисунок 3.4 – До виведення формули зовнішніх сил при температурних переміщеннях і переміщеннях опорних в'язей

Сила F , змінюючись від нуля до кінцевого значення, викликає переміщення Δ_{FF} і здійснює роботу (як було зазначено вище). Тепер, коли сила F закінчила свою дію, до балки прикладаються температурні впливи (рисунок 3.5, а).

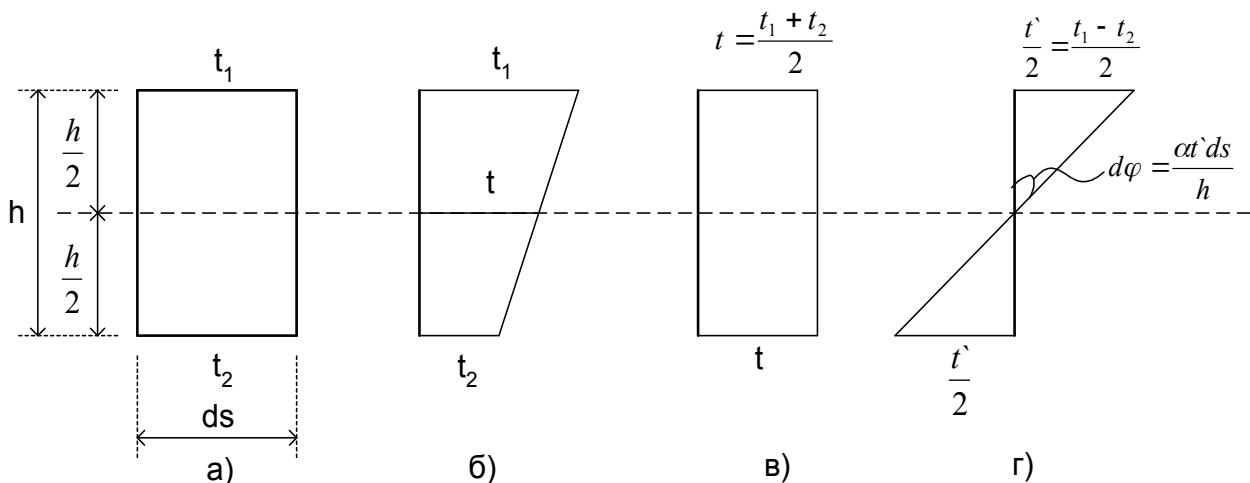


Рисунок 3.5 – Схема температурних впливів на елемент ds

Епюра температурних впливів на елемент ds показана на рисунку 3.5, б. Прийнято, що по висоті перерізу температура змінюється за лінійним законом. Епюра температурних впливів

розкладена на епюру, що характеризує симетричні впливи з осьюою температурою t (рисунок 3.5, в), і епюру, що характеризує обернено симетричні впливи (скривлення) із температурою $\frac{t}{2}$ (рисунок 3.5, г).

Симетричні температурні впливи викликають переміщення елемента ds , що дорівнюють

$$\Delta_x = \alpha \cdot t \cdot ds ,$$

де α – температурний коефіцієнт, що залежить від матеріалу, із якого виготовлена конструкція, а кососиметричні температурні впливи викривляють елемент ds , викликаючи нахил вертикальних граней на малий кут.

$$d\varphi = \frac{\alpha t ds}{h} .$$

При переміщеннях, викликаних симетричною температурою, діють поздовжні сили $N(F)$ (поздовжня сила N виникає в балці, показаній на рисунку 3.4, а, якщо обидві її опори шарнірно-нерухомі, оскільки балка при температурних впливах, подовжуючись, знає опору опор), а на кутових переміщеннях – згинальні моменти M_F . Таким чином, **повна робота внутрішніх сил** стержневої системи на температурних переміщеннях буде:

$$A_t = - \sum \int \alpha t N_F ds - \sum \int \frac{\alpha t}{h} M_F ds . \quad (3.8)$$

Що стосується **можливої роботи внутрішніх сил** на зсуві опорної в'язі (рисунок 3.4,б), то вона може бути виражена такою формулою:

$$A_\Delta = R C, \quad (3.9)$$

де R – реакція в тій в'язі, що за умовою задачі переміщається;

C – заданий зсув в'язі.

3.4 Робота зовнішніх сил, виражена через внутрішні сили

Відокремимо з прямолінійного стержня за допомогою двох перерізів, перпендикулярних до його осі, нескінченно малий елемент довжиною dx (рисунок 3.7).

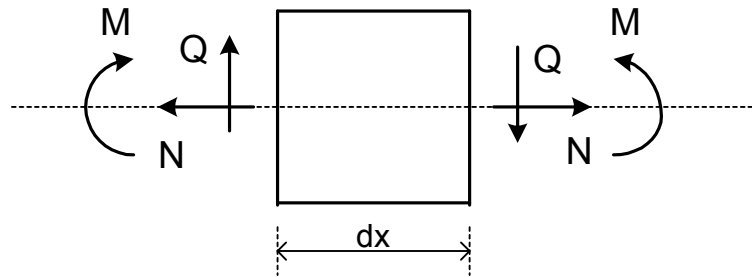


Рисунок 3.7 – Внутрішні зусилля в перерізі стержня

У цьому перерізі виникають такі зусилля: поздовжня сила N , поперечна сила Q , згинальний момент M . Ці зусилля є внутрішніми відносно стержня в цілому, але зовнішніми відносно розглянутого перерізу. **Повну роботу внутрішніх** сил можна виразити як суму робіт, здійснених статичними зусиллями M , Q , N при відповідних деформаціях елемента dx .

Припустимо, що лівий переріз елемента закріплено нерухомо. Тоді деформація елемента буде виражатися у вигляді зміщення правого перерізу відносно лівого (рисунок 3.8).

Дія сили N : під впливом поздовжньої сили правий переріз переміститься, як показано на рисунку 3.8.

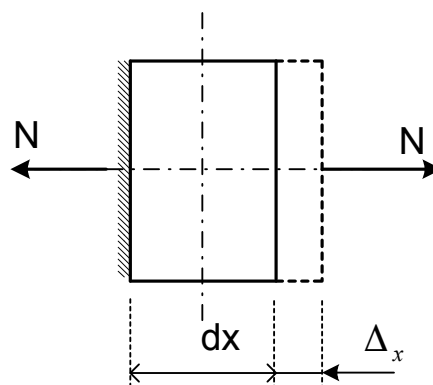


Рисунок 3.8 – До розгляду деформації елемента від дії сили N

У відповідності з законом Гука це переміщення дорівнює

$$\Delta_x = \frac{Ndx}{EA},$$

де E – модуль пружності першого роду;

A – площа поперечного перерізу.

На цьому переміщенні статична сила N виконує *дійсну роботу*:

$$dW_N = \frac{N\Delta_x}{2} = \frac{1}{2}N \frac{Ndx}{EA}.$$

Дія сили M : деформація елемента під дією згинального моменту M здійснюється, як показано на рисунку 3.9.

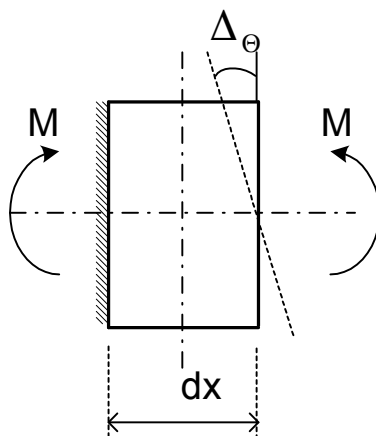


Рисунок 3.9 – До розгляду деформації елемента від дії згинального моменту M

Взаємний кут повороту торцевих перерізів дорівнює куту повороту правого перерізу відносно нерухомого лівого (θ). Відповідно до закону Гука для згину, $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$, де ρ – радіус кривизни згину, J – момент інерції перерізу відносно нейтральної осі (рисунок 3.10).

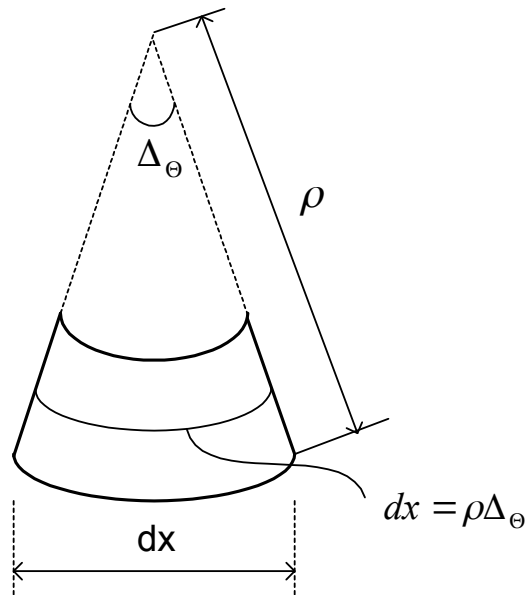


Рисунок 3.10 – До розгляду взаємного кута повороту торцевих перерізів

З рисунка 3.10 видно, що $dx = \rho \Delta_\theta$, звідси

$$\Delta_\theta = \frac{dx}{\rho} = \frac{M dx}{EJ}.$$

На цьому кутовому переміщенні статичний момент \mathbf{M} здійснює роботу

$$dW_M = \frac{-M \Delta_\theta}{2} = -\frac{1}{2} M \frac{M dx}{EJ}.$$

Дія сили \mathbf{Q} : під дією поперечної сили \mathbf{Q} елемент деформується, як показано на рисунку 3.11.

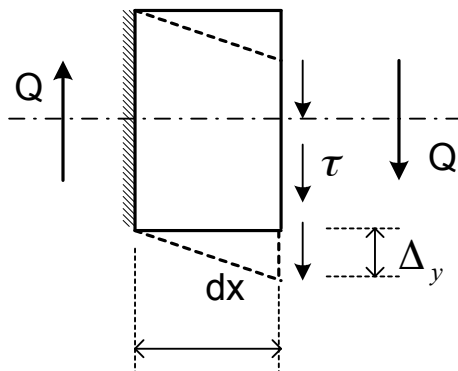


Рисунок 3.11 – До розгляду деформації елемента від дії поперечної сили Q

Лівий переріз нерухомий, по правому розподілені дотичні зусилля τdA , де dA – площа нескінченно вузької смуги, яка належить торцевому перерізу елемента dx і розташована від нейтральної осі на відстані y , як показано на рисунку 3.12.

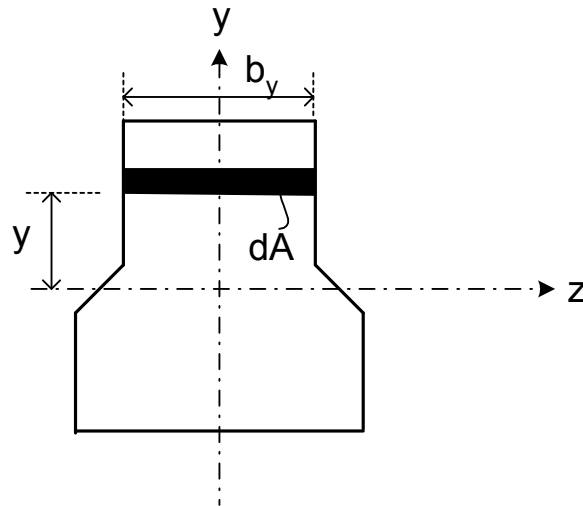


Рисунок 3.12 – До розгляду дотичних напружень у перерізі стержня

Формула Журавського для дотичних напружень при згині:

$$\tau dA = \frac{QS_z^{отс}}{b_y J},$$

де $S_z^{отс}$ – статичний момент відносно нейтральної осі z частини перерізу, відсіченої смугою dA ;

b_y – ширина цієї смуги.

Поперечна сила Q є рівнодіючою цих зусиль:

$$Q = \int_A \tau dA.$$

Переміщення Δ_y , викликане дією поперечної сили Q , являє собою зсув торцевих перерізів елемента один відносно одного, який з урахуванням малості деформацій дорівнює

$$\Delta_y = \gamma dx.$$

За законом Гука, $\tau = G \gamma$, тому отримуємо

$$\Delta_y = \frac{\tau}{G} dx = Q \frac{dx}{GA},$$

де G – модуль пружності другого роду (модуль зсуву);
 γ – питома вага матеріалу конструкції.

Враховуючи отримані вирази для Δ_y і τdA , отримаємо роботу статичної сили ($-Q$) на переміщенні Δ_y :

$$dW_Q = -\frac{Q\Delta_y}{2} = -\frac{1}{2} \int_A \tau dA \frac{\tau}{G} dx = -\frac{dx}{2G} \int_A \tau^2 dA = -\frac{Q^2 dx}{2GJ^2} \int_A \left(\frac{S_z^{omc}}{b_y} \right)^2 dA.$$

Позначивши $\mu = \frac{A}{J^2} \int_A \left(\frac{S_z^{omc}}{b_y} \right)^2 dA$, отримаємо

$$dW_Q = -\frac{Q^2}{2GA} \mu,$$

де μ – коефіцієнт, який залежить тільки від форми перерізу (для прямокутних перерізів $\mu = 1,2$).

При одночасній дії всіх сил на елемент робота кожної сили на переміщенні, викликаному іншими силами, дорівнює нулю. Так, поздовжня сила N не викликає повороту та зсуву, отже, робота згинального моменту M і поперечної сили Q на переміщеннях, які викликані поздовжньою силою, дорівнює нулю.

Повну роботу всіх внутрішніх сил можна записати так:

$$\begin{aligned} dW_N + dW_M + dW_Q = \\ = -\frac{1}{2} N \Delta_x - \frac{1}{2} M \Delta_\theta - \frac{1}{2} Q \Delta_y \mu = \frac{1}{2} N \frac{N dx}{EA} - \frac{1}{2} M \frac{M dx}{EJ} - \frac{1}{2} Q \frac{Q dx}{GA} \mu. \end{aligned}$$

Перші множники в доданках являють собою внутрішні зусилля, а другі – відповідні їм деформації.

Якщо підсумовувати елементарну роботу по всіх перерізах стержня, тобто інтегрувати її по всій довжині стержня l ,

отримаємо *формулу для роботи зовнішніх сил на викликаних ними переміщеннях*.

При цьому необхідно враховувати, що в точках прикладення зовнішніх сил внутрішні зусилля можуть змінюватися стрибкоподібно; крім того, стержні можуть мати злами. Тому необхідно обчислювати не один інтеграл від 0 до l , а суму інтегралів на ділянках l_i безперервності підінтегральних функцій. Таким чином, *робота внутрішніх сил на викликаних ними переміщеннях* визначається так:

$$- \frac{1}{2} \left[\sum_i \int_{l_i} \frac{N^2 dx}{EA} + \sum_i \int_{l_i} \frac{M^2 dx}{EJ} + \sum_i \int_{l_i} \frac{Q^2 dx}{GA} \mu \right].$$

Висновок. Робота внутрішніх сил на викликаних ними переміщеннях завжди від'ємна.

Значення роботи зовнішніх сил можна одержати з цієї формули в результаті зміни знаку (внутрішні та зовнішні сили прямують протилежно одна одній). Таким чином, отримуємо *вираз для роботи зовнішніх сил через внутрішні зусилля*:

$$W = \frac{1}{2} \left[\sum_i \int_{l_i} \frac{N^2 dx}{EA} + \sum_i \int_{l_i} \frac{M^2 dx}{EJ} + \sum_i \int_{l_i} \frac{Q^2 dx}{GA} \mu \right].$$

Висновок 1. Робота зовнішніх сил на викликаних ними переміщеннях завжди додатна.

Висновок 2. Дійсна робота не підлягається принципу незалежності дії сил. Це означає, що робота суми сил не дорівнює сумі робіт кожної з них (тобто квадрат суми під інтегралом не дорівнює сумі квадратів).

3.5 Теорема Бетті про взаємність можливих робіт і наслідок з неї

Розглянемо систему, до якої прикладено дві сили: \mathbf{K} і \mathbf{F} . У відповідності з принципом незалежності дії сил їх можна прикласти у будь-якому порядку. Повна робота цих сил в обох випадках буде однаковою (рисунок 3.6).

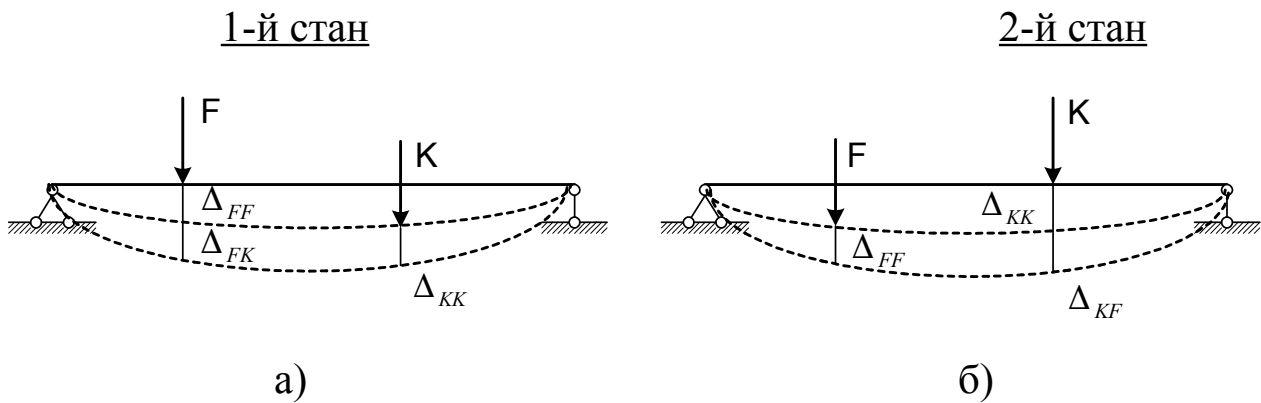


Рисунок 3.6 – До виведення теореми Бетті про взаємність
можливих робіт

Прикладемо спочатку силу F , а потім – силу K (рисунок 3.6, а) і назвемо це першим станом системи, а стан системи, в якому прикладена спочатку сила K , а потім сила F , назвемо другим (рисунок 3.6, б). Розглянемо, які переміщення виникають у двох вказаних станах.

У першому стані в процесі прикладення сили F спочатку відбувається дійсне переміщення точки її прикладення Δ_{FF} ; потім при статичному прикладенні сили K – дійсне переміщення точки її прикладення Δ_{KK} . При цьому переміщується і точка прикладення сили F без зміни значення сили F , тобто здійснюється *можливе переміщення* Δ_{FK} . Аналогічно, у другому стані відбуваються *дійсні переміщення* Δ_{KK} , Δ_{FF} та *можливе переміщення* Δ_{KF} у напрямку сили K .

У відповідності з одержаними виразами для *дійсної* та *можливої роботи повна робота* сил першого стану складається:

- з *дійсної роботи* W_F статично прикладеної сили F при переміщенні Δ_{FF} ;
- *дійсної роботи* W_K статично прикладеної сили K при переміщенні Δ_{KK} ;
- *можливої роботи* A_{FK} сили F при переміщенні Δ_{FK} (вона здійснюється в процесі прикладення сили K при незмінній силі F):

$$W_1 = W_F + W_K + A_{FK} = \frac{F\Delta_{FF}}{2} + \frac{K\Delta_{KK}}{2} + F \Delta_{FK};$$

повна робота сил другого стану дорівнює:

$$W_2 = W_K + W_F + A_{KF} = \frac{F\Delta_{FF}}{2} + \frac{K\Delta_{KK}}{2} + K\Delta_{KF}.$$

Відповідно до принципу суперпозиції ці роботи повинні збігатися, тобто

$$W_1 = W_2,$$

звідки

$$W_F + W_K + A_{FK} = W_K + W_F + A_{KF};$$

$$\frac{F\Delta_{FF}}{2} + \frac{K\Delta_{KK}}{2} + F\Delta_{FK} = \frac{F\Delta_{FF}}{2} + \frac{K\Delta_{KK}}{2} + K\Delta_{KF}.$$

З цих виразів отримаємо

$$A_{FK} = A_{KF};$$

$$F \Delta_{FK} = K \Delta_{KF}.$$

Цей результат формулюється у вигляді теореми, яка має назву *теорема про взаємність можливих робіт*, або *теорема Бетті*:

• *робота сил першого стану (сил F) при переміщеннях у їх напрямку (Δ_{FK}), викликаних силами другого стану (K), дорівнює роботі сил другого стану (K) при переміщеннях у їх напрямку (Δ_{KF}), викликаних силами першого стану (F).*

Розглянемо знову два стани системи, показаних на рисунку 3.6. Згідно з теоремою про взаємність робіт

$$F \Delta_{FK} = K \Delta_{KF}.$$

Припустимо, що величини прикладених сил однакові, тобто $F = K$. Тоді

$$\Delta_{FK} = \Delta_{KF}.$$

Цей результат має назву *теорема Максвелла про взаємність переміщень* і формулюється так:

• якщо сили F і K чисельно рівні ($F = K$), то переміщення у напрямку першої сили Δ_{FK} від другої сили K чисельно дорівнює переміщенню в напрямку другої сили Δ_{KF} від першої сили F .

Висновок з теореми Бетті формулюється так:

• *величина переміщення не змінюється від перестановки індексів, якщо силові дії чисельно рівні.*

Якщо сила дорівнює одиниці, то відповідне *переміщення* називають *одиничним* та позначають буквою δ . Теорема Максвелла в термінах одиничних переміщень формулюється так: *величина одиничних переміщень не змінюється від перестановки індексів:*

$$\delta_{FK} = \delta_{KF}.$$

3.6 Формула Мора для визначення переміщень.

Практичні способи обчислення інтегралів Мора

Розглянемо систему, навантажену узагальненою силою F . Необхідно визначити переміщення будь-якого перерізу системи k в указаному напрямку $I-I$ (рисунок 3.13, а).

Назвемо стан системи, в якому на неї діє задане навантаження, *вантажним*, та введемо поняття *одиничного* стану. Для цього прикладемо до системи замість заданого навантаження тільки одну силу \bar{K} в перерізі k в напрямку шуканого переміщення. Дана сила чисельно дорівнює одиниці ($\bar{K} = 1$) (рисунок 3.13, б).

Це означає, що якщо необхідно визначити:

• *лінійне переміщення*, то одинична зосереджена сила прикладається в напрямку переміщення;

• *кут повороту*, то необхідно прикласти одиничний зосереджений момент.

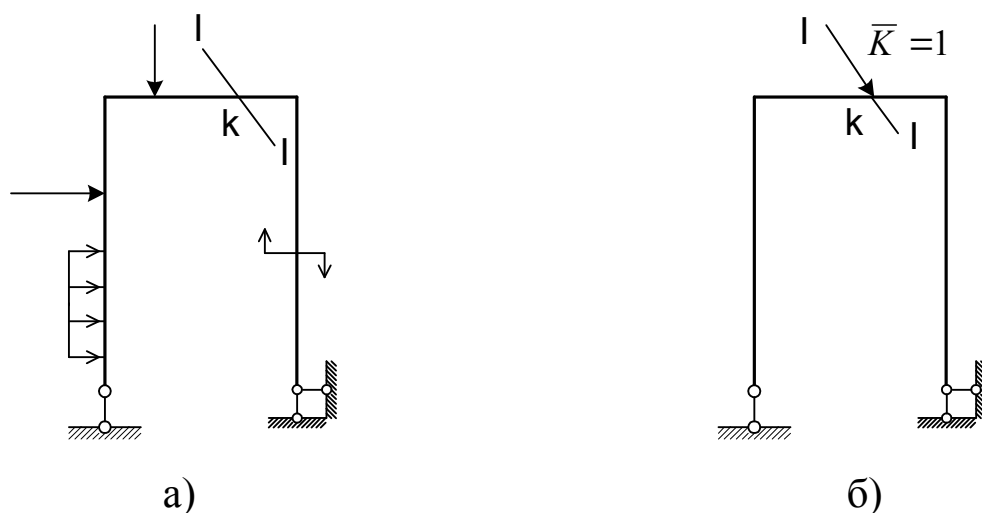


Рисунок 3.13 – До визначення переміщень за формулою Мора

Таке навантаження називається *одиночною узагальненою силою*. Стан, у якому до системи прикладена *одиночна узагальнена сила*, називається *одиночним станом*.

У подальшому всі сили та внутрішні зусилля, які характеризують одиничний стан, будемо відмічати верхньою рисочкою.

Переміщення від одиничної сили розглядається як *дійсне*, а від заданого навантаження **F** – як *можливе*. Тоді робота сили стану \bar{K} на можливому переміщенні Δ_{KF} визначається так:

$$A_{KF} = \bar{K} \Delta_{KF} = \Delta_{KF}.$$

Ця формула і є шуканим переміщенням перерізу **k** у напрямку сили \bar{K} від сили **F**. Згідно з одержаним виразом для роботи A_{KF} отримаємо

$$\Delta_{KF} = \sum_i \int_{\ell_i} \frac{\bar{N}_K N_F dx}{EA} + \sum_i \int_{\ell_i} \frac{\bar{M}_K M_F dx}{EJ} + \sum_i \int_{\ell_i} \frac{\bar{Q}_K Q_F dx}{GA} \mu,$$

де підсумовування ведеться по ділянках безперервності функцій $\bar{N}_K N_F$, $\bar{M}_K M_F$, $\bar{Q}_K Q_F$. Якщо розбити систему на ділянки, на яких жорсткості **EJ**, **EA**, **GA** постійні, ця формула запишеться як

$$\Delta_{KF} = \sum_i \frac{1}{EA} \int_{\ell_i} \bar{N}_K N_F dx + \sum_i \frac{1}{EJ} \int_{\ell_i} \bar{M}_K M_F dx + \sum_i \frac{1}{GA} \int_{\ell_i} \bar{Q}_K Q_F dx \mu.$$

Цю формулу можна використовувати при розрахунку будь-яких плоских стержневих конструкцій: балок, рам, ферм, арок малої кривизни.

Узагальнимо розглянутий *порядок визначення переміщень*:

1 Записуємо вираз або будуємо епюри внутрішніх зусиль N_F , M_F , Q_F у *вантажному стані* (тобто заданого зовнішнього навантаження).

2 Створюємо *одиничний стан* (прикладаємо до системи єдину узагальнену силу $\bar{K} = 1$ в розглянутому перерізі в напрямку переміщення).

3 Записуємо вираз або будуємо епюри внутрішніх зусиль \bar{N}_K , \bar{M}_K , \bar{Q}_K в *одиничному стані*.

4 Обчислюємо *інтеграл Мора*: аналітично, підставляючи записані вирази для внутрішніх зусиль або одним з розглянутих далі методів.

Правило знаків. Якщо одержане значення Δ_{KF} додатне, то напрямок переміщення співпадає з обраним напрямком *одиничної узагальненої сили*; якщо ж значення Δ_{KF} є від'ємним, то напрямок переміщення повинен бути протилежним напрямку *одиничної узагальненої сили*.

Якщо розглядається *просторова задача*, то у формулу Мора входять доданки, які враховують шість внутрішніх зусиль, тобто необхідно додати три відповідних інтеграли:

$$\Delta_{KF} = \sum_i \frac{1}{EJ_{kp}} \int_{\ell_i} \bar{M}_K^{kp} M_F^{kp} dx + \sum_i \frac{1}{EJ_y} \int_{\ell_i} \bar{M}_K^y M_F^y dx + \sum_i \frac{1}{EJ_z} \int_{\ell_i} \bar{M}_K^z M_F^z dx + \\ + \sum_i \frac{1}{EA} \int_{\ell_i} \bar{N}_K N_F dx + \sum_i \frac{1}{GA} \int_{\ell_i} \bar{Q}_K^y Q_F^y dx \mu_y + \sum_i \frac{1}{GA} \int_{\ell_i} \bar{Q}_K^z Q_F^z dx \mu_z$$

Якщо елементи системи схильні до будь-якого одного виду деформацій, то *формула Мора* спрощується.

Так, наприклад, якщо система працює на згин (балка, рама), то основний вплив на переміщення має згинальний момент у перерізі, і можна не враховувати (скоротити) доданки, в які входять поздовжня і поперечна сили:

$$\Delta_{KF} = \sum_i \frac{1}{EJ} \int_{\ell_i} \bar{M}_K M_F dx .$$

Якщо елементи стержневої системи працюють на розтягання-стискання (наприклад, ферми), то враховуються тільки доданки, які задають поздовжню силу:

$$\Delta_{KF} = \sum_i \frac{1}{EA} \int_{\ell_i} \bar{N}_K N_F dx .$$

Для остаточного розрахування переміщення необхідно обчислити інтеграл Мора. Підінтегральний вираз являє собою добуток багаточленів першого і другого ступеня, які задають вираз для внутрішніх зусиль. Після перемножування і приведення подібних членів під інтегралами отримуються багаточлени другого або третього ступеня, які легко інтегруються згідно з таким правилом:

$$\int x^n = x^{n+1} / (n+1) .$$

Однак це громіздка процедура; тому для обчислення інтегралів Мора звично використовують методи, які враховують специфіку підінтегральних функцій. Мається на увазі, що під інтегралами перемножуються вирази для внутрішніх зусиль. Тому обчислення інтеграла Мора називають також *перемноженням епюр*.

Розглянемо два методи, прийняті для перемножування епюр. Будемо обчислювати інтеграл:

$$I = \int_0^{\ell} \bar{M}_K M_F dx ,$$

враховуючи, що епюри \bar{M}_K, M_F вже побудовані.

3.7 Формули Верещагіна, Сімпсона-Корноухова

Розглянемо *правило Верещагіна*.

Звичайно в одиничному стані до системи можуть бути прикладені зосереджена сила або зосереджений момент, тому епюра \bar{M}_K завжди лінійна (тобто має вигляд прямої, нахиленої до горизонтальної осі X під відомим кутом α).

Припустимо, що епюра згинального моменту у вантажному стані є криволінійною (тобто M_F має вигляд параболи), як це показано на рисунку 3.14.

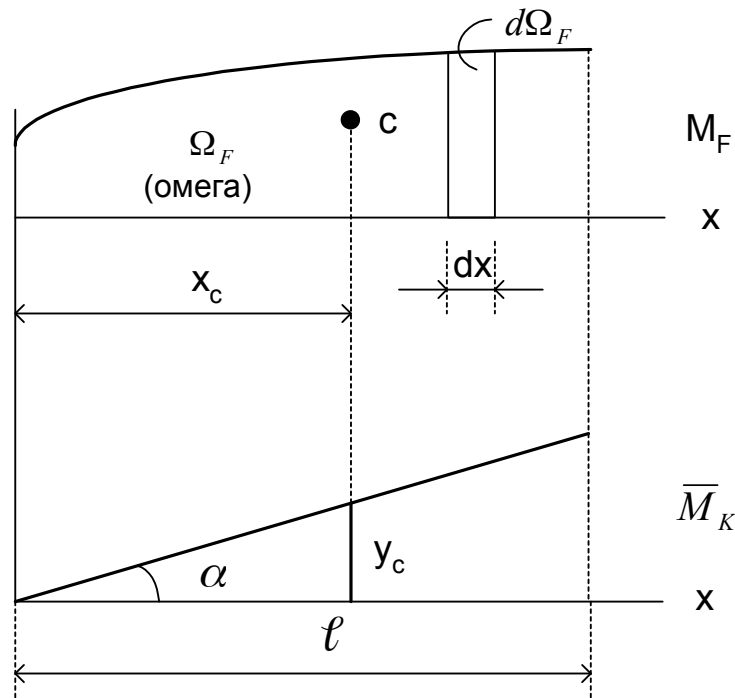


Рисунок 3.14 – Епюри згинального моменту M_F і \bar{M}_K

Рівняння прямої \bar{M}_K на ділянці від 0 до ℓ можна записати у такому вигляді:

$$\bar{M}_K = x \operatorname{tg} \alpha.$$

Підставимо цей вираз у шуканий інтеграл. Отримаємо:

$$I = \int_0^{\ell} \bar{M}_K M_F dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^{\ell} x M_F dx = \operatorname{tg} \alpha \int_{\Omega_F} x d\Omega_F,$$

де $d\Omega_F$ – елемент площі, обмеженої епюрою M_F і елементом dx ;
 Ω_F – площа, обмежена епюрою M_F на всій ділянці від 0 до ℓ .

Інтеграл $\int_{\Omega_F} x d\Omega_F$ – це статичний момент площі Ω_F відносно вертикальної осі Y . Він отримується множенням Ω_F на горизонтальну координату x_c центра ваги площі Ω_F :

$$\int_{\Omega_F} x d\Omega_F = x_c \Omega_F.$$

Тому

$$I = \operatorname{tg} \alpha \int_{\Omega_F} x d\Omega_F = (\operatorname{tg} \alpha x_c) \Omega_F = y_c \Omega_F,$$

де y_c (як видно з рисунка) – ордината прямолінійної епюри, узята під центром ваги криволінійної.

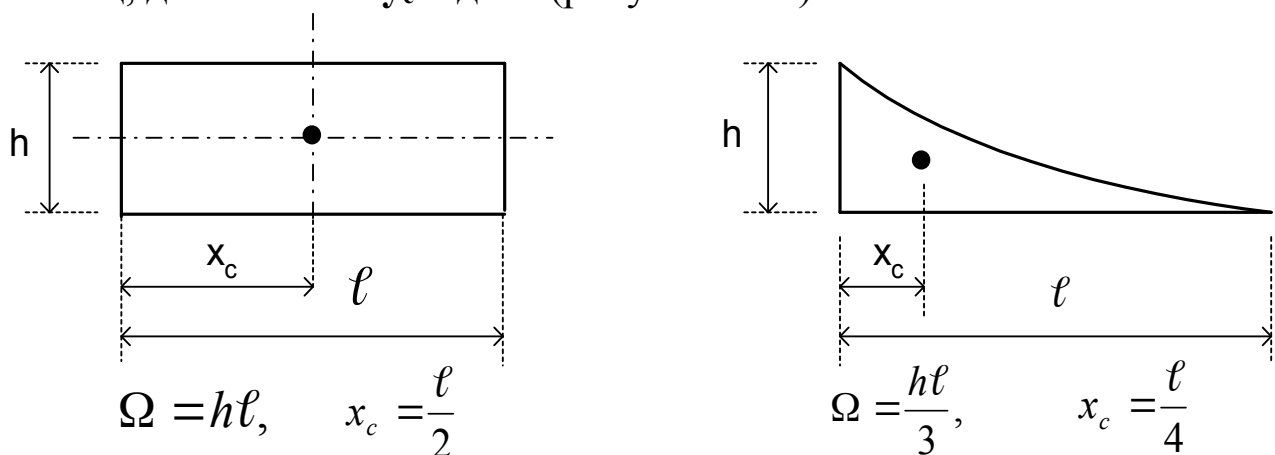
Таким чином, добуток двох епюр дорівнює добутку площі криволінійної епюри на ординату прямолінійної епюри під центром ваги криволінійної:

$$I = y_c \Omega_F.$$

Якщо обидві епюри \bar{M}_K і M_F прямолінійні, то немає значення, для якої з них враховувати площу, а для якої – ординату під центром ваги. Ці дії виконуються залежно від прийнятого рішення автором розрахунків (як зручніше). Так, якщо одна з функцій постійна, то y_c зручніше брати для цієї функції.

Примітка. Епюра M_F повинна бути однозначною, тому що поняття *статичного моменту* не визначається для від'ємної площі перерізу.

Для будь-якого навантаження площу, обмежену криволінійною епюрою, можна подати як комбінацію таких площ, для яких Ω і y_c відомі (рисунок 3.15).



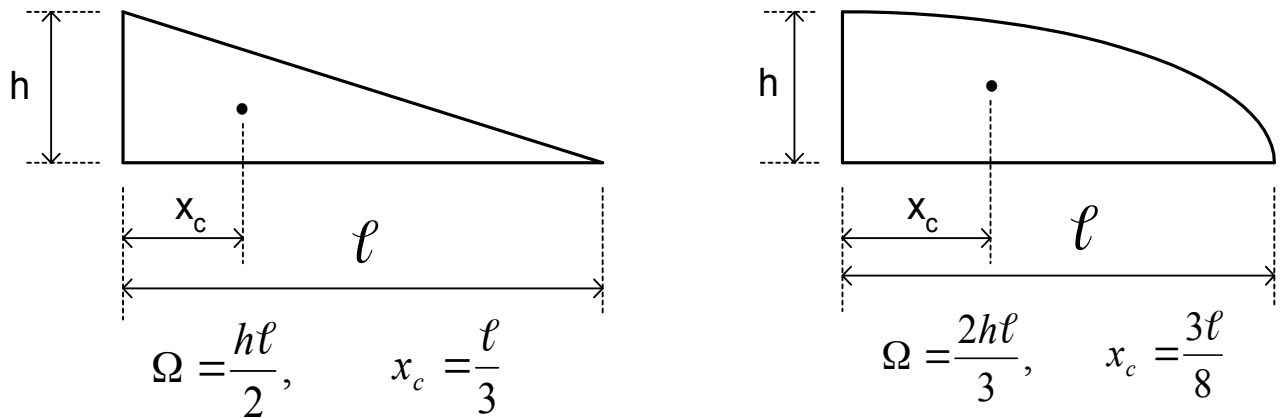
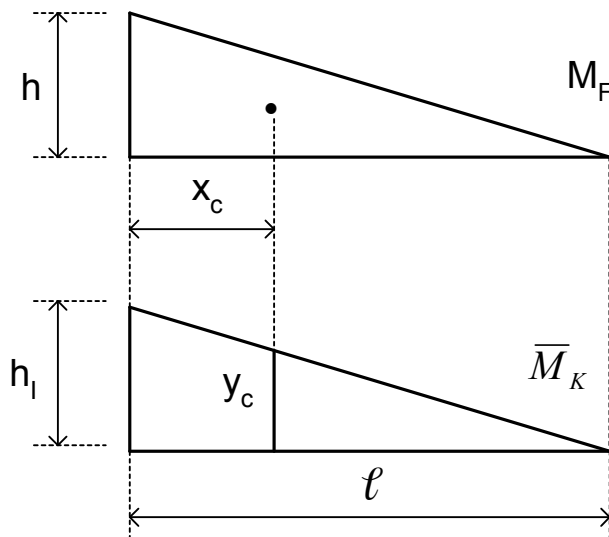


Рисунок 3.15 – До розгляду правила Верещагіна

Так, інтеграл $\int_{\Omega} x d\Omega_F$ розкладається на суму інтегралів по кожній з таких площ.

Правило знаків. Якщо еюра M_F і ордината y_c розміщені по один бік від осі, добуток $I = y_c \cdot \Omega_F$ є додатним; якщо по різні боки – від’ємним.

Приклади обчислення добутків $I = \int_0^{\ell} \bar{M}_K M_K dx = y_c \Omega_F$ для деяких еюр, що найчастіше зустрічаються (рисунок 3.16).



$$\Omega_F = \frac{hl}{2}, \quad x_c = \frac{\ell}{3}$$

$$y_c = \frac{2}{3}h_1$$

$$I = \frac{hl}{2} \cdot \frac{2}{3}h_1$$

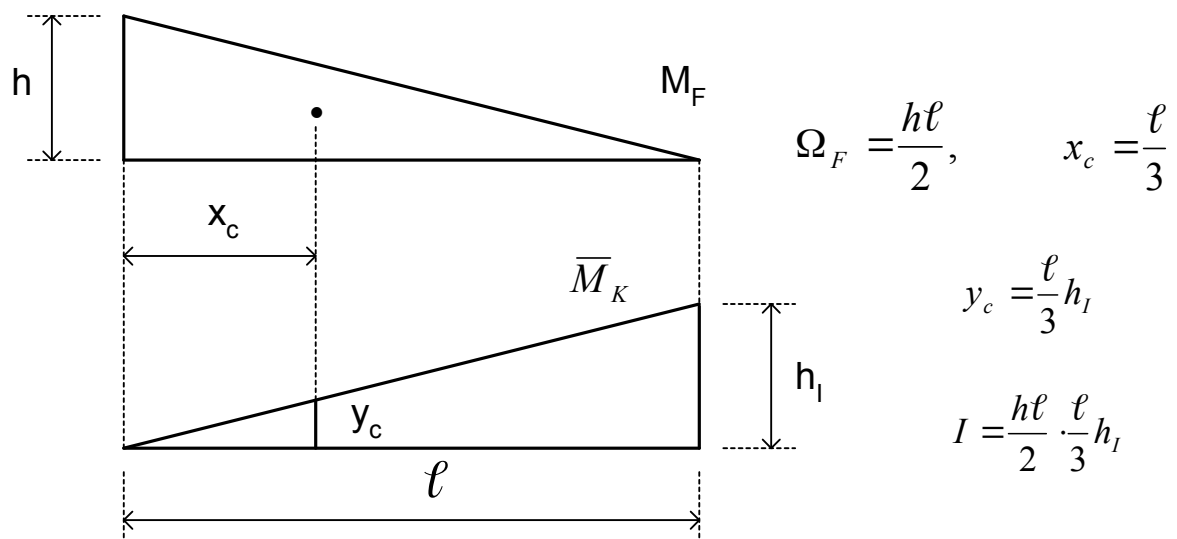
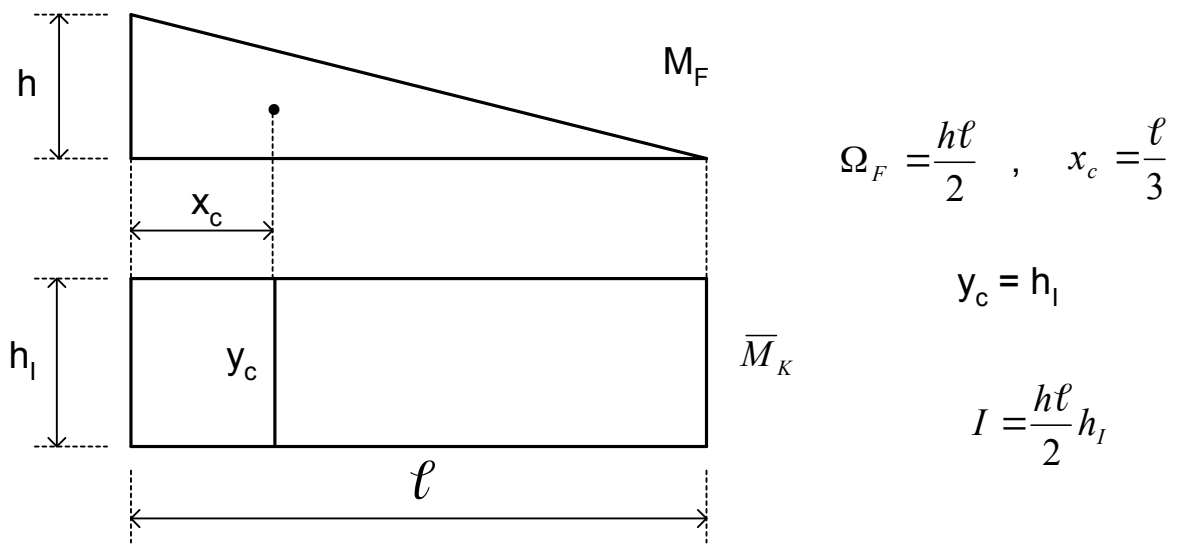


Рисунок 3.16 – До розгляду правила Верещагіна

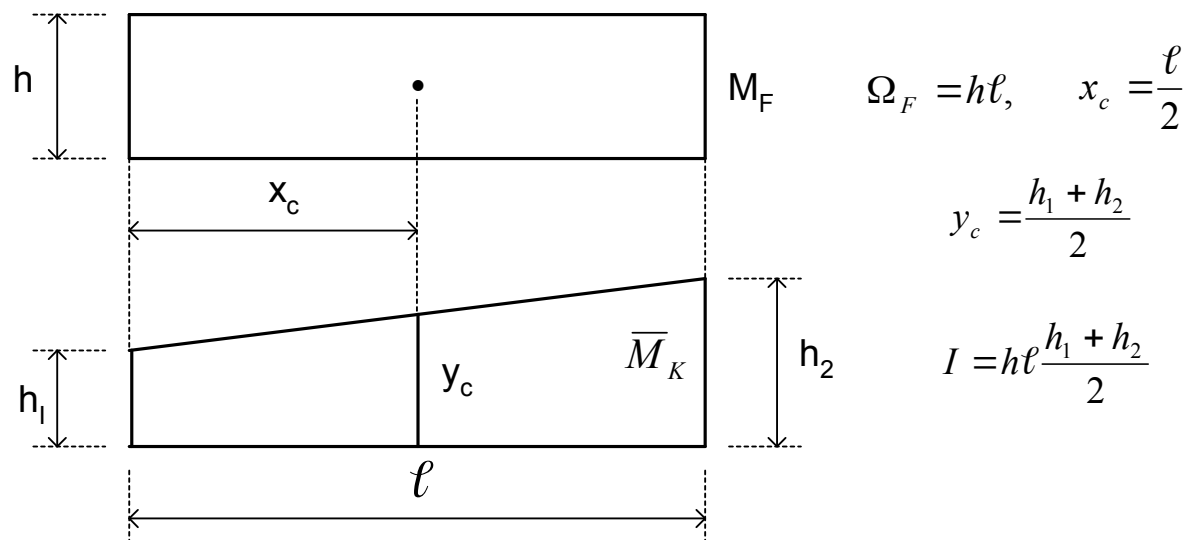


Рисунок 3.16 – аркуш 2

Розглянемо правило **Сімпсона-Корноухова** [метод чисельного (приблизного) інтегрування].

Для оцінювання похибки цього методу існує відома формула, у відповідності з якою похибка пропорційна четвертій похідній від підінтегральної функції. У нашому випадку, коли підінтегральна функція є багаточленом не вище третього ступеня (M_F парабола або пряма; \bar{M}_K – пряма), її четверта похідна тотожно дорівнює нулю, і тому похибка методу також дорівнює нулю.

Отже, формула Сімпсона-Корноухова у випадку перемноження вантажної й одиничної епюр визначає точне значення інтеграла.

Припустимо, що необхідно обчислити такий інтеграл:

$$\int_0^{\ell} f(x) dx,$$

причому функція $f(x)$ безперервна на інтервалі від 0 до ℓ і є поліномом не вище третього ступеня, а її графік має вигляд, показаний на рисунку 3.17.

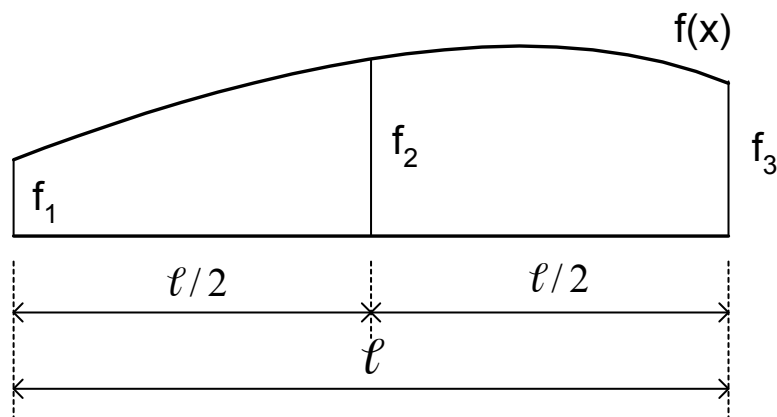


Рисунок 3.17 – Графік функції $f(x)$

Значення функції в першій точці інтервалу дорівнює f_1 , всередині інтервалу (тобто при $x = \ell / 2$) значення функції – f_2 , наприкінці інтервалу – f_3 . Усі ці значення відомі. Формула Сімпсона-Корноухова для обчислення інтеграла має такий вигляд:

$$\int_0^{\ell} f(x) dx = \frac{\ell}{6} (f_1 + 4f_2 + f_3).$$

Якщо необхідно перемножити епюри, тобто обчислити інтеграл $\int_0^{\ell} \bar{M}_K M_F dx$, то в якості функції f використовується значення $f(x) = \bar{M}_K M_F$.

Правило знаків. Значення моментів необхідно брати зі своїми знаками. Це означає, що якщо епюри \bar{M}_K і M_F в точці знаходяться по один бік від осі, то добуток $\bar{M}_K M_F$ необхідно брати зі знаком “плюс”, а якщо по різні боки – зі знаком “мінус”.

Розглянемо приклад розрахунку переміщення від зовнішнього навантаження.

Защемлена балка (рисунок 3.18) завантажена посередині зосередженою силою. Треба визначити прогин перерізу k наприкінці балки, передбачивши, що $EJ = \text{const}$.

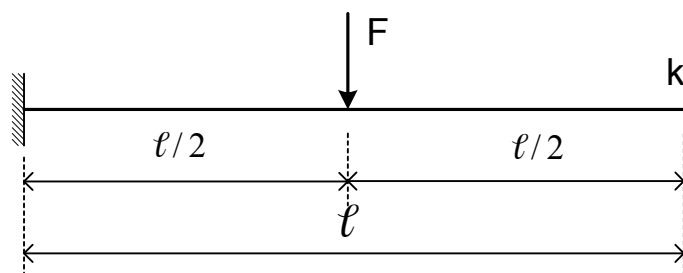


Рисунок 3.18 – До розрахунку переміщення від зовнішнього навантаження

Створимо одиничний стан. Для цього в перерізі k прикладемо зосереджену силу $\bar{k} = 1$. Направимо її, наприклад, вгору, як показано на рисунку 3.19.

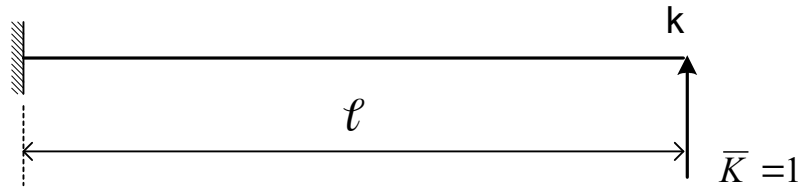


Рисунок 3.19 – Приклад створення одиничного стану балки

У зв'язку з тим що балка працює на згин, у формулі Мора достатньо враховувати доданки, в яких є згинальні моменти:

$$y = \sum_i \frac{1}{EJ} \int_{\ell_i} \bar{M}_K M_F dx .$$

Побудуємо епюри згинальних моментів M_F і \bar{M}_K (рисунок 3.20).

У нашому випадку існує дві ділянки безперервності підінтегральної функції $\bar{M}_K M_F$ – від 0 до $\ell / 2$ і від $\ell / 2$ до ℓ . При цьому на другій ділянці $M_F = 0$ і, отже, $\bar{M}_K M_F = 0$. Тому інтегрування можна проводити тільки на першій ділянці, тобто від 0 до $\ell / 2$:

$$y = \frac{1}{EJ} \int_0^{\ell/2} \bar{M}_K M_F dx .$$

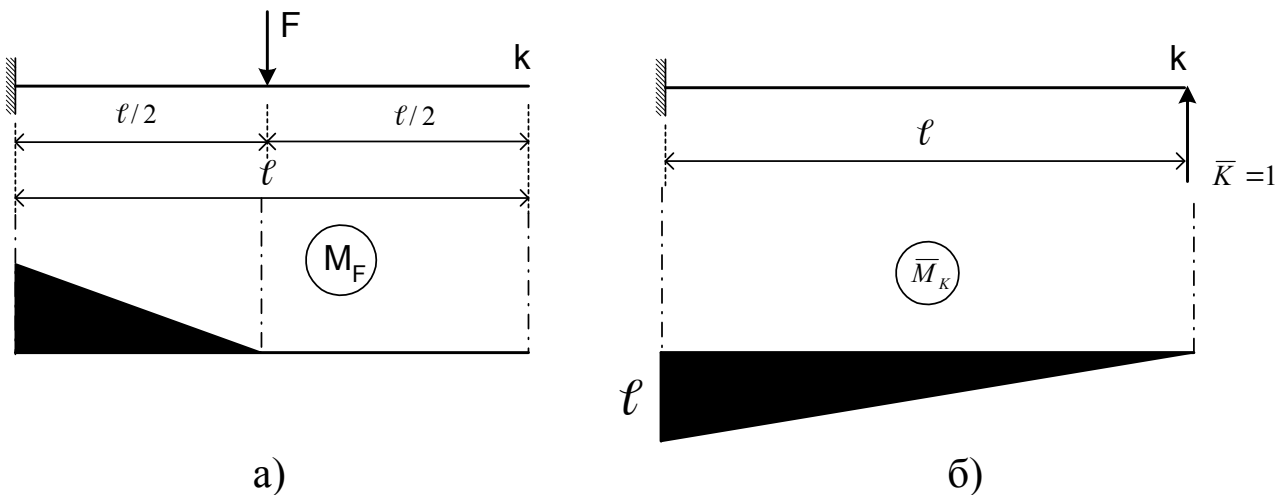


Рисунок 3.20 – Епюри згинальних моментів M_F (а) і \bar{M}_K (б)

Обчислимо цей інтеграл (тобто перемножимо епюри) за допомогою двох методів.

I. Правило Верещагіна

Згідно з правилом Верещагіна

$$\int_0^{\ell/2} \bar{M}_K M_F dx = \Omega_F y_c \quad -$$

добуток площі, обмеженої вантажною епюрою на ділянці від 0 до $\ell / 2$, та ординати одиничної епюри під центром ваги вантажної епюри (рисунок 3.21).

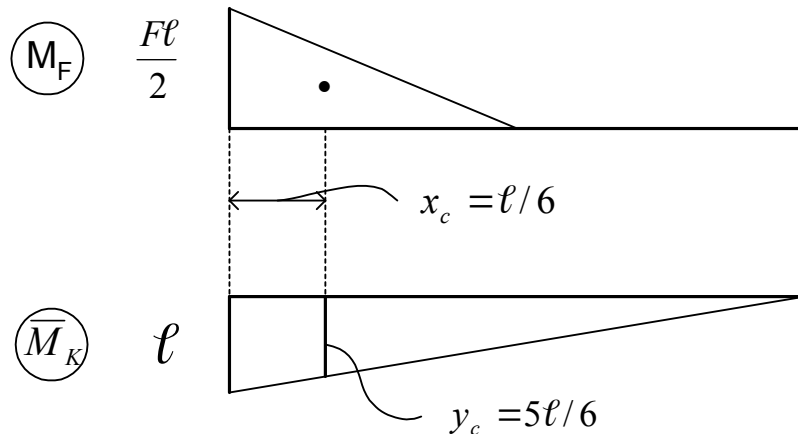


Рисунок 3.21 – До прикладу розрахунку за правилом Верещагіна

Площа Ω_F – це площа прямокутного трикутника, що дорівнює половині добутку його катетів, тобто з урахуванням знаку згинального моменту:

$$\Omega_F = - \frac{1}{2} \frac{F\ell}{2} \frac{\ell}{2} = - \frac{F\ell^2}{8} .$$

Центр ваги прямокутного трикутника знаходиться на відстані треті катета від прямого кута, тобто на відстані $\ell / 6$ від лівого кінця балки. Ордината одиничної епюри в цьому перерізі дорівнює $5\ell / 6$. У результаті отримаємо

$$y = \frac{1}{EJ} \int_0^{\ell/2} \bar{M}_K M_F dx = \frac{1}{EJ} \Omega_F y_c = - \frac{1}{EJ} \frac{F\ell^2}{8} \frac{5\ell}{6} = - \frac{5F\ell^3}{48EJ} .$$

Знак “мінус” перед результатом означає, що кінцевий переріз балки переміщується в бік, протилежний обраному напрямку одиничної сили, тобто вниз.

II. Метод Сімпсона-Корноухова

Відмітимо ординати епюр у середніх точках першої ділянки (рисунок 3.22).

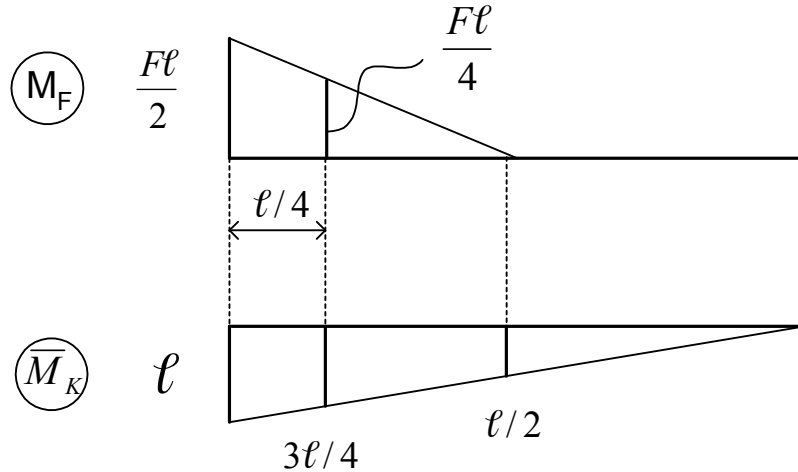


Рисунок 3.22 – До прикладу розрахунку за методом Сімпсона-Корноухова

У відповідності з формулою Сімпсона-Корноухова:

$$y = \frac{\ell/2}{6EJ} \left(-\frac{F\ell}{2}\ell - 4\frac{F\ell}{4}\frac{3\ell}{4} - 0 \cdot \frac{\ell}{2} \right) = -\frac{5F\ell^3}{48EJ}.$$

3.8 Матрична форма обчислення переміщень

При розрахунку пружних систем виникає необхідність обчислювати переміщення в певних напрямках від заданої групи сил. Це, по суті, лінійне перетворення вектора навантаження F у вектор переміщень Δ :

$$\Delta = AF,$$

де A – матриця переміщень, елементи якої δ_{ij} зазнають переміщення в i -му напрямку від j -ї одиничної сили.

Якщо кількість i напрямків шуканих переміщень співпадають з кількістю i напрямком цих сил (що так і

відбувається), то порядок вектора Δ і вектора F буде однаковим, а матриця \mathbf{A} – квадратною.

При обчисленні ряду переміщень від навантаження \mathbf{F} в напрямках $1, 2, 3, \dots, n$ позначимо вектор-стовпець, складений з цих переміщень ($\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \dots, \Delta_{nF}$), через Δ_F .

Згідно з формулою Максвелла-Мора, якщо враховується тільки вплив згинального моменту,

$$\Delta_{kF} = \sum_{i=1}^n \int_0^s \frac{M_F \bar{M}_k d\ell}{EJ},$$

де n – номер ділянки.

Обчислимо підінтегральний вираз на i -й ділянці за формулою М.В. Корноухова:

$$\int_0^s \frac{M_F \bar{M}_k d\ell}{EJ} = \frac{\ell}{6} \left(\frac{M_F^A \bar{M}_k^A}{EJ_A} + 4 \frac{M_F^C \bar{M}_k^C}{EJ_C} + \frac{M_F^B \bar{M}_k^B}{EJ_B} \right),$$

де ℓ – довжина ділянки;

$M_F^A, \bar{M}_k^A, M_F^B, \bar{M}_k^B$ – значення моментів відповідно на початку (**A**) і наприкінці (**B**) i -ї ділянки довжиною ℓ ;

M_F^C, \bar{M}_k^C – значення моментів посередині ділянки.

Цей вираз для зручності обчислень і за характером співмножників подано як добуток трьох матриць:

$$\int_0^s \frac{M_F \bar{M}_k d\ell}{EJ_i} \Rightarrow \bar{M}_{ik}^A \bar{M}_{ik}^C \bar{M}_{ik}^B \cdot \frac{\ell_i}{6EJ} \begin{vmatrix} b_i^A & 0 & 0 \\ 0 & 4b_i^C & 0 \\ 0 & 0 & b_i^B \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} M_{iF}^A \\ M_{iF}^C \\ M_{iF}^B \end{vmatrix}$$

або

$$\int_0^s \frac{M_F \bar{M}_k d\ell}{EJ_i} = L_{ik} B_i \vec{M}_{iF},$$

де L_{ik} – матриця-рядок (транспонований стовпець), елементи якого являють собою ординати k -ї одиничної епюри на початку, наприкінці і посередині i -ї ділянки;

M_{iF} – матриця-стовпець або вектор, який складається з ординат вантажної епюри;

\mathbf{V}_i – матриця податливості i -ї ділянки, яка враховує фізичні властивості і геометричні характеристики i -ї ділянки;

b_i – відносна податливість i -го перерізу (податливість – це величина, обернена жорсткості),

$$b_i = \frac{EJ}{EJ_i},$$

де EJ – жорсткість, яка прийнята за основну.

Коли одинична і вантажна епюри на ділянці прямолінійні, середні ординати цих епюр можна виразити через крайні і скоротити тим самим порядок всіх матриць, які входять до виразу.

Тримірний матриця-рядок L_{ik} отримає вираження через двомірну матрицю-рядок і чисельну матрицю:

$$|\overline{M}_{ik}^A \overline{M}_{ik}^C \overline{M}_{ik}^B| = |\overline{M}_{ik}^A \overline{M}_{ik}^B| \times \begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тримірний вектор-рядок M_{iF} набуває такого вигляду:

$$\begin{vmatrix} M_{iF}^A \\ M_{iF}^C \\ M_{iF}^B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} M_{iF}^A \\ M_{iF}^B \end{vmatrix}.$$

Підставимо ці вирази і, перемноживши середні матриці, отримаємо:

$$\int_0^s \frac{M_F M_k d\ell}{EJ} \Rightarrow \overline{M}_{ik}^A \overline{M}_{ik}^B \left| \frac{\ell_i}{6EJ} \begin{vmatrix} (b_i^A + b_i^C) & b_i^C \\ b_i^C & (b_i^C + b_i^B) \end{vmatrix} \right| \times \begin{vmatrix} M_{iF}^A \\ M_{iF}^B \end{vmatrix}.$$

У цьому випадку матриця податливості \mathbf{V}_i набуває вигляду:

$$\mathbf{V}_i = \frac{\ell_i}{6EJ} \begin{vmatrix} (b_i^A + b_i^C) & b_i^C \\ b_i^C & (b_i^C + b_i^B) \end{vmatrix}.$$

Якщо по довжині ділянки жорсткість постійна, отримаємо:

$$b_i^A = b_i^C = b_i^B = \frac{EJ}{EJ_i} = 1$$

і матриця податливості набуває такого вигляду:

$$B_i = \frac{\ell_i}{6EJ} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Для отримання Δ_{kF} необхідно підсумувати аналогічні дані на всіх ділянках:

$$\Delta_{kF} = \sum L'_{ik} B_i M_{iF}.$$

Це сумування зручно також виконати в матричній формі:

$$\Delta_{kF} = \begin{pmatrix} L_{1k} & L_{2k} & \dots & L_{mk} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & B_m \end{vmatrix} \times \begin{pmatrix} M_{1F} \\ M_{2F} \\ \dots \\ M_{mF} \end{pmatrix}$$

або

$$\Delta_{kF} = L'_k B M_F.$$

Таким чином, на декількох ділянках збільшуються, відповідно, розмірність вектора M_F і рядка L'_k , а матриця податливості становиться квазидіагональною і складається з матриць податливостей окремих ділянок.

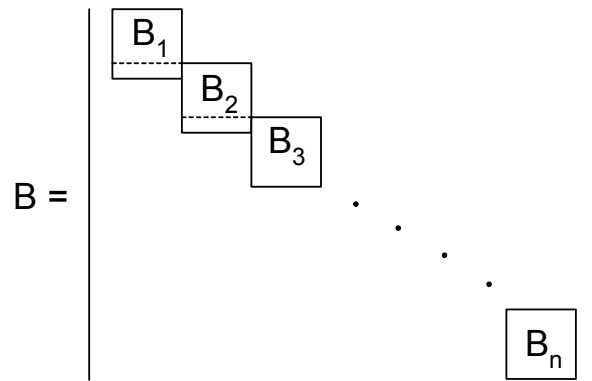
Якщо одночасно визначається декілька переміщень від однієї і тієї самої системи сил, необхідно замість одного рядка L'_k записати n рядків, елементи яких виявляються ординатами відповідних одиничних епюр.

Тоді в загальному вигляді можна записати

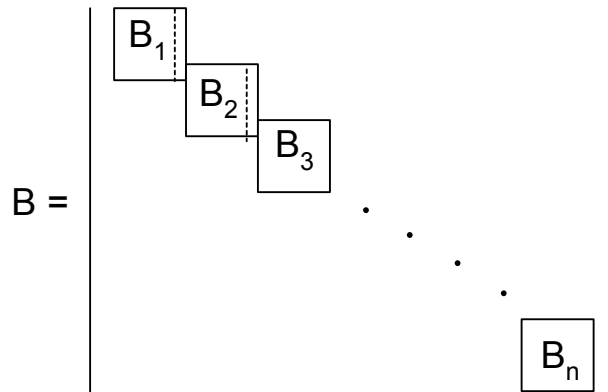
$$\Delta_F = L' B M_F.$$

Перш за все, ніж показати хід розв'язання на прикладі, спробуємо дещо скоротити запис для окремих випадків.

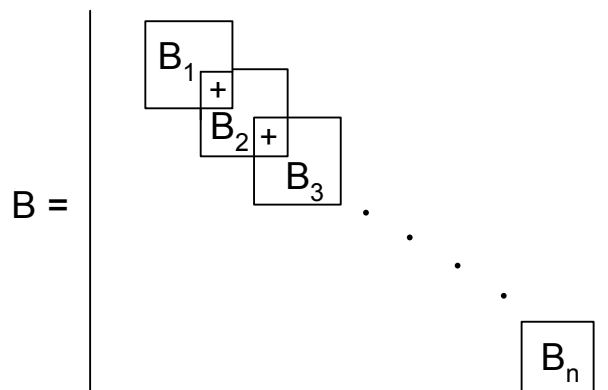
Якщо всі **одиничні епюри безперервні**, тобто суміжні ординати сусідніх ділянок дорівнюють одна одній (на грані ділянок епюра не має стрибка), кінцеву ординату попередньої ділянки і початкову ординату подальшої ділянки можна записати один раз, не повторюючи їх, що відповідно скоротить матрицю L' . У цьому випадку в матриці B необхідно зсунути всі блоки B_i , крім першого, вгору так, щоб попередній і подальший блоки матриці мали по одному загальному рядку:



Якщо *безперечною* є *вантажна епюра*, то аналогічно скорочується вектор M_F , а матриці B_i (крім першої) зсуваються вліво:



Якщо *безперевними* є й *одиничні епюри*, і *епюри від зовнішніх сил*, то блоки матриці зсуваються по обох напрямкам, при цьому їх кутові елементи сумуються:



3.9 Переміщення від дії температури і зсуву опорних чи інших в'язей

Розглянемо, як необхідно визначати переміщення від перепаду температур і зсуву опор, які не викликають внутрішніх зусиль у статично невизначних системах.

I Переміщення від перепаду температур

Треба визначити переміщення деякого перерізу k системи, яка зазнає перепаду температур. Позначимо коефіцієнт температурного розширення матеріалу через α .

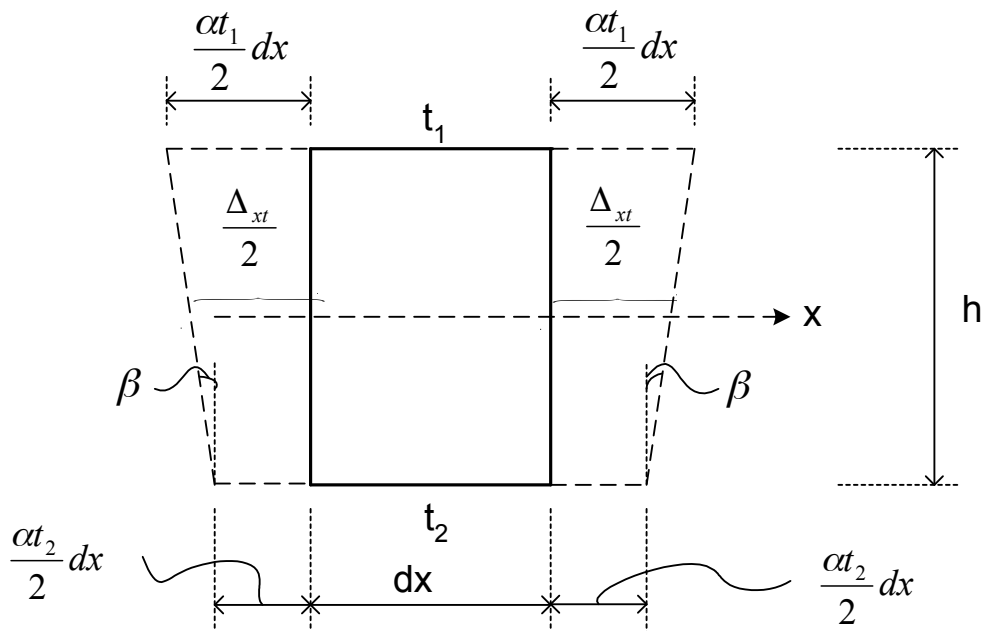


Рисунок 3.23 – До визначення переміщення при перепаді температур

Виріжемо прямокутний елемент dx , який деформований під дією різних температур: t_1 – зверху і t_2 – знизу (рисунок 2.23). Для визначності необхідно прийняти, що $t_1 > t_2$. Тоді верхні волокна розтягнуться більше, а нижні – менше, як це показано на рисунок 3.23 (припускаємо, що переріз симетричний відносно горизонтальної осі x).

Створимо одиничний стан, приклавши в перерізі k одиничну узагальнену силу \bar{k} у напрямку шуканого

переміщення. У результаті в перерізі виникнуть внутрішні зусилля $\overline{M}_K, \overline{Q}_K, \overline{N}_K$.

У відповідності з формулою для визначення можливої роботи зовнішніх дій через внутрішні зусилля можлива робота сили \overline{K} на переміщеннях від перепаду температур виражається через внутрішні зусилля таким чином:

$$A_{Kt} = \overline{K} \Delta_{Kt} = \Delta_{Kt} = \sum_i \int_{\ell_i} \overline{M}_K \Delta_{\theta t} + \sum_i \int_{\ell_i} \overline{N}_K \Delta_{xt} + \sum_i \int_{\ell_i} \overline{Q}_K \Delta_{yt} u.$$

Буква **t** у нижньому індексі переміщення означає, що причиною переміщення є перепад температур.

Розглянемо, яких деформацій зазнає елемент при перепаді температур.

Подовження верхнього волокна дорівнює $\alpha t_1 dx$, нижнього – $\alpha t_2 dx$.

Взаємний кут повороту торцевих перерізів $\Delta_{\theta t}$ визначаємо як подвоєне значення кута β (враховуючи малість деформацій $\beta \approx \text{tg}\beta$):

$$\Delta_{\theta t} = 2 \cdot \left(\frac{\alpha t_1}{2} dx - \frac{\alpha t_2}{2} dx \right) / h = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{d} dx.$$

Взаємне зміщення торцевих перерізів у напрямку осі стержня Δ_{xt} можна отримати як середнє значення подовжень верхнього і нижнього волокон:

$$\Delta_{xt} = \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} dx.$$

Взаємний зсув торцевих перерізів відсутній, тому $\Delta_{yt} = 0$.

Припустимо, що вся система зазнає однакового перепаду температур. Висота **h** однакова для всіх стержнів і ділянок.

Підставимо отримані вирази у формулу для переміщення і винесемо постійні величини за знаки інтегрування:

$$\Delta_{Kt} = \sum_i \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} \int_{\ell_i} \overline{M}_K dx + \sum_i \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} \int_{\ell_i} \overline{N}_K dx.$$

Через те що інтеграл від функції дорівнює площі, обмеженій цією функцією, отримаємо:

$$\int_{t_i} \bar{M}_K dx = \bar{\omega}_{Mi}; \quad \int_{t_i} \bar{N}_K dx = \bar{\omega}_{Ni},$$

де ω_{Mi} , ω_{Ni} – площі, обмежені одиничними епюрами \bar{M}_K і \bar{N}_K на i -й ділянці.

У результаті отримаємо остаточно в загальному випадку формулу переміщень:

$$\Delta_{Kt} = \sum_i \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} \bar{\omega}_{Mi} + \sum_i \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} \bar{\omega}_{Ni}.$$

Правило знаків. Добуток $\frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} \omega_{Mi}$ на ділянці вважається **додатним**, якщо одинична сила і температура подовжують волокна з одного і того самого боку від осі. Інакше кажучи, якщо епюра \bar{M}_K відкладена в той бік, де температура більше.

Добуток $\frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} \omega_{Ni}$ на ділянці вважається **додатним**, якщо одинична сила і температура розтягують стержень одночасно. Інакше кажучи, добуток є додатним, якщо подовжня сила \bar{N}_K здійснює розтягування і $t_1 + t_2 > 0$.

Отже, для **визначення переміщення від перепаду температур** необхідно:

- 1 Створити одиничний стан системи.
- 2 Побудувати епюри внутрішніх зусиль \bar{N}_K, \bar{M}_K в одиничному стані.
- 3 Визначити площі, обмежені кожною з епюр, і обчислити вираз для Δ_{Kt} .

II Переміщення від зсуву опорних чи інших в'язей

Розглянемо систему, опора якої зміщена по горизонталі і вертикалі (опора А на рисунку 3.24).

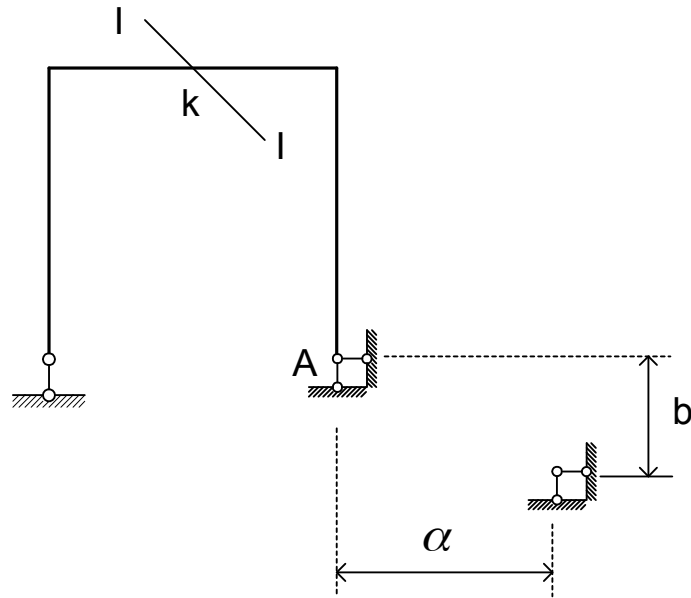


Рисунок 3.24 – До визначення переміщення від зсуву опорних чи інших в'язей

Створимо одиничний стан системи, враховуючи опори нерухомими (рисунок 3.25).

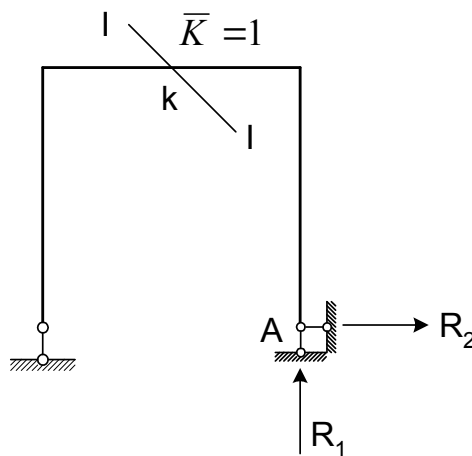


Рисунок 3.25 – Приклад одиничного стану системи

При дії узагальненої сили $\bar{K} = 1$ в опорі A виникають реакції R_1 , R_2 . Згідно з *теоремою Бетті* про *взаємність робіт* отримаємо таке рівняння:

$$\bar{K} \Delta_{Kc} - R_1 b + R_2 \alpha = 0.$$

Вираз зліва – величина роботи сил одиничного стану (\bar{K} , \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2) на переміщеннях у їх напрямках у *дійсному стані*. Справа – робота сил *дійсного стану* (тобто нульових сил) на їх переміщеннях в *одиничному стані*.

З цього виразу отримаємо:

$$\Delta_{Kc} = R_1 b - R_2 a.$$

У загальному випадку можна записати:

$$\Delta_{Kc} = \sum R_i c_i,$$

де \mathbf{R}_i – реакції зміщеної опори, які виникають в одиничному стані;

c_i – величина зміщення опори в напрямку \mathbf{R}_i .

Правило знаків. Добуток $\mathbf{R}_i c_i$ є додатним, якщо реакція \mathbf{R}_i і задане зміщення опори c_i направлені в протилежні боки.

Для визначення *переміщення від зміщення опор* необхідно:

1 Створити одиничний стан системи, вважаючи опори нерухомими.

2 В одиничному стані визначити реакції опори в напрямку зміщення.

3 Обчислити $\Delta_{Kc} = \sum R_i c_i$.

4 ПРИКЛАДИ РІШЕННЯ ЗАДАЧ

4.1 Задача 1. Розрахунок плоских статично невизначних рам методом переміщень

4.1.1 Основні теоретичні положення

Як відомо, у статично невизначних системах рівнянь рівноваги недостатньо для визначення всіх зусиль у конструкції. Тому рівняння статики розв'язуються разом з іншими рівняннями, які передають умови деформації системи. Для спрощення розрахунок будується таким чином, що деякі фактори системи вибираються як основні невідомі, а всі інші величини в конструкції виражаються через них.

У *методі сил* такими основними незалежними беруться внутрішні зусилля. У *методі переміщень* використаний інший підхід.

За основні невідомі приймаємо переміщення вузлів системи. Будемо розрізняти два типи розрахункових схем стержневих конструкцій: стержні, в яких враховується розтягання, і стержні, у яких не враховується розтягання.

Слід зазначити, що всі стержні мають кінцеву жорсткість на розтягання-стиснення, і в загальному випадку при завантаженні змінюють свою довжину. У багатьох випадках вплив поздовжніх і поперечних деформацій на загальні величини переміщень вузлів рами дуже малий порівняно з величинами деформацій згину, і без суттєвої похибки можна знехтувати впливом поздовжніх і поперечних сил на деформації стержнів.

4.1.2 Визначення ступеня кінематичної невизначності (кількості невідомих)

Розрахункова схема зі стержнями, які не розтягуються

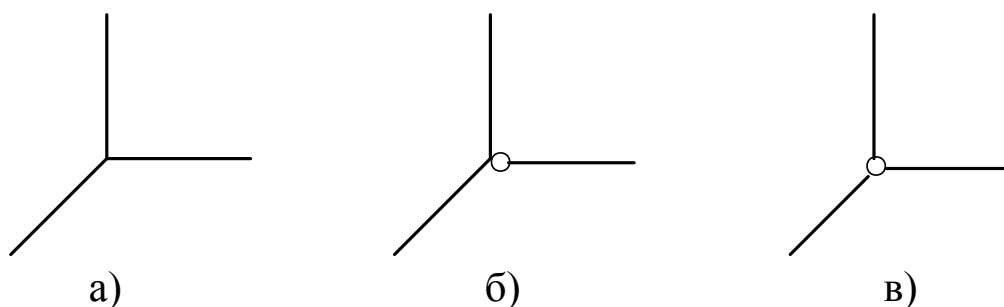
Загальне число невідомих незалежних переміщень вузлів рами визначається за формулою

$$n = n_y + n_d, \quad (4.1)$$

де n_y – число невідомих кутів повороту вузлів системи; дорівнює числу жорстких вузлів (опорні вузли сюди не входять);

n_d – число невідомих лінійних переміщень вузлів.

Жорстким вважається такий вузол, у якому кінці двох, що сходяться в ньому, стержнів жорстко пов'язані між собою (рисунок 4.1).



а, б – жорсткі вузли; в – шарнірний вузол

Рисунок 4.1 – Характерні види з'єднання стержнів у вузлі

Число кутових переміщень дорівнює тільки числу жорстких вузлів. Це пов'язано з тим, що кути повороту шарнірних вузлів є залежними переміщеннями від кутів повороту жорстких вузлів (таблиця 4.1), а нам необхідно знайти незалежні переміщення.

При визначенні числа лінійних невідомих зміщень потрібно замінити схему заданої статично невизначної системи її шарнірною схемою, тобто вводяться повні шарніри в усі вузли та опорні кріплення. Переміщення всіх вузлів такої системи не є незалежними, тому зміщення одного з них може викликати зміщення інших вузлів.

Число незалежних лінійних зміщень вузлів системи дорівнює числу стержнів, які потрібно ввести в шарнірну систему споруди, щоб перетворити її в геометрично незмінювану. Іншими словами, число незалежних лінійних зміщень вузлів дорівнює числу ступенів свободи шарнірної схеми заданої рами:

$$n_d = ш - 3k, \quad (4.2)$$

де $ш$ – число всіх простих шарнірів системи (шарнір називається **простим**, якщо він з'єднує два стержні; шарнір, який з'єднує j стержнів, еквівалентний $j-1$ простим шарнірам).

Визначимо число невідомих у рамі, зображеній на рисунку 4.2.

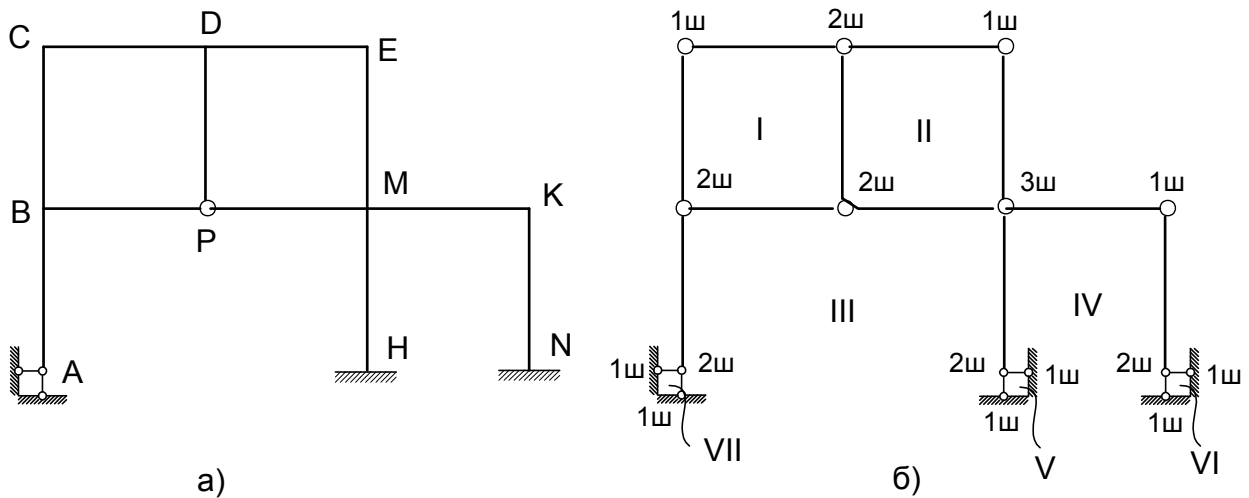


Рисунок 4.2 – Схема заданої рами (а) та її шарнірна схема (б)

Жорсткими вузлами є **B, C, D, E, M, K**, тому

$$n_y = 6.$$

Число лінійних зміщень визначаємо за формулою

$$n_{\text{л}} = 24 - 3 \times 7 = 3.$$

На рисунку 4.2, б римськими цифрами **I, II, ..., VI** позначені замкнуті контури рами, а арабськими цифрами **1, 2, 3** – число простих шарнірів у заданому вузлі. Таким чином, загальне число невідомих дорівнює

$$n = 6 + 3 = 9,$$

з них **6** – кутових переміщень і **3** – лінійних.

Число незалежних лінійних зміщень вузлів можна визначити, не звертаючись до формули (4.2). Приймавши $EА = \infty$, ми виключаємо лінійні переміщення внаслідок роботи стержнів на розтягання-стиснення. Отже, для такої розрахункової схеми лінійні переміщення будуть визначатися тільки деформацією при згинанні стержнів.

Аналіз роботи схеми розрахункової рами (рисунок 4.2, а) показує, що вузли **C, D, E, B, P, M, K** переміщуються по

горизонталі; а вузли **D** і **P** – по вертикалі. Таким чином, число незалежних лінійних переміщень дорівнює **3**, що відповідає знайденим за формулою (4.2) переміщенням.

4.1.3. Розрахункова схема рами з елементами, які розтягуються

Загальна кількість невідомих для цієї розрахункової схеми може бути визначена за формулою

$$n = 3 \cdot Y_{\text{ж}} + 2 \cdot Y_{\text{ш}} - C_0, \quad (4.3)$$

де $Y_{\text{ш}}$, $Y_{\text{ж}}$ – відповідно, кількість шарнірних (з повними шарнірами) і жорстких вузлів споруди (сюди входять і опорні вузли);

C_0 – число опорних стержнів.

Для рами, зображеної на рисунку 4.2, а, кількість невідомих дорівнює

$$n = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 2 - 8 = 20.$$

Як і раніше, число невідомих n можна визначити, послідовно закріплюючи всі вузли рами від лінійних і кутових зміщень. Так, вузли **B**, **C**, **D**, **E**, **M**, **K** мають по три зміщення (одне кутове та два лінійних), а вузол **P** – два лінійних зміщення, тобто всього **20**.

Порівняння результатів, одержаних у цьому та попередніх пунктах, показують, що припущення про те, що стержні не можуть розтягуватися, знизило ступінь кінематичної невизначеності з **20** до **9**. Це значно спрощує розрахунок.

4.1.4 Основна система

При розрахунку статично невизначених систем *методом переміщень* основна система являє собою систему однопрогонових статично невизначених стержнів. Це досягається введенням в усі жорсткі вузли заданої системи затиснень і

встановленням додаткових стержнів, що перешкоджають лінійним зміщенням вузлів.

Основна система заданої рами (рисунок 4.2, а) показана на рисунку 4.3. У задану систему введено 6 в'язей (вузли В, С, D, Е, М, К), які перешкоджають повороту вузлів, і три в'язі (вузли Р, Е, К), які перешкоджають лінійним переміщенням вузлів.

Слід зазначити, що введені затиснення відрізняються від звичайного абсолютного затиснення тим, що перешкоджають лише повороту вузла і не лишають його лінійної рухомості. Порівняємо основну систему методу переміщень з основною системою методу сил.

Показана на рисунку 4.3 *основна система* 18 разів статично невизначна. Якщо *основна система методу сил* отримується відкиданням в'язей (рисунок 4.4), то *основна система методу переміщень* – введенням в'язей (рисунки 4.2, а; 4.3).

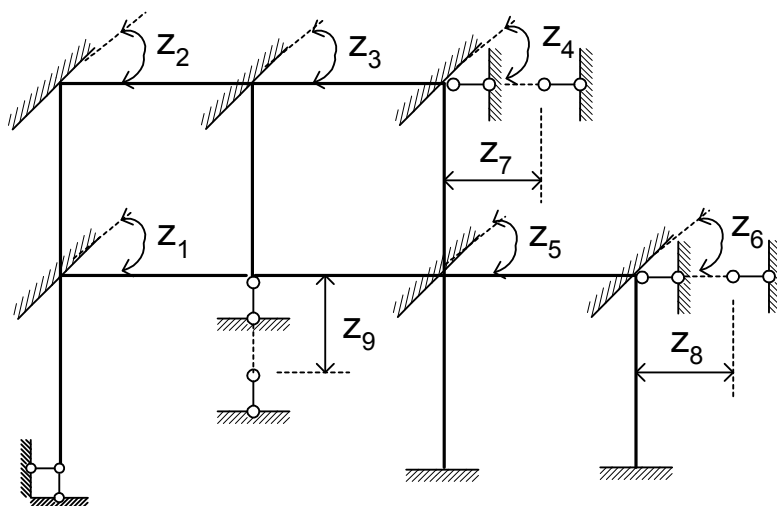


Рисунок 4.3 – Основна система методу переміщень

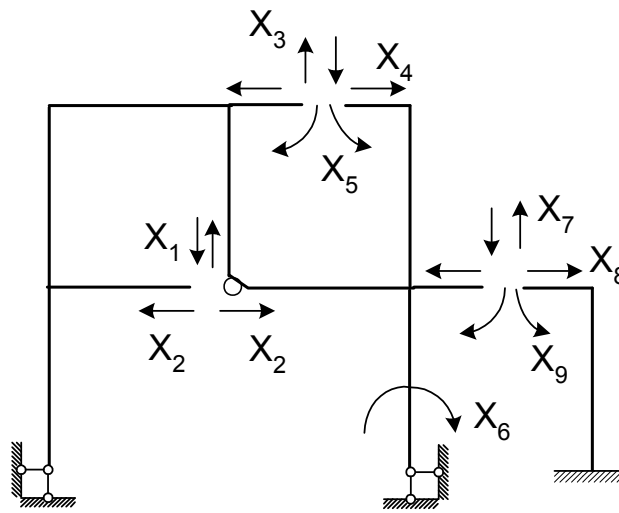


Рисунок 4.4 – Основна система методу сил

Перехід від заданої системи до **основного методу сил** пов'язаний зі зниженням ступеня її статичної невизначності, а перехід до **основної системи методу переміщень** – з підвищенням ступеня статичної невизначності. За основні невідомі в **методі переміщень** приймаються кутові $Z_1 \dots Z_6$ та лінійні $Z_7 \dots Z_9$ переміщення вузлів (рисунок 4.3).

4.1.5. Канонічні рівняння методу переміщень при розрахунку на дію зовнішнього навантаження

Основна система (рисунок 4.3) відрізняється від заданої (рисунок 4.2) наявністю додаткових в'язей, які перешкоджають кутовим і лінійним переміщенням вузлів. У введених затисненнях виникають **реактивні моменти**, а в добавлених стержнях – **реактивні зусилля**. Реактивні моменти та реактивні зусилля можна обернути в нуль, якщо повернути затиснення на кути, що дорівнюють дійсним поворотам вузлів, і змістити вузли так, щоб їхні лінійні переміщення дорівнювали переміщенням, що виникають у заданій системі. Математичний запис цього факту виражається системою канонічних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + \dots + Z_n r_{1n} + R_{1F} &= 0, \\
 Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + \dots + Z_n r_{2n} + R_{2F} &= 0, \\
 \dots \dots \dots & \\
 Z_1 r_{n1} + Z_2 r_{n2} + \dots + Z_n r_{nn} + R_{nF} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

У матричній формі система рівнянь (4.4) має такий вигляд:

$$R \bar{z} + \bar{R}_F = 0; \quad (4.5)$$

$R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$ – матриця жорсткості або матриця реакцій;

$R = \begin{bmatrix} r_{11} \\ \vdots \\ r_{n1} \end{bmatrix}$ – вектор невідомих переміщень;

$\bar{R}_F = \begin{bmatrix} R_{1F} \\ \vdots \\ R_{nF} \end{bmatrix}$ – вектор вантажних реакцій.

Кожний коефіцієнт r_{ik} ($i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, n$) системи рівнянь (4.4) являє собою реактивний момент (зусилля) у введеному затисненні в додатковій в'язі [i – від повороту (лінійного зміщення) в'язі k на одиницю].

Таким чином, у позначенні реакції r_{ik} індекс i показує номер в'язі, у якій обчислюється реакція, а індекс k – номер в'язі, зміщення якої викликає цю реакцію (i – де виникає реакція, а k – від чого вона виникає). Вільний член R_{iF} ($i = 1, 2, \dots, n$) системи рівнянь являє собою реакції (реактивні моменти, реактивні зусилля) в i -х в'язях, викликаних зовнішнім навантаженням.

4.1.6 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь

4.1.6.1 Загальний спосіб

Розглянемо основну систему переміщень у двох одиничних станах i та k (рисунок 4.5).

Стан i характеризується переміщенням в'язі “ i ” на одиницю, в результаті чого у в'язі “ k ” виникає реактивний момент r_{ki} . У стані k повертається в'язь “ k ” на кут, що дорівнює одиниці, і при цьому у в'язі “ i ” виникає реакція r_{ik} .

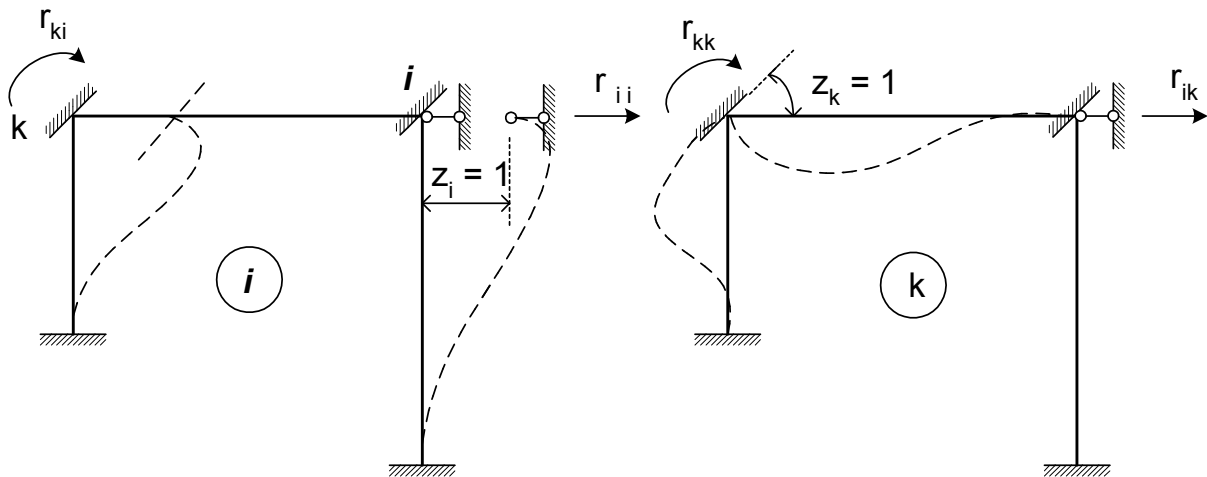


Рисунок 4.5 – Основна система методу переміщень у двох одиничних станах

Виразимо роботу зовнішніх сил (r_{kk} , r_{ik}) стану “к” на переміщеннях стану “і” через роботу внутрішніх сил стану “к” (M_k , N_k , Q_k) на переміщеннях, відповідних стану “і” $\left(\frac{M_i}{EJ}, \frac{N_i}{EA}, \frac{\mu Q_i}{GA}\right)$, та, враховуючи, що на будь-яких можливих нескінченно малих переміщеннях сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил дорівнює нулю, отримаємо:

$$A_{ki} = r_{ik} \cdot I = \sum \int \frac{M_k M_i}{EJ} ds + \sum \int \frac{N_k N_i}{EA} ds + \sum \int \frac{\mu Q_k Q_i}{GA} ds. \quad (4.6)$$

Звідки, беручи до уваги тільки роботу згинальних моментів, знайдемо:

$$r_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k}{EJ} ds. \quad (4.7)$$

Таким чином, щоб знайти коефіцієнт системи рівнянь (4.4), слід в основній системі побудувати одиничні епюри M_i та M_k і їх “перемножити” (тобто обчислення інтегралу (4.7) провести за відомим правилом Верещагіна).

На підставі теореми про взаємність робіт прирівняємо роботу зовнішніх сил стану “к” на переміщеннях стану “і” до роботи зовнішніх сил стану “і” на переміщеннях стану “к”:

$$A_{ki} = A_{ik},$$

ТАКИМ ЧИНОМ,

$$r_{ik} = r_{ki}. \quad (4.8)$$

З рівняння (4.8) випливає, що коефіцієнти рівнянь (4.4) мають властивості симетрії, тобто матриця \mathbf{R} системи (4.5) є симетричною відносно діагоналі. Для визначення вільних членів системи рівнянь (4.4), тобто реакцій, що виникають від зовнішнього навантаження, розглянемо два інших стани основної системи: *вантажне*, яке характеризується діями зовнішнього навантаження, та *одиничне*, яке характеризується переміщенням в'язі "i" (рисунок 4.6).

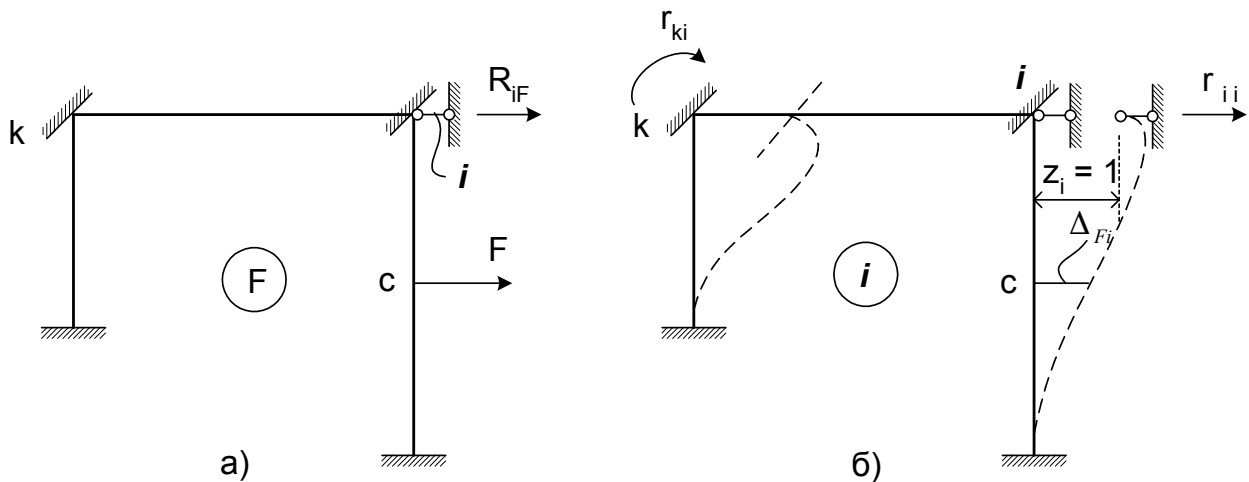


Рисунок 4.6 – Основна система методу переміщень у вантажному (а) та одиничному (б) станах

Робота зовнішніх сил стану \mathbf{F} на переміщеннях стану i дорівнює

$$A_{Fi} = F \Delta_{Fi} + R_{iF} \cdot I. \quad (4.9)$$

На підставі теореми про взаємність робіт $A_{Fi} = A_{iF}$, але $A_{iF} = 0$ (рисунок 4.6). Тому з рівняння (4.9) отримаємо

$$R_{iF} = F \Delta_{Fi}, \quad (4.10)$$

де Δ_{Fi} – переміщення точки C (точка прикладання сили \mathbf{F}) в статично невизначній системі, яке викликане одиничним зміщенням в'язі "i". Для визначення цього переміщення слід зробити наступне.

В статично визначній системі прикласти в точці С за напрямком сили $F = 1$ і побудувати від неї епюру M^* (рисунок 4.7).

Кожну ординату побудованої епюри M^* перемножити на величину сили F , тобто одержати епюру M_F (вантажна епюра в основній системі методу сил). Іншими словами, M_F – епюра, яка побудована від зовнішнього навантаження в будь-якій статично визначній системі, що може бути одержана з заданої або основної системи методу переміщень усуненням зайвих в'язей, реакція якої визначається. Тепер переміщення, яке визначається при обліку роботи тільки згинальних моментів, дорівнює

$$\Delta_{Fi} = \sum \int M_F^* \cdot \frac{M_i}{EI} ds, \quad (4.11)$$

а невідомі реакції з виразу (4.10):

$$R_{iF} = \sum \int \frac{M_F^* M_i}{EI} ds. \quad (4.12)$$

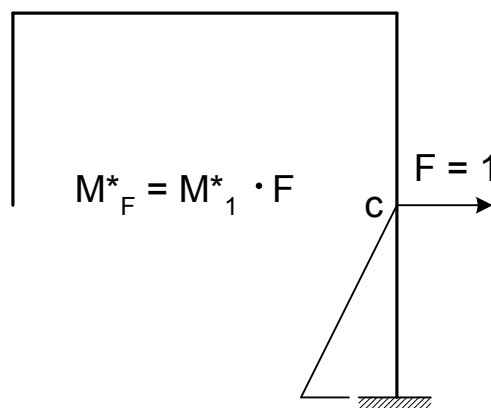


Рисунок 4.7 – Вантажна епюра в основній системі методу сил

Із виразу (4.12) випливає: для одержання реакцій в i -й в'язі від заданого навантаження треба “перемножити” епюру згинальних моментів у статично визначній системі від зовнішнього навантаження на епюру згинальних моментів M_i від одиничного зміщення i -ї в'язі в основній системі методу переміщень і знак результату змінити на протилежний.

Повернемося ще раз до рівняння (4.10). Приймаємо $\mathbf{F} = \mathbf{1}$ і в зв'язку з цим замінимо Δ_{Fi} на δ_{Fi} , а $\mathbf{R}_{iF} = \mathbf{r}_{iF}$. У результаті отримаємо

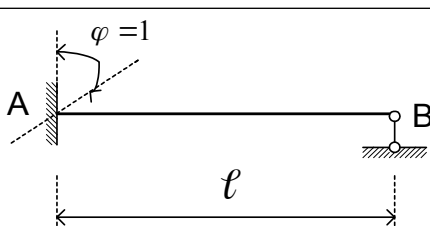
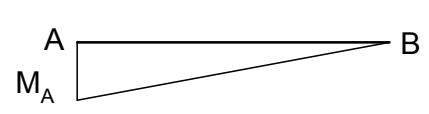
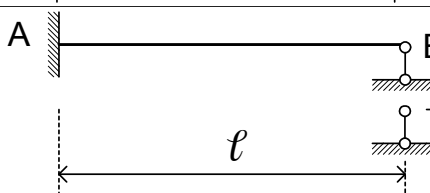
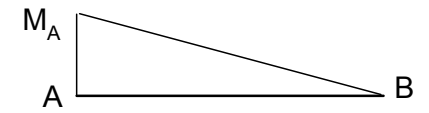
$$r_{iF} = \delta_{Fi}. \quad (4.13)$$

Рівність (4.13) виражає взаємність реакцій і переміщень. Таким чином, епюру переміщень δ_{Fi} , яка викликана переміщенням в'язі $\mathbf{Z}_i = \mathbf{1}$, можна розглядати як лінію впливу реакції в цій в'язі (з протилежним знаком).

4.1.6.2 Статичний спосіб

Основна система методу переміщень (рисунок 4.3) складена з однопрогонових статично невизначних стержнів. Задача визначення внутрішніх сил у таких стержнях може бути розв'язана будь-яким із відомих методів, наприклад *методом сил*. Результати таких розрахунків зведені в таблицю стандартних рішень (таблиця 4.1). У цій таблиці наведено числові рішення з урахуванням згинальних деформацій стержня для характерних випадків закріплення зміщень опор, зовнішнього навантаження та впливу температури.

Таблиця 4.1 – Таблиця стандартних рішень

Схема стержня	Епюра моменту	Формула
1	2	3
		$M_A = \frac{3EJ}{\ell}$
		$M_A = \frac{3EJ}{\ell^2}$

		$M_A = \frac{F\ell}{2} v (1 - v^2)$ $M_c = \frac{F\ell}{2} u^2 (3 - u)$
		$M_A = \frac{q\ell^2}{8}$

Продовження таблиці 4.1

1	2	3
		$M_A = \frac{m}{2} (3v^2 - 1)$
		$M_A = \frac{q\ell^2}{15}$
		$M_A = \frac{3EJ \propto t'}{2d}$
		$M_A = \frac{4EJ}{\ell};$ $M_B = \frac{2EJ}{\ell}$
		$M_A = M_B = \frac{6EJ}{\ell^2}$

		$M_A = u v^2 F l;$ $M_B = u^2 v F l;$ $M_C = 2u^2 v^2 F l$
--	--	--

Продовження таблиці 4.1

1	2	3
		$M_A = M_B = \frac{q l^2}{12}$
		$M_A = m v (3u - 1);$ $M_B = m u (3v - 1)$
		$M_A = \frac{q l^2}{20};$ $M_B = \frac{q l^2}{30}$
		$M_A = M_B = \frac{EJ \alpha t}{d}$

Перед тим як перейти до визначення реактивних моментів і реактивних зусиль, зазнач, що всі коефіцієнти, а також вільні члени рівнянь (4.4), (4.5) розділені на дві групи: коефіцієнти – реактивні моменти у введених затисненнях; коефіцієнти – реактивні зусилля у введених стержнях.

Коефіцієнти та вільні члени, що є реактивними моментами в затисненнях, визначаються вирізанням вузлів і складанням рівнянь $\Sigma M_y = 0$. Коефіцієнти та вільні члени у введених стержнях можна визначити за допомогою перерізу, що відокремлює частину або всю раму від опор. Далі складають рівнянь рівноваги сил, що діють на частину, яка відсікається: $\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$.

Розглянемо приклад визначення реактивних зусиль. Реактивне зусилля будемо вважати додатним, якщо напрямок його дії співпадає з прийнятим напрямком повороту або лінійного зміщення вузла.

Нехай задана рама, зображена на рисунку 4.8, а. Її основна система зображена на рисунку 4.8, б.

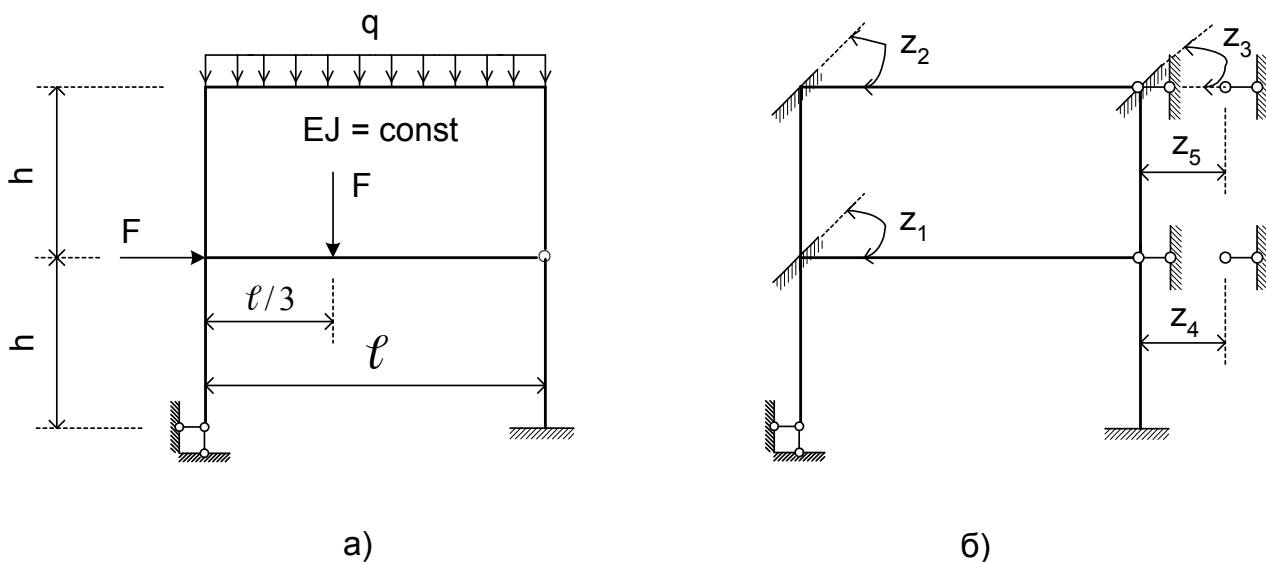


Рисунок 4.8 – Задана рама та її основна система

Покажемо, як визначаються коефіцієнти r_{11} , r_{21} , r_{31} , r_{41} та вільні члени R_{1F} , R_{2F} , R_{3F} , R_{4F} . Побудуємо епюри M_1 та M_F (рисунок 4.9).

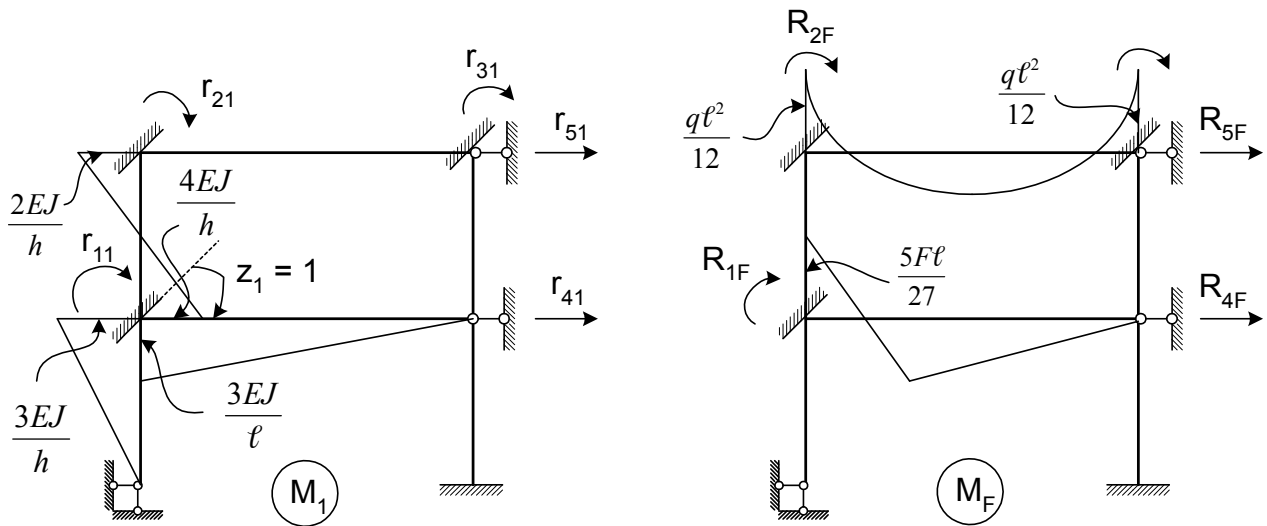


Рисунок 4.9 – Епюри M_1 та M_F

Епюра M_1 побудована від повороту на одиницю затиснення у вузлі “1” за напрямком стрілки годинника. Ординати епюри в кожному стержні одержані за допомогою таблиці стандартних рішень (таблиця 4.1: схеми 8 і 1). Для побудови епюри M_F використані схеми 11 і 3 тієї самої таблиці. Реактивні моменти направляємо за напрямком стрілки годинника (у бік повороту вузлів). Вирізаємо відповідні вузли, і з рівнянь отримуємо значення реактивних моментів (рисунок 4.10).

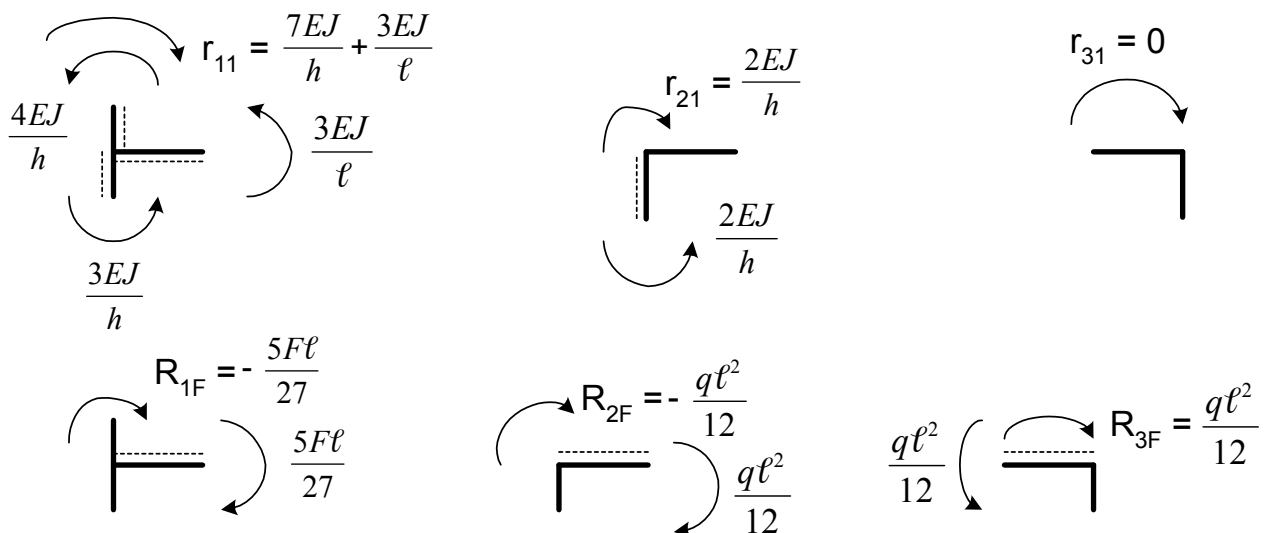


Рисунок 4.10 – До визначення реактивних моментів

Визначимо тепер реактивні зусилля (рисунок 4.11).

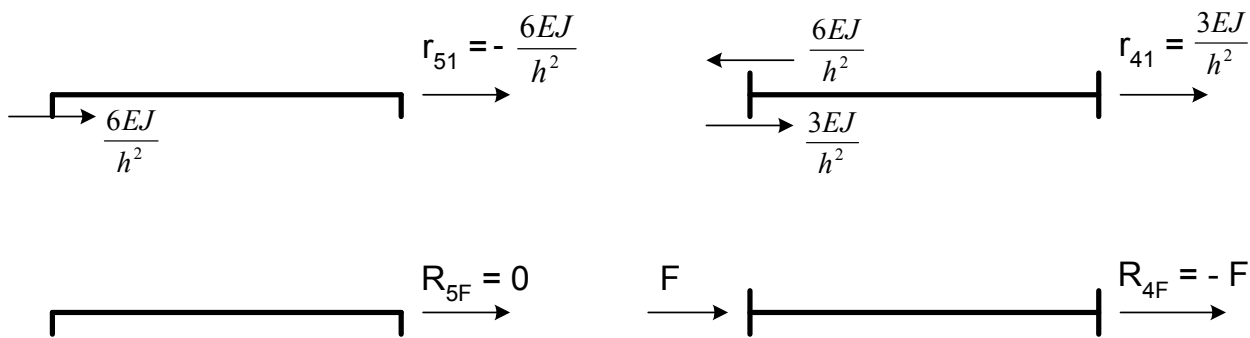


Рисунок 4.11 – До визначення реактивних зусиль

4.1.6.3 Перевірка правильності визначення реактивних зусиль і моментів

Для перевірки правильності знайдених реактивних зусиль з різними індексами використаємо рівняння (4.8). Наприклад, перевіримо правильність обчислення реактивних зусиль r_{41} (рисунок 4.11). Із формули (4.8) випливає, що $r_{41} = r_{14}$.

Побудуємо епюру M_4 (рисунок 4.12) і виріжемо вузол 1.

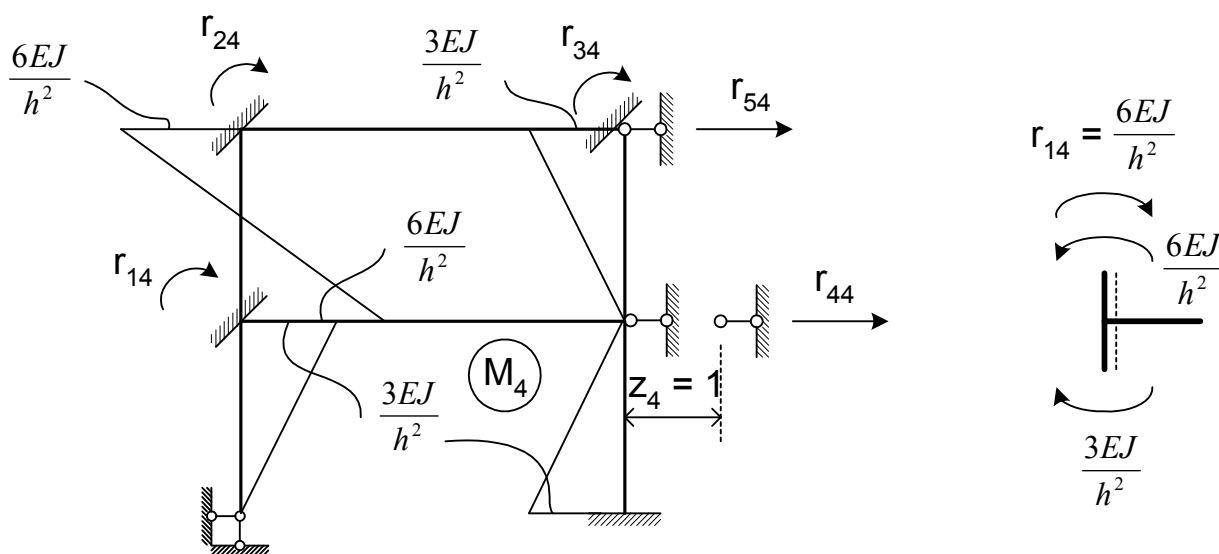


Рисунок 4.12 – Епюра M_4

Як видно, рівність $r_{14} = r_{41}$ витримується, отже, реактивний момент r_{14} визначено правильно.

Для перевірки правильності реактивних зусиль з однаковими індексами ($i = k$) і реактивних зусиль, викликаних

зовнішнім навантаженням, використаємо залежності (4.7) та (4.12).

Визначимо r_{11} :

$$r_{11} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3EJ}{\ell} \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3EJ}{\ell} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3EJ}{h} \cdot h \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3EJ}{h} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4EJ}{h} \cdot h \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4EJ}{h} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2EJ}{h} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2EJ}{h} \cdot h \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2EJ}{h} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4EJ}{h} \right) \right]$$

$$r_{11} = \frac{3EJ}{\ell} + \frac{7EJ}{h}.$$

Цей результат відповідає значенню, знайденому статичним способом.

Визначимо реактивне зусилля R_{4F} . Побудуємо епюру M_F^* в основній системі методу сил (рисунок 4.13).

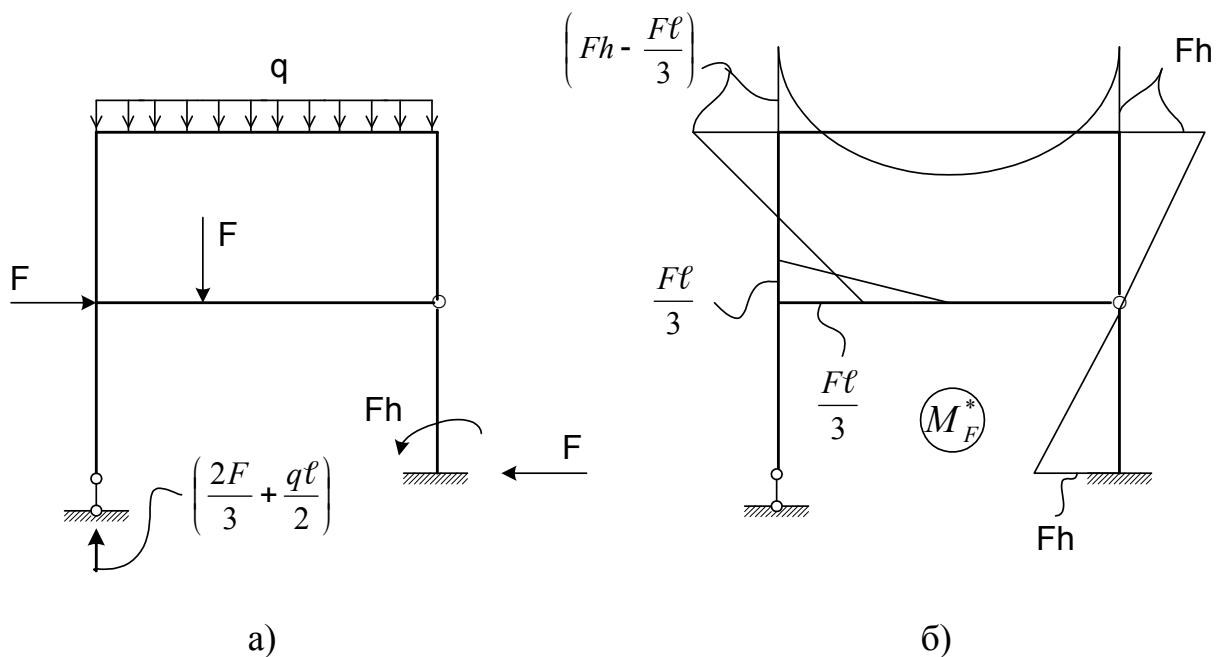


Рисунок 4.13 – Еквівалентна система методу сил (а) та епюра моментів M_F^* (б)

$$R_{4F} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{6EJ}{h^2} \cdot h \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{F\ell}{3} - \frac{1}{3} \left\langle Fh - \frac{F\ell}{3} \right\rangle \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{6EJ}{h^2} \cdot h \left(\frac{2}{3} \left\langle Fh - \frac{F\ell}{3} \right\rangle - \frac{1}{3} \cdot \frac{F\ell}{3} \right) \right] = F.$$

Знак цього результату відповідно до виразу (4.12) слід змінити на протилежний. Тоді одержимо $R_{4F} = -F$, що також

відповідає зусиллю, знайденому статичним способом. Після того як знайдені та перевірені коефіцієнти та вільні члени системи рівнянь (4.4), здійснюється їхнє розв'язання.

4.1.6.4 Розв'язання системи лінійних рівнянь у матричній формі

Розв'язком системи рівнянь (4.4) називається сукупність таких чисел Z_1, \dots, Z_n , які обертають всі рівняння системи в тотожність. Система рівнянь (4.4) має єдиний розв'язок, якщо матриця R не вироджена, тобто $\det R \neq 0$.

У цьому випадку матриця R має зворотну матрицю і розв'язок системи записується так:

$$\bar{Z} = R^{-1} \cdot \bar{R}_F. \quad (4.14)$$

Щоб знайти зворотну матрицю R^{-1} , треба побудувати допоміжну матрицю C , складену з алгебраїчних доповнень елементів r_{ij} матриці R , транспонувати її та перемножити на число $\frac{1}{\det R}$, тобто

$$R^{-1} = \frac{1}{\det R} \cdot C^T. \quad (4.15)$$

Кожний елемент допоміжної матриці C_{ij} визначається за формулою

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \quad (4.16)$$

Мінором M_{ij} називається визначник $n - 1$ порядку, одержаний із визначника $/R/$ викреслюванням i -го рядка та j -го стовпчика.

Для систем порядку $n = 3$ матриця R має вигляд

$$R = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}.$$

Допоміжна матриця

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}.$$

Знайдемо елементи допоміжної матриці. Для визначення C_{11} в матриці R викреслюємо перший рядок і перший стовпчик. Тоді відповідно до формули (4.16)

$$C_{11} = r_{22} r_{33} - r_{32}^2. \quad (4.17)$$

Аналогічно знаходяться інші елементи матриці

$$\begin{aligned} C_{12} &= C_{21} = -(r_{21} r_{33} - r_{31} r_{23}), \\ C_{13} &= C_{32} = r_{21} r_{32} - r_{31} r_{22}, \\ C_{22} &= r_{11} r_{33} - r_{31}^2, \\ r_{23} &= r_{32} = -(r_{11} r_{32} - r_{31} r_{12}), \\ C_{33} &= (r_{11} r_{22} - r_{12}^2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Транспонована матриця

$$C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = C.$$

Тепер

$$\begin{aligned} Z_1 &= -\frac{1}{\det R} (C_{11} R_{1F} + C_{12} R_{2F} + C_{13} R_{3F}), \\ Z_2 &= -\frac{1}{\det R} (C_{21} R_{1F} + C_{22} R_{2F} + C_{23} R_{3F}), \\ Z_3 &= -\frac{1}{\det R} (C_{31} R_{1F} + C_{32} R_{2F} + C_{33} R_{3F}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Для систем більш високого порядку розв'язок може бути отриманий аналогічно.

4.1.7 Побудова епюр M , Q , N у заданій системі

Після того як системи канонічних рівнянь (4.4), (4.5) методом переміщень розв'язано та знайдено значення невідомих кутів повороту та лінійних переміщень вузлів, можна перейти до побудови кінцевих епюр у заданій системі. Кінцева епюра

моментів отримується додаванням ординат епюри M_F , побудованої в основній системі, з ординатами одиничних епюр, перемножених на значення невідомих:

$$M = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + \dots + M_n Z_n + M_F. \quad (4.20)$$

Правильність побудови кінцевої епюри M може бути перевірена за допомогою заходів, які застосовувалися в методі сил

$$\sum \int \frac{MM_s^*}{EJ} ds = 0, \quad (4.21)$$

де M – кінцева епюра (вираз 4.20);

M_s^* – сумарна одинична епюра, яка побудована в основній системі методу сил.

Велике значення має статична перевірка рівноваги моментів у вузлах, тому що у всіх сумарних епюрах вузли не врівноважені (рисунок 4.12). Невиконання умови рівноваги вузлів ($\sum M = 0$) у кінцевій епюрі буде означати, що невідомі визначені неправильно.

Епюру поперечних сил Q можна побудувати за епюрою M :

$$Q = Q^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{\ell_n}, \quad (4.22)$$

де M_n та M_{n-1} – відповідно правий і лівий опорні моменти елемента рами, який розглядається;

ℓ_n – прогін елемента, який розглядається;

Q^0 – поперечна сила в лівому перерізі елемента, як балки на двох опорах.

Після епюри поперечних сил Q способом вирізання вузлів можна побудувати епюру поздовжніх сил N . Перевірка епюр Q та N виконується звичайним способом. При цьому велике значення має статична перевірка рівноваги окремих частин рами.

4.1.8 Розрахунок на вплив температури

Зміна температурного режиму в статично невизначних системах призводить до появи в них внутрішніх зусиль і напружень.

Система канонічних рівнянь при впливах температури відрізняється від системи (4.5) вектором – стовпцем вільних членів і має такий вигляд:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{R}_t = 0. \quad (4.23)$$

Тут елементи вектора-стовпця \mathbf{R}_t являють собою реакції введених в'язей в основній системі від симетричних і кососиметричних впливів температури:

$$\vec{\mathbf{R}}_t = \begin{bmatrix} R_{1t} + R_{1t}' \\ R_{2t} + R_{2t}' \\ \dots \\ R_{nt} + R_{nt}' \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Визначимо реакції для рами, що зображена на рисунку 4.14.

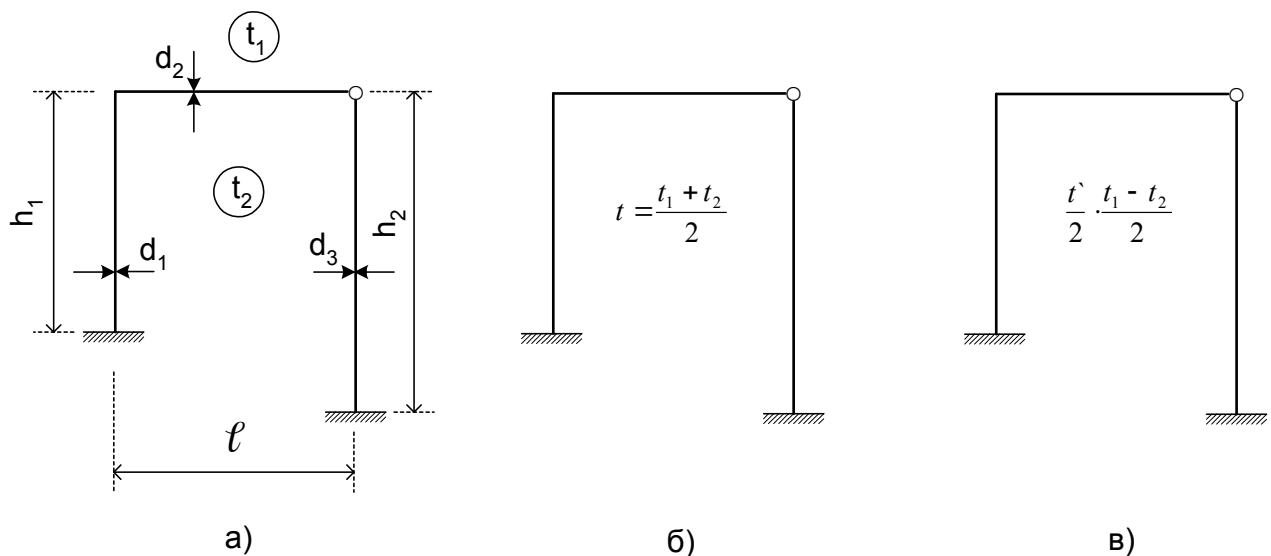


Рисунок 4.14 – Схема рами (а), симетричні (б) та кососиметричні (в) впливи температури

Спочатку знайдемо подовження (будемо враховувати $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ та $t_1 > t_2$) всіх стержнів рами в основній системі від впливу температури t (рисунок 4.15).

Після цього, користуючись таблицею стандартних рішень (таблиця 4.1), побудуємо епюри \mathbf{M}_t та знайдемо \mathbf{R}_{1t} та \mathbf{R}_{2t} :

$$\mathbf{R}_{1t} = \left[\frac{3EJ}{\ell^2} \propto t(h_2 - h_1) + \frac{6EJ}{h_1^2} \propto t\ell \right];$$

$$\mathbf{R}_{2t} = \frac{12EJ}{h_1^3} \propto t\ell.$$

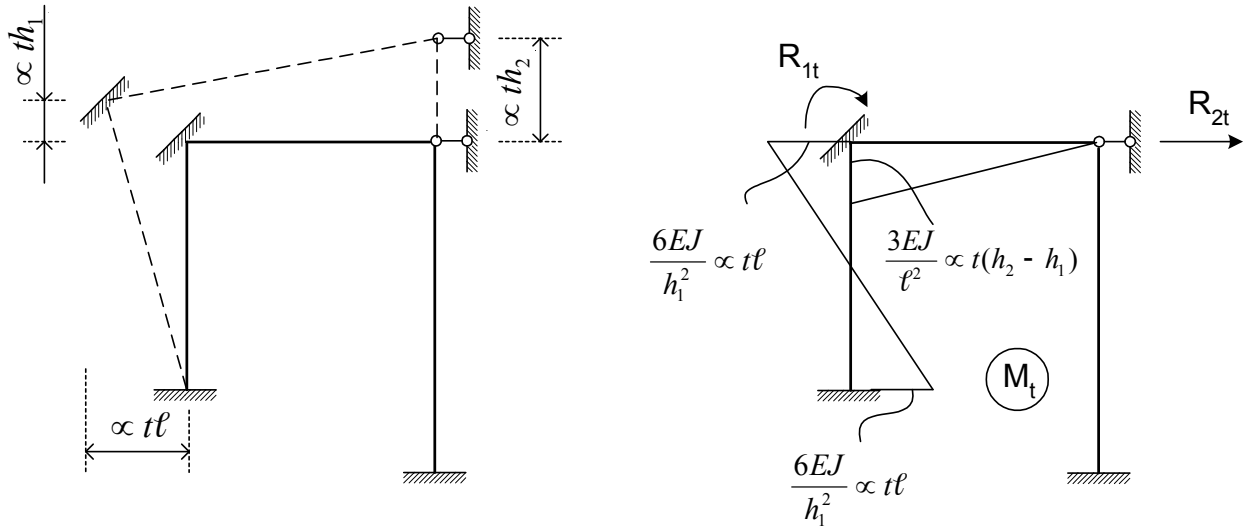


Рисунок 4.15 – Схема переміщень вузлів рами від впливу температури t та епюри M_t

Для визначення реакцій від кососиметричного впливу температури за допомогою таблиці 4.1 (схеми 7 та 14) побудуємо епюру M_t (рисунок 4.16).

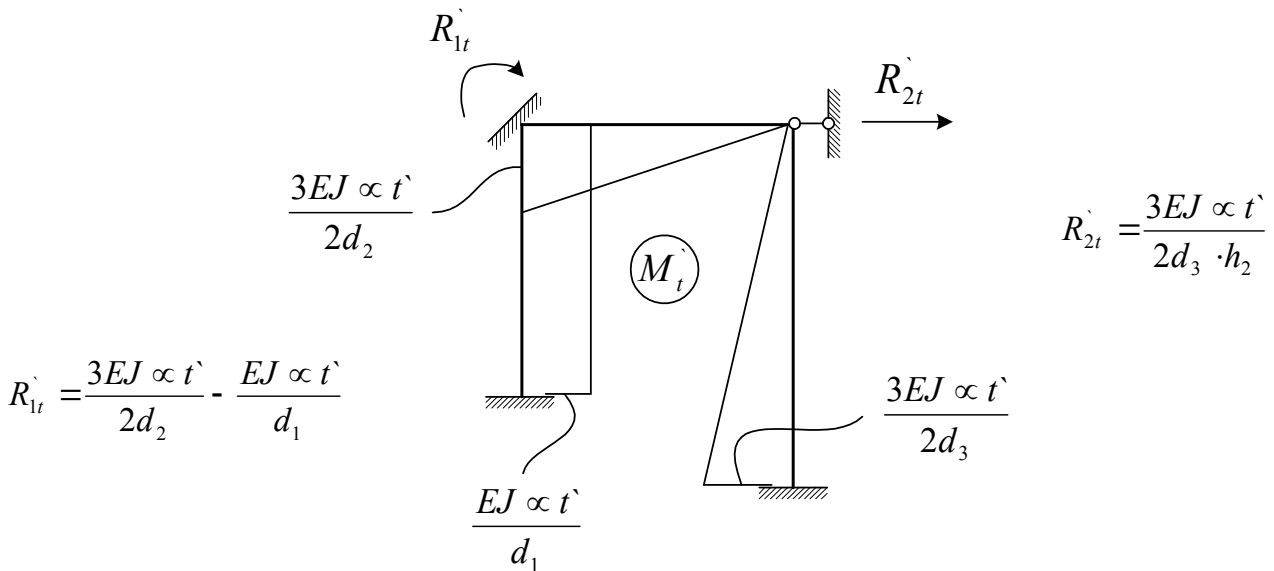


Рисунок 4.16 – Епюра M_t

Далі визначимо реакції R'_{1t} та R'_{2t} . Кінцеву епюру моментів у заданій системі можна побудувати за формулою

$$M = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + \dots + M_n Z_n + M_t + M'_t. \quad (4.25)$$

Правильність побудови кінцевої епюри M від впливу температури підтверджується таким правилом: повинна виконуватися рівність нулю переміщень у напрямку відкинутих в'язів у якій-небудь основній системі методу сил:

$$\sum \int \frac{M \cdot M_s^*}{EJ} ds + \sum \int N_s^* \alpha t ds + \sum \int \frac{\alpha t}{d} M_s^* ds = 0, \quad (4.26)$$

де M_s^*, N_s^* – згинальний момент і поздовжня сила (епюри) в основній системі методу сил; всі вузли кінцевих епюр моментів повинні бути урівноважені.

Епюра поперечних сил будується за епюрою моментів

$$Q = \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}, \quad (4.27)$$

а епюра поздовжніх сил – за епюрою поперечних сил способом вирізання вузлів.

4.1.9 Розрахунок на зміщення опорних в'язей

Зміщення опорних або інших в'язів у статично невизначних системах викликає відмінні від нуля зусилля і призводить до появи напружень. Система канонічних рівнянь у випадку зміщення опорних або інших в'язей рами має вигляд

$$R \cdot Z + R_\Delta = 0, \quad (4.28)$$

де R_Δ – вектор реакцій у введених в'язях в основній системі від заданого зміщення.

Як і раніше, покажемо на прикладі, як знайти ці реакції. Розглянемо раму, у якій одна з опор переміщується (рисунок 4.17).

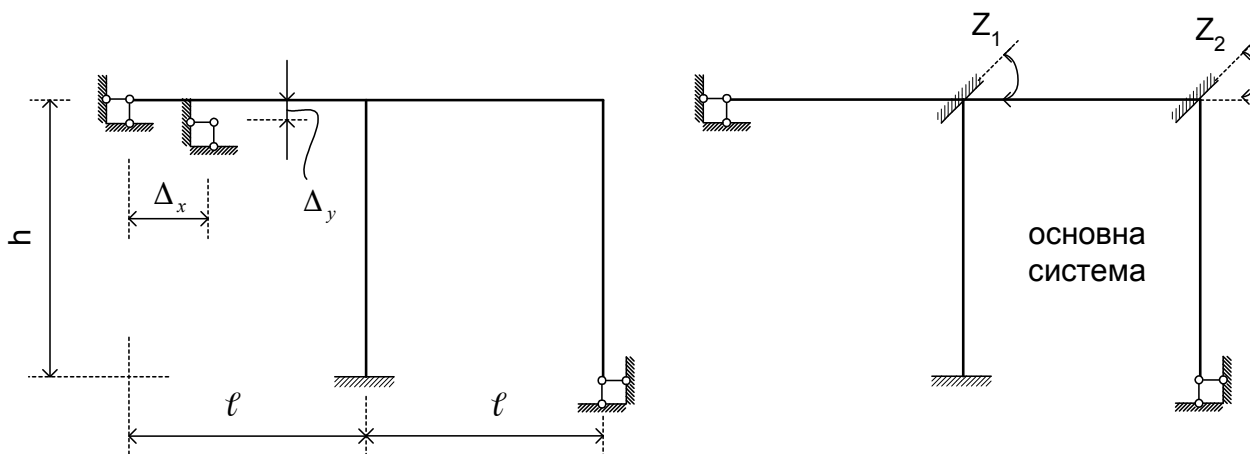


Рисунок 4.17 – До розрахунку рам на зміщення опорних в'язей

Визначимо реактивні моменти у введених затисненнях **1** та **2** від заданого зміщення. За допомогою таблиці стандартних рішень (таблиця 4.1) побудуємо епюру M_{Δ} (рисунок 4.18).

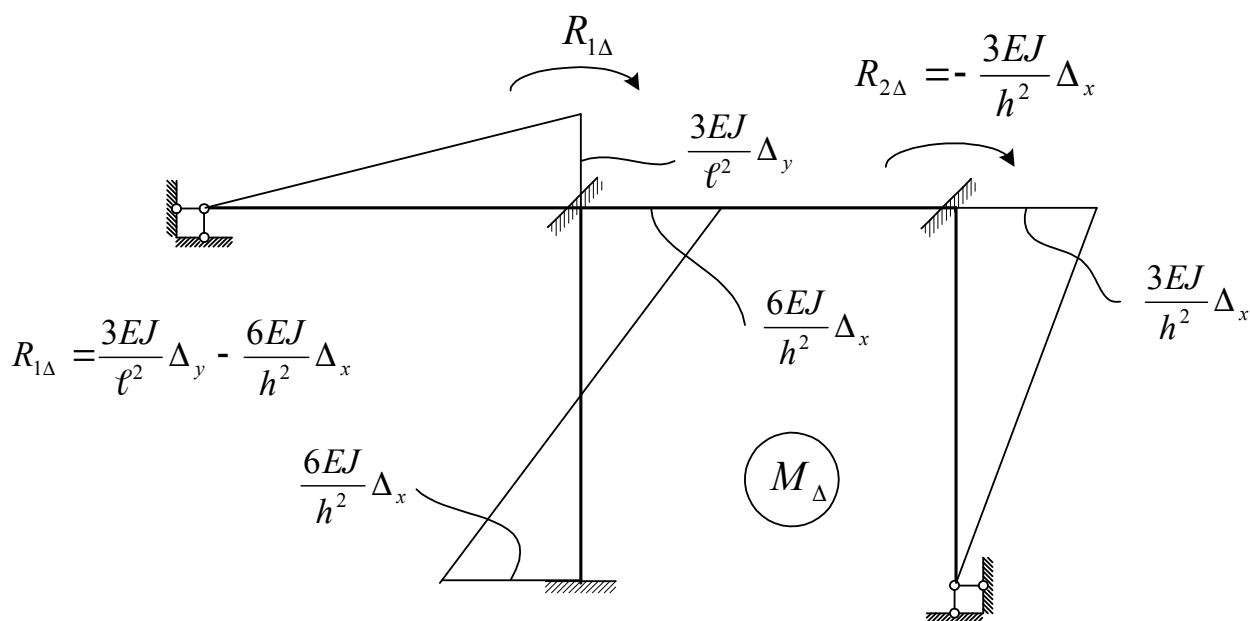


Рисунок 4.18 – Епюра M_{Δ}

Реактивні моменти визначимо статичним способом. Значення цих моментів показані на рисунку 4.18.

Після обчислення елементів матриці \mathbf{R} та R_{Δ} виконуємо розв'язання системи рівнянь (4.28), тобто знаходимо $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_n$.

Епюру моментів у заданій статично невизначній системі можна побудувати за формулою

$$M = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + \dots + M_n Z_n + M_{\Delta}. \quad (4.29)$$

Якщо епюра моментів побудована правильно, то повинні виконуватися такі умови:

1) відповідність нулю переміщень в основній системі методу сил у напрямку реакцій відкинутих в'язей:

$$\sum \int \frac{M_s^* M}{EJ} ds - \sum RC = 0, \quad (4.30)$$

де M_s^* – сумарна одинична епюра моментів, яка побудована в основній системі методу сил (основна система методу сил одержується з заданої відкиданням зайвих в'язей з обов'язковим збереженням тих в'язей, які за умовою задачі переміщуються);

R – реакції в тих в'язях, які переміщуються і викликані одиничними значеннями невідомих;

2) рівновага вузлів епюри моментів.

Епюру поперечних сил можна побудувати за формулою (4.27), а епюру поздовжніх сил – за епюрою поперечних сил способом вирізання вузлів.

4.2 Задача 2. Розрахунок нерозрізних балок

Приклад до завдання

Схема завантаженої нерозрізної балки показана на рисунку 4.19, а.

1 Визначити опорні моменти і побудувати епюру згинальних моментів.

2 Зробити перевірку правильності побудови епюри M .

3 Побудувати епюру поперечних сил Q .

4 Підібрати двотавровий переріз балки виходячи з умови міцності за нормальними напруженнями, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

5 Визначити способом Максвелла-Мора з обчисленням інтегралів за формулою Верещагіна прогин точки від прикладання сили F_2 .

6 Зробити розрахунок на ЕОМ і зіставити результати машинного і ручного розрахунку.

4.2.1 Запис рівняння трьох моментів

Перед тим як записувати рівняння трьох моментів, необхідно встановити ступінь статичної невизначності балки. На балку накладено шість опорних в'язей (три, що здійснюють замурування лівої опори, і три, що є шарнірно-рухомою опорою).

Ступінь статичної невизначності зручно визначати, використовуючи вираз

$$L = C_0 - 3,$$

де C_0 – число опорних в'язей;

$$L = 6 - 3 = 3.$$

Балка тричі статично невизначна. Для розкриття статичної невизначності потрібно скласти три рівняння трьох моментів. Виберемо головну систему шляхом установлення в опорні перетини балки шарнірів; защемлення заміняємо додатковим прогоном із нульовою довжиною; праву консоль відкидаємо і заміняємо моментом сили F_2 на третій опорі:

$$M_3 = -F_2 \alpha = -32 \cdot 3 = -96 \text{ кНм.}$$

Головна система показана на рисунку 4.19, б.

Зайвими невідомими в цій головній системі є опорні моменти на проміжних опорах – M_0 , M_1 і M_2 . Для їхнього визначення записуємо рівняння трьох моментів. Кожне рівняння записується для пари сусідніх прогонів (рисунок 4.19, б, в):

$$M_{-1} \ell_0 + 2M_0 (\ell_0 + \ell_1) + M_1 \ell_1 = -6 (B_0^{\text{TM}} + A_1^{\text{TM}});$$

$$M_0 \ell_1 + 2M_1 (\ell_1 + \ell_2) + M_2 \ell_2 = -6 (B_1^{\text{TM}} + A_2^{\text{TM}});$$

$$M_1 \ell_2 + 2M_2 (\ell_2 + \ell_3) + M_3 \ell_3 = -6 (B_2^{\text{TM}} + A_3^{\text{TM}}).$$

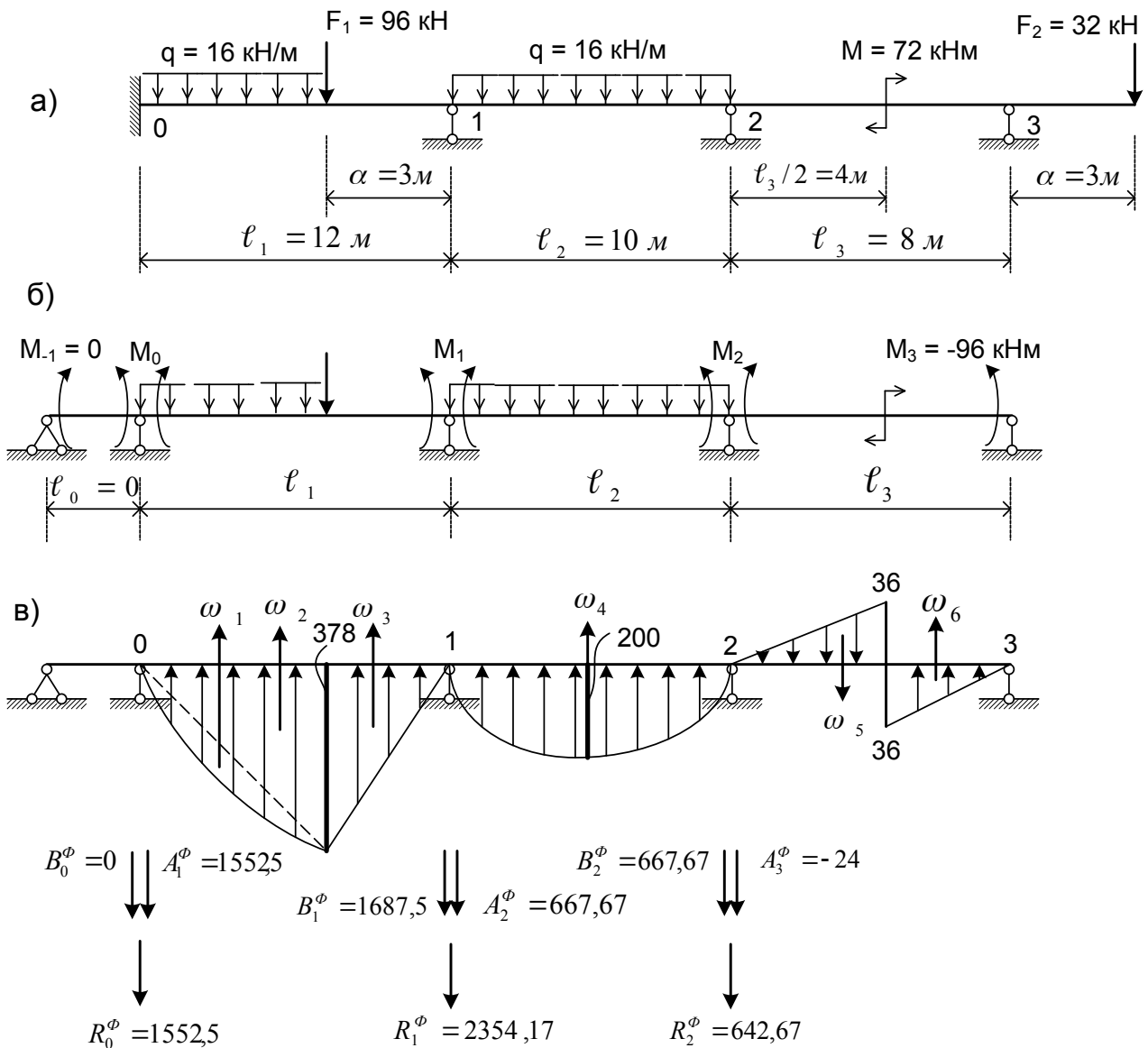


Рисунок 4.19 – Розрахункова схема нерозрізної балки (а), основної системи (б), визначення фіктивних опорних реакцій (в)

4.2.2 Побудова епюр згинальних моментів в однопрогонових балках головної системи від зовнішніх навантажень

Для того щоб розв'язати систему рівнянь трьох моментів, необхідно знайти вільні члени $(\mathbf{B}_0^\Phi + \mathbf{A}_1^\Phi)$, $(\mathbf{B}_1^\Phi + \mathbf{A}_2^\Phi)$, $(\mathbf{B}_2^\Phi + \mathbf{A}_3^\Phi)$, а для цього спочатку побудувати епюри згинальних моментів у балках головної системи.

$$R_1 = \frac{g(\ell_1 - \alpha)/2 + F_1(\ell_1 - \alpha)}{\ell_1} = \frac{16(12 - 3)^2/2 + 96(12 - 3)}{12} = 126 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad g(\ell_1 - \alpha) \left(\alpha + \frac{\ell_1 - \alpha}{2} \right) + F_1 \alpha - R_0 \ell_1 = 0;$$

$$R_0 = \frac{g(\ell_1 - \alpha)(\ell_1 + \alpha)/2 + F_1 \alpha}{\ell_1} = \frac{16(12 - 3)(12 + 3)/2 + 96 \cdot 3}{12} = 114 \text{ кН.}$$

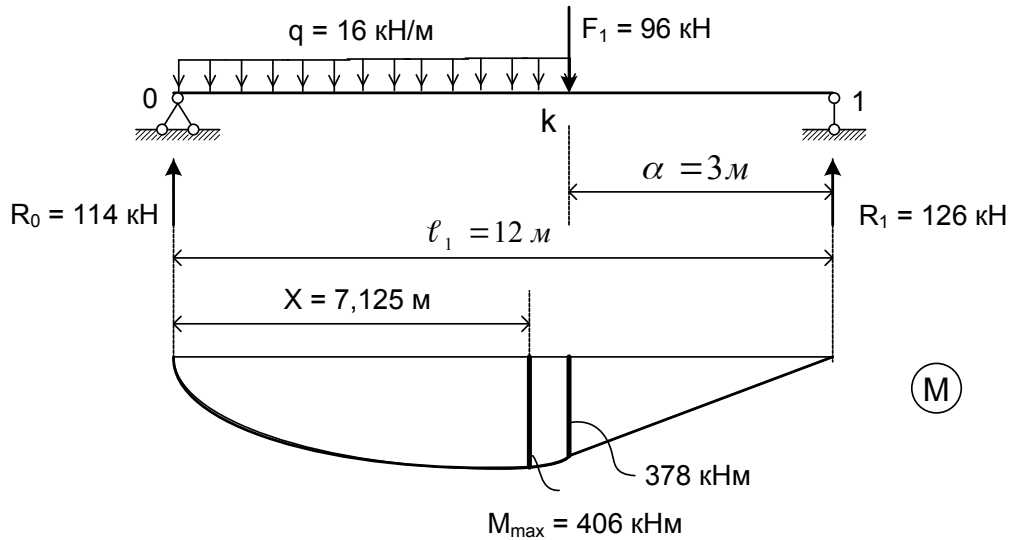


Рисунок 4.20 – Схема балки 0-1

Перевірка:

$$\Sigma Y = 0;$$

$$R_0 + R_1 - q(\ell_1 - \alpha) - F_1 = 114 + 126 - 16(12 - 3) - 96 = 0.$$

Будуємо епюру моментів. Згинальний момент під силою F_1 (зліва) дорівнює (рисунок 4.20)

$$M_k = R_1 \cdot \alpha = 126 \cdot 3 = 378 \text{ кНм.}$$

Максимальний момент у перерізі

$$X = \frac{R_0}{g} = \frac{114}{16} = 7,125 \text{ м;}$$

$$M_{\max} = R_0 \cdot X - \frac{g \cdot X^2}{2} = 114 \cdot 7,125 - \frac{16 \cdot 7,125^2}{2} = 406 \text{ кНм.}$$

Через симетрію навантаження

$$R_1 = R_2 = \frac{g \cdot \ell_2}{2} = \frac{16 \cdot 10}{2} = 80 \text{ кН.}$$

Максимальний момент посередині балки (рисунок 4.21)

$$M_{\max} = R_1 \cdot \frac{\ell_2}{2} - \frac{g \cdot \ell_2^2}{2} = \frac{g \cdot \ell_2^2}{8} = \frac{16 \cdot 10^2}{8} = 200 \text{ кНм.}$$

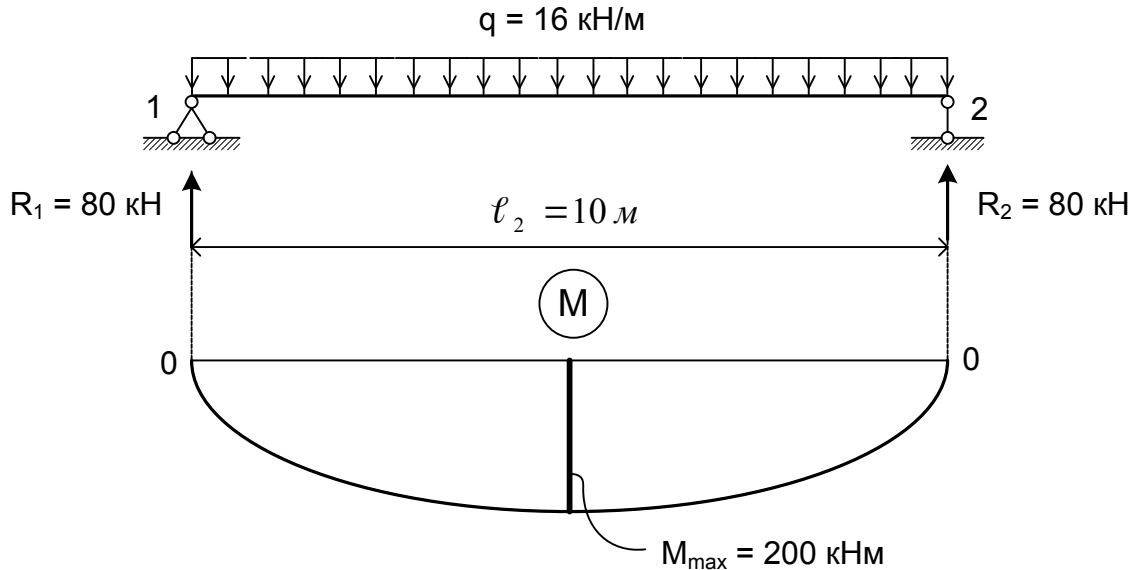


Рисунок 4.21 – Схема балки 1-2

У зв'язку з тим що на балку діє пара сил із моментом $M = 72 \text{ кНм}$, реакції балки будуть складати пару сил із тим самим моментом, але протилежного напрямку (рисунок 4.22). Отже,

$$R_2 = R_3 = \frac{l}{\ell_3} = \frac{72}{8} = 9 \text{ кН.}$$

Згинальний момент зліва від зовнішнього моменту

$$M_{\text{л}} = -R_2 \frac{\ell_3}{2} = -9 \cdot \frac{8}{2} = -36 \text{ кНм.}$$

Справа від зовнішнього моменту

$$M_{\text{п}} = M + M_{\text{л}} = 72 - 36 = 36 \text{ кНм.}$$

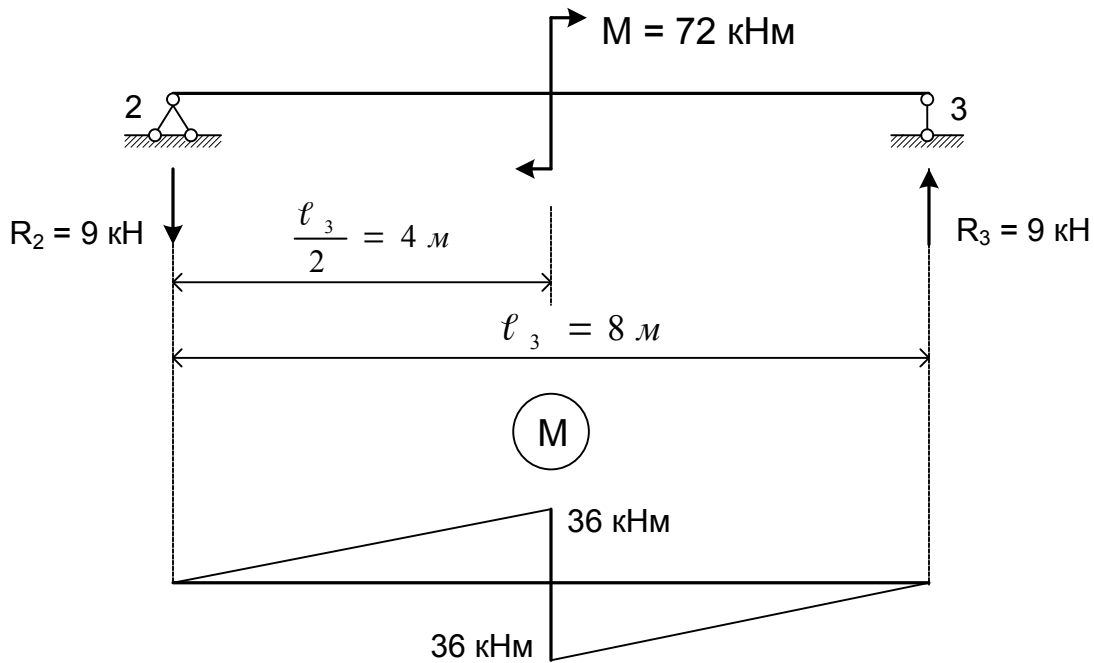


Рисунок 4.22 – Схема балки 2-3

4.2.3 Обчислення фіктивних реакцій

Для визначення фіктивних реакцій необхідно до розглянутої балки (рисунок 4.19, а) прикласти фіктивні навантаження у вигляді епюр моментів (рисунок 4.19, в). Фіктивні навантаження діють у напрямку до осей балок. Додатні значення фіктивних реакцій відповідають напрямку їх униз. Визначаємо фіктивні реакції при навантаженні окремих балок.

Балка 0-1

Розбиваємо складну фігуру на три найпростіші: параболічну частину і дві трикутні. Тоді площі цих частин будуть такими:

$$\omega_1 = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot \frac{16 \cdot 9^2}{8} = 972 \text{ кНм}^2;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 378 = 1701 \text{ кНм}^2;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 378 = 567 \text{ кНм}^2.$$

Визначаємо реакції:

$$\Sigma M_0 = 0;$$

$$\omega_1 \cdot \frac{9}{2} + \omega_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 + \omega_3 \cdot \left(9 + \frac{1}{3} \cdot 3\right) - \hat{A}_1^{\circ} \cdot 12 = 0;$$

$$\hat{A}_1^{\circ} = \frac{972 \cdot \frac{9}{2} + 1701 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 + 567 \left(9 + \frac{1}{3} \cdot 3\right)}{12} = 1687,5 \text{ кНм}^2.$$

$$\Sigma M_1 = 0;$$

$$- \omega_1 \left(\frac{9}{2} + 3\right) - \omega_2 \left(3 + \frac{1}{3} \cdot 9\right) - \omega_3 \frac{2}{3} \cdot 3 + \hat{A}_1^{\circ} \cdot 12 = 0;$$

$$\hat{A}_1^{\circ} = \frac{972 \left(\frac{9}{2} + 3\right) + 1701 \left(3 + \frac{1}{3} \cdot 9\right) + 567 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3}{12} = 1552,5 \text{ кНм}^2.$$

Перевірка:

$$\Sigma Y = 0,$$

$$\hat{A}_1^{\circ} + \hat{A}_1^{\circ} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3;$$

$$\hat{A}_1^{\circ} + \hat{A}_1^{\circ} = 1687,5 + 1552,5 = 3240 \text{ кНм}^2;$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 972 + 1701 + 567 = 3240 \text{ кНм}^2.$$

Балка 1-2

Через симетрію фіктивного навантаження

$$\hat{A}_2^{\circ} = \hat{A}_2^{\circ} = \frac{\omega_4}{2} = \frac{2/3 \cdot 10 \cdot 200}{2} = 667,67 \text{ кНм}^2.$$

Балка 2-3

$$\omega_5 + \omega_6 = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 4 = 72 \text{ кНм}^2;$$

$$M_3 = 0, \quad \hat{A}_3^{\circ} \cdot 8 + \omega_5 \left(\frac{1}{3} \cdot 4 + 4\right) - \omega_6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 0;$$

$$\hat{A}_3^{\circ} = \frac{-72 \cdot (1/3 \cdot 4) + 72 \cdot 2/3 \cdot 4}{8} = -24 \text{ кНм}^2.$$

Повні фіктивні реакції на опорах (рисунок 4.19, в):

$$R_0^{\circ} = \hat{A}_1^{\circ} = 1552,5 \text{ кНм}^2;$$

$$R_1^{\circ} = \hat{A}_1^{\circ} + \hat{A}_2^{\circ} = 1687,5 + 667,67 = 2354,17 \text{ кНм}^2;$$

$$R_2^0 = \hat{A}_2^0 + \hat{A}_3^0 = 667,67 - 24 = 642,67 \text{ кНм}^2.$$

4.2.4 Розв'язання системи рівнянь трьох моментів

Записуємо систему з урахуванням знайдених фіктивних реакцій і значень $M_1 = 0$, $\ell_0 = 0$ і $M_3 = -96$ кНм:

$$2M_0(0 + 12) + M_1 \cdot 12 = -6 \cdot 1552,5;$$

$$M_0 \cdot 12 + 2M_1(12 + 10) + M_2 \cdot 10 = -6 \cdot 2354,17;$$

$$M_1 \cdot 10 + 2M_2(10 + 8) - 96 \cdot 8 = -6 \cdot 642,67.$$

Після деяких скорочень і перетворень маємо:

$$4M_0 + 2M_1 = -1552,5; \quad | \quad 3 \quad |$$

$$6M_0 + 22M_1 + 5M_2 = -7062,51; \quad | \quad -2 \quad |$$

$$5M_1 + 18M_2 = -1544,01.$$

Виключаємо з перших двох рівнянь M_0 :

$$6M_1 - 44M_1 - 10M_2 = -4657,5 + 14125,02.$$

Тоді маємо

$$38M_1 + 10M_2 = -9467,52; \quad | \quad 9 \quad |$$

$$5M_1 + 18M_2 = -1544,01. \quad | \quad -5 \quad |$$

Тепер виключаємо M_2 :

$$342M_1 - 25M_1 = -85207,68 + 7720,05.$$

Звідки

$$M_1 = -\frac{77487,63}{317} = -244,44 \text{ кНм.}$$

З першого рівняння

$$M_0 = \frac{-1552,5 - 2M_1}{4} = \frac{-1552,5 + 2 \cdot 244,44}{4} = -265,905 \text{ кНм.}$$

З третього рівняння

$$M_2 = \frac{-1544,01 - 5l_1}{18} = \frac{-1544,01 + 5 \cdot 244,44}{18} = -17,88 \text{ кНм.}$$

Перевірка рішення системи рівнянь.

Підставляємо значення M_0 , M_1 і M_2 у друге рівняння:

$$-6 \cdot 265,905 - 22 \cdot 244,44 - 5 \cdot 17,88 = -7062,51.$$

Різниця між лівою і правою частиною дорівнює 0.

4.2.5 Побудова епюр згинальних моментів і поперечних сил у нерозрізній балці

Розглядаємо знову окремі балки, до яких прикладаємо крім зовнішнього навантаження, опорні моменти.

Балка 0-1 (рисунок 4.23, а)

Визначаємо реакції:

$$\Sigma M_0 = 0,$$

$$-\frac{g(\ell_1 - \alpha)^2}{2} - F_1(\ell_1 - \alpha) - M_0 + M_1 + R_1 \cdot \ell_1 = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{g(\ell_1 - \alpha)^2 / 2 + F_1(\ell_1 - \alpha) + M_0 + M_1}{\ell_1} = \\ &= \frac{16(12 - 3)^2 / 2 + 96(12 - 3) - 265,905 + 244,44}{\ell_2} = 124,2 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\Sigma M_1 = 0,$$

$$q \left(\ell_1^2 - \alpha \right) \cdot \left(\alpha + \frac{\ell_1 - \alpha}{2} \right) + F_1 \cdot \alpha - M_0 + M_1 - R_0 \cdot \ell_1 = 0;$$

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{g(\ell_1^2 - \alpha^2) / 2 + F_1 \cdot \alpha - M_0 + M_1}{\ell_1} = \\ &= \frac{16(12^2 - 3^2) / 2 + 96 \cdot 3 + 265,905 - 244,44}{12} = 115,79 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\Sigma Y = 0,$$

$$R_1 + R_0 - g (\ell_1 - \alpha) - F_1 = 124,21 + 115,79 - 16 (12 - 3) - 96 = 0.$$

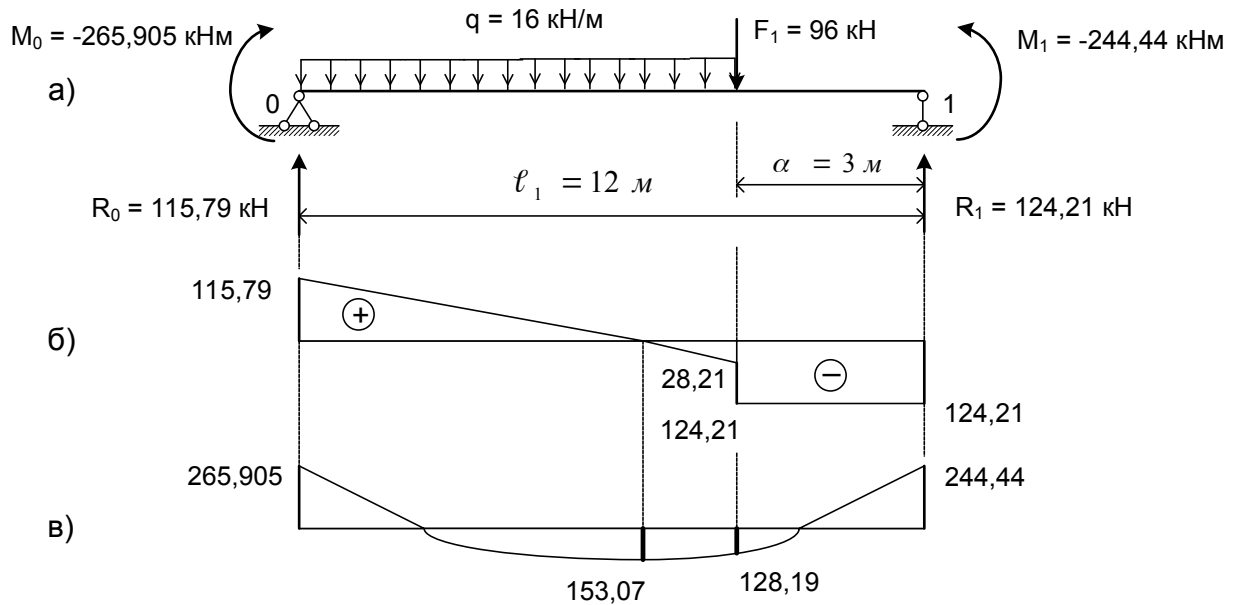


Рисунок 4.23 – Розрахункова схема балки 0-1 (а),
епюри Q (б), M (в)

Визначаємо поперечні сили (рисунок 4.23, б):

- на лівій опорі $Q_0 = R_0 = 115,79$ кН;
- біля сили (зліва) $Q_{л} = R_0 - g (\ell_1 - \alpha) = 115,79 - 16 (12 - 3) = -28,21$ кН;
- біля сили (справа) $Q_{п} = -R_{1л} = -124,21$ кН;
- на правій опорі $Q_{1л} = Q_{п} = -124,12$ кН.

Визначаємо моменти (рисунок 4.23, в):

- на лівій опорі $M_0 = -265,905$ кНм;
- під силою $M = R_1 \cdot \alpha + M_1 = 124,21 \cdot 3 - 244,44 = 128,19$ кНм;
- на правій опорі $M_1 = -244,44$ кНм;
- максимальний момент

$$X = \frac{R_0}{g} = \frac{115,79}{16} = 7,237 \text{ м};$$

$$M_{\max} = M_0 + R_0 X - \frac{g \cdot X^2}{2} = -265,905 + 115,79 \cdot 7,237 - \frac{16 \cdot 7,237^2}{2} = 153,07 \text{ кНм}.$$

Визначаємо реакції:

$$\Sigma M_1 = 0,$$

$$-M_1 - \frac{g \cdot \ell_2^2}{2} + M_2 + R_2 \cdot \ell_2 = 0;$$

$$R_{2л} = - \frac{M_1 + g \cdot \ell_2^2 / 2 - M_2}{\ell_2} = \frac{-244,44 + 16 \cdot 10^2 / 2 + 17,88}{10} = 57,34 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_2 = 0,$$

$$-M_1 + \frac{g \cdot \ell_2^2}{2} + M_2 - R_{1п} \cdot \ell_2 = 0;$$

$$R_{1п} = \frac{-M_1 + g \cdot \ell_2^2 / 2 + M_2}{\ell_2} = \frac{244,44 + 16 \cdot 10^2 / 2 - 17,88}{10} = 102,66 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\Sigma Y = 0,$$

$$R_{1п} + R_2 - g \cdot \ell_2 = 102,66 + 57,34 - 16 \cdot 10 = 0.$$

Визначаємо поперечні сили (рисунок 4.24, б):

- **на лівій опорі** $Q_{1п} = R_1 = 102,66 \text{ кН};$
- **на правій опорі** $Q_{2п} = -R_2 = -57,34 \text{ кН}.$

Визначаємо згинальні моменти (рисунок 4.24, в):

- **на лівій опорі** $M_1 = -244,44 \text{ кНм};$
- **на правій опорі** $M_2 = -17,88 \text{ кНм};$
- **максимальний момент**

$$X = \frac{R_2}{g} = \frac{57,34}{16} = 3,58 \text{ м};$$

$$\begin{aligned} M_{\max} &= M_2 + R_{2л} \cdot X - \frac{g \cdot X^2}{2} = -17,88 + 57,34 \cdot 3,58 - \frac{16 \cdot 3,58^2}{2} = \\ &= 84,87 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

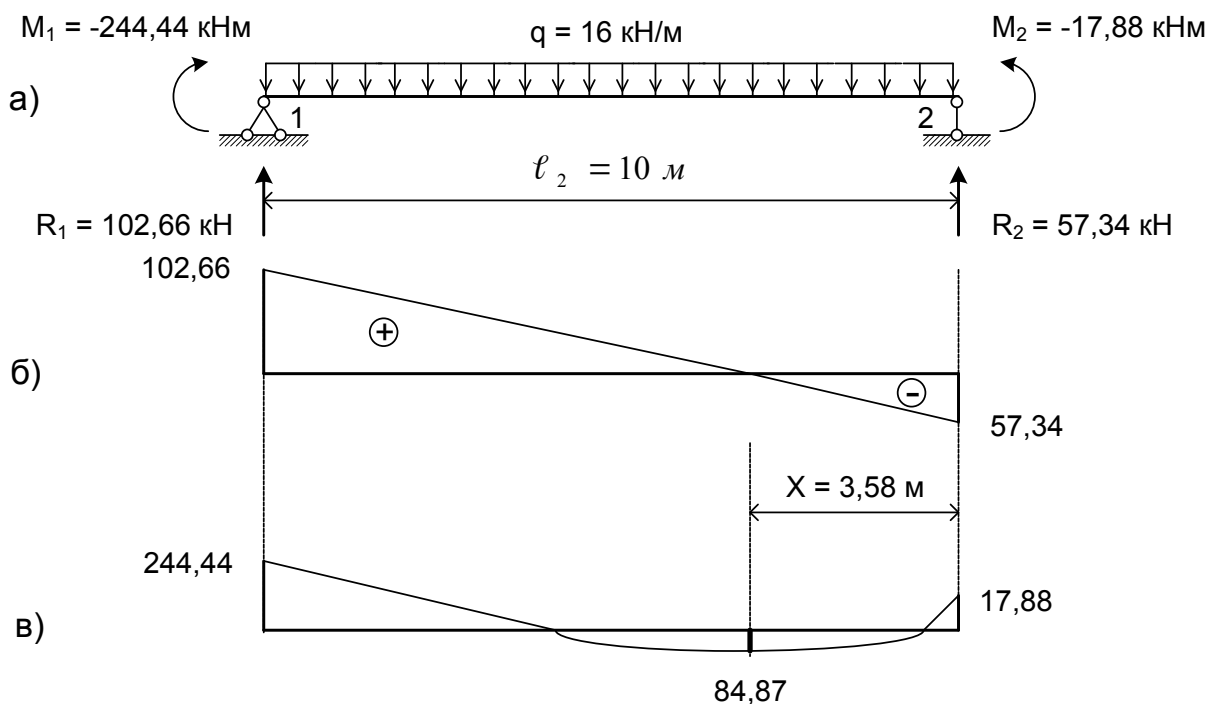


Рисунок 4.24 – Розрахункова схема балки 1-2 (а), епюри Q (б), M (в)

Балка 2-3 (рисунок 4.25, а)

У балці 2-3 відновлюємо консоль і визначаємо реакції:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad -M_2 - M - F_2(\ell_3 + \alpha) + R_3 \cdot \ell_3 = 0;$$

$$R_3 = \frac{M_2 + M + F_2(\ell_3 + \alpha)}{\ell_3} = \frac{-17,88 + 72 + 32(8 + 3)}{8} = 50,76 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_3 = 0, \quad R_{2п} \cdot \ell_3 + M_2 + M + F_2 \cdot \alpha = 0;$$

$$R_{2п} = -\frac{M_2 + M + F_2 \cdot \alpha}{\ell_3} = -\frac{-17,88 + 72 + 32 \cdot 3}{8} = -18,76 \text{ кН}.$$

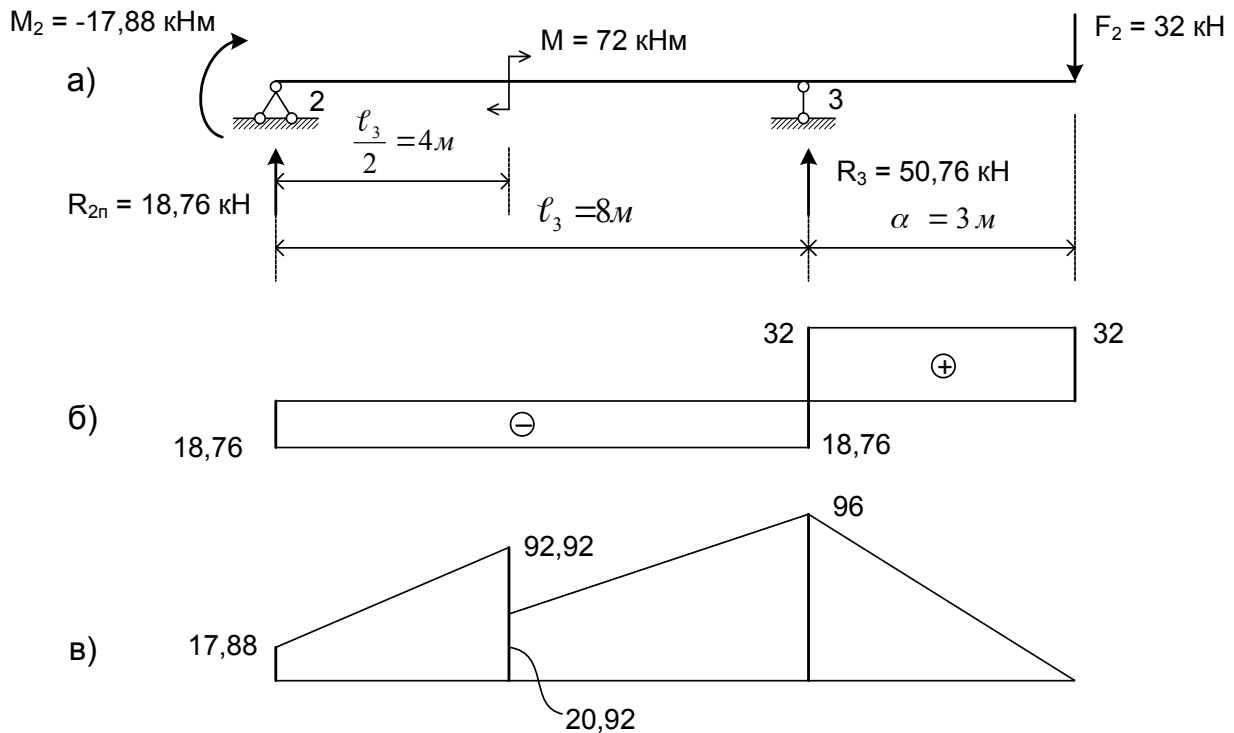


Рисунок 4.25 – Розрахункова схема балки 2-3 (а), епюри Q (б), M (в)

Перевірка:

$$\Sigma Y = 0,$$

$$R_{2n} + R_3 - F_2 = -18,76 + 50,76 - 32 = 0.$$

Визначаємо поперечні сили (рисунок 4.25, б):

- *на лівій опорі* $Q_{2n} = R_{2n} = -18,76$ кН;
- *на правій опорі* $Q_{3n} = Q_{2n} = -18,76$ кН;
- *на консолі* $Q = F_2 = 32$ кН.

Визначаємо згинальні моменти (рисунок 4.25, в):

- *на лівій опорі* $M_2 = -17,88$ кНм;
- *біля моменту (зліва)* $M_n = M_2 + R_2 \cdot \frac{\ell_3}{2} = -17,88 - 18,76 \cdot 4 = -92,92$ кНм;
- *біля моменту (справа)* $M_n = M + M_n = 72 - 92,92 = -20,92$ кНм;
- *на правій опорі* $M_3 = -F_2 \cdot \alpha = -32 \cdot 3 = -96$ кНм;
- *під силою* $M = 0$.

Епюри поперечних сил і згинальних моментів для нерозрізної балки отримаємо, відтворивши епюри для окремих балок на загальній осі під нерозрізною балкою (рисунок 4.26, б,в).

Реакції опор у нерозрізній балці знайдемо, склавши відповідні реакції, отримані для окремих балок:

$$R_0 = 115,79 \text{ кН};$$

$$R_1 = 124,21 + 102,66 = 226,87 \text{ кН};$$

$$R_2 = 57,34 - 18,76 = 38,58 \text{ кН};$$

$$R_3 = 50,76 \text{ кН}.$$

Перевірка правильності розв'язання:

• *статична перевірка:*

$$\Sigma Y = 0,$$

$$R_0 + R_1 + R_2 + R_3 - g(\ell_1 - \alpha) - F_1 - g \cdot \ell_2 - F_2 =$$

$$= 115,79 + 226,87 + 38,58 + 50,76 - 16(12-3) - 96 - 16 \cdot 10 - 32 = 0;$$

$$\Sigma M_0 = 0,$$

$$265,9 - \frac{16 \cdot 9^2}{2} - 96 \cdot 9 + 226,87 \cdot 12 - 16 \cdot 10(12 + 5) + 38,58 \cdot 22 -$$

$$- 72 + 50,76 \cdot 30 - 32 \cdot 33 = -0,1 \approx 0;$$

• *деформаційна перевірка:*

Знайдемо, наприклад, фіктивну реакцію від навантаження другого і третього прогонів остаточною епюрою моментів (рисунок 4.26) на опорі 2 (рисунок 4.27). Розіб'ємо складну епюру на найпростіші фігури.

4.2.6 Добір перерізу балки

Добір перерізу балки робимо, виходячи з умови міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Допустиме напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Необхідний момент опору перерізу повинен бути

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

З епюри згинальних моментів (рисунок 4.26, в) вибираємо найбільше значення моменту. У нашому випадку – це момент в опорному защемленні

$$M_{\max} = M_0 = -265,9 \text{ кНм.}$$

Тоді, підставляючи абсолютне значення моменту, отримаємо

$$W_x = \frac{265,9 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} \cdot 10^6 = 1662 \text{ см}^3.$$

За сортаментом прокатної сталі добираємо двотавровий переріз балки № 55, для якого $W_x = 2035 \text{ см}^3 > 1662 \text{ см}^3$. Момент інерції цього перерізу відносно нейтральної осі дорівнює $I_x = 55962 \text{ см}^4$.

Тоді

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 244,44 \cdot 10 = 1222,2 \text{ кНм}^2;$$

$$\omega_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{16 \cdot 10^2}{8} \cdot 10 = 1333,3 \text{ кНм}^2;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \cdot 17,88 \cdot 10 = 89,4 \text{ кНм}^2;$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2} \cdot 17,88 \cdot 4 = 35,76 \text{ кНм}^2;$$

$$\omega_5 = \frac{1}{2} \cdot 92,92 \cdot 4 = 185,84 \text{ кНм}^2;$$

$$\omega_6 = \frac{1}{2} \cdot 20,92 \cdot 4 = 41,84 \text{ кНм}^2;$$

$$\omega_7 = \frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 4 = 192 \text{ кНм}^2.$$

Розрахунок зроблено правильно.

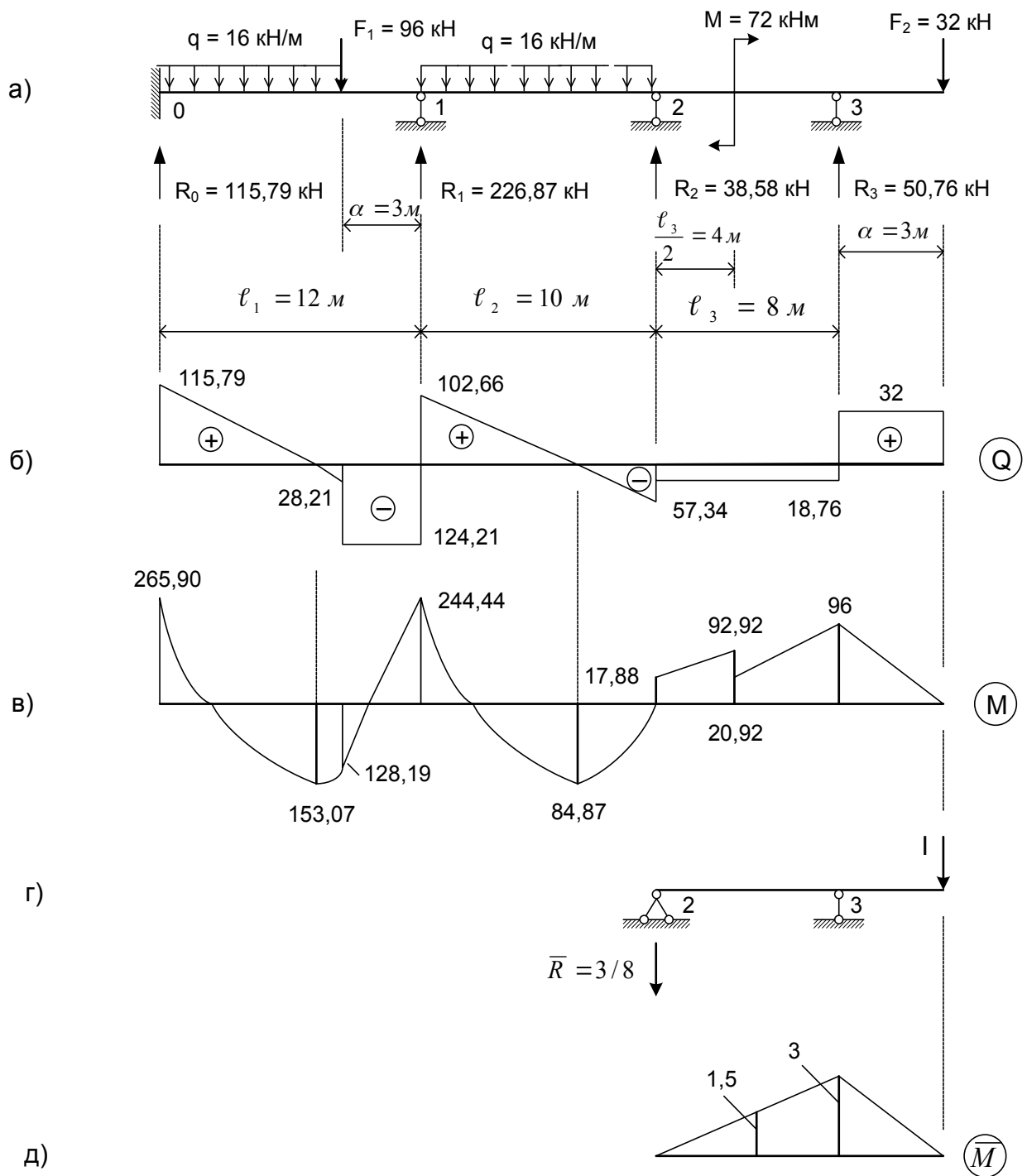


Рисунок 4.26 – Розрахункова схема нерозрізної балки (а), епюри моментів (б) і поперечних сил (в)

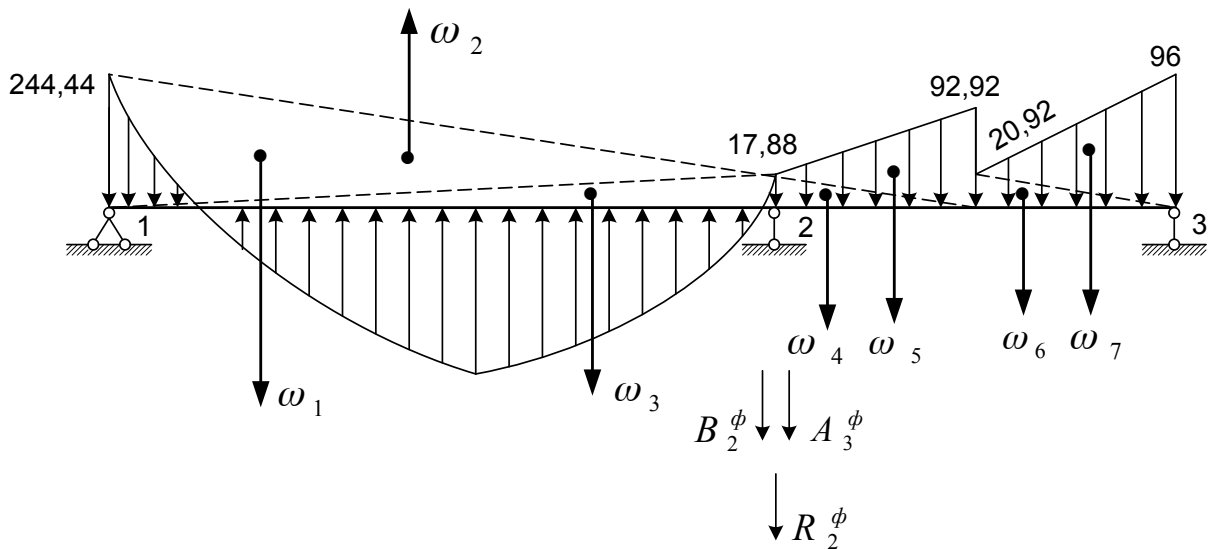


Рисунок 4.27 – До визначення фіктивної опорної реакції на опорі 2

4.2.7 Визначення переміщення в точці прикладення сили F_2 за допомогою методу Максвелла-Мора

Для визначення прогину за методом Максвелла-Мора необхідно мати два стани системи: вантажний (дійсний) і одиничний. Інтеграл Максвелла-Мора запишеться так:

$$\hat{A}_2^{\circ} = \left(-1222,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10 + 1333,3 \cdot 5 - 89,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 \div 10 \right) = 199,65 \text{ кНм}^2;$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_3^{\circ} &= \left[-35,76 \left(4 + \frac{2}{3} \cdot 4 \right) - 185,84 \left(4 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) - 41,84 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - 192 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \right] \div 8 = \\ &= -199,64 \text{ кНм}^2; \end{aligned}$$

$$R_2^{\circ} = \hat{A}_2^{\circ} + \hat{A}_3^{\circ} = 199,65 - 199,64 = 0,01 \approx 0.$$

$$\Delta_{if} = \sum \int \frac{\bar{I}_1 \cdot \dot{I}_f \cdot dx}{EJ},$$

де M_f – функція згинального моменту від зовнішнього навантаження в статично невизначній нерозрізній балці (її графік M показано на рисунку 4.26, в);

\bar{I}_1 – функція згинального моменту від одиничної сили, прикладеної в перерізі, де необхідно визначити прогин у будь-якій статично визначній системі, отриманій з нерозрізної балки.

Як статично визначна система приймається набір статично визначних балок (рисунок 4.19,б). У нашому випадку одинична сила прикладається до балки 2-3 на кінці консолі (рисунок 4.26, г). Графік функції \bar{I}_1 - \bar{I}^- показано на рисунку 4.26, д. Побудова цієї епюри через елементарність не потребує пояснення.

Обчислення інтеграла Максвелла-Мора робимо способом Верещагіна. У межах балок 0-1 і 1-2 інтеграл буде дорівнювати нулю через нульові значення \bar{I}^- . У межах балки 2-3 (із консоллю) епюри вантажну та одиничну ділимо на три частини, тому що у вантажній епюрі (рисунок 4.26, в) моменти описуються різними функціями і сполучення епюр за способом Верещагіна робимо окремо для кожної частини.

Ліва частина (рисунок 4.28).

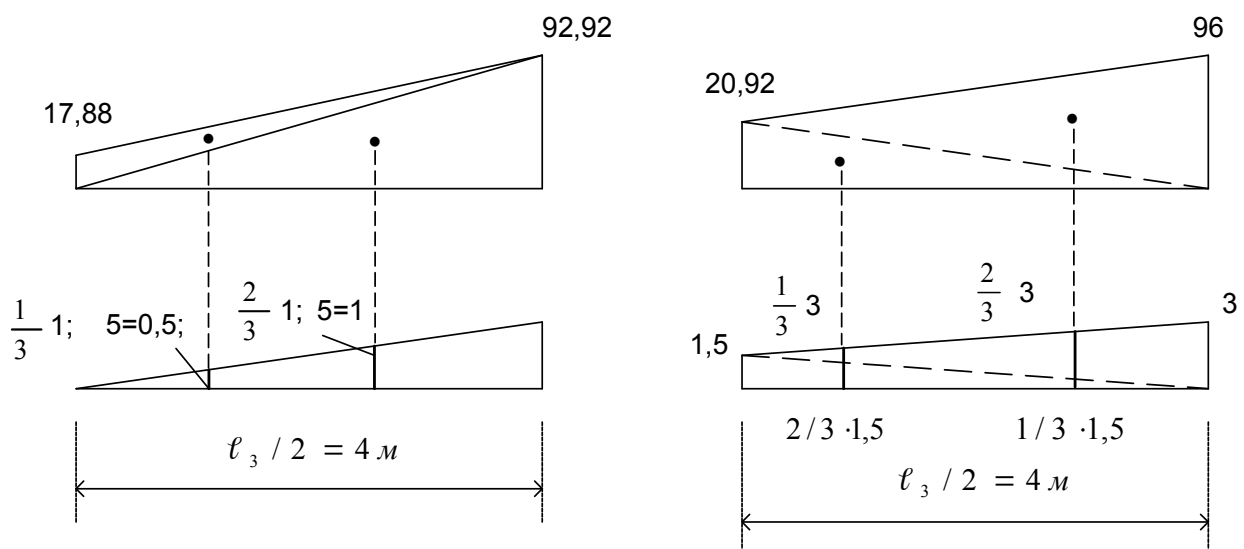


Рисунок 4.28 – До визначення прогину в точці прикладення сили F_2

Трапецію вантажної епюри розбиваємо на два трикутники, і їх площі перемножуємо на ординати одиничної епюри, які розташовані під центрами ваги цих трикутників:

$$\Delta_{\text{л}} = \frac{1}{2} \cdot 17,88 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 \frac{I}{EJ} + \frac{1}{2} \cdot 92,92 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \frac{I}{EJ} = \frac{180,72}{EJ}.$$

Середня частина (рисунок 4.28).

Трапеції вантажної і одиничної епюр розіб'ємо на трикутники і перемножуємо аналогічно попередньому розрахунку:

$$\Delta_c = \frac{1}{2} \cdot 20,92 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 1,5 \right) \cdot \frac{I}{EJ} + \frac{-1}{2} \cdot 96 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1,5 \right) \frac{I}{EJ} = \frac{563,68}{EJ}.$$

Права частина (рисунок 4.26, в, д).

Тут повинно бути все зрозуміло без пояснень.

$$\Delta_{\pi} = \frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{I}{EJ} = \frac{288}{EJ}.$$

Отже, переміщення (прогин) кінця консолі буде таким:

$$Y = \Delta_{\pi} + \Delta_c + \Delta_{\pi} = \frac{180,72}{EJ} + \frac{563,68}{EJ} + \frac{288}{EJ} = \frac{1032,4}{EJ}.$$

Жорсткість сталевій двотавровій балки №55 дорівнює

$$EJ_x = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 55962 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-3} = 111924 \text{ кНм}^2,$$

тоді прогин дорівнює

$$Y = \frac{1032,4}{111924} = 0,0092 \text{ м} = 9,2 \text{ мм}.$$

4.2.8 Контроль і розрахунок балки на ПЕОМ

При виконанні розрахунково-графічної роботи ПЕОМ використовується як для контролю, так і для розрахунку нерозрізної балки. Початкова вихідна інформація для неї мінімальна – треба зазначити номер схеми і номер варіанта даних. Після введення цієї інформації починає працювати контролююча частина програми. Машина запитує опорні моменти, які студент знайшов після розв'язання рівнянь трьох моментів, і вказує правильно або неправильно визначено опорні моменти.

Якщо моменти неправильно визначено – дається вказівка, які з них обчислені неправильно, і далі машина допомагає студенту встановити причину неправильного розв'язання. Для

цього запитуються відповідні фіктивні реакції і вказується, які з них визначено неправильно. Після чого машина запитує ліві і праві складові неправильних фіктивних реакцій і встановлює їх відповідність правильному розв'язанню. Тим самим конкретно вказується, у якому місці, на якому етапі розрахунку допущена помилка і, таким чином, студенту не треба знов розв'язувати задачу.

Якщо моменти неправильні, а фіктивні реакції правильно розраховані, ПЕОМ указує на необхідність нового розв'язання системи рівнянь трьох моментів.

Якщо всі опорні моменти обчислено правильно, ПЕОМ визначає і видає на друк значення ординат поперечних сил і згинальних моментів у нерозрізній балці. Студент порівнює ці результати зі своїми, відшукує, де є невідповідності, і аналізує, за рахунок яких неправильних дій вони виникли.

МОДУЛЬ II

5 МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНИХ СИСТЕМ

5.1 Метод сил. Визначення ступеня статичної невизначності. Основна система і зайві невідомі

При розгляді структури статично невизначних систем можна помітити, що, зрівняно зі статично визначними, у них є додаткові в'язі. *Додатковими (зайвими)* називають такі *в'язі*, для визначення зусиль в яких недостає рівнянь статички. Очевидно, що їх кількість дорівнює ступеню статичної невизначності n .

Перший етап розрахунку статично невизначної системи методом сил – це вибір основної системи.

Розглянемо деяку плоску статично невизначну систему, ступінь статичної невизначності якої дорівнює n (наприклад, як

на рисунку 5.1). Треба визначити внутрішні зусилля M , Q , N , які виникають у цій системі.

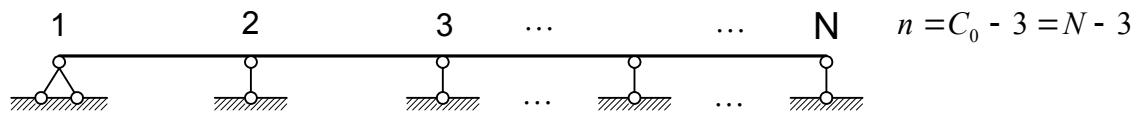


Рисунок 5.1 – Плоска статично невизначна система

Зведемо нашу задачу до розрахунку *статично визначної системи*. Для цього вилучимо з заданої системи *зайві в'язі* так, щоб зберегти її геометричну незмінюваність, тобто вилучимо n умовно необхідних в'язей. Це можна зробити такими методами (рисунок 5.2.):

- а) відкинути n опор;
- б) вставити в систему шарнір (при цьому додається така умова: згинальний момент у шарнірі дорівнює нулю, отже, кількість зайвих в'язей зменшиться на одиницю);
- в) розсікти систему; внутрішні зусилля в перерізі розглядати як зайві невідомі.

Деякі способи правильного і неправильного вибору основної системи показано на рисунку 5.2.

Для того щоб внутрішні зусилля після відкидання в'язей не змінилися, замість відсторонених в'язей необхідно прикласти реакції, які виникли в них у статично невизначній системі. Величини цих реакцій поки що невідомі. Система, яка при цьому отримується, називається *основною системою методу сил*.

Дане визначення можна сформулювати так: *основною системою методу сил* називається система, яка отримана з вихідної статично невизначної системи шляхом відкидання зайвих в'язей і заміною їх невідомими силами. Ці невідомі сили називаються *зайвими невідомими*, оскільки для їх визначення недостає рівнянь статички.

Якщо ми визначимо зайві невідомі, тобто визначимо всі реакції у вихідній системі, то тим самим зможемо знайти і всі інші зусилля.

Розглянемо додаткові умови, а саме – рівняння для визначення *зайвих невідомих*.

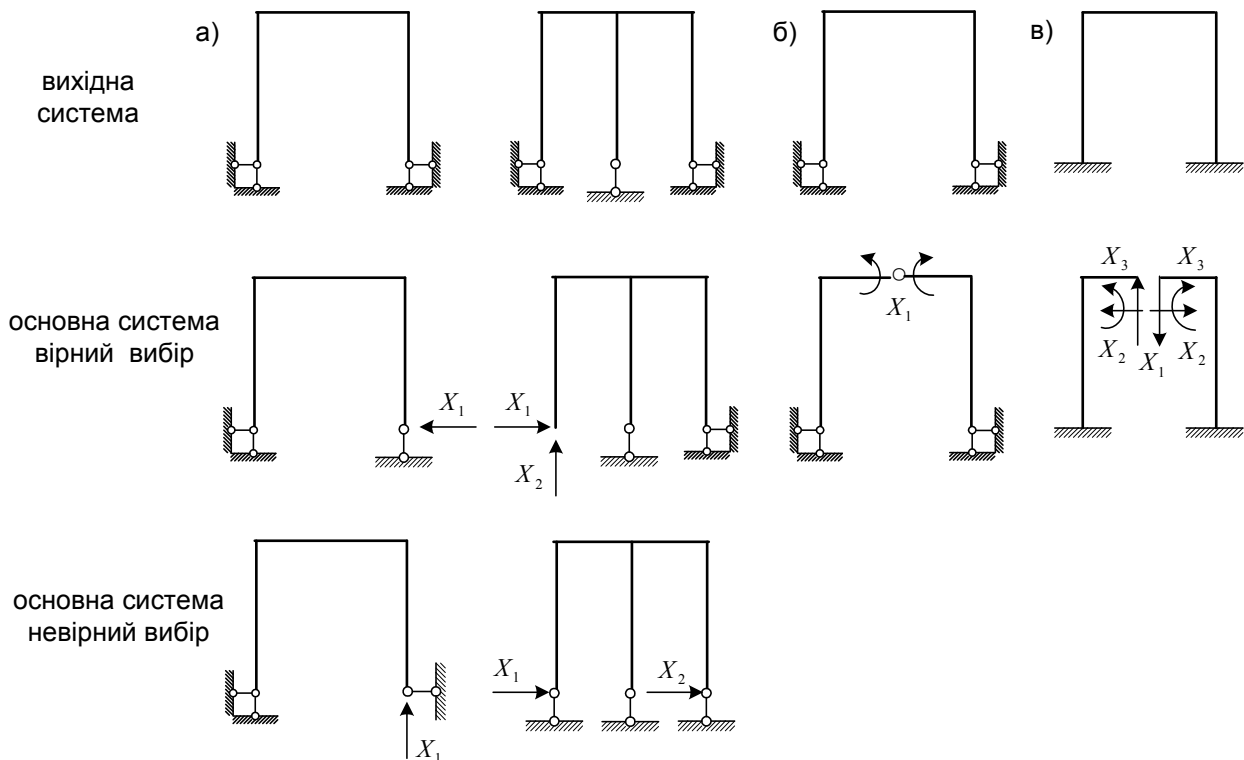


Рисунок 5.2 – Способи правильного і неправильного вибору основної системи

5.2 Система канонічних рівнянь. Контроль обчислення коефіцієнтів і вільних членів систем канонічних рівнянь. Визначення невідомих

Зазначимо, що у вихідній системі були відсутні переміщення в напрямку відкинутих в'язей, тому в основній системі повинні бути відсутні переміщення точок прикладення зайвих невідомих у їх напрямках від зовнішнього навантаження. Наприклад, якщо невідома X заміщає відкинуту вертикальну в'язь, то її вертикальне переміщення повинно дорівнювати нулю.

В основній системі переміщення кожної i -ї невідомої в її напрямку Δ_i складається з переміщень, викликаних зайвими в'язями (X_1, X_2, \dots, X_n), і переміщення від зовнішніх навантажень визначається так:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{iF}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

тобто

$$\Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{iF} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тут Δ_{ij} – це переміщення в напрямку i -ї відкинутої в'язі, викликане реакцією j -ї в'язі (j -ї зайвої невідомої), $j = 1, 2, \dots, n$.

Запишемо переміщення Δ_{ij} в іншому вигляді. З цією метою для всіх j ($j = 1, 2, \dots, n$) замінимо невідомі сили X_j одиничними силами $\bar{X}_j = 1$, прикладеними в напрямку X_j . Переміщення у напрямку i -ї в'язі ($i = 1, 2, \dots, n$) від $\bar{X}_j = 1$ за введеними нами раніше позначеннями записується як δ_{ij} і має назву *одиночного переміщення*.

Скористаємося принципом суперпозиції. Якщо переміщення δ_{ij} від одиничної сили $\bar{X}_j = 1$ помножимо на X_j , то отримаємо переміщення від сили X_j , тобто переміщення в напрямку i -ї в'язі Δ_{ij} від сили X_j дорівнює

$$\Delta_{ij} = X_j \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Підставимо цей вираз в умову $\Delta_i = 0$ для кожного i , у результаті отримаємо:

$$\Delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{iF} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Інакше кажучи, ми отримали n рівнянь відносно n невідомих X_1, X_2, \dots, X_n :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0 \end{cases}$$

Ця система називається *системою канонічних рівнянь методу сил*.

У *матричному вигляді* ця система записується так:

$$AX + \Delta = 0,$$

де A – матриця системи;

X – стовпець невідомих;

Δ – стовпець правих частин.

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \\ \dots \\ \Delta_{nF} \end{bmatrix}.$$

Узагальнимо вищевикладене.

i -те рівняння системи визначає, що переміщення в напрямку i -ї в'язі від зовнішнього навантаження в основній системі дорівнює нулю. Кількість рівнянь системи дорівнює n (ступеню статичної невизначності). **Невідомі** цієї системи X_j ($j = 1, 2, \dots, n$) – це невідомі сили, якими ми замінили відкинуті в'язі вихідної системи. Кожний **коефіцієнт системи** δ_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$) – переміщення в основній системі в напрямку i -ї відкинутої в'язі від одиничної сили $\bar{X}_j = 1$, прикладеної в напрямку j -ї відкинутої в'язі; **вільні члени** Δ_{if} – переміщення в основній системі в напрямку i -ї в'язі від дії зовнішніх сил.

Коефіцієнти системи δ_{ii} називаються **головними**. Коефіцієнти δ_{ij} при $i \neq j$ називаються **другорядними коефіцієнтами**.

Відповідно до теореми Максвелла про **взаємність можливих переміщень**

$$\delta_{ij} = \delta_{ji},$$

тобто **матриця системи канонічних рівнянь симетрична**. Це зменшує обсяг роботи (кількість коефіцієнтів, які необхідно визначити) при виписуванні системи рівнянь.

З метою обчислення **коефіцієнтів системи канонічних рівнянь** скористаємося формулою Мора для визначення переміщення в напрямку i -ї в'язі від одиничної сили $\bar{X}_j = 1$, тобто коефіцієнта δ_{ij} . Для цього:

- побудуємо в основній системі епюру згинальних моментів \bar{M}_j від сили $\bar{X}_j = 1$ (у даному випадку сила \bar{X}_j розглядається як зовнішнє навантаження, а одержана епюра – як вантажна епюра);
- прикладемо в основній системі одиничну епюру в напрямку шуканого переміщення $\bar{X}_i = 1$; тим самим ми отримаємо допоміжну систему для визначення переміщення;
- побудуємо епюру згинальних моментів \bar{M}_i в допоміжній системі;
- перемножимо епюри й отримаємо переміщення у відповідності з формулою Мора:

$$\delta_{ij} = \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_i \bar{M}_j ds,$$

де інтегрування ведеться по всіх ділянках безперервності підінтегральної функції і ділянках постійної жорсткості **EJ**.

Для **діагональних коефіцієнтів** матриці системи, тобто при $i = j$, маємо

$$\delta_{ii} = \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_i^2 ds.$$

Внаслідок цього $\delta_{ii} > 0$. Таким чином, нами отримано дві властивості коефіцієнтів системи канонічних рівнянь:

1 Симетричні коефіцієнти дорівнюють один одному: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, тобто матриця системи симетрична.

2 Діагональні коефіцієнти системи цілком додатні: $\delta_{ii} > 0$.

Епюри згинальних моментів \bar{M}_j від одиничних сил $\bar{X}_j = 1$ називають **одиничними епюрами**. З формули для обчислення δ_{ij} випливає, що необхідно намагатися вибрати основну систему методу сил так, щоб одиничні епюри \bar{M}_j мали якомога більше нульових ділянок, при цьому залишиться менше ділянок, по яких необхідно перемножувати епюри.

З метою визначення **вільних членів системи канонічних рівнянь** також використовують формулу Мора. Для цього необхідно виконати такі дії:

- побудувати в основній системі епюру згинальних моментів M_F від заданого зовнішнього навантаження, тобто **вантажну епюру**;

- прикласти в основній системі одиничну силу в напрямку шуканого переміщення $\bar{X}_i = 1$, у результаті чого отримують допоміжну систему для визначення переміщення;

- побудувати епюру згинальних моментів \bar{M}_i в допоміжній системі;

- перемножити епюри й отримати переміщення згідно з формулою Мора:

$$\Delta_{iF} = \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_i M_F ds,$$

де інтегрування ведеться по всіх ділянках безперервності підінтегральної функції і ділянках постійної жорсткості **EJ**.

Отже, нами визначено коефіцієнти і вільні члени системи канонічних рівнянь, тобто складено систему рівнянь відносно

зайвих невідомих. Розв'язавши систему, знайдемо сили X_1, X_2, \dots, X_n .

Розв'язати систему рівнянь можна вручну одним з відомих методів (наприклад, методом Гауса або виключенням змінних), якщо її порядок не перевищує трьох ($n \leq 3$). Якщо порядок системи збільшено ($n \geq 4$), її доцільніше розв'язувати на ЕОМ, використовуючи спеціальну програму.

Розглянемо *порядок розрахунку статично невизначних систем методом сил*:

- 1 Обчислення ступеня статичної невизначності системи n .
- 2 Вибір основної системи.
- 3 Побудова одиничних епюр $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ і вантажної M_F .
- 4 Обчислення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь δ_{ij} і Δ_{iF} , $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$.
- 5 Складання системи канонічних рівнянь.
- 6 Розв'язання системи канонічних рівнянь – визначення сил X_1, X_2, \dots, X_n .
- 7 Побудова епюри згинальних моментів M у вихідній статично невизначній системі.
- 8 Побудова епюр поперечних Q і поздовжніх сил N у вихідній системі.

5.3 Побудова епюр внутрішніх сил у заданій статично невизначній системі та їх перевірка

Для побудови завершеної епюри згинальних моментів M необхідно застосувати принцип суперпозиції. У процесі складання системи канонічних рівнянь отримано такі епюри: \bar{M}_1 – від $\bar{X}_1 = 1$; \bar{M}_2 – від $\bar{X}_2 = 1$; ... ; M_n – від $\bar{X}_n = 1$; ... ; M_F – від зовнішнього навантаження.

Згідно з принципом суперпозиції згинальний момент від сили X_i дорівнює $M_i = X_i \bar{M}_i$ для всіх значень i . Остаточна епюра M повинна бути побудована від сукупності дій X_1, X_2, \dots, X_n і зовнішнього навантаження, тому

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n + M_F = X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + \dots + X_n \bar{M}_n + M_F.$$

Остаточна отримаємо:

$$M = X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + \dots + X_n \bar{M}_n + M_F.$$

Перемноження епюр на число та їх складання здійснюють в характерних точках (на кінцях ділянок безперервності для лінійних епюр і в середині ділянки або в точці екстремуму – для параболічних).

З використанням готової епюри згинальних моментів M будується епюра поперечних сил Q у вихідній системі і потім – епюра поздовжніх сил N .

Побудуємо так звану *сумарну одиничну епюру* \bar{M}_s :

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n.$$

Це епюра згинальних моментів в основній системі від одночасної дії одиничних сил $\bar{X}_1 = 1, \bar{X}_2 = 1, \dots, \bar{X}_n = 1$. Для її побудови необхідно скласти епюри $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ за точками.

Обчислимо добуток епюр \bar{M}_1 і \bar{M}_s . Переміщення δ_{1S} у напрямку зв'язку X_1 від одночасної дії одиничних сил $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$:

$$\delta_{1S} = \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_1 \bar{M}_s ds.$$

Підставивши в цю формулу вираз для \bar{M}_s , отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta_{1S} &= \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_1 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds = \\ &= \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_1 \bar{M}_1 ds + \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_1 \bar{M}_2 ds + \dots + \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_1 \bar{M}_n ds = \delta_{11} + \delta_{12} + \dots + \delta_{1n}, \end{aligned}$$

тобто

$$\delta_{1S} = \delta_{11} + \delta_{12} + \dots + \delta_{1n}.$$

Аналогічно отримаємо те, що для всіх значень $i = 1, 2, \dots, n$ повинна виконуватися рівність

$$\delta_{iS} = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in},$$

тобто

$$\sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_i \bar{M}_s ds = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in} \quad -$$

переміщення в напрямку i -ї в'язі від одночасної дії всіх одиничних сил дорівнює сумі переміщень у напрямку i -ї відкинутої в'язі від кожної з одиничних сил окремо.

Для кожного i в цій перевірці враховується сума всіх коефіцієнтів i -го рівняння, тобто i -го рядка матриці системи рівнянь, тому така перевірка називається **порядковою**.

Також отримується умова для перевірки δ_{ss} , тобто **сумарного переміщення в напрямку всіх відкинутих в'язей від одночасної дії всіх одиничних сил**. Така перевірка називається **універсальною**:

$$\begin{aligned} \delta_{ss} &= \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_s \bar{M}_s ds = \\ &= \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_s \bar{M}_1 ds + \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_s \bar{M}_2 ds + \dots + \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_s \bar{M}_n ds = \\ &= \delta_{1s} + \delta_{2s} + \dots + \delta_{ns} = \sum_{i=1}^n (\delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in}) . \end{aligned}$$

З останньої рівності випливає, що якщо виконуються всі порядкові перевірки, то виконується й **універсальна формула**, тобто **перевірка суми всіх елементів матриці системи канонічних рівнянь**:

$$\sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_s^2 ds = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} .$$

Обчислимо добуток сумарної одиничної епюри \bar{M}_s і вантажної епюри M_F :

$$\begin{aligned} \Delta_{sF} &= \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_s M_F ds = \\ &= \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_1 M_F ds + \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_2 M_F ds + \dots + \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_n M_F ds = \\ &= \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF} , \end{aligned}$$

тобто

$$\sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_s M_F ds = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF} .$$

Перевірка цієї рівності, у правій частині якої вказана сума вільних членів всіх рівнянь (тобто сума всіх елементів стовпця

вільних членів), називається **стовпцевою перевіркою** вільних членів.

Розглянемо, як проводиться перевірка епюри моментів \mathbf{M} у вихідній системі.

Обчислимо добуток епюри моментів \mathbf{M} у вихідній статично невизначній системі і сумарної одиничної епюри \mathbf{M}_S :

$$\begin{aligned}
 & \sum \frac{1}{EJ} \int MM_s ds = \\
 & = \sum \frac{1}{EJ} \int X_1 \bar{M}_1 M_s ds + \dots + \sum \frac{1}{EJ} \int X_n \bar{M}_n M_s ds + \sum \frac{1}{EJ} \int M_F M_s ds = \\
 & = \sum \frac{1}{EJ} \int X_1 \bar{M}_1 \bar{M}_1 ds + \sum \frac{1}{EJ} \int X_1 \bar{M}_1 \bar{M}_2 ds + \dots + \sum \frac{1}{EJ} \int X_1 \bar{M}_1 \bar{M}_n ds + \\
 & + \sum \frac{1}{EJ} \int X_2 \bar{M}_2 \bar{M}_1 ds + \sum \frac{1}{EJ} \int X_2 \bar{M}_2 \bar{M}_2 ds + \dots + \sum \frac{1}{EJ} \int X_2 \bar{M}_2 \bar{M}_n ds + \dots + \\
 & + \sum \frac{1}{EJ} \int X_n \bar{M}_n \bar{M}_1 ds + \sum \frac{1}{EJ} \int X_n \bar{M}_n \bar{M}_2 ds + \dots + \sum \frac{1}{EJ} \int X_n \bar{M}_n \bar{M}_n ds + \\
 & + \sum \frac{1}{EJ} \int M_F \bar{M}_1 ds + \sum \frac{1}{EJ} \int M_F \bar{M}_2 ds + \dots + \sum \frac{1}{EJ} \int M_F \bar{M}_n ds = \\
 & = \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_1 + \dots + \delta_{1n} X_1 + \delta_{21} X_2 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2n} X_2 + \dots + \\
 & + \delta_{n1} X_n + \delta_{n2} X_n + \dots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF} = \\
 & = \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1F} + \delta_{21} X_1 + \\
 & + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2F} + \dots + \\
 & + \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nF} = 0,
 \end{aligned}$$

тобто

$$\sum \frac{1}{EJ} \int MM_s ds = 0.$$

Це означає, що сума переміщень у напрямках всіх зайвих в'язей у вихідній системі дорівнює нулю. Така перевірка називається **деформаційною**.

Необхідно зазначити, що отримані перевірки можуть виявити тільки арифметичні помилки, тому що отримані умови є тотожними. Якщо в розрахунках не було допущено помилок, перевірки мають збігтися майже при неправильно побудованих

епюрах $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ і $\bar{M}_S = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i$. Тому при побудуванні кожної епюри необхідно перевіряти виконання умов рівноваги у вузлах.

Розглянемо, як будується епюра поперечних сил Q у вихідній системі.

Епюра поперечних сил Q будується з використанням побудованої епюри згинальних моментів M . При цьому кожна ділянка рами розглядається як окрема шарнірно оперта балка, а жорсткість граничних вузлів $n, n+1$ імітується шляхом прикладання на опорах розрахованих згинальних моментів M_n, M_{n+1} .

Можливо розглядати два випадки, як показано на рисунку 5.3: а) ділянка не завантажена розподіленим навантаженням; б) ділянка завантажена розподіленим навантаженням (на рисунках показано додатні напрямки моментів).

У першому випадку (рисунок 5.3, а) поперечна сила на всій балці (отже, на всій ділянці рами між вузлами $n, n+1$) постійна і дорівнює лівій реакції, яка визначається з умови рівноваги:

$$R_n = \frac{M_{n+1} - M_n}{\ell}$$

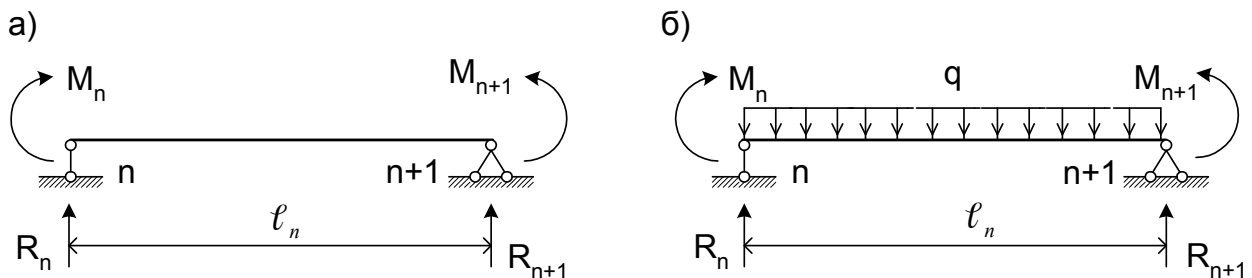


Рисунок 5.3 – До розгляду прикладу побудови епюри поперечних сил Q :

- а) ділянка не завантажена розподіленим навантаженням;
- б) ділянка завантажена розподіленим навантаженням

Тобто у випадку, якщо ділянка не завантажена розподіленим навантаженням, поперечна сила на ньому постійна і визначається як

$$Q = \frac{M_{n+1} - M_n}{\ell_n}$$

Якщо ділянка завантажена розподіленим навантаженням q (рисунок 5.3, б), то реакції такі:

$$R_n = \frac{q\ell}{2} + \frac{M_{n+1} - M_n}{\ell_n}; \quad R_{n+1} = \frac{q\ell}{2} - \frac{M_{n+1} - M_n}{\ell_n},$$

а епюра поперечних сил має вигляд нахиленої прямої. Її ординати на лівому і правому кінцях ділянки такі:

$$Q_n = R_n; \quad Q_{n+1} = -R_{n+1}, \quad \text{тобто}$$

$$Q_n = \frac{q\ell}{2} + \frac{M_{n+1} - M_n}{\ell_n}; \quad Q_{n+1} = -\frac{q\ell}{2} + \frac{M_{n+1} - M_n}{\ell_n}.$$

Вузлове навантаження завжди суміщено з початком або кінцем ділянки та враховано отриманими згинальними моментами на границях ділянок.

Розглянемо, як буде епюра поздовжніх сил N .

Епюра поздовжніх сил N будується за епюрою поперечних сил Q . Для цього послідовно вирізаються вузли, які з'єднують вертикальні та горизонтальні елементи, і в кожному з них виписуються умови рівноваги $\Sigma_x = 0$, $\Sigma_y = 0$, в які входять відомі поперечні та невідомі поздовжні сили. Таким чином, знаходиться поздовжня сила в кожному елементі рами.

5.4 Розрахунок систем при дії температури. Розрахунок систем при заданому зміщенні опор

Порядок розрахунку конструктивних елементів при дії температури такий самий, як і при силовій дії, а саме: після визначення ступеня статичної невизначності та вибору основної системи будуються одиничні епюри і розраховуються коефіцієнти при невідомих системи канонічних рівнянь.

I -те рівняння системи канонічних рівнянь визначає, що переміщення в напрямку i -ї відкинutoї в'язі в основній системі дорівнює нулю. Воно складається з переміщень, викликаних зайвими в'язями (X_1, X_2, \dots, X_n), і переміщення від зовнішніх дій.

У даному випадку зовнішня дія – це температурний перепад. Тому вільний член Δ_{iF} (тобто переміщення в напрямку i -ї

відкинутої в'язі від зовнішнього навантаження в основній системі) необхідно замінити переміщенням від перепаду температур Δ_{it} :

$$\{ \dots \}$$

Формула для визначення переміщень від перепаду температур у статично визначній системі нами була отримана раніше.

Таким чином, система канонічних рівнянь при розрахунку при перепаді температур відрізняється від системи канонічних рівнянь при розрахунку при зовнішньому навантаженні тільки *вільними членами*.

Після розв'язання системи канонічних рівнянь будемо епюру згинальних моментів у вихідній статично невизначній системі:

$$M = X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + \dots + X_n \bar{M}_n .$$

За епюрою згинальних моментів **M** будується епюра поперечних сил **Q**, а за нею – епюра поздовжніх сил **N**.

Розглянемо розрахунок статично невизначних конструкцій на зміщення опор.

Розрахунок при зміщенні опор відрізняється від розрахунку при перепаді температур тільки вільними членами системи канонічних рівнянь. У даному випадку вільний член системи канонічних рівнянь – це зміщення в основній системі в напрямку *i*-ї відкинутої в'язі від зміщення опор Δ_{ic} . Спосіб визначення переміщень у статично визначній системі від зміщення опор Δ_{ic} був розглянутий раніше.

Система канонічних рівнянь набуває такого вигляду:

$$\{ \dots \}$$

Після розв'язання системи канонічних рівнянь будемо епюру згинальних моментів **M** у вихідній статично невизначній системі:

$$M = X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + \dots + X_n \bar{M}_n,$$

а за нею – епюри поперечних **Q** і поздовжніх **N** сил.

Зауваження. Якщо на систему діє ряд факторів: силові, температурні, зміщення опор, то вільний член є сумою переміщень *i*-ї в'язі від всіх дій.

5.5 Матрична форма розрахунку статично невизначних систем за методом сил. Застосування комп'ютера для даного розрахунку

При розрахунку статично невизначних систем з високим ступенем статичної невизначності складно проводити розрахунки вручну. Для цього звичайно розрахунки програмують чи користуються спеціально складеними комп'ютерними програмами. При написанні таких програм зручно записувати розв'язання методом сил у матричній формі. У цьому вигляді розв'язання легко алгоритмізується і програмується.

Ми уже записували систему канонічних рівнянь у матричному вигляді:

$$AX + \Delta = 0,$$

де **A** (**n** x **n**) – матриця системи;

X (**n** x **1**) – стовпець невідомих;

X (**n** x **1**) – стовпець вільних членів.

Позначимо через \bar{M} матрицю, у якій запишемо по стовпцях ординати одиничних епюр:

$$\bar{M} = (\bar{M}_1 \bar{M}_2 \dots \bar{M}_n).$$

Припустимо, що **N** – число ділянок рами. На кожній ділянці задамо \bar{M}_i в характерних точках (тобто на початку, посередині і наприкінці ділянки). Тоді кожний стовпець матриці \bar{M} має такий вигляд:

$$\bar{M}_i = \begin{bmatrix} \bar{M}_i^1 \\ \bar{M}_i^2 \\ \bar{M}_i^3 \\ \bar{M}_i^4 \\ \bar{M}_i^5 \\ \bar{M}_i^6 \\ \bar{M}_i^7 \\ \bar{M}_i^8 \\ \bar{M}_i^9 \\ \bar{M}_i^{10} \end{bmatrix},$$

де верхній індекс вказує номер ділянки.

Повністю матриця \bar{M} (її розмірність дорівнює $3N \times n$) записується таким чином:

$$\bar{M} = \left[\begin{array}{cccc} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} \right]$$

Ураховуючи, що жорсткість є постійною на кожній ділянці, стовпець жорсткості системи для кожної ділянки складаємо так:

$$L^{(j)} = \left[\begin{array}{c} \frac{c_j}{6EI_j} \\ \frac{4c_j}{6EI_j} \\ \frac{c_j}{6EI_j} \end{array} \right], \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Стовпець жорсткості L всієї системи має розмірність $3N \times 1$ і дорівнює

$$L = \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right]$$

Запишемо тепер добуток матриць:

$$\bar{M}^T L \bar{M},$$

де штрих означає транспонування. Послідовно перемножуючи матриці, легко переконатися в тому, що кожним елементом добутку матриць є коефіцієнт δ_{ij} , розрахований за формулою Сімпсона. Тому матриця системи канонічних рівнянь має вигляд

$$A = \bar{M}^T L \bar{M}.$$

Позначимо через M_F стовпець (його розмірність $3N \times 1$), у якому записано ординати вантажної епюри на початку, всередині та наприкінці кожної ділянки:

$$M_F = \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right]$$

Тоді *стовпець вільних членів* системи канонічних рівнянь розмірності $3N \times 1$ дорівнює:

$$\Delta = \bar{M}^T L M_F.$$

Розв'язок системи канонічних рівнянь у *матричній формі* має такий вигляд:

$$X = -A^{-1} \Delta,$$

де A^{-1} означає обернення матриці.

Підставимо сюди отримані вирази для матриці системи і стовпця вільних членів:

$$X = (\bar{M}^T L \bar{M})^{-1} \bar{M}^T L M_F.$$

Формула для згинальних моментів у вихідній системі в матричній формі має такий вигляд:

$$M = \bar{M} X + M_F.$$

Підставимо сюди вираз для X і отримаємо матричну форму для обчислення згинальних моментів:

$$M = -\bar{M} (\bar{M}^T L \bar{M})^{-1} \bar{M}^T L M_F.$$

Тут M – стержень розмірності $3N \times 1$, у якому записано ординати епюри моментів у характерних точках всіх ділянок:

$$M = \left[\begin{array}{cccccccc} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} \right] .$$

Розрахунок відносно одержаної формули легко реалізується в програмі.

Розглянемо застосування декількох основних систем на прикладі двічі статично невизначної рами (рисунок 5.4), завантаженої довільно.

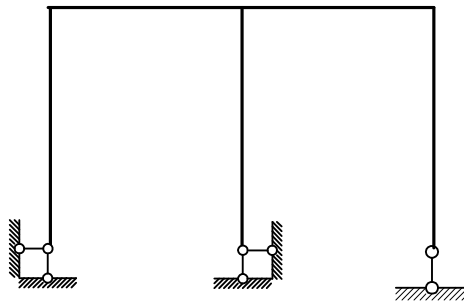


Рисунок 5.4 – Двічі статично невизначена рама

Легко переконатися, що в будь-якій з основних систем одна з одиничних епюр буде мати не менше трьох ненульових ділянок. Розглянемо дві неоднакові основні системи (рисунок 5.5).

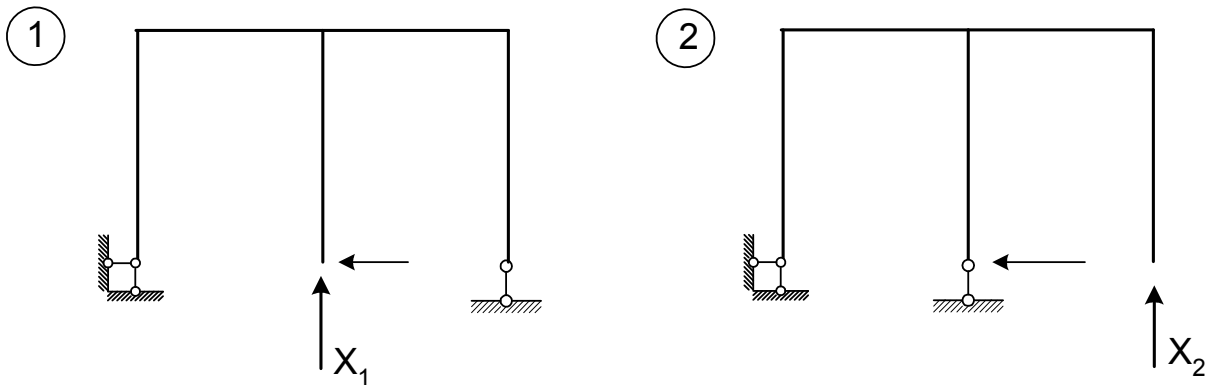
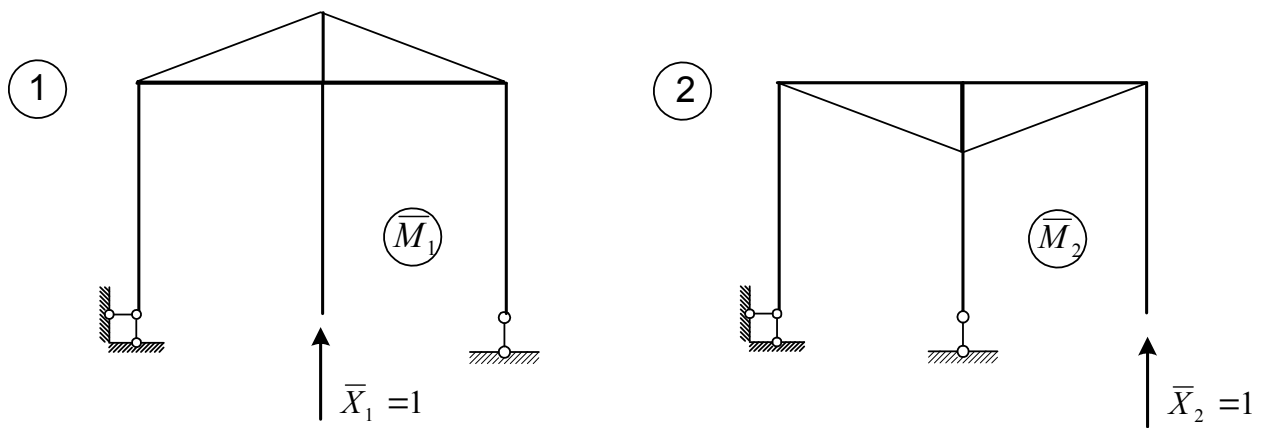


Рисунок 5.5 – До прикладу застосування декількох основних систем

Виберемо в якості зайвих невідомих X_1 з першої основної системи і X_2 – з другої. Побудуємо відповідні одиничні епюри \bar{M}_1 в першій основній системі і \bar{M}_2 – в другій (рисунок 5.6).



- 1) одинична епюра \bar{M}_1 в основній системі при $\bar{X}_1 = 1$;
- 2) одинична епюра \bar{M}_2 в основній системі при $\bar{X}_2 = 1$

Рисунок 5.6 – Одиничні епюри основних систем

Вантажну епюру \mathbf{M}_F можна будувати в одній з основних систем або вибрати для неї будь-яку іншу. Коефіцієнти δ_{ij} і Δ_F будемо розраховувати з використанням побудованих епюр \bar{M}_1 , \bar{M}_2 , \mathbf{M}_F за відомими формулами, причому їх розрахунок полегшується наявністю великої кількості нульових ділянок на одиничних епюрах.

У цьому випадку вираз

$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \Delta_{iF},$$

як і раніше, дорівнює переміщенню в напрямку змінної X_i ($i=1, 2$) у вихідній системі.

X_1 , X_2 – це реакції відповідних в'язей у вихідній системі, тому $\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2$ – це переміщення в напрямку X_i , викликане реакціями X_1 і X_2 ; Δ_{iF} враховує переміщення від зовнішнього навантаження (у тому числі і від інших реакцій).

Отже, канонічні рівняння при використанні декількох основних систем мають вигляд такий самий, як і при одній основній системі. При цьому, вдало підібравши різні основні системи для кожної зайвої невідомої, можна істотно скоротити обсяг обчислень.

5.6 Метод переміщень. Основна система і невідомі. Канонічні рівняння

Суть методу переміщень можна визначити так.

До вузлів системи вводяться закріплення таким чином, щоб не допустити її переміщення в будь-якому напрямку. Отримана при цьому система називається **основною**.

У введених закріпленнях основної системи виникають реакції, яких у вихідній системі нема. Умови рівності нулю цих реакцій у вихідній системі впливають з рівняння для визначення зусиль в статично невизначній системі.

Розглянемо докладно метод переміщень, враховуючи такі допущення:

1 Поздовжніми і поперечними деформаціями при визначенні переміщень нехтуємо.

2 Враховуючи, що деформації малі, не будемо брати до уваги зміни відстаней між кінцями стержнів за рахунок скривлення їх осей.

Рухомість системи характеризується лінійною рухомістю вузлів і кутовою рухомістю.

Лінійною рухомістю n_d називається кількість незалежних геометричних параметрів, які характеризують можливі переміщення геометричних центрів вузлів рами.

При визначенні числа лінійних зміщень беремо до уваги, що у відповідності з прийнятими допущеннями при деформації рами довжини стержнів не змінюються, і тому жорсткі з'єднання можна замінити шарнірними. Тоді рама перетворюється в **шарнірно-стержневу систему**, і n_d можна визначити як число ступенів свободи цієї системи.

Розглянемо, наприклад, раму зображену на рисунку 5.7.

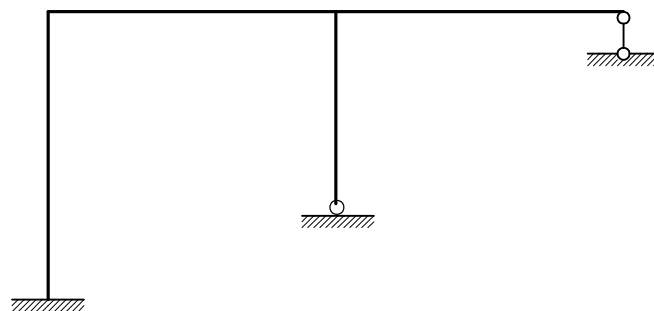


Рисунок 5.7 – Схема заданої рами

Уведемо в усі її жорсткі вузли шарніри (рисунок 5.8).

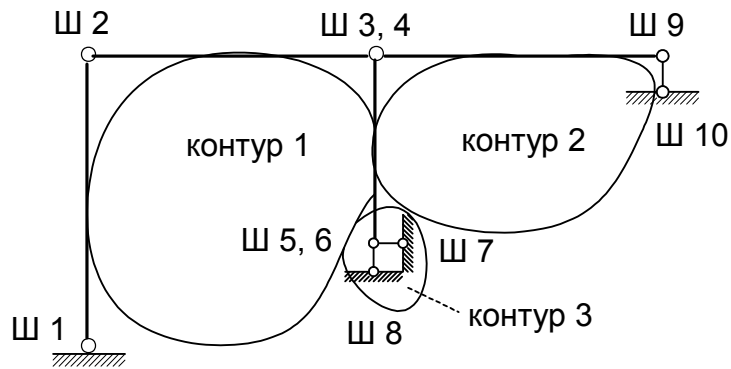


Рисунок 5.8 – Шарнірна схема заданої рами

Кількість незалежних лінійних зміщень вузлів дорівнює кількості ступенів свободи даної шарнірної схеми, тобто

$$n_{\text{л}} = \text{Ш} - 3\text{К},$$

де **Ш** – кількість всіх *простих* шарнірів системи;

К – кількість *замкнених контурів*, включаючи землю.

У нашому випадку

$$n_{\text{л}} = \text{Ш} - 3\text{К} = 10 - 3 \cdot 3 = 1,$$

тобто можливе лінійне зміщення в одному напрямку, причому, як видно зі схеми, у горизонтальному напрямку (рисунок 5.9).

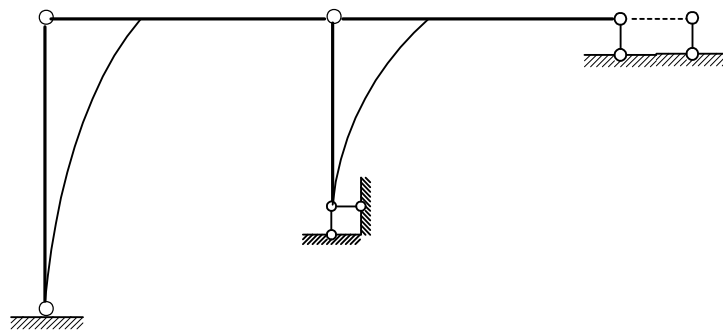


Рисунок 5.9 – Приклад лінійного зміщення рами в одному напрямку

Напрямок можливих переміщень визначається кожний раз залежно від шарнірної схеми. Для усунення лінійних зміщень ставимо додаткові опорні стержні (рисунок 5.10).

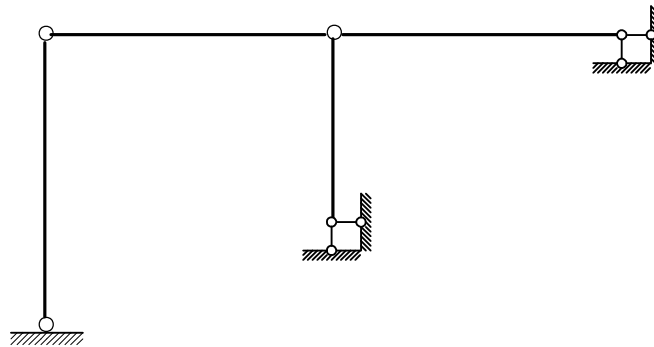


Рисунок 5.10 – Приклад усунення лінійних зміщень рами

Кількість кутових зміщень, або ступінь *кутової рухомості* n_y , відповідає кількості жорстких вузлів вихідної системи, у даному випадку $n_y = 2$.

Для усунення поворотів вузлів поставимо додаткові закріплення в жорстких вузлах. Ці закріплення перешкоджають тільки повороту вузлів, не заважаючи лінійним зміщенням, тому їх називають *плаваючими закріпленнями* (рисунок 5.11).

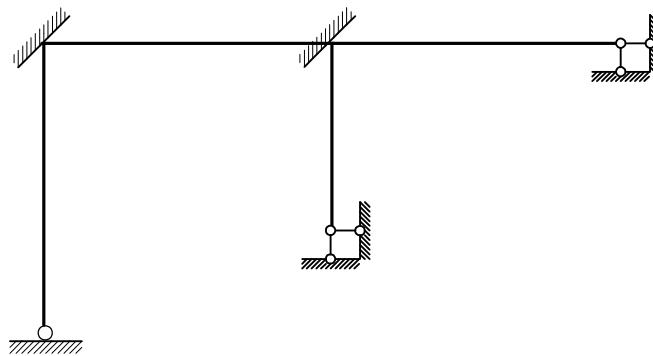


Рисунок 5.11 – Приклад плаваючих закріплень у вузлах рами

У результаті введення додаткових в'язей раму можна подати у вигляді окремих балок постійної жорсткості. Ця система приймається в якості основної системи методу переміщень.

Таким чином, *основною системою методу переміщень* називається система, отримана з заданої шляхом введення додаткових в'язей, що усувають кутові та лінійні зміщення вузлів.

Для розрахунку рами достатньо знати $n = n_{\text{л}} + n_{\text{у}}$ лінійних і кутових зміщень її вузлів. Тому переміщення додаткових в'язей Z_1, Z_2, \dots, Z_n приймаються в якості *невідомих методу переміщень*. Кількість невідомих методу переміщень $n = n_{\text{л}} + n_{\text{у}}$ називають *ступенем кінематичної невизначності* рами.

Для розглянутої рами $n = 1 + 2 = 3$.

Покажемо *невідомі методу переміщень* розглянутої рами (рисунок 5.12).

Через введення додаткових в'язей в основній системі виникають реакції цих в'язей R_1, R_2, \dots, R_n , які порушують умови рівноваги системи. Ці реакції зникнуть в основній системі тільки у тому випадку, якщо переміщення в'язей будуть відповідати переміщенням у заданій системі. Отже, *невідомі методу переміщень* повинні забезпечити в загальному випадку виконання таких умов:

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad \dots, \quad R_n = 0.$$

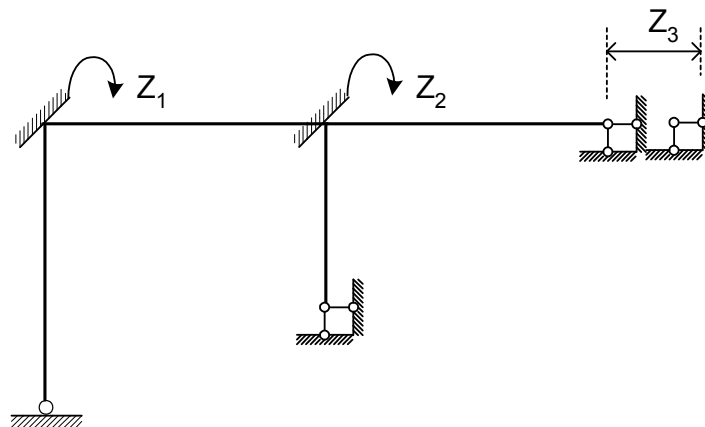


Рисунок 5.12 – Схема рами з визначенням невідомих методу переміщень

Для того щоб отримати ці *рівняння в канонічній формі*, використаємо, як і в методі сил, *принцип незалежності дії сил*. У результаті отримаємо *систему канонічних рівнянь методу переміщень*:

Ці рівняння є *умовами рівноваги*: i -те рівняння є умовою рівності нулю реакції в i -й в'язі основної системи. Коефіцієнтами і вільними членами *канонічних рівнянь* є *реакції в додаткових в'язях основної системи*: r_{ik} – реакція в i -й в'язі від одиничного зміщення k -ї в'язі, або одинична реакція; R_{iF} – реакція в i -й в'язі від заданого навантаження.

На підставі теореми про взаємність робіт можна зробити висновок, що $r_{ik} = r_{ki}$, тобто *система канонічних рівнянь симетрична*. Крім того, $r_{ii} > 0$.

5.7 Способи визначення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь. Визначення невідомих

Розглянемо два методи визначення коефіцієнтів і вільних членів *системи канонічних рівнянь*.

I Метод перемноження епюр

Аналогічно до методу сил шукані коефіцієнти можна визначити шляхом перемноження епюри згинальних моментів від одиничних переміщень, прикладених у напрямку невідомих переміщень. Розглянемо ці формули.

Коефіцієнти системи канонічних рівнянь:

$$r_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_k \bar{M}_i}{EJ} ds ,$$

де \bar{M}_i – еюра згинальних моментів в основній системі від одиничного переміщення i -ї в'язі.

Вільні члени:

$$R_{iF} = - \sum \int \frac{M_F^* \bar{M}_i}{EJ} ds ,$$

де M_F^* – еюра, побудована від зовнішнього навантаження в будь-якій статично визначній системі, яка може бути отримана з заданої. Ця еюра в основній системі методу переміщень отримана шляхом усунення зайвих в'язей, у тому числі обов'язкової і тієї в'язі, реакція якої визначається.

Як і в методі сил, можна здійснити перевірку правильності арифметичних розрахунків:

- **порядкова перевірка:**

$$\int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_i}{EJ} ds = \sum_{k=1}^n r_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

- **перевірка вільних членів:**

$$\int \frac{\bar{M}_s M_F}{EJ} ds = \sum_{k=1}^n R_{kF},$$

де \bar{M}_s – сумарна одинична епюра,

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n.$$

II Статичний метод

Розглянемо раму, завантажену заданим зовнішнім навантаженням (рисунок 5.13).

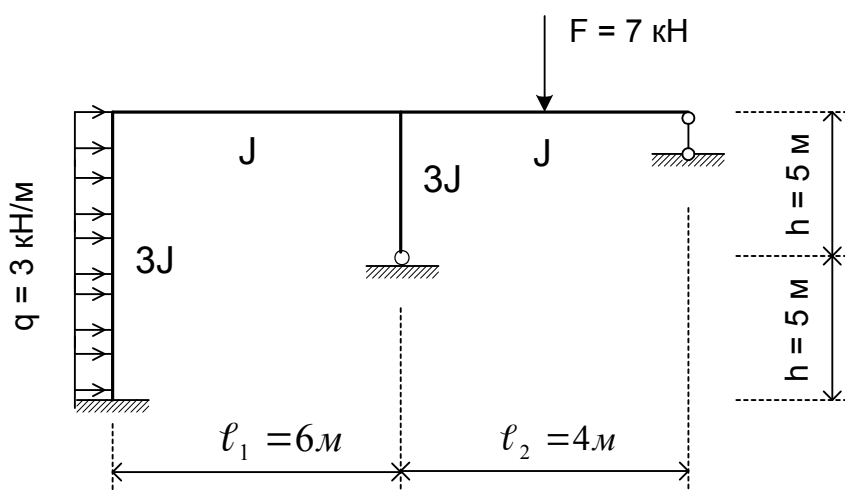


Рисунок 5.13 – Схема рами для визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь статичним методом

Побудуємо в основній системі епюри згинальних моментів $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ від одиничних переміщень, прикладених у напрямку невідомих Z_1, Z_2, Z_3 . Як уже було зазначено, кожний елемент основної системи являє собою набір балок постійної жорсткості, причому ці балки є статично невизначними (рисунок 5.14).

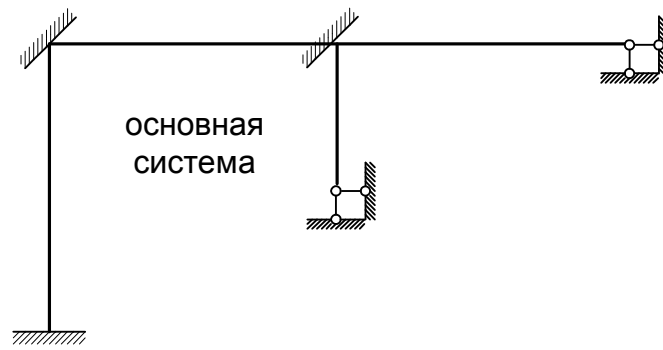
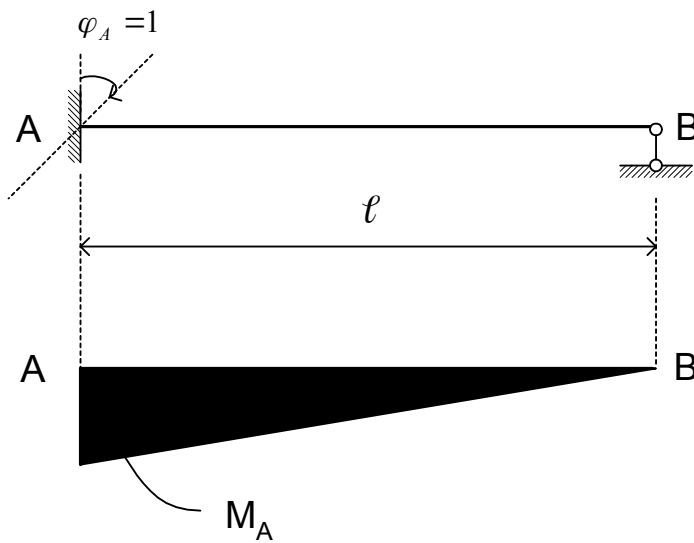


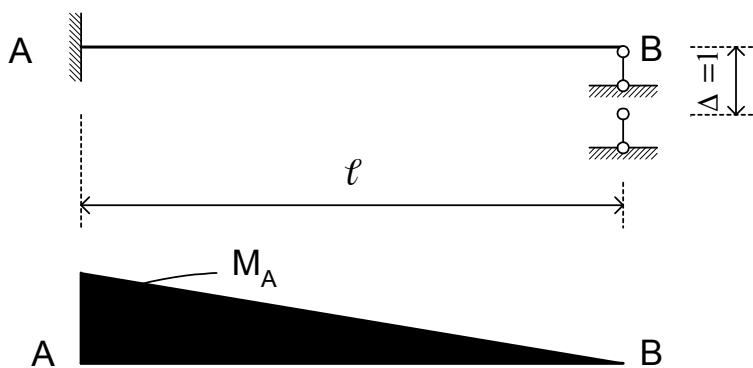
Рисунок 5.14 – Розрахункова схема рами

Для того щоб побудувати епюру \bar{M}_i в основній системі, достатньо побудувати цю епюру для кожної зі складових статично невизначних балок, наприклад, методом сил.

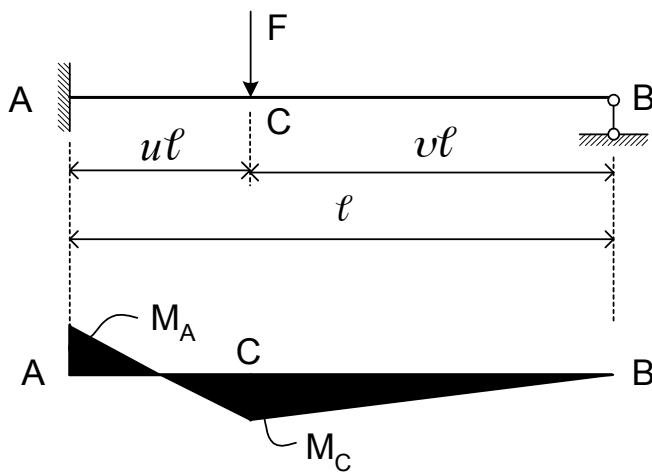
Для спрощення розрахунків користуються набором вже побудованих епюр. Розглянемо приклади стандартних рішень (рисунок 5.15).



$$M_A = \frac{3EJ}{\ell}$$



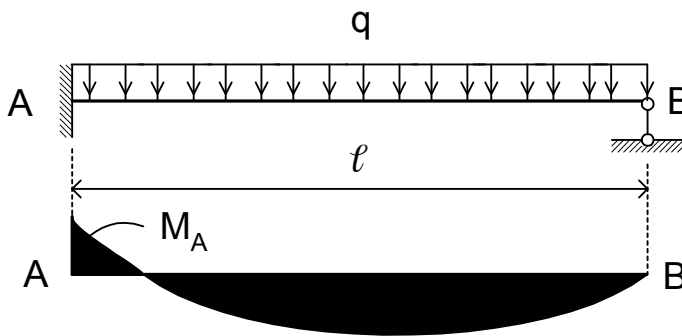
$$M_A = \frac{3EJ}{\ell^2}$$



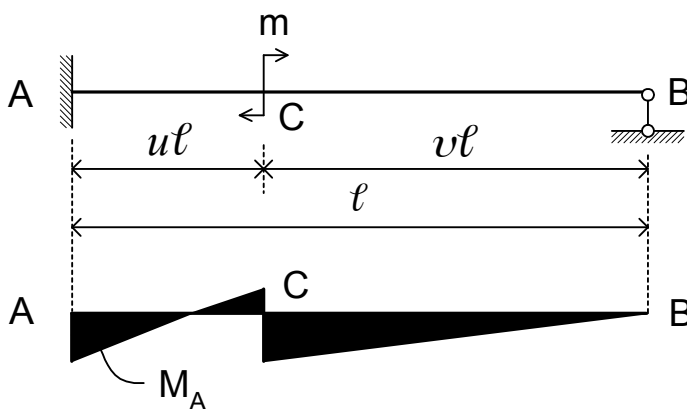
$$M_A = \frac{F\ell}{2}v(1 - v^2)$$

$$M_C = \frac{F\ell}{2}u^2v(3 - u)$$

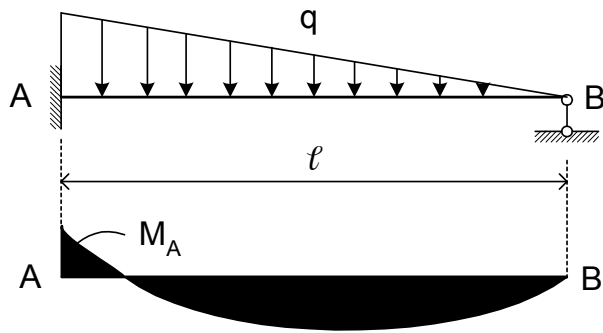
Рисунок 5.15 – Приклади стандартних рішень побудованих епюр (аркуш 1)



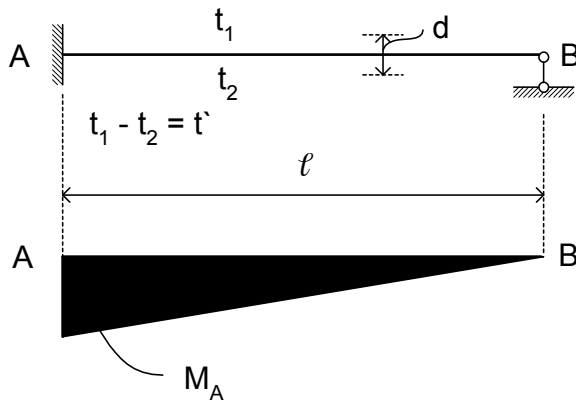
$$M_A = \frac{q\ell^2}{8}$$



$$M_A = \frac{m}{2}(3v^2 - 1)$$

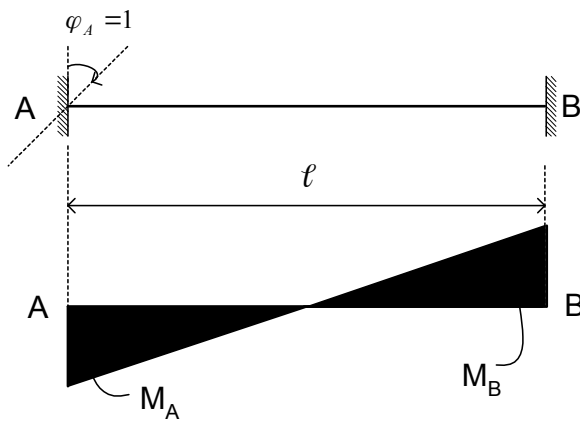


$$M_A = \frac{q\ell^2}{15}$$



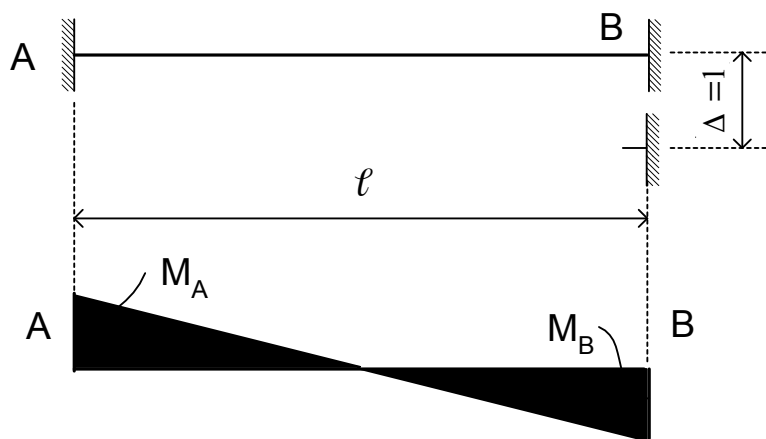
$$M_A = \frac{3EJ\alpha t'}{2d}$$

Рисунок 5.15 – Приклади стандартних рішень побудованих епюр (аркуш 2)

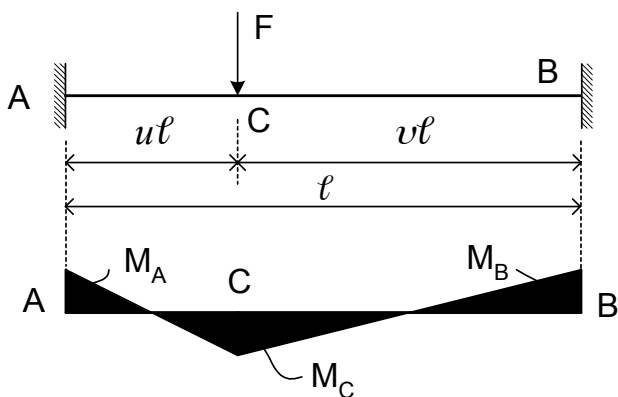


$$M_A = \frac{4EJ}{\ell}$$

$$M_B = \frac{2EJ}{\ell}$$



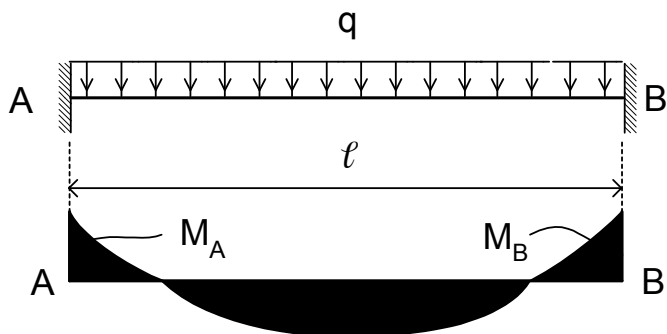
$$M_A = M_B = \frac{6EJ}{\ell^2}$$



$$M_A = uv^2 F \ell$$

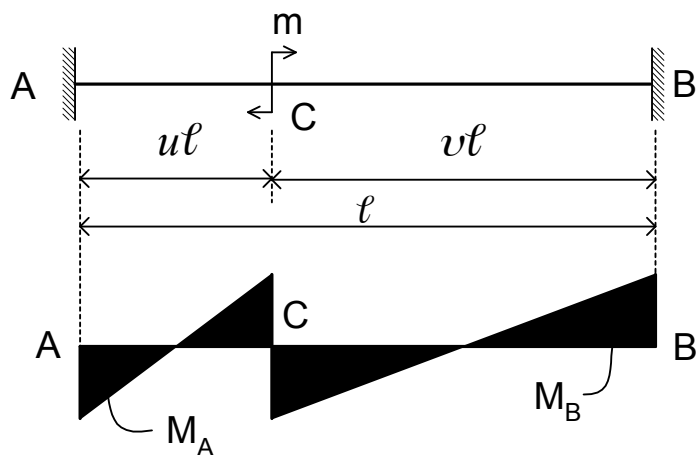
$$M_B = u^2 v F \ell$$

$$M_C = 2u^2 v^2 F \ell$$



$$M_A = M_B = \frac{q\ell^2}{12}$$

Рисунок 5.15 – Приклади стандартних рішень побудованих епюр (аркуш 3)



$$M_A = mv(3u - 1)$$

$$M_B = mu(3v - 1)$$

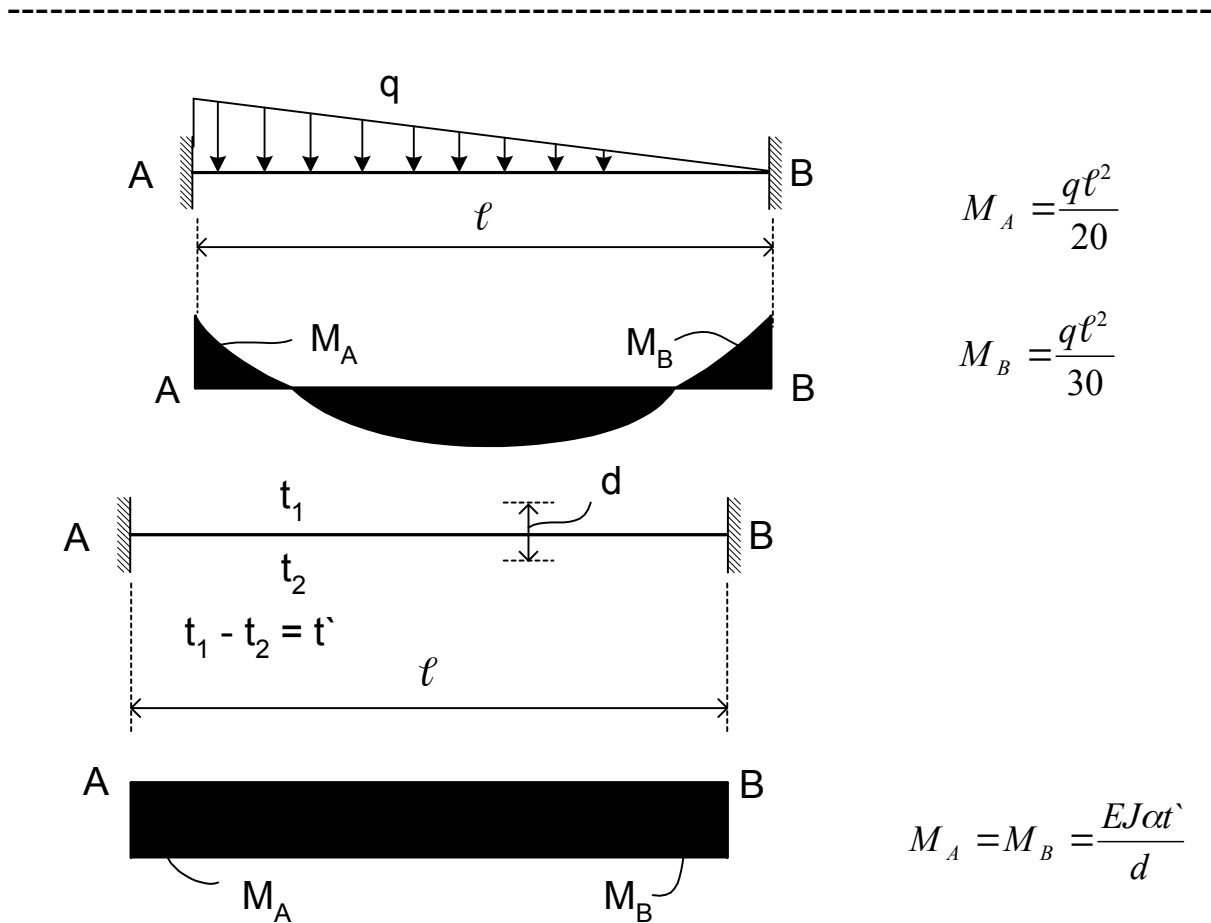
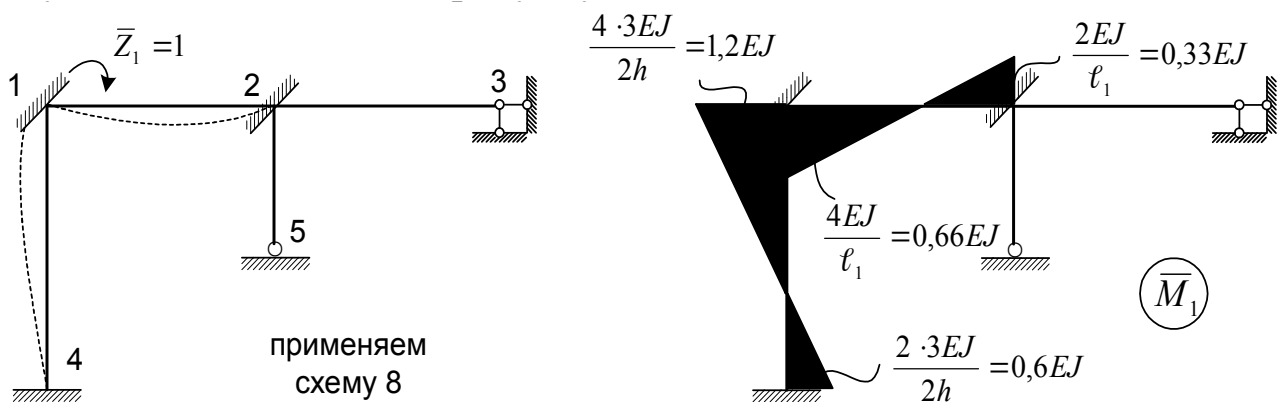


Рисунок 5.15 – Приклади стандартних рішень побудованих епюр (аркуш 4)

Покажемо деформовану вісь рами та епюру моментів від кожного з $\bar{Z}_i = 1$. У подальшому будемо дотримуватися нумерації вузлів, яка наведена на рисунку 5.16.



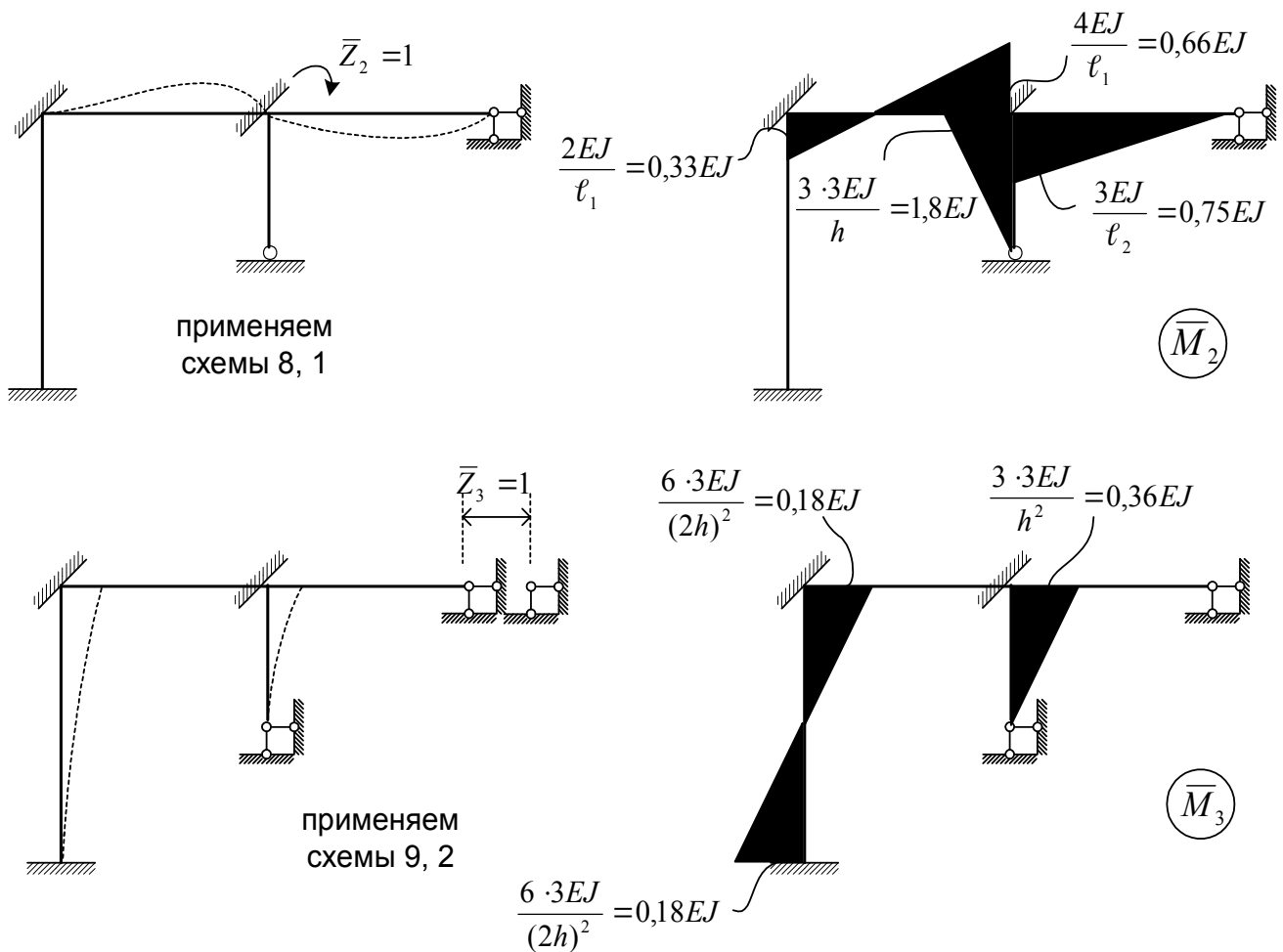


Рисунок 5.16 – Схема рами з вказаною нумерацією вузлів

Епюри згинальних моментів в основній системі від зовнішнього навантаження має вигляд, як на рисунку 5.17.

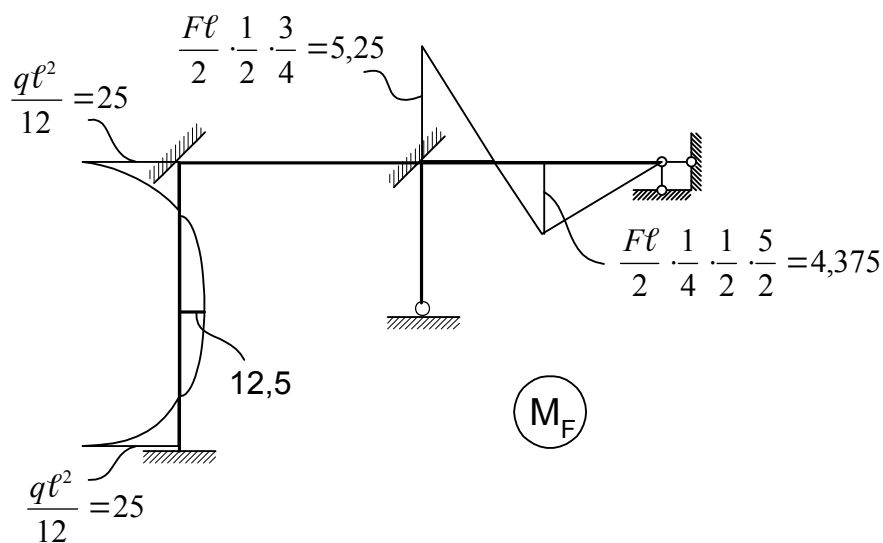


Рисунок 5.17 – Епюри згинальних моментів в основній системі

від зовнішнього навантаження

Значення згинального моменту посередині стійки одержано таким чином. Елемент подається у вигляді шарнірної балки; жорсткість з'єднання елементів задається відомими моментами у вузлах (рисунок 5.18).

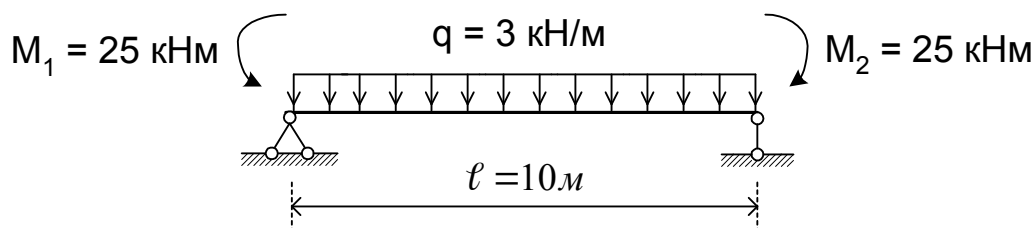


Рисунок 5.18 – Значення згинального моменту посередині стійки

Для такої балки значення моменту при $h = 5$ м дорівнює **12,5 кНм**.

Перейдемо до визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь.

Зауваження. Усі коефіцієнти, а також вільні члени канонічних рівнянь поділяються на дві групи:

- реактивні моменти у введених защемленнях;
- реактивні зусилля у введених стержнях (лінійних в'язях).

Коефіцієнти та вільні члени, які є реактивними моментами в защемленнях, визначаються вирізанням вузлів і складанням рівнянь у вигляді $\Sigma M_{y \text{ вузлі}} = 0$. Коефіцієнти та вільні члени, які є реактивними зусиллями у введених лінійних в'язях, можна визначити за допомогою розрізів, що є частиною або всією рамою від опор, і складанням рівнянь рівноваги сил, які діють на частину, що відсікається:

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0.$$

Додатним вважається напрямок реакції, що збігається з заданим напрямком зміщення в'язі.

Розглянемо вищевказане на прикладі нашої рами.

Обчислення та перевірка коефіцієнтів канонічних рівнянь відбувається таким чином.

Реактивні моменти r_{11} , r_{12} , r_{21} , r_{22} визначаємо при вирізанні вузлів. Умову $r_{12} = r_{21}$ використовуємо для перевірки розрахунків. Коефіцієнт r_{11} – це реактивний момент зв'язку **1** від одиничного повороту того самого зв'язку **1**. Тому визначаємо його за епюрою \bar{M}_1 шляхом вирізання вузла **1** (рисунок 5.19).

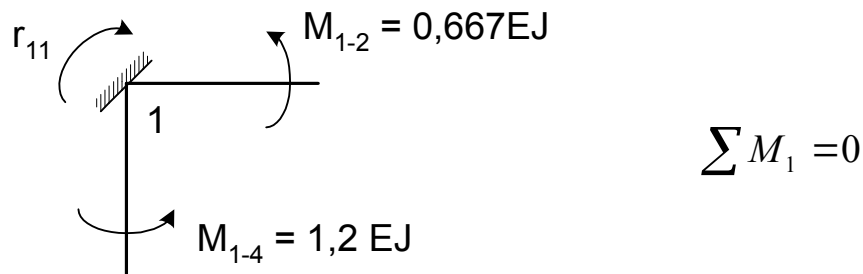


Рисунок 5.19 – Схема вузла **1** рами

З рівняння рівноваги випливає

$$r_{11} = M_{1-2} + M_{1-4} = 1,867 \text{ EJ.}$$

Коефіцієнт r_{21} – це реактивний момент в'язі **2** від одиничного повороту в'язі **1**. Тому визначаємо його за епюрою \bar{M}_1 шляхом вирізання вузла **2** (рисунок 5.20).

$$r_{21} = M_{2-1} = 0,333 \text{ EJ.}$$

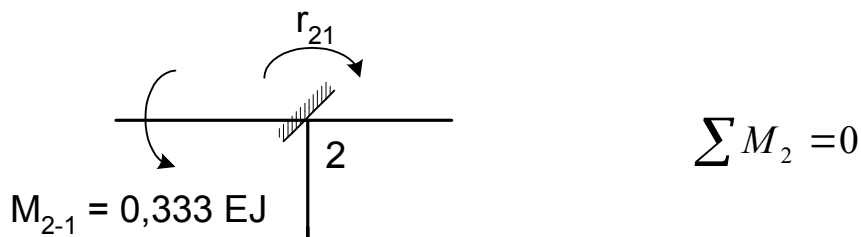
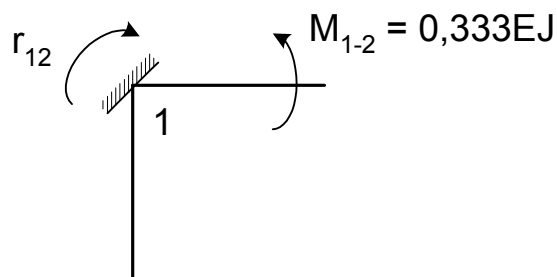


Рисунок 5.20 – Схема вузла **2** рами

Перевірка. Для перевірки обчислення r_{21} визначимо коефіцієнт r_{12} , тобто реактивний момент в'язі **2** від одиничного повороту в'язі **1**. Для цього вирізаємо вузол **1** і використовуємо епюру \bar{M}_2 (рисунок 5.21).

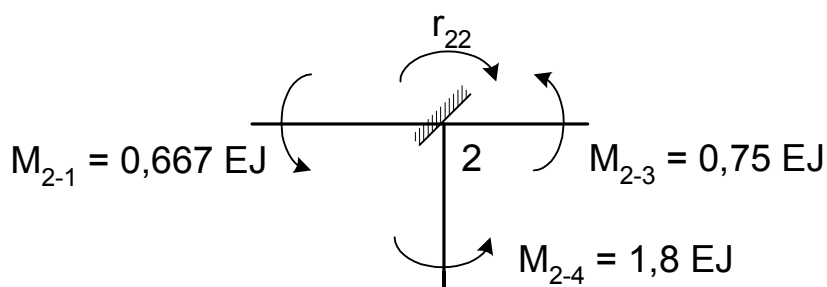


$$\sum M_1 = 0$$

Рисунок 5.21 – Схема вузла 1 рами для перевірки обчислення r_{21}

Звідси $r_{12} = M_{1-2} = 0,333 EJ = r_{21}$, тобто r_{12} розрахований правильно.

Коефіцієнт r_{22} обчислюємо за епюрою \bar{M}_2 шляхом вирізання вузла 2 (рисунок 5.22).



$$\sum M_2 = 0$$

Рисунок 5.22 – Схема вузла 2 рами для перевірки обчислення r_{22}

Звідси

$$r_{22} = 3,21 EJ.$$

Обчислимо тепер коефіцієнти r_{31} , r_{32} , r_{33} , які є *лінійними* реакціями в'язі 3. Для цього відсікаємо верхню частину рами і скористуємося по черзі одиничними епюрами.

Для розрахунку r_{31} – реакції в'язі 3 на одиничний поворот $\bar{z}_1 = 1$ – використовуємо епюру \bar{M}_1 . Спочатку визначимо поперечні сили, які діють у вузлах 1 і 2. Для цього, як уже робилося раніше, розглянемо елементи 1-3 і 2-5 як окремі балочки з прикладеними на кінцях відомими моментами (рисунок 4.23).

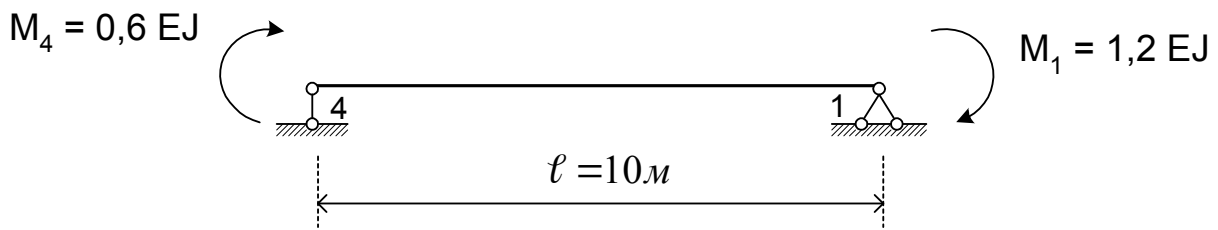


Рисунок 5.23 – До визначення поперечних сил у вузлах рами

$$Q = \text{const} = -0,18 \text{ EJ}.$$

Очевидно, у вузлі **2** (елемент **2-5**) (рисунок 5.22) поперечна сила відсутня.

Таким чином, на верхню частину рами, яка відсікається (рисунок 5.24), діють сили (з урахуванням знаку поперечної сили).

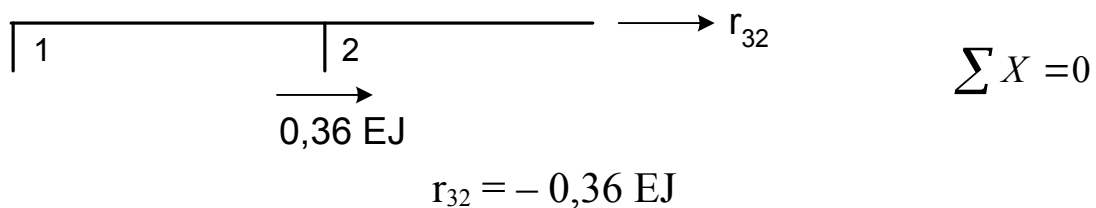


Рисунок 5.24 – Схема верхньої відсіченої частини рами

З умови рівноваги отримаємо:

$$r_{31} = -0,18 \text{ EJ}.$$

Аналогічно, використовуючи епюру \bar{M}_2 , визначаємо коефіцієнт r_{32} , а за епюрою \bar{M}_3 – коефіцієнт r_{33} (рисунок 5.25).



$$r_{32} = -0,36 \text{ EJ}$$

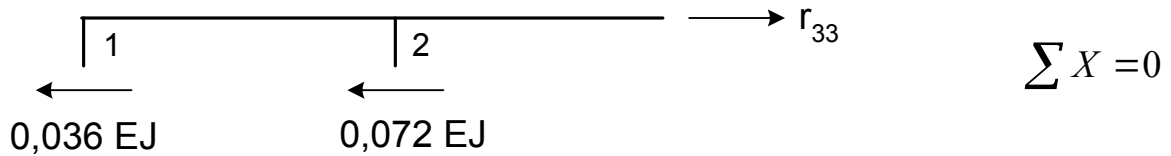


Рисунок 5.25 – До визначення коефіцієнтів відповідно r_{32} і r_{33}

$$r_{33} = 0,10 \text{ EJ.}$$

Перевірка. Обчислимо тепер для перевірки умов $r_{32} = r_{23}$, $r_{31} = r_{13}$ коефіцієнти r_{13} і r_{23} . Коефіцієнт r_{13} – це реактивний момент у в'язі **1** на одиничне зміщення в'язі **3**, тому визначаємо r_{13} за епюрою \bar{M}_3 шляхом вирізання вузла **1** (рисунок 5.26).

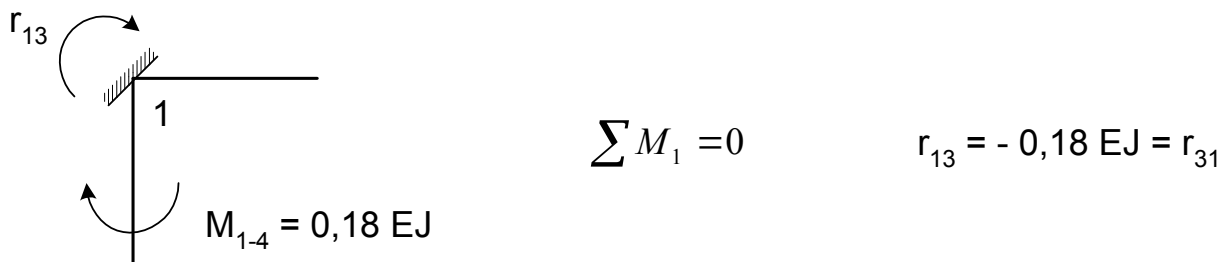


Рисунок 5.26 – Схема вузла **1** рами

Коефіцієнт r_{23} – це реактивний момент у в'язі **2** на одиничне зміщення в'язі **3**, тому визначаємо r_{23} за епюрою \bar{M}_3 шляхом вирізання вузла **2** (рисунок 5.27).

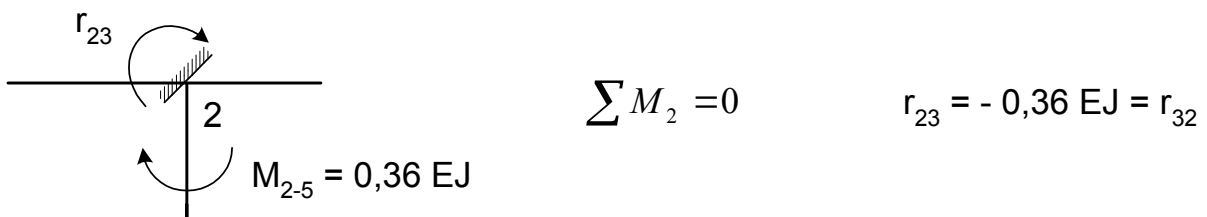


Рисунок 5.27 – Схема вузла **2** рами

Коефіцієнти r_{13} , r_{23} розраховано правильно.

Вільні члени канонічних рівнянь визначаємо шляхом вирізання вузлів за епюрою M_F .

R_{1F} – це реакція в'язі **1** на зовнішнє навантаження. Знаходимо її шляхом вирізання вузла **1** (рисунок 5.28.).

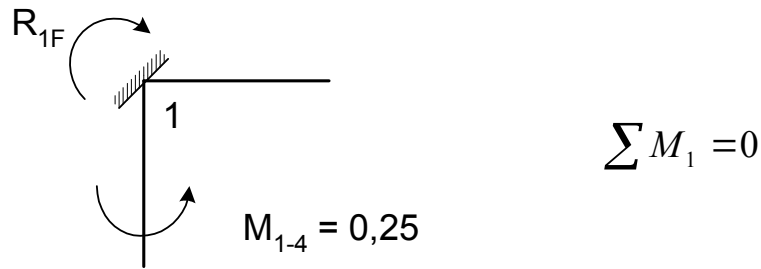


Рисунок 5.28 – Схема вузла 1 рами

$$R_{1F} = 25.$$

R_{2F} – це реакція в'язі **2** на зовнішнє навантаження. Знаходимо її шляхом вирізання вузла **2** (рисунок 5.29).

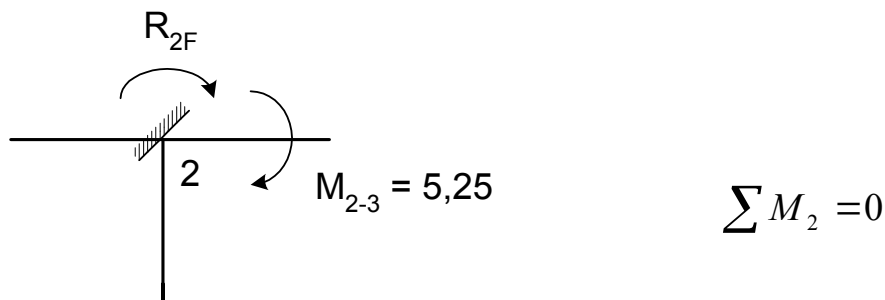


Рисунок 5.29 – Схема вузла 2 рами

$$R_{2F} = - 5,25.$$

R_{3F} – це реакція в'язі **3** на зовнішнє навантаження. Знаходимо її шляхом відсікання верхньої частини рами (рисунок 5.30).

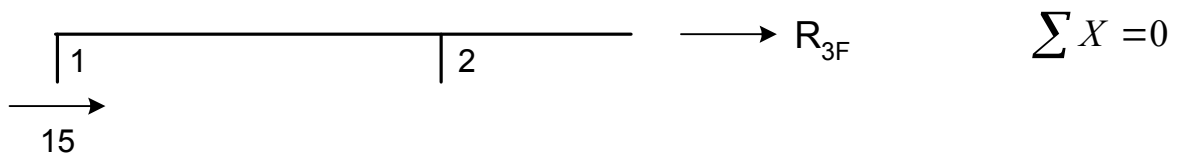


Рисунок 5.30 – Схема верхньої частини рами

$$R_{3F} = - 15.$$

Зауваження стосовно перевірки вільних членів. Для коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь повинні виконуватися звичні умови інтегральних перевірок (порядкової та вільних членів). Однак ці перевірки більш громіздкі, ніж сам розрахунок статичним способом.

У зв'язку з цим для коефіцієнтів необхідно обмежуватися перевіркою симетрії ($r_{ik} = r_{ki}$) – цим перевіряється і правильність побудови одиничних епюр. Остаточну відповідь щодо правильності визначення вільних членів надасть статична перевірка побудованих епюр внутрішніх зусиль у вихідній системі.

Отже, коефіцієнти і вільні члени системи канонічних рівнянь розраховано. У нашому випадку, поділивши всі члени рівнянь на EJ , отримаємо

$$\begin{cases} 1,867Z_1 + 0,333Z_2 - 0,18Z_3 + 25/EJ = 0 \\ 0,333Z_1 + 3,217Z_2 - 0,36Z_3 - 5,25/EJ = 0 \\ -0,18Z_1 - 0,36Z_2 + 0,108Z_3 - 15/EJ = 0 \end{cases}$$

Розв'язання цієї системи будь-яким відомим методом надасть такі значення невідомих:

$$Z_1 = 4,776; \quad Z_2 = 28,032; \quad Z_3 = 240,29.$$

5.8 Побудова епюр внутрішніх сил у заданій статично невизначній системі. Контроль обчислень. Розрахунок при заданому зміщенні опор

Розглянемо побудову епюри моментів у вихідній системі.

Враховуючи принцип незалежності дії сил, згинальні моменти в кожному перерізі вихідної системи можуть бути розраховані за формулою:

$$M_x = Z_1 \bar{M}_1 + Z_2 \bar{M}_2 + Z_3 \bar{M}_3 + M_F.$$

Вказані дії виконуються, як і в методі сил, у кожній точці системи. У результаті отримаємо таку епюру, як на рисунку 5.31.

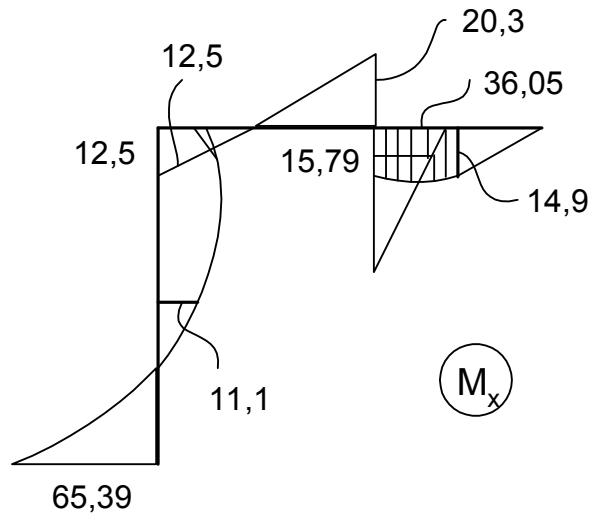


Рисунок 5.31 – Епюра моментів у вихідній системі

Перевірка епюри згинальних моментів. Необхідно перевірити виконання умови рівноваги $\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0}$ у вузлах. Для вузла **1** його виконання очевидно.

Перевіримо умову рівноваги у вузлі **2** (рисунок 5.32).

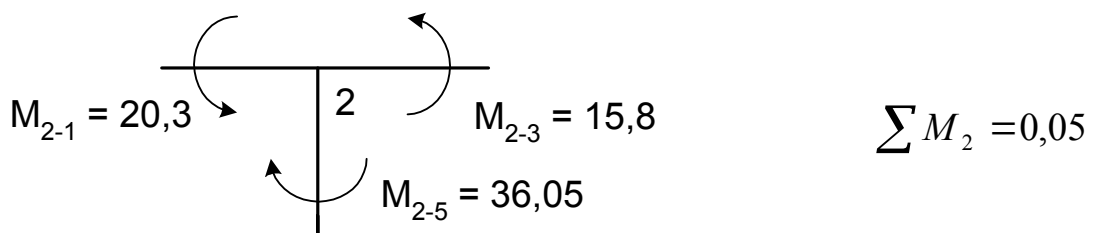


Рисунок 5.32 – Схема вузла **2** рами

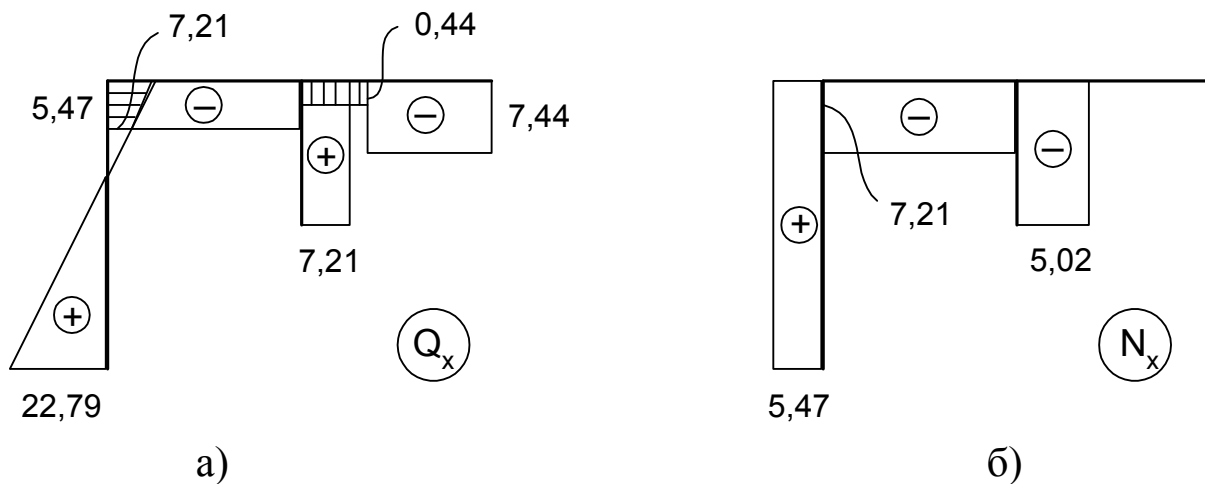
Крім того, повинні виконуватися такі умови (деформаційна перевірка):

$$\sum \int \frac{M_x \bar{M}_s}{EJ} ds = 0,$$

де \bar{M}_s – сумарна одинична епюра, побудована в будь-якій основній системі методу сил.

Розглянемо побудову епюр поперечних і поздовжніх сил.

Епюра поперечних сил Q_x будується, як і в методі сил, за епюрою згинальних моментів, а епюра поздовжніх сил N_x – за епюрою поперечних сил. У нашому випадку вони мають вигляд, як на рисунку 5.33.



а) поперечні сили Q_x ; б) поздовжні сили N_x

Рисунок 5.33 – Схема побудованих епюр рами

Розглянемо, як виконується статична перевірка епюр M_x , Q_x , N_x .

Як і в перевірці розрахунку методом сил, статична перевірка є остаточним критерієм правильності побудови епюр. Для перевірки відсікаємо раму від опор (рисунок 5.34) і показуємо зовнішні навантаження та зусилля в опорних вузлах (їх значення беруться з епюр M_x , Q_x , N_x).

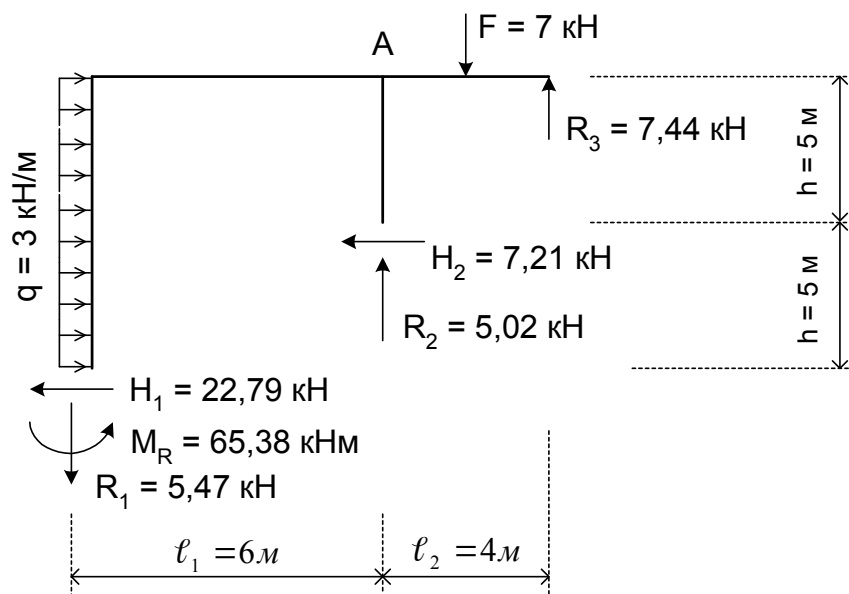


Рисунок 5.34 – Схема рами для статичної перевірки епюр

Перевіряємо умови рівноваги:

$$\Sigma X = q \cdot 2h - H_1 - H_2 = 3 \cdot 10 - 22,79 - 7,21 = 0;$$

$$\Sigma Y = F + R_1 - R_2 - R_3 = 7 + 5,47 - 5,02 - 7,44 = 0,01;$$

$$\Sigma M_A = -M_R - R_1 \ell_1 + H_1 \cdot 2h - q \cdot 2h \cdot h + H_2 \cdot h + F \frac{\ell_2}{2} - R_3 \ell_2 \approx -0,01.$$

Розглянемо розрахунок на зміщення опорних в'язей.

Система канонічних рівнянь у випадку зміщення опорних або інших в'язей відрізняється від системи при розрахунку на силові дії тільки вільними членами і в матричній формі має такий вигляд:

$$RZ + R_{\Delta} = 0.$$

Елементи матриці \mathbf{R} , тобто коефіцієнти r_{ik} , визначаються так само, як і при розрахунку на силові діяння.

Вектор R_{Δ} – це вектор реакцій в уведених в'язях в основній системі від заданого зміщення. Покажемо, як знайти ці реакції в загальному вигляді.

На рисунку 5.35 показана рама, у якої одна з опор переміщується.

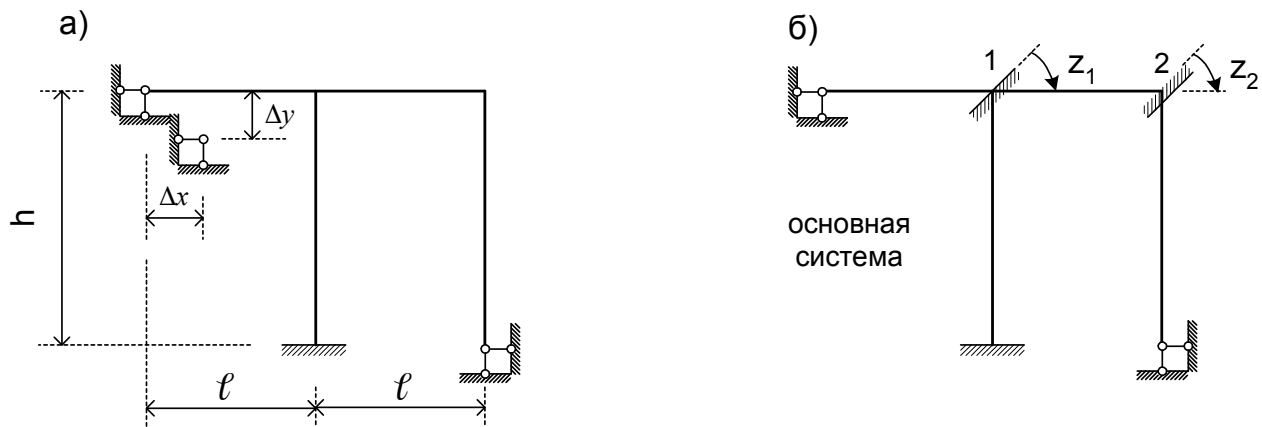


Рисунок 5.35 – Схема рами, у якої одна з опор переміщується

Визначимо реактивні моменти в уведених защемленнях **1** і **2** від заданого зміщення опори. За допомогою таблиці стандартних рішень побудуємо епюру M_{Δ} від зміщення опор і знайдемо значення реактивних моментів (рисунок 5.36).

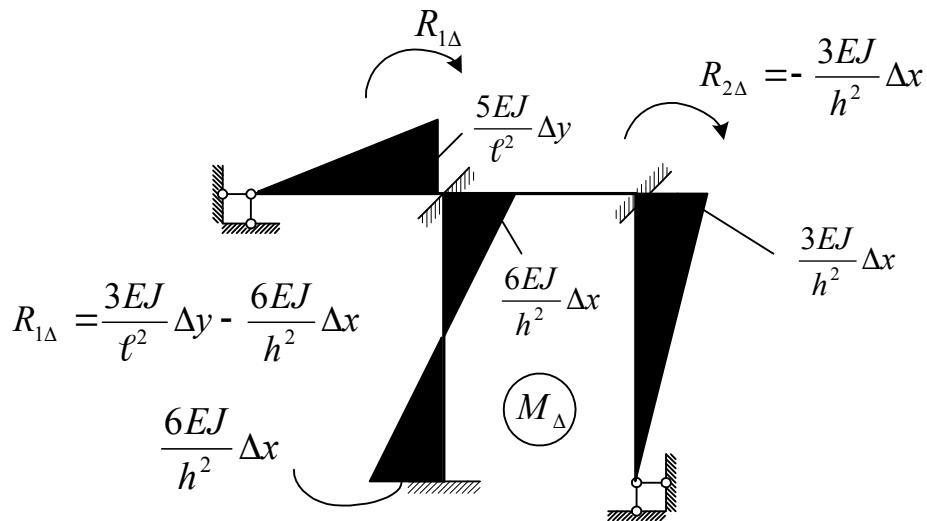


Рисунок 5.36 – Схема епюри M_{Δ} від зміщення опор

Після обчислення елементів матриці \mathbf{R} і \mathbf{R}_{Δ} виконуємо розв'язання канонічної системи рівнянь і знаходимо невідомі Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Епюра моментів у заданій статично невизначній системі може бути побудована за формулою

$$M_C = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + \dots + M_n Z_n + M_{\Delta}.$$

Перевірка. Правильність побудови остаточної епюри \mathbf{M} від зміщення опор підтверджується такими правилами:

- усі вузли остаточної епюри моментів повинні бути урівноваженими;
- повинна бути виконана рівність нулю переміщень у напрямку відкинутих в'язей у будь-якій основній системі методу сил (деформаційна перевірка):

$$\int \frac{\bar{M}_s M_C}{EJ} = 0,$$

де \bar{M}_s – сумарна одинична епюра в будь-якій основній системі методу сил.

Епюра поперечних сил будується за епюрою моментів, епюра поздовжніх сил – за епюрою поперечних сил.

5.9 Метод скінчених елементів. Основна концепція методу. Типи скінчених елементів

Значне поширення в розрахунках споруд за допомогою ЕОМ одержав *метод скінчених елементів* (МСЕ). Сутність цього методу полягає в тому, що континуальні системи розбиваються на окремі елементи, робота яких приблизно чи точно вивчена, а потім НДС (напружено-деформований стан) цих елементів сполучається між собою так, щоб задовольнялися умови спільності деформацій і умови рівноваги.

Хоча існує велика розмаїтість у формулюваннях, метод скінчених елементів може бути охарактеризований такими властивостями:

- фізична область задачі поділяється на підобласті чи скінчені елементи;
- залежна змінна (одна чи декілька) апроксимується функцією спеціального виду на кожному скінченому елементі і, отже, у всій області. Параметри апроксимацій у подальшому стають невідомими параметрами;
- підстановка апроксимацій у визначальні рівняння дає систему рівнянь з невідомими параметрами. Розв'язуючи ці рівняння, можна визначити значення параметрів і, отже, одержати наближений розв'язок задачі.

Розглянемо різні види напружено-деформованого стану і відповідні скінчені елементи.

Центрально розтягнутий стержень

Розглянемо розтягнутий стержень, показаний на рисунку 5.37. Знаючи координати x_1, y_1 і x_2, y_2 кінців стержнів **1** і **2**, можна визначити його довжину L і напрямні косинуси ℓ, m :

$$\begin{aligned}L &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} ; \\ \ell &= \cos\alpha = (x_2 - x_1) / L ; \\ m &= \sin\alpha = (y_2 - y_1) / L .\end{aligned}$$

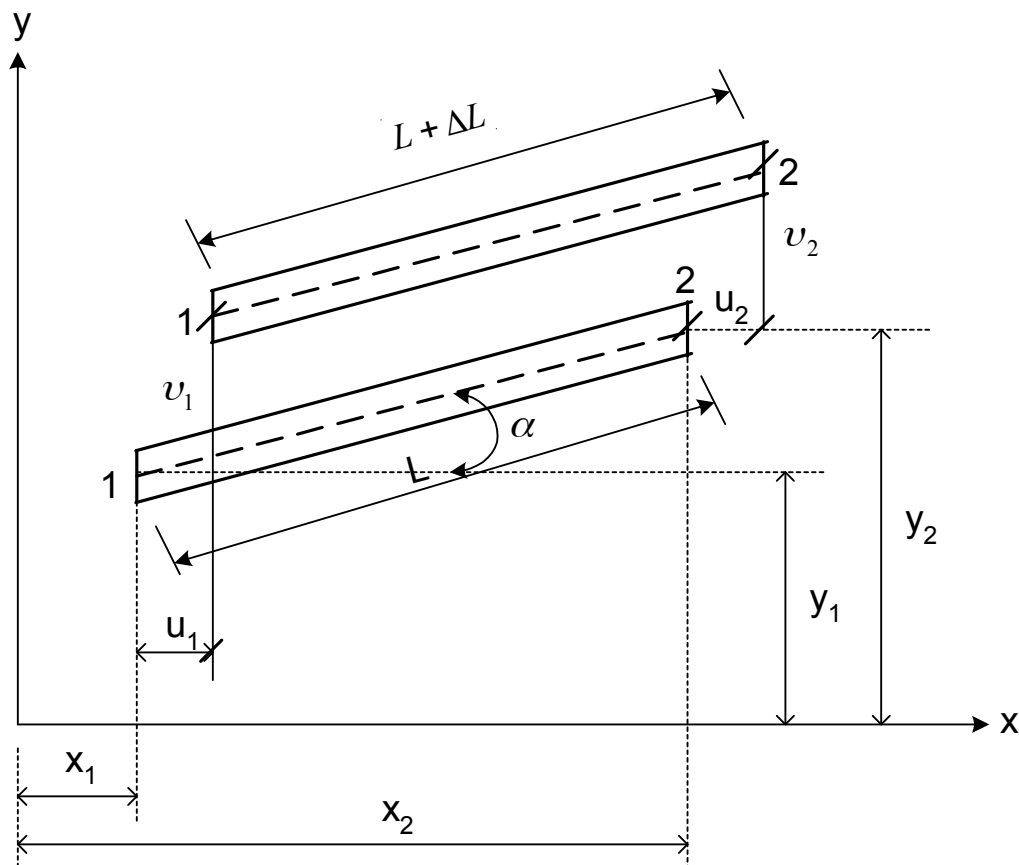


Рисунок 5.37 – Схеми центрально розтягнутого стержня і переміщення його кінців

Переміщення стержня визначаються складовими $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ і $(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)$ переміщень його кінців. Групуємо їх в одну матрицю-стовпець, яка називається *вектором узагальнених переміщень*:

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} .$$

Подовження стержня дорівнює проекції різниці переміщень його кінців на вісь стержня:

$$\Delta L = (u_2 - u_1)\ell + (v_2 - v_1)m.$$

Якщо модуль пружності позначимо через E , а площу поперечного перерізу – через A , то на підставі закону Гука отримаємо розтягувальну силу:

$$N = \frac{EA}{L} \Delta L .$$

Пружна енергія дорівнює роботі, яку розтягувальна сила N виконує на переміщенні ΔL . Оскільки сила зростає пропорційно подовженню, ця робота і разом з нею енергія складає

$$W = \frac{1}{2} N \Delta L = \frac{EA}{2L} \Delta L^2 = \frac{EA}{2L} [(u_2 - u_1)\ell + (v_2 - v_1)m]^2.$$

Після перетворень отримаємо:

$$W = \frac{EA}{2L} (\ell^2 u_1^2 + 2\ell m u_1 v_1 - 2\ell^2 u_1 u_2 - 2\ell m u_1 v_2 + m^2 v_1^2 - 2\ell m u_1 u_2 - \\ - 2m^2 v_1 v_2 + \ell^2 u_2^2 + 2\ell m u_2 v_2 + m^2 v_2^2).$$

Цей же результат можна записати в матричній формі:

$$W = \frac{1}{2} U^T C U,$$

де U^T – матриця, транспонована відносно матриці U , тобто матриця, у якій рядок збігається зі стовпцем матриці U ,

$$U^T = (u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2).$$

Симетрична матриця жорсткості стержня C

$$\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \ell\ell & \ell m & -\ell\ell & -\ell m \\ m\ell & mm & -m\ell & -mm \\ -\ell\ell & -\ell m & \ell\ell & \ell m \\ -m\ell & -mm & m\ell & mm \end{pmatrix}. \quad C = \quad (5.1)$$

5.10 Функції форми і матриця жорсткості елемента. Залежності для скінченного елемента при перетворенні координат

Розглянемо деяку стержневу систему (ферму), зображену на рисунку 5.38, яка для визначності має чотири вузли.

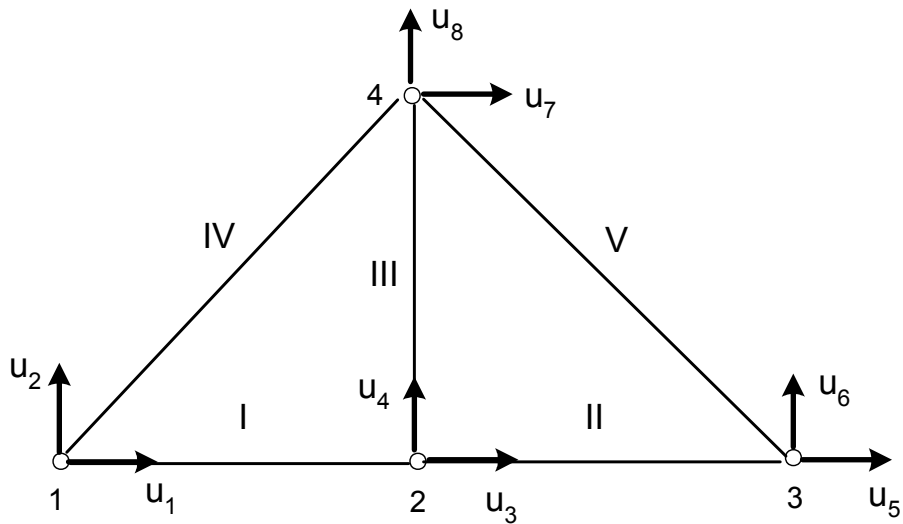


Рисунок 5.38 – Переміщення вузлів ферми

Усі вузли ферми – шарнірні, так що з кожним з них у плоскій задачі будуть пов’язані два невідомих переміщення. Ці невідомі показані на рисунку 5.38 для вузлів 1 - 4.

Вектор узагальнених переміщень розглянутої конструкції має вигляд

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}.$$

Відомо, що елементами ферми є стержні. Припустимо, що для всіх стержнів перерізи обрані так, що $EA / L = 2$. Тоді для кожного стержня за допомогою формули (5.1) отримаємо такі матриці жорсткості (по двох напрямках кожної матриці зазначено номери переміщень, що відповідають кінцям стержнів):

$$\begin{array}{c}
 \text{I} \qquad \qquad \qquad \text{II} \qquad \qquad \qquad \text{III} \\
 \begin{array}{cccc}
 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \\
 3 & & 4 & \\
 5 & & 6 & \\
 7 & & 8 &
 \end{array} \\
 \text{IV} \qquad \qquad \qquad \text{V}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & 7 & 8 \\
 1 & \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. & & & \\
 2 & & \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. & & \\
 7 & & & & \\
 8 & & & &
 \end{array}
 \quad , \quad
 \begin{array}{cccc}
 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 5 & \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. & & & \\
 6 & & \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. & & \\
 7 & & & & \\
 8 & & & &
 \end{array}$$

Загальна матриця жорсткості C може бути отримана шляхом підсумовування відповідних елементів матриць жорсткості окремих стержнів. При цьому додаються члени, що мають однакові номери переміщень:

$$C = \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{8} \end{array} \left(\begin{array}{cccccccc}
 \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\
 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
 -2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
 0 & 0 & -2 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
 -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\
 -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 4
 \end{array} \right) \quad (5.2)$$

Матриця жорсткості всієї системи (5.2) отримана без урахування опорних закріплень. Така матриця є особливою, тобто не має зворотної матриці C^{-1} , тому що відповідає конструкції, що ніби “висить у повітрі”, не закріпленої від переміщень як жорсткого цілого.

Розглянемо питання урахування опорних в’язей і навантаження ферми.

Ферма, зображена на рисунку 5.39, закріплена і навантажена. Унаслідок помилки при монтажі права опора зміщена на величину $\Delta = 1$.

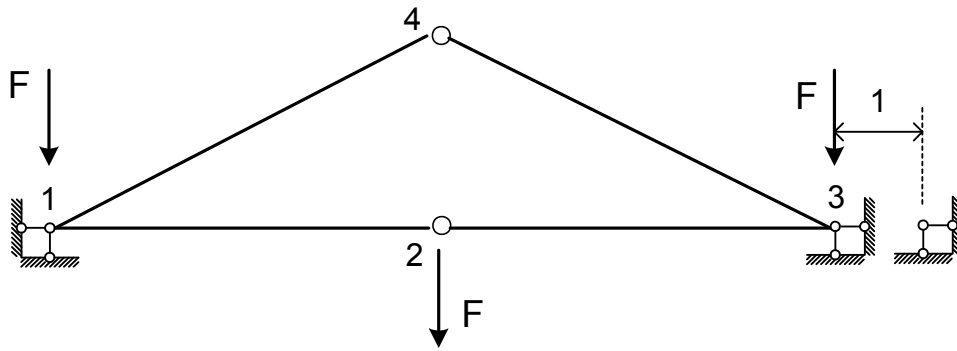


Рисунок 5.39 – Схема закріплення і навантаження ферми

Умови обпирання:

$$u_1 = u_2 = u_6 = 0; \quad u_5 = 1.$$

Умови навантаження:

$$F_1 = F_3 = F_5 = F_7 = F_8 = 0; \quad F_2 = F_4 = F_6 = -100.$$

Рівняння рівноваги $\mathbf{F} = \mathbf{C}\mathbf{U}$, де матриця \mathbf{C} (5.2) записується тільки для сил $\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{F}_7, \mathbf{F}_8$, у напрямку яких можливі (за винятком заданих) переміщення:

$$F_3 = -2u_1 + 0u_2 + 4u_3 + 0u_4 - 2u_5 + 0u_6 + 0u_7 + 0u_8;$$

$$F_4 = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 2u_4 + 0u_5 + 0u_6 + 0u_7 - 2u_8;$$

$$F_7 = -1u_1 - 1u_2 + 0u_3 + 0u_4 - 1u_5 + 1u_6 + 2u_7 + 0u_8;$$

$$F_8 = -1u_1 - 1u_2 + 0u_3 - 2u_4 + 1u_5 - 1u_6 + 0u_7 + 4u_8.$$

В отриману систему рівнянь підставляємо значення $\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{F}_7, \mathbf{F}_8$ і u_1, u_2, u_5, u_6 і маємо

$$2 = 4u_3;$$

$$-100 = 2u_4 - 2u_8;$$

$$1 = 2u_7;$$

$$-1 = 2u_4 + 4u_8.$$

У результаті розв'язання цієї системи отримуємо значення переміщень. Знаючи переміщення, можна за формулою $N = \frac{EA}{L} \Delta L$ знайти зусилля в стержнях ферми.

Стержень, що згинається

Переміщення стержня, що згинається (рисунок 5.40), визначаються переміщеннями ω_1 , ω_2 і кутами повороту φ_1 , φ_2 осі стержня (балки) на його кінцях.

Групуємо переміщення у вектор узагальнених переміщень:

$$U = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \varphi_1 \\ \omega_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

Прогин у точці **A**, що лежить на відстані x від кінця балки, виражається поліномом третього ступеня:

$$\omega = \alpha + bx + cx^2 + dx^3.$$

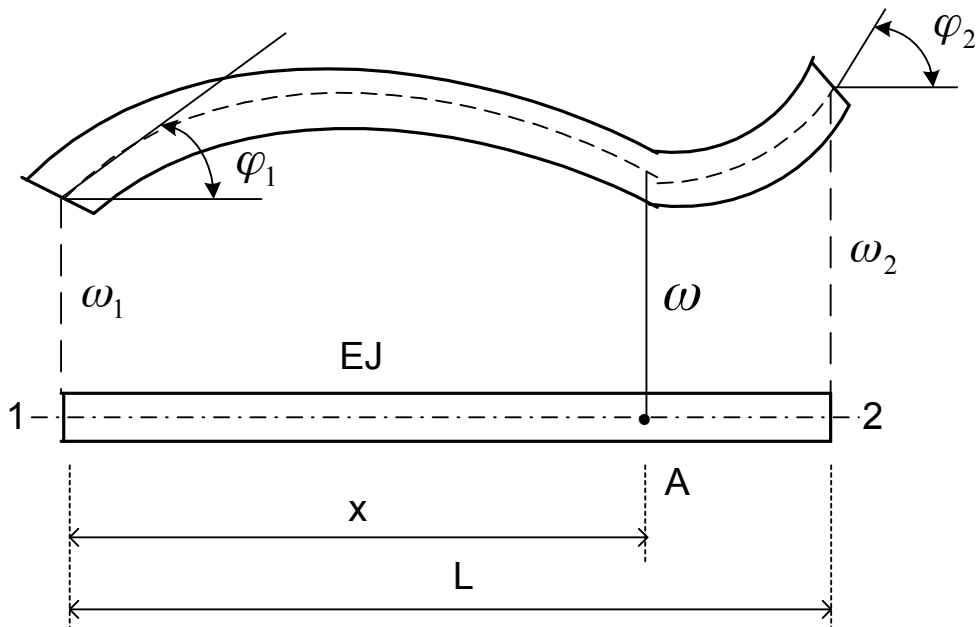


Рисунок 5.40 – Переміщення і повороти кінців стержня

Він є точною формулою прогину балки, навантаженої поперечними силами і моментами на кінцях. Коефіцієнти \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} цього полінома визначаються з граничних умов

$$\omega(0) = \omega_1; \quad \omega'(0) = \varphi_1; \quad \omega(L) = \omega_2; \quad \omega'(L) = \varphi_2.$$

У результаті розв'язання системи рівнянь знаходимо:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \omega_1; \\ \mathbf{b} &= \varphi_1; \end{aligned}$$

$$c = (-3\omega_1 - 2\varphi_1 L + 3\omega_2 - \varphi_2 L) / L^2;$$

$$d = (2\omega_1 + \varphi_1 L - 2\omega_2 + \varphi_2 L) / L^3.$$

Кривизна визначається виразом

$$\chi = \omega'' = 2c + 6dx = 2(c + 3dx).$$

Згинальний момент дорівнює

$$M = EJ\chi = 2EJ(c + 3dx).$$

Енергія згинання балки записується у вигляді

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L M\chi \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L 4EJ(c + 3dx)^2 \, dx = 2EJ(c^2 L + 3cdL^2 + 3d^2L^3).$$

Після підстановки значень c і d і найпростіших перетворень отримаємо

$$W = \frac{2EJ}{L^3} (3\omega_1^2 + 3L\omega_1\varphi_1 - 6\omega_1\omega_2 + 3L\omega_1\varphi_2 + L^2\varphi_1^2 - 3L\varphi_1\omega_2 + L^2\varphi_1\varphi_2 + 3\omega_2^2 - 3L\omega_2\varphi_2 + L^2\varphi_2^2).$$

(5.3)

Вираз (5.3) запишемо в матричній формі:

$$W = \frac{1}{2} U^T C U,$$

де C – матриця жорсткості балки,

$$C = \frac{2EJ}{L^3} \begin{pmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L \end{pmatrix}$$

Трикутний елемент плоскої задачі теорії пружності

Трикутник на площині (x, y) визначається координатами (z_1, z_2) , (z_3, z_4) , (z_5, z_6) його вершин (рисунок 5.41).

Площа трикутника:

$$A = \frac{1}{2} [(z_3 - z_1)(z_6 - z_2) - (z_4 - z_2)(z_5 - z_1)].$$

Можна також обчислити різниці окремих координат вершин, які позначимо так:

$$c_1 = s_2 = z_6 - z_4; \quad c_2 = s_1 = z_3 - z_5;$$

$$c_3 = s_4 = z_2 - z_6; \quad c_4 = s_3 = z_5 - z_1;$$

$$c_5 = s_6 = z_4 - z_2; \quad c_6 = s_5 = z_1 - z_3.$$

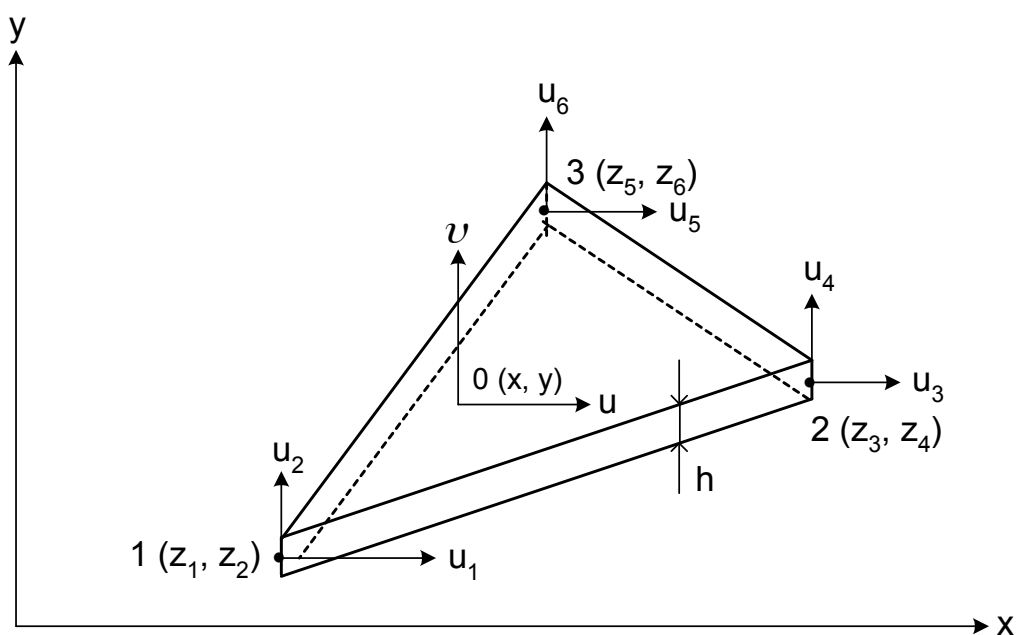


Рисунок 5.41 – Схема плоского елемента

Переміщення трикутника у своїй площині будуть описуватися **складовими переміщень** (u_1, u_2) , (u_3, u_4) , (u_5, u_6) його вершин. Ці складові групуємо у **вектор узагальнених переміщень** елемента:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}.$$

Приймається, що елемент зазнає **однорідної деформації**. Це означає, що переміщення (u, v) його довільної точки (x, y) лінійно залежать від координат точки:

$$u = \alpha + bx + cy; \quad v = d + ex + fy. \quad (5.4)$$

Коефіцієнти α , b , c , d , e , f визначаємо з умов, що залежності (5.4) задовольняються у вершинах трикутника:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha + bz_1 + cz_2; & u_3 &= \alpha + bz_3 + cz_4; \\ u_5 &= \alpha + bz_5 + cz_6; & u_2 &= d + ez_1 + fz_2; \\ u_4 &= d + ez_3 + fz_4; & u_6 &= d + ez_5 + fz_6. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (5.5), знайдемо

$$\begin{aligned} b &= (c_1u_1 + c_3u_3 + c_5u_5) / 2A; \\ c &= (s_1u_1 + s_3u_3 + s_5u_5) / 2A; \\ e &= (s_2u_2 + s_4u_4 + s_6u_6) / 2A; \\ f &= (c_2u_2 + c_4u_4 + c_6u_6) / 2A. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Деформаціями елемента є одиничні подовження ϵ_x , ϵ_y в напрямку осей x , y , а також кут зсуву γ_{xy} . З курсу опору матеріалів відомо, що зазначені величини дорівнюють

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = b; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = f; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = c + e. \end{aligned}$$

Ці деформації викликають напруження σ_x , σ_y у напрямку осей x , y , а також дотичне напруження τ_{xy} . Залежність між цими напруженнями і деформаціями описується законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G}{1-\nu}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) = \frac{2G}{1-\nu}(b + \nu f); \\ \sigma_y &= \frac{2G}{1-\nu}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) = \frac{2G}{1-\nu}(f + \nu b); \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = G(c + e), \end{aligned}$$

де G – модуль зсуву,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)};$$

ν – коефіцієнт Пуассона.

В одиниці об'єму елемента вміщена пружна енергія, що дорівнює

$$dW = \frac{1}{2} (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}),$$

а оскільки елемент має товщину h (об'єм Ah), *пружна енергія* всього елемента складає

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} Ah (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}) = \\ &= \frac{GAh}{1-\nu} \left[b(b + \nu f) + f(f + \nu b) + \frac{1-\nu}{2} (c + e)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Підставимо у вираз (5.7) вирази для b, c, e, f (4.6) і отримаємо

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 C_{ik} u_i u_k,$$

або в матричній формі

$$W = \frac{1}{2} U^T C U.$$

Коефіцієнти C_{ik} , які являють собою вирази для елемента матриці жорсткості C , описуються рівнянням

$$C_{ik} = \frac{Gh}{4A} \left\{ \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} + (-1)^{i+k} \right] c_i c_k + s_i s_k \right\}.$$

Спосіб визначення *матриць жорсткості елементів*, додавання їх у *матрицю жорсткості конструкції* і розв'язання *рівняння рівноваги* добре піддається автоматизації і наступній реалізації на ЕОМ.

6 Особливості розрахунку статично невизначних балок і ферм

6.1 Розрахунок нерозрізних балок на жорстких опорах. Рівняння трьох моментів

Нерозрізна балка належить до числа дуже поширених конструкцій. Вона застосовується в залізобетонних, металевих і

дерев'яних конструкціях як елемент або головна частина споруди. Нерозрізну прогонову споруду можна спостерігати на прикладі моста. Нерозрізними балками звичайно перекривають два або більше прогонів. Характерною відмінністю нерозрізної балки від розрізної є те, що навантаження, яке знаходиться в будь-якому її прогоні, згинає балку вздовж усіх її прогонів, створюючи плавну пружну лінію.

Завдяки спільній роботі сусідніх прогонів абсолютні значення моментів зменшуються порівняно з розрізними балками, і відповідно зменшуються й витрати матеріалу. Окрім того, жорсткість нерозрізних балок вище, ніж розрізних. До суттєвих недоліків нерозрізних балок можна віднести чутливість до нерівномірного осідання опор і більші переміщення кінців балок від зміни температури, ніж у випадку застосування розрізних балок.

Завдяки технологічності і зниженню витрати матеріалу, а також створенню надійних видів фундаментів нерозрізні балочні прогонові споруди знаходять усе більш широке застосування, особливо при перекритті великих прогонів (до 80 м і більше).

Розрахункова схема нерозрізної балки припускає ідеальні шарнірні прикріплення її до всіх проміжних опор. На крайніх опорах допускається також абсолютне або пружно-податливе защемлення.

Нерозрізні балки мають просту структуру і їх обчислення є введенням у розрахунок більш складних статичноне визначних систем, які розглядаються в курсі будівельної механіки.

Домовимося опори балки нумерувати зліва направо, позначивши крайню ліву опору номером "0". Тоді номер прогону визначається номером приналежної йому правої опори (рисунок 6.1, а).

Припустимо, що жорсткість нерозрізної балки в межах кожного прогону постійна ($EJ_n = \text{const}$).

Нерозрізні балки належать до числа статично не визначних систем, тобто систем, у яких не всі реакції і зусилля можуть бути визначні за допомогою рівнянь статичної рівноваги.

Ступінь *статичної невизначності* визначається за таким виразом:

$$n = C_0 - 3, \quad (6.1)$$

де C_0 – число опорних в'язей.

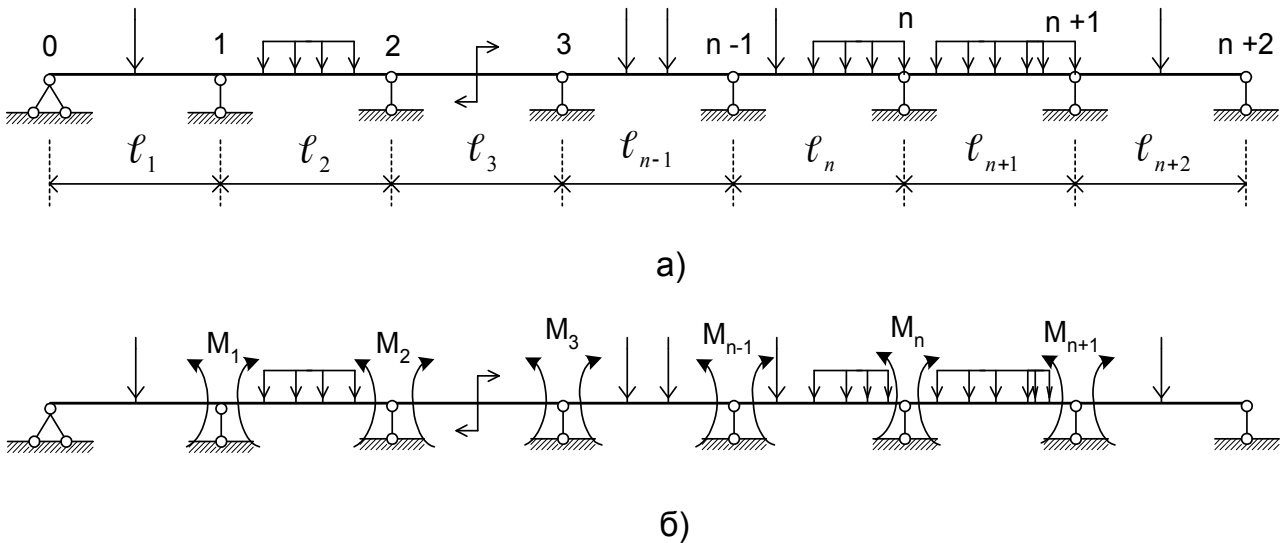


Рисунок 6.1 – Основна система нерозрізної балки на жорстких опорах (а); розрахункова схема (б)

Ступінь статичної невизначеності дорівнює числу в'язей, зусилля в яких не можна визначити з рівнянь рівноваги. З погляду статички, ці в'язі є зайвими, а зусилля в них – зайві невідомі. Для їхнього визначення необхідно скласти додаткові рівняння, розглядаючи деформацію системи, у якій відкинуто зайві в'язі і у якості зовнішніх сил, крім навантаження, прикладаються зайві невідомі.

Нерозрізна балка без зайвих в'язей називається **основною статично визначною системою**. Вона може складатися з однієї балки, якщо відкинуті зайві в'язі були опорами, або з ряду однопрогонових балочок, якщо в надопорні перерізи нерозрізної балки вставити шарніри.

У першому випадку зайвими невідомими будуть опорні реакції (рисунок 6.1, а), а в другому – згинальні моменти в опорних перерізах (рисунок 6.1, б). Основну систему другого типу (рисунок 6.1, б) і будемо застосовувати для розрахунку нерозрізних балок, тому що розрахунок виходить більш простим і менш громіздким.

Виділимо з основної системи (рисунок 6.1, б) два довільних суміжних прогони (рисунок 6.2, а).

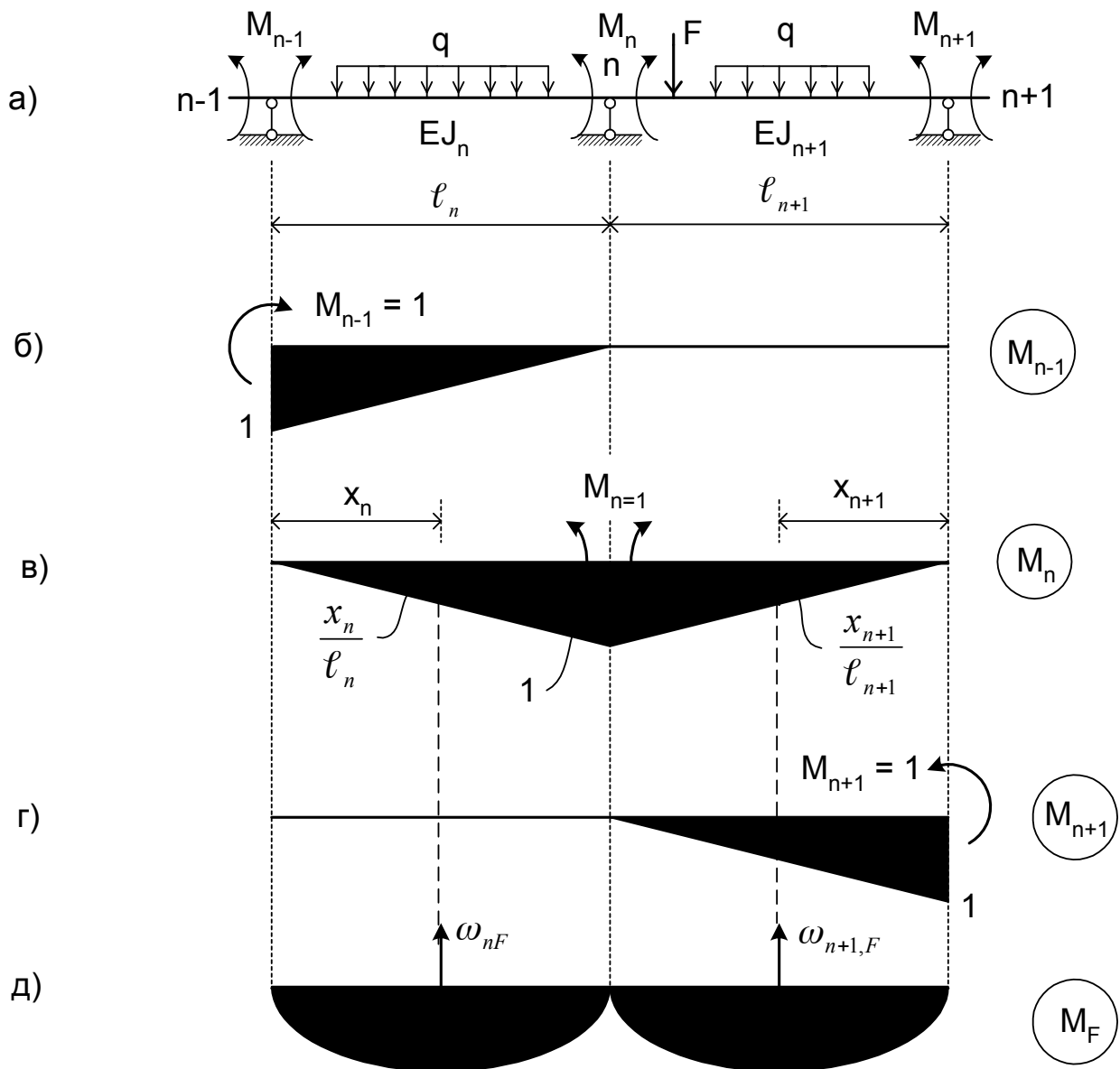


Рисунок 6.2 – Схема двох суміжних прогонів нерозрізної балки в основній системі (а), одиничні і вантажна епюри (б, в, г, д)

Далі складається умова, що вносить те саме обмеження на деформації головної системи, що є в нерозрізній балці. У головній системі (рисунок 6.2, а) обидві сторони n -го опорного перерізу, розділені поставленим у балку шарніром (рисунок 6.3), можуть повертатися під дією зовнішнього навантаження незалежно одна від одної.

У нерозрізній балці шарніра нема і, отже, взаємний поворот перерізів, розташованих нескінченно близько зліва і справа від n -ї опори, дорівнює нулю (рисунок 6.4).

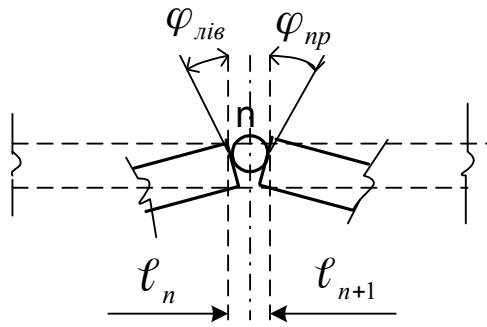


Рисунок 6.3 – Схема деформування балки в місці установлення шарніра

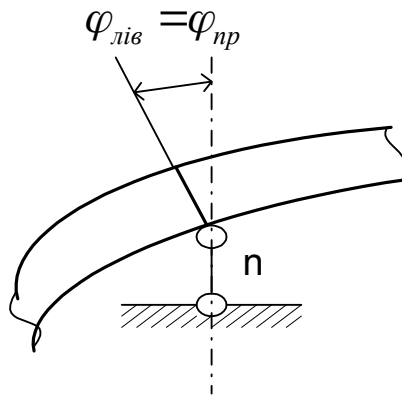


Рисунок 6.4 – Схема деформування нерозрізної балки на n -й опорі

Тому умова спільності деформацій буде така:

$$M_{n-1}\delta_{n, n-1} + M_n\delta_{nn} + M_{n+1}\delta_{n, n+1} + \Delta_{nf} = 0, \quad (6.2)$$

де \bar{M}_{n-1} , \bar{M}_n , \bar{M}_{n+1} – невідомі моменти відповідно на $n-1$, n , $n+1$ опорах (рисунок 6.2, а);

$\delta_{n, n-1}$, δ_{nn} , $\delta_{n, n+1}$ – взаємний кут повороту перерізів на n -й опорі, викликаний при \bar{M}_{n-1} , \bar{M}_n , $\bar{M}_{n+1} = 1$;

Δ_{nf} – взаємний кут повороту перерізів на n -й опорі, викликаний зовнішнім навантаженням.

Залежність (6.2) можна скласти для кожної з проміжних опор i , отже, написати стільки додаткових рівнянь, скільки є невідомих опорних моментів.

Для визначення кутів повороту $\delta_{n, n-1}$; δ_{nn} ; $\delta_{n, n+1}$; Δ_{nF} скористаємося методом Максвелла-Мора:

$$\delta_{n, n-1} = \int_0^{\ell_n} \frac{\overline{M}_n \overline{M}_{n-1}}{EJ_n} dx ;$$

$$\delta_{nn} = \int_0^{\ell_n} \frac{\overline{M}_n \overline{M}_n}{EJ_n} dx + \int_0^{\ell_{n+1}} \frac{\overline{M}_n \overline{M}_n}{EJ_{n+1}} dx ; \quad (6.3)$$

$$\delta_{n, n+1} = \int_0^{\ell_{n+1}} \frac{\overline{M}_n \overline{M}_{n+1}}{EJ_{n+1}} dx ;$$

$$\Delta_{nF} = \int_0^{\ell_n} \frac{\overline{M}_n M_F}{EJ_n} dx + \int_0^{\ell_{n+1}} \frac{\overline{M}_n M_F}{EJ_{n+1}} dx . \quad (6.4)$$

У формулах (6.3) \overline{M}_{n-1} ; \overline{M}_n ; \overline{M}_{n+1} – функції згинальних моментів (одиничні епюри) в основній системі відповідно від $\overline{M}_{n-1}=1$; $\overline{M}_n=1$; $\overline{M}_{n+1}=1$; M_F – функція згинального моменту в основній системі від зовнішнього навантаження. Одиничні епюри \overline{M}_{n-1} ; \overline{M}_n ; \overline{M}_{n+1} зображені на рисунку 6.2, б, в, г, а вантажна епюра M_F – на рисунку 6.2, д.

Обчислення інтегралів (6.3), (6.4) здійснюємо способом Верещагіна: *результат перемноження площі однієї епюри на ординату другої епюри, розташованої під центром ваги першої епюри, дорівнює шуканому інтегралу, поділеному на жорсткість*. При “перемноженні” прямолінійних епюр не має значення, в якій епюрі обчислюється площа, а в якій – ордината. При “перемноженні” прямолінійної епюри на криволінійну площа визначається в криволінійній епюрі.

Враховуючи викладені правила, знайдемо:

$$\delta_{n, n-1} = \frac{\ell_n}{6EJ_n} ; \quad \delta_{nn} = \frac{\ell_n}{3EJ_n} + \frac{\ell_{n+1}}{3EJ_{n+1}} ; \quad \delta_{n, n+1} = \frac{\ell_{n+1}}{6EJ_{n+1}} ; \quad (6.5)$$

$$\Delta_{nF} = \frac{1}{EJ_n} \omega_{nF} \frac{x_n}{\ell_n} - \frac{1}{EJ_{n+1}} \omega_{n+1,F} \frac{x_{n+1}}{\ell_{n+1}} . \quad (6.6)$$

Аналіз залежності (6.6) показує, що множення $\omega_{nF} = \frac{x_n}{\ell_n}$ і $\omega_{n+1, F} = \frac{x_{n+1}}{\ell_{n+1}}$ являє собою фіктивні реакції від навантаження, що являє собою епюру моментів M_F (рисунок 6.5, а, б).

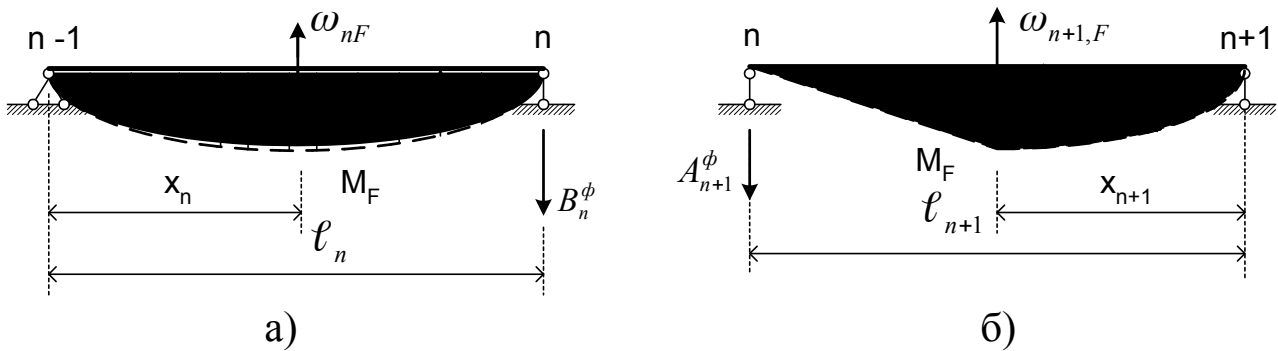


Рисунок 6.5 – Схеми до визначення фіктивних опорних реакцій B_n^ϕ (а) і A_{n+1}^ϕ (б)

Як видно з рисунка 6.5, фіктивні опорні реакції дорівнюють

$$B_n^{TM} = \omega_{nF} \frac{x_n}{\ell_n}; \quad A_{n+1}^{TM} = \omega_{n+1,F} \frac{x_{n+1}}{\ell_{n+1}}. \quad (6.7)$$

З урахуванням виразу (6.7) взаємний кут повороту перерізів на n -й опорі дорівнює

$$\Delta_{nF} = \frac{B_n^{TM}}{EJ_n} + \frac{A_{n+1}^{TM}}{EJ_{n+1}}. \quad (6.8)$$

Підставляючи вирази (6.5) і (6.6) у рівняння (5.2) і вводячи позначення

$$\ell_n = \ell_n \frac{J_0}{J_n}; \quad \ell_{n+1} = \frac{J_0}{J_{n+1}} J_{n+1}, \quad (6.9)$$

де J_0 – момент інерції будь-якого прогону балки, отримаємо

$$M_{n-1} \ell_n + 2M_n (\ell_n + \ell_{n+1}) + M_{n+1} \ell_{n+1} = -6 \left(\frac{J_0}{J_n} B_n^{TM} + \frac{J_0}{J_{n+1}} A_{n+1}^{TM} \right). \quad (6.10)$$

При $EJ = \text{const}$

$$\ell_n' = \ell_n; \quad \ell_{n+1}' = \ell_{n+1}; \quad \ell_0 = \ell_n = \ell_{n+1}$$

рівняння (6.10) має такий вигляд:

$$M_{n-1} \ell_n + 2M_n (\ell_n + \ell_{n+1}) + M_{n+1} \ell_{n+1} = -6 (B_n^{TM} + A_{n+1}^{TM}). \quad (6.11)$$

Рівняння (6.10), (6.11) називаються *рівняннями трьох моментів*. Рівняння (6.10) застосовується для розрахунку нерозрізних балок із змінними жорсткостями прогонів, а рівняння (6.11) – для балок із постійною жорсткістю.

Рівнянь (6.10) або (6.11) можна записати стільки, скільки є проміжних опор, тобто скільки є невідомих опорних моментів. Після обчислення опорних моментів задача зводиться до обчислення ряду двохопорних шарнірних балок, навантажених уже відомими опорними моментами і зовнішнім навантаженням.

Розглянемо особливі випадки конструкції і навантаження нерозрізних балок.

Рівняння *трьох моментів* легко поширити на ті випадки, коли нерозрізна балка має консолі або коли кінці балки (один або обидва) затиснені, або коли зовнішній зосереджений момент прикладений саме на проміжній опорі.

Нерозрізна балка з консоллю

Якщо балка має консоль, то при утворенні основної системи ця консоль відкидається і замінюється опорним моментом від навантаження на дану консоль.

Наприклад, для балки (рисунок 6.6, а) основна система показана на рисунку 6.6, б.

Рівняння *трьох моментів* буде таким:

$$M_0 \ell_1 + 2M_1 (\ell_1 + \ell_2) + M_2 \ell_2 = -6 (B_1^{TM} + A_2^{TM}).$$

З огляду на те, що $M_0 = 0$, тому що ліва опора шарнірна, і $M_2 = -F \alpha$, отримаємо

$$2 M_1 (\ell_1 + \ell_2) = -6 (B_1^{TM} + A_2^{TM}) + F \alpha \ell_2 .$$

Після обчислення опорних моментів, при розрахунку окремих балочок, консоль відновлюється (рисунок 6.6, в).

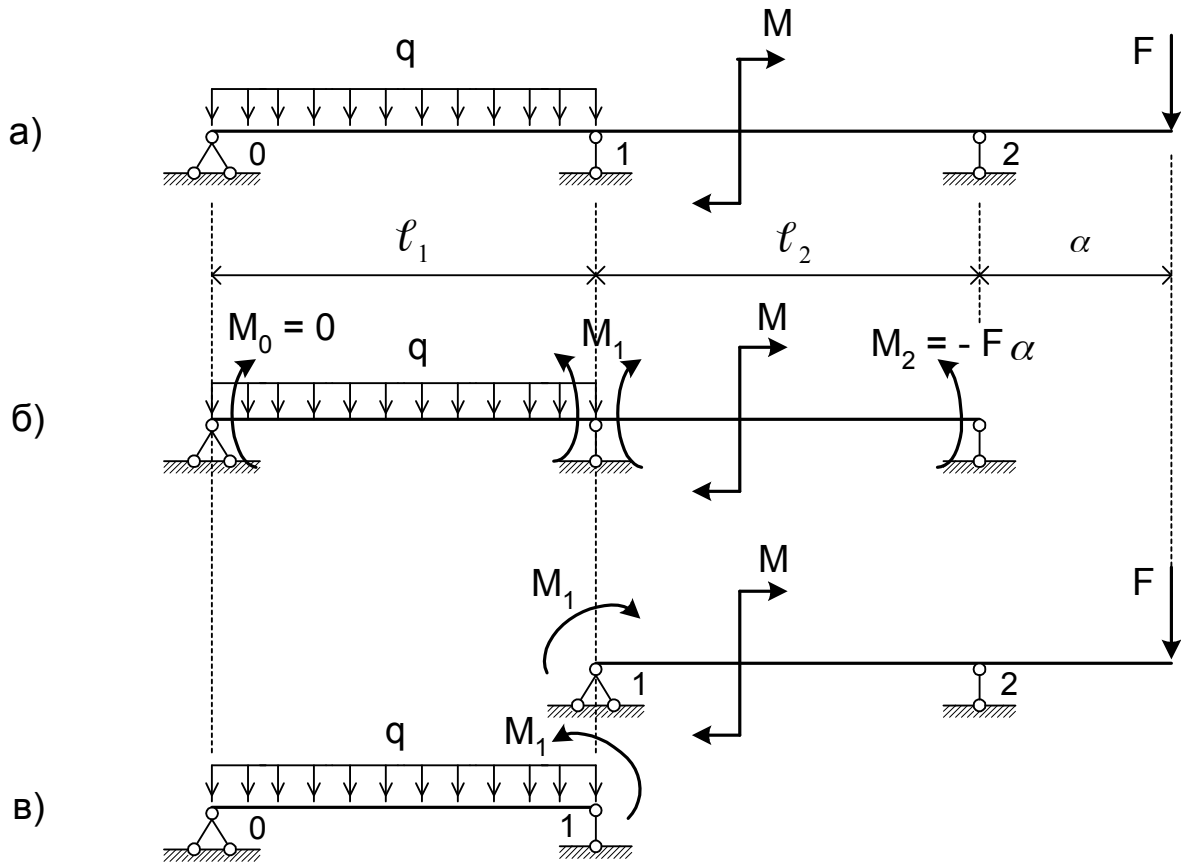


Рисунок 6.6 – Схема нерозрізної балки з консоллю (а), основна система (б), розрахункові схеми прогонів (в)

Нерозрізна балка з защемленим кінцем

Щоб з'ясувати, як варто поступити за наявності защемленого кінця балки, розглянемо один із варіантів конструкції такого защемлення (рисунок 6.7).

Защемлення можна уявити як додатковий ненавантажений прогін. Чим коротше буде прогін ℓ_0 , чим більше його момент інерції і чим більше невіддатлива стіна, тим більш жорстким буде защемлення. Цілковито затиснений кінець балки утвориться, якщо припустити, що $\ell_0 = 0$ або $\ell_0 = \infty$.

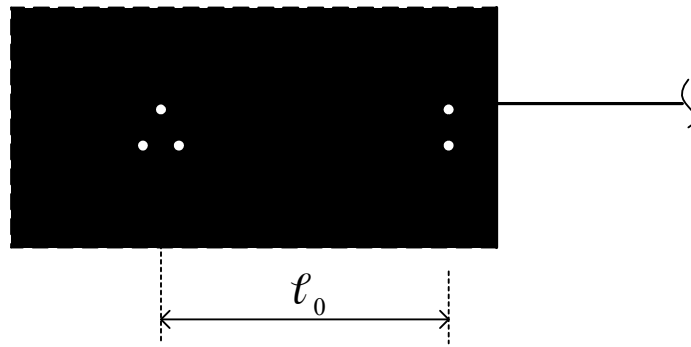


Рисунок 6. 7 – Варіант конструкції з зацмленою кінця нерозрізної балки

При розрахунку нерозрізної балки з затисненим кінцем (рисунок 6.8, а) необхідно в головній системі замість зацмлення додати ще прогін (рисунок 6.8, б), скласти рівняння *трьох моментів* і перейти до межі, вважаючи l_0 рівним нулю.

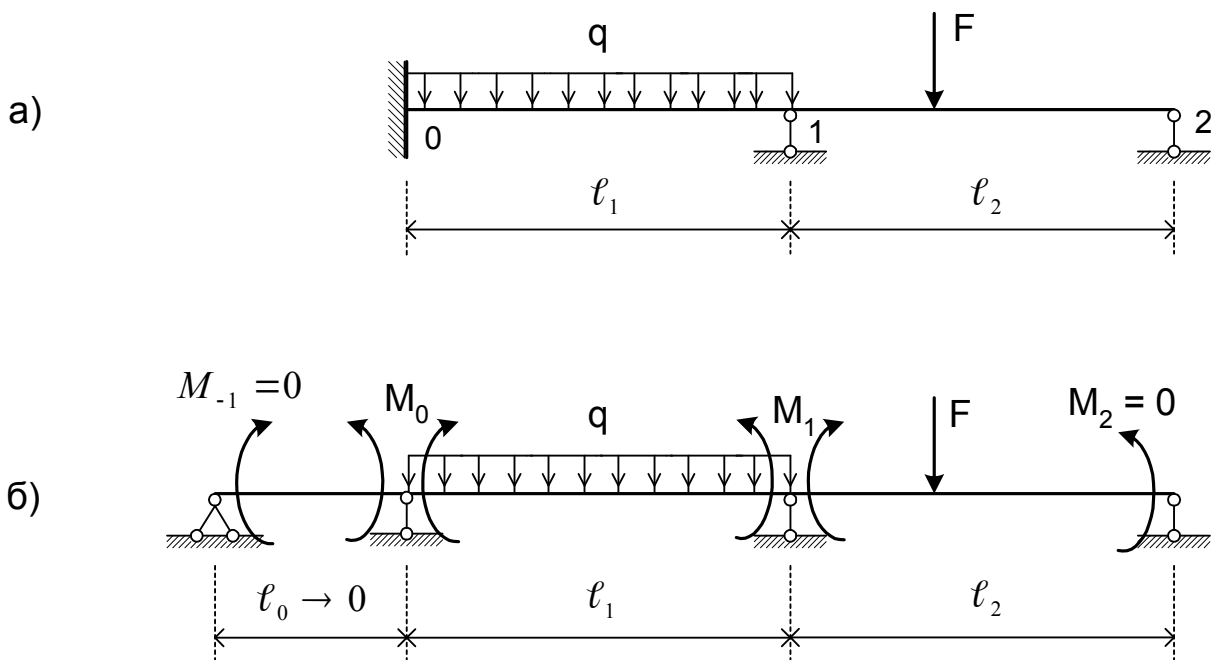


Рисунок 6.8 – Схема нерозрізної балки з зацмленим кінцем (а); основна система (б)

$$M_1 l_0 + 2M_0 (l_0 + l_1) + M_1 l_1 = -6 (A_1^{TM}) ;$$

$$M_0 l_1 + 2M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 (B_1^{TM} + A_2^{TM}) .$$

З огляду на те, що $\ell_0 = 0$ і $M_1 = M_2 = 0$, отримаємо такі формули:

$$2M_0\ell_1 + M_1\ell_1 = -6 A_1^{TM} ;$$

$$M_0\ell_1 + 2M_1(\ell_1 + \ell_2) = -6 (B_1^{TM} + A_2^{TM}) .$$

Нерозрізна балка із зовнішнім зосередженим моментом

Якщо зовнішній зосереджений момент прикладений на проміжній опорі, то в головній системі його можна віднести до лівої або правої балки, що прилягають до даної опори (рисунок 6.9, в), побудувати епюру M і визначити **фіктивну реакцію**.

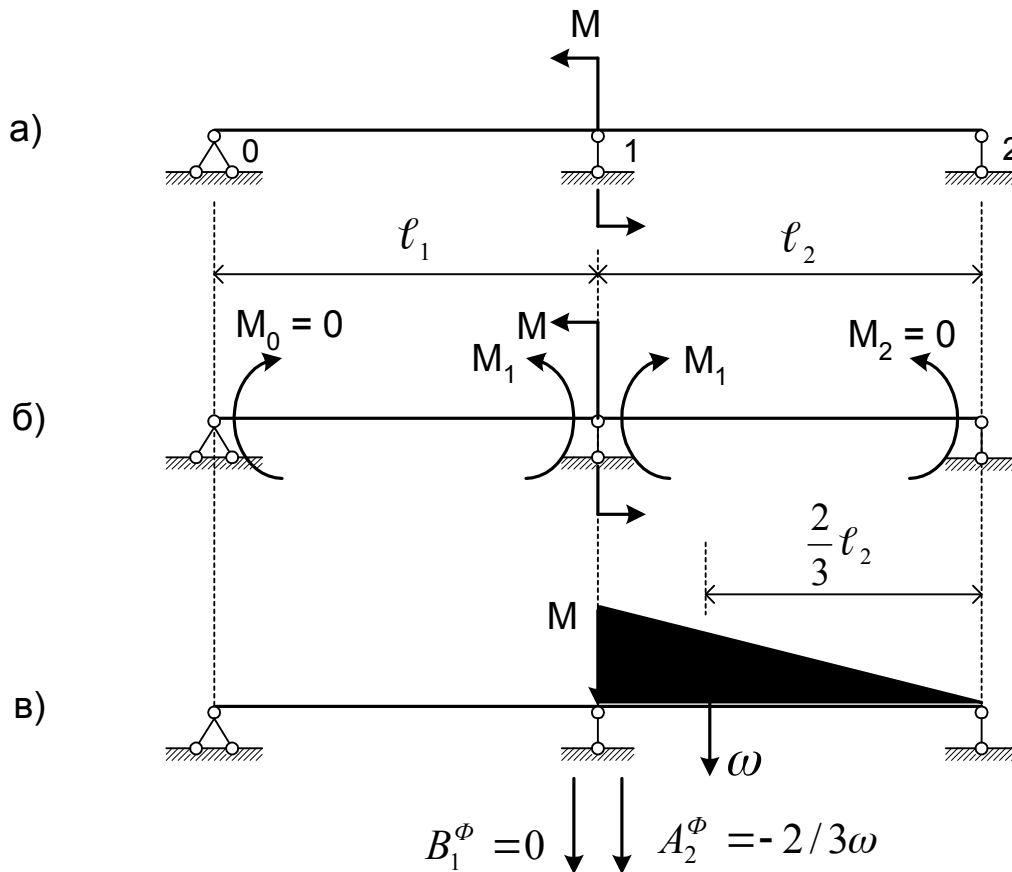


Рисунок 6.9 – Схема нерозрізної балки з зосередженим моментом на проміжній опорі

Рівняння **трьох моментів** складаються як звичайно.

Після обчислення опорних моментів необхідно **визначити зусилля і побудувати епюри** в нерозрізній балці таким чином:

1) із використанням епюр від зовнішніх навантажень у головній системі;

2) шляхом розрахунку окремих балочок головної системи при дії зовнішніх навантажень і опорних моментів.

У першому випадку необхідно попередньо в головній системі, крім епюр згинальних моментів **M**, побудувати епюри **Q** (рисунок 6.10).

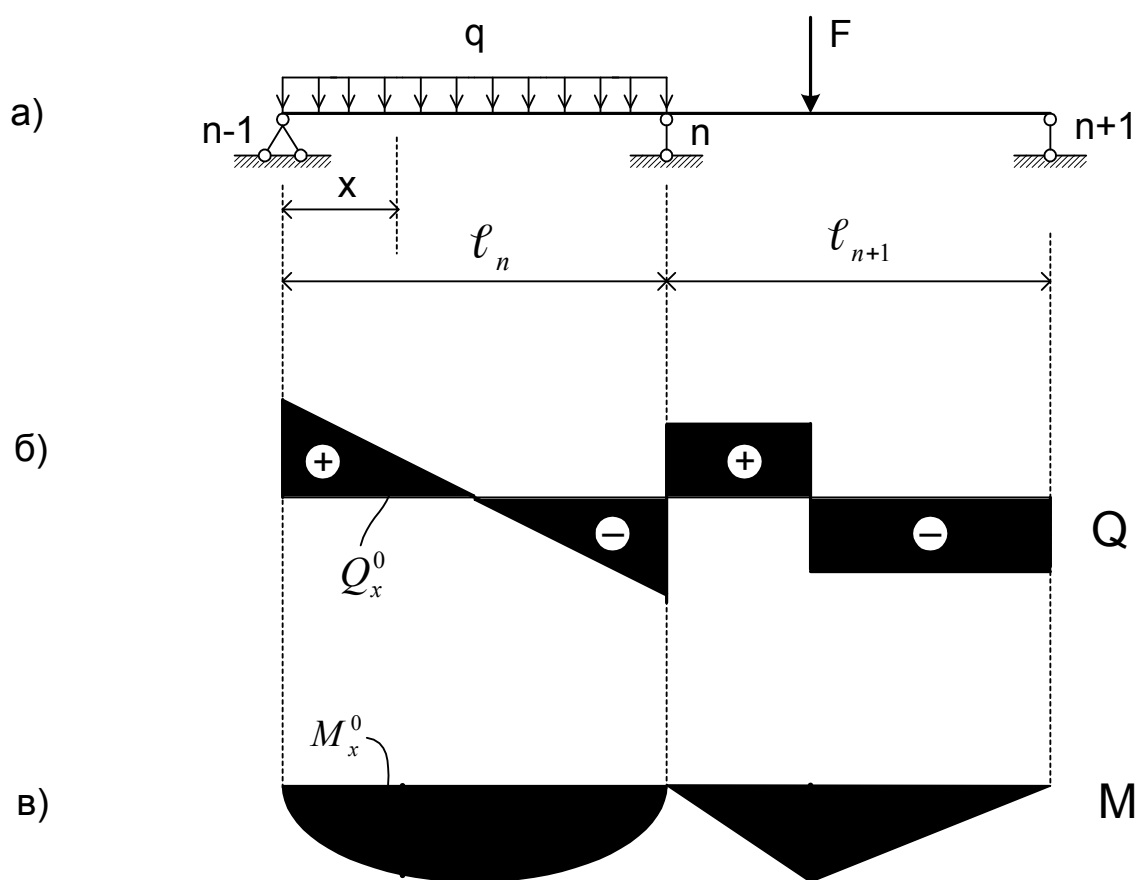


Рисунок 6.10 – Схема визначення зусиль у нерозрізній балці

Тоді, з огляду на вплив опорних моментів, у будь-якому перетині прогону l_n отримаємо

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}; \quad (6.12)$$

$$M_x = M_x^0 + M_n \frac{x_n}{\ell_n} + M_{n-1} \frac{\ell_{n-1}}{\ell_n}. \quad (6.13)$$

У другому випадку в однопрогонових балках головної системи обчислюються реакції опор від зовнішніх навантажень і опорні моменти, а потім, як звичайно, визначаються поперечні сили і згинальні моменти.

Зауважимо, що ці два шляхи побудови епюр відрізняються тільки за формою.

Перевірка розв'язання задачі

Існують два типи перевірок:

- статична;
- деформаційна.

Статична перевірка полягає в відповідності рівнянь рівноваги реакцій опор і їхніх моментів відносно будь-якої довільної точки:

$$\Sigma Y = 0; \quad \Sigma M = 0.$$

Сутність деформаційної перевірки полягає в тому, що вигнута вісь нерозрізної балки безперервна на опорах, тобто взаємний кут повороту перетинів лівіше і правіше від даної опори дорівнює нулю.

Отже, епюра M в межах двох суміжних прогонів нерозрізної балки правильна, якщо алгебраїчна сума фіктивних реакцій на середній опорі дорівнює нулю (фіктивним навантаженням є епюра M в нерозрізній балці):

$$B_n^\phi + A_{n+1}^\phi = 0.$$

6.2 Особливості розрахунку при дії температури і задані зміщення опор. Лінії впливу внутрішніх сил у нерозрізних балках

Припустимо, що нерозрізна балка піддається дії температури. Схема балки в основній системі зображена на рисунку 6.11.

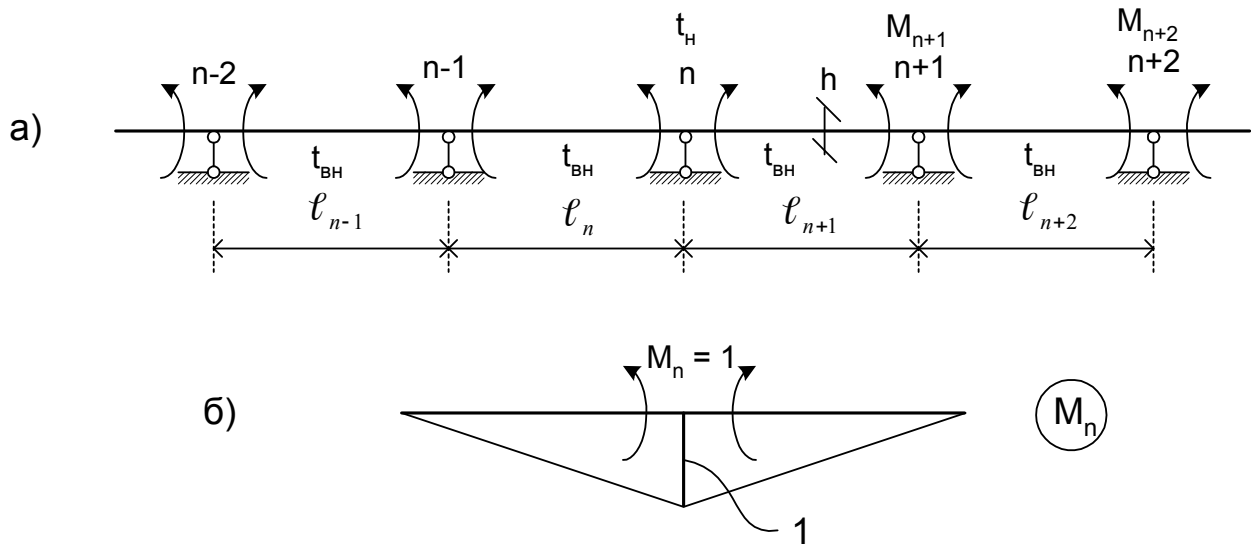


Рисунок 6.11 – До розрахунку балки на опорах, що пружно зміщуються, при температурних впливах

У цьому випадку рівняння п'яти моментів записується в такий спосіб:

$$M_{n-2}\delta_{n,n-2} + M_{n-1}\delta_{n,n-1} + M_n\delta_{n,n} + M_{n+1}\delta_{n,n+1} + M_{n+2}\delta_{n,n+2} + \Delta_{nt} = 0. \quad (6.14)$$

Член Δ_{nt} являє собою температурне переміщення в основній системі:

$$\Delta_{nt} = \sum \int N_n \alpha t ds + \sum \int \frac{M_n \alpha t'}{h} ds. \quad (6.15)$$

Оскільки в розглянутій конструкції поздовжня сила відсутня, то формула (6.15) набуває такого вигляду:

$$\Delta_{nt} = \sum \int \frac{M_n \alpha t'}{h} ds = \sum \frac{\alpha t'}{h} \omega M. \quad (6.16)$$

Епюра M_n зображена на рисунку 6.11, б. Її площа ω_M може бути легко підрахована. Припустимо, що температура викривляє балку опуклістю вниз (тобто розтягнуті волокна в балці від силових впливів $M_n = 1$ і від дії температури збігаються). Це, як відомо, дозволяє у формулі (6.16) прийняти знак “плюс”. Крім того, припустимо, що балка має постійну висоту перерізу h . Тоді

$$\Delta_{nt} = \frac{\alpha t'}{h} \left(\frac{l_n}{2} \right) + \frac{\alpha t'}{h} \left(\frac{l_{n+1}}{2} \right) = \frac{\alpha t'}{2h} (l_n + l_{n+1}). \quad (6.17)$$

При однакових прогонах балки і постійних коефіцієнтах податливості рівняння п'яти моментів запишеться як

$$M_{n-2} \psi + M_{n-1} (1-4\psi) + 2M_n (2+3\psi) + M_{n+1} (1-4\psi) + M_{n+2} \psi = - \frac{6EJ\alpha t'}{h}. \quad (6.18)$$

Склавши систему рівнянь (6.18) і розв'язавши її, знайдемо опорні моменти. Далі можемо визначити моменти в перерізах між опорами:

$$M_x = M_n \frac{x}{\ell_n} + M_{n-1} \frac{\ell_n - x}{\ell_n}. \quad (6.19)$$

Після цього можна побудувати епюру поперечних сил:

$$Q_x = \frac{M_n - M_{n-1}}{\ell_n} \quad (6.20)$$

і знайти всі опорні реакції за формулою

$$R_n = \frac{M_{n+1} - M_n}{\ell_{n+1}} + \frac{M_{n-1} - M_n}{\ell_n}. \quad (6.21)$$

Змушений зсув опор має для нерозрізних конструкцій серйозне значення. Якщо балка з прямою віссю прикріплюється до погано знівельованих опор, то вона при цьому згинається і в ній виникає напружений стан. Те саме відбувається тоді, коли під впливом підмиву опор, поганої якості ґрунту і т. п., опорні точки розташовані не на одній прямій (рисунок 6.12).

Канонічне рівняння для n -ї опори для розглянутого випадку має такий вигляд:

$$M_{n-2} \delta_{n, n-2} + M_{n-1} \delta_{n, n-1} + M_n \delta_{n, n} + M_{n+1} \delta_{n, n+1} + M_{n+2} \delta_{n, n+2} + \Delta_{nc} = 0, \quad (6.22)$$

де Δ_{nc} – переміщення в напрямку невідомої M_n , що виникає в основній системі під впливом осідання опор,

$$\Delta_{nc} = - \sum R \Delta. \quad (6.23)$$

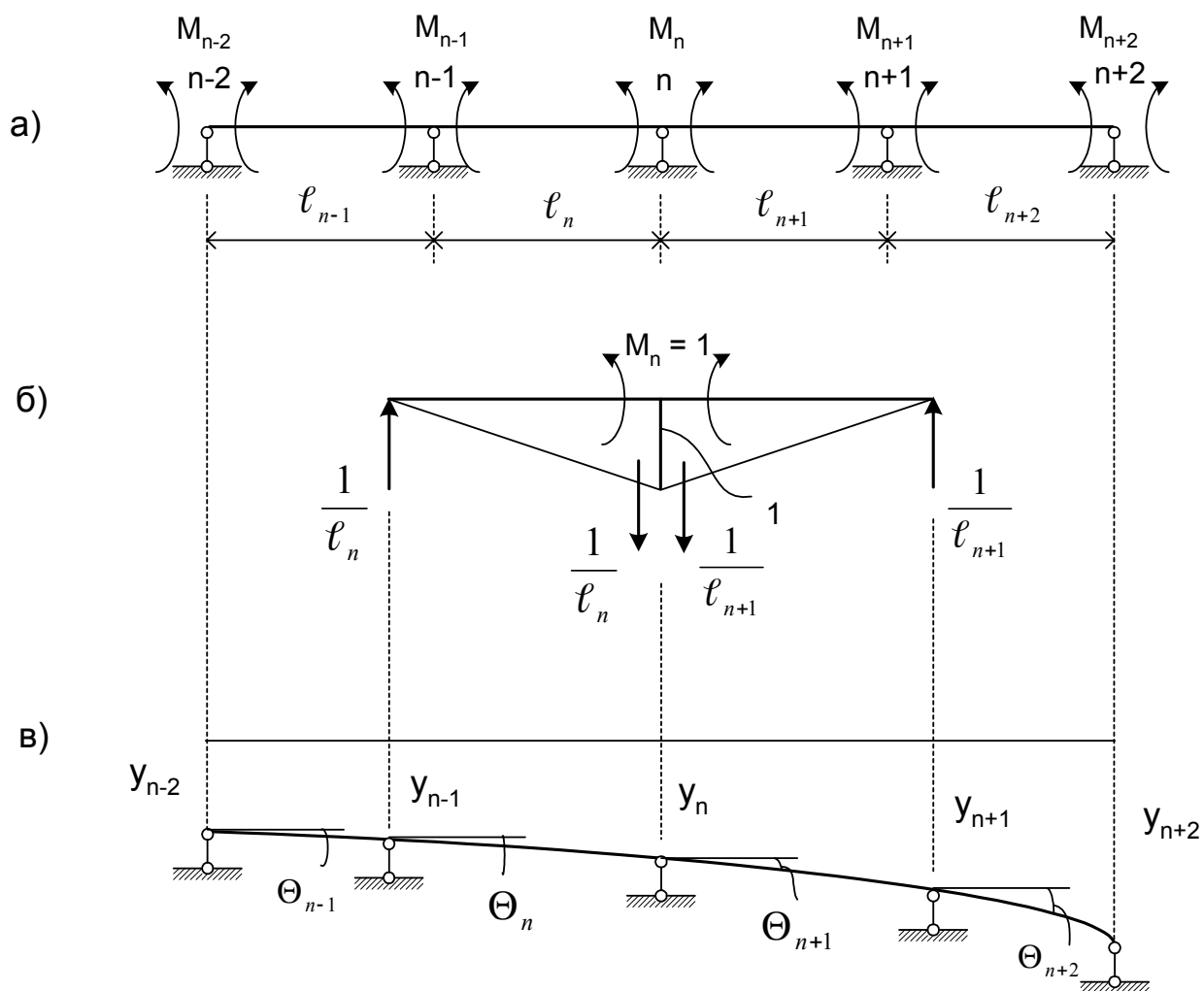


Рисунок 6.12 – До розрахунку нерозрізних балок на опорах, що пружно зміщуються, при осіданні опор

Тут R – реакції у в'язях $n - 1$, n , $n + 1$, викликані $M_n = 1$ (рисунок 6.12, б); Δ – задані зсуви в'язей y_{n-1} , y_n , y_{n+1} ;

$$\Delta_{nc} = - \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\ell_n} - \frac{y_{n+1} - y_n}{\ell_{n+1}} \right) = - (\operatorname{tg} \Theta_n - \operatorname{tg} \Theta_{n+1}).$$

Через малість кутів $\operatorname{tg} \Theta_n = \Theta_n$, $\operatorname{tg} \Theta_{n+1} = \Theta_{n+1}$.

Тоді

$$\Delta_{nc} = \Theta_{n+1} - \Theta_n.$$

Кути нахилу прогонів ℓ_n і ℓ_{n+1} будемо вважати додатними в тому випадку, коли вони спрямовані за годинниковою стрілкою.

При однакових прогонах і постійних коефіцієнтах податливості рівняння п'яти моментів набуває такого вигляду:

$$M_{n-2} \psi + M_{n-1} (1 - \psi) + 2M_n (2 + 3\psi) + M_{n+1} (1 - 4\psi) + M_{n+2} \psi = - \frac{6EJ}{\ell} (\Theta_{n+1} - \Theta_n). \quad (6.24)$$

Після визначення опорних моментів побудова епюр M і Q може бути зроблена за формулами (6.19) і (6.20), а величини опорних реакцій можуть бути визначені за залежністю (6.21).

Розглянемо побудову ліній впливу внутрішніх сил у нерозрізних балках.

Побудова ліній впливу (л.в.) опорних моментів здійснюється так: вантаж $F = 1$ ставиться послідовно на кожному прогоні на відстані $u\ell_n$ від лівої опори і $v\ell_n$ – від правої (рисунок 6.13). Для кожної точки розподілу прогону знаходяться фіктивні реакції B^ϕ і A^ϕ і реакції V і U .

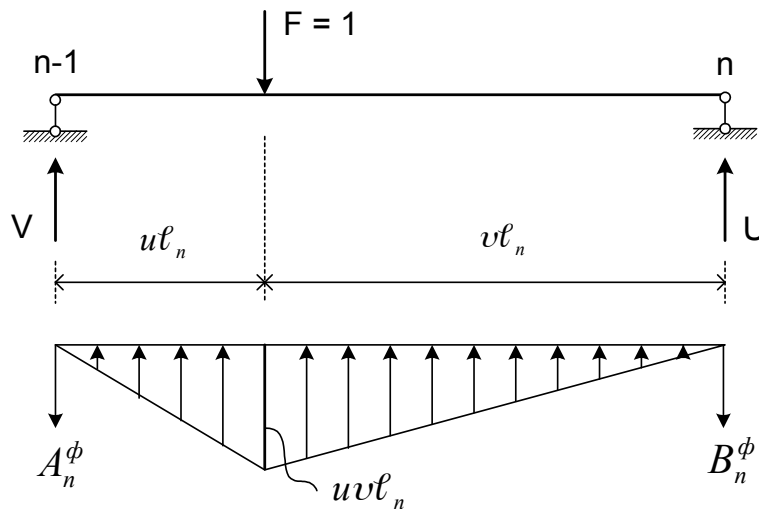


Рисунок 6.13 – До побудови ліній впливу

Потім розв'язується відповідна система рівнянь п'яти моментів:

$$M_{n-2} \delta_{n, n-2} + M_{n-1} \delta_{n, n-1} + M_n \delta_{n, n} + M_{n+1} \delta_{n, n+1} + M_{n+2} \delta_{n, n+2} + \Delta_{nF} = 0.$$

У результаті визначаються ординати шуканої лінії впливу. Лінії впливу балки на опорах, що пружно зміщаються,

відрізняються від відповідних графіків, що належать до балки на жорстких опорах. Ординати лінії впливу балки на опорах, що пружно зміщаються, не дорівнюють нулю, на відміну від ординат лінії впливу на опорах балки на жорстких опорах. Лінії впливу опорного згинального моменту показано на рисунку 6.14. Узагалі ж їх обрис, а також знаки можуть змінюватися залежно від співвідношення довжин прогонів, від їхніх жорсткостей і коефіцієнтів податливості опор.

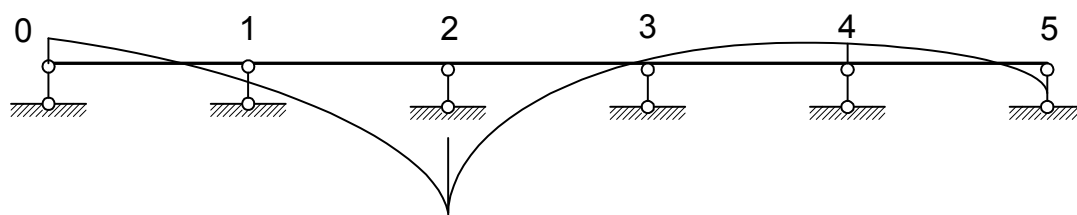


Рисунок 6.14 –Лінії впливу опорного моменту M_2

Коли лінії впливу опорних моментів побудовані, лінії впливу згинальних моментів у перерізі між опорами, лінії впливу поперечних сил і лінії впливу опорних реакцій можуть бути побудовані за тими самими формулами, що і для балки на жорстких опорах:

$$\text{л.в. } M_x = \text{л.в. } M_x^0 + \text{л.в. } M_n \frac{x}{\ell_n} + \text{л.в. } M_{n-1} \frac{\ell_n - x}{\ell_n};$$

$$\text{л.в. } Q_x = \text{л.в. } Q_x^0 + \text{л.в. } M_n \frac{1}{\ell_n} - \text{л.в. } M_{n-1} \frac{1}{\ell_n};$$

$$\text{л.в. } R_n = \text{л.в. } R_n^0 + \text{л.в. } M_{n+1} \frac{1}{\ell_{n+1}} - \text{л.в. } M_n \left(\frac{1}{\ell_{n+1}} + \frac{1}{\ell_n} \right) + \text{л.в. } M_{n-1} \frac{1}{\ell_n}.$$

Лінії впливу M_x^0, Q_x^0, R_n^0 в основній системі для прогону ℓ_n показані на рисунку 6.15.

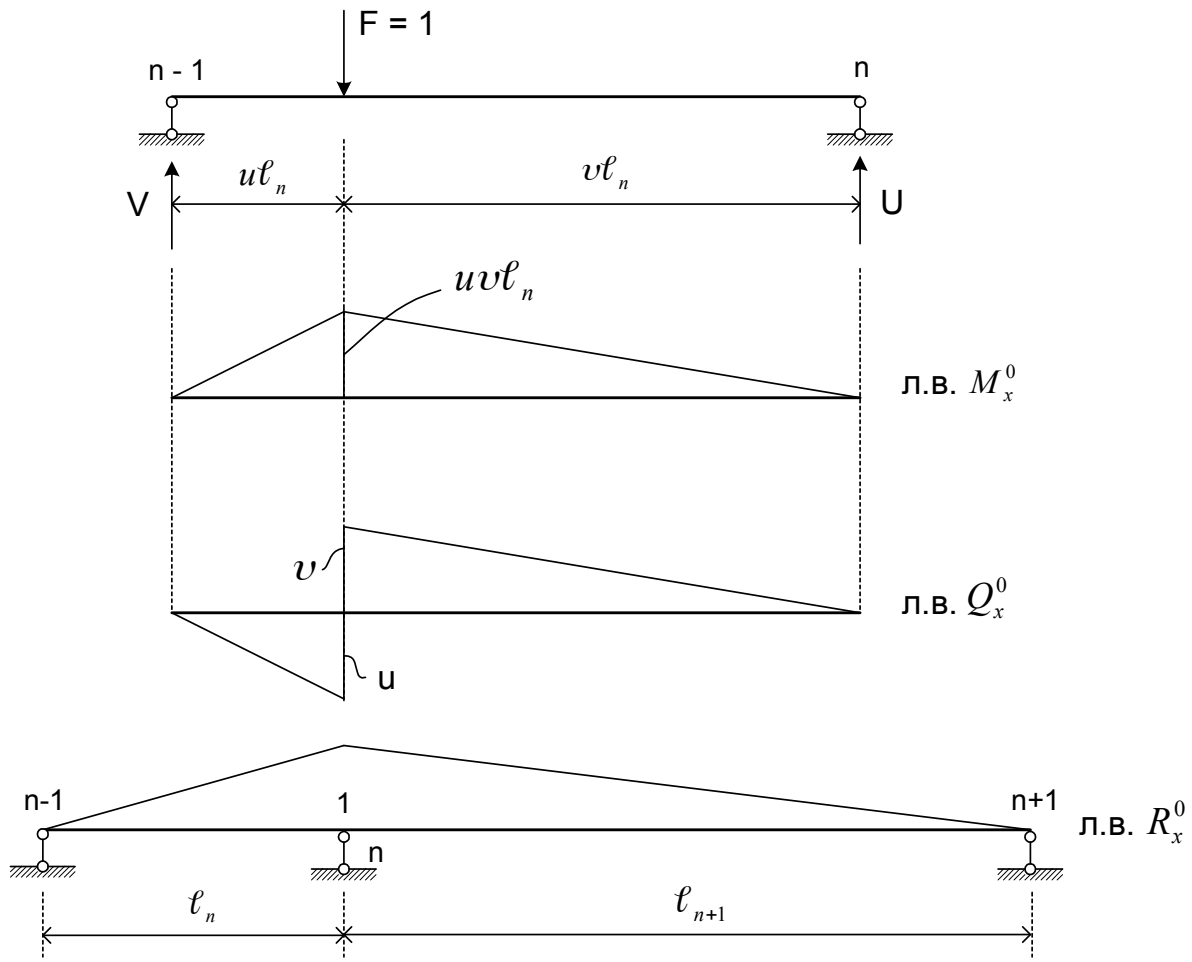


Рисунок 6.15 – Лінії впливу M_x^0, Q_x^0, R_n^0 в основній системі балки на опорах, що пружно зміщуються

Крайнім випадком нерозрізної балки на опорах, що пружно зміщуються, є балка, розташована на “вінклерівській” пружній основі (див. курс “Опір матеріалів”, розд. “Розрахунок балок на пружній основі”). Таку пружну основу балки можна розглядати як сукупність нескінченної множини не з’єднаних один з одним пружних опорних стержнів, що відстоять один від одного на відстані dx . Податливість осідання середовища під впливом рівномірно розподіленого тиску інтенсивності одиниця.

Диференціальне рівняння, що характеризує пружну лінію балки, яка лежить на пружній основі, має вигляд

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{k}{EJ} = q,$$

де k – коефіцієнт жорсткості основи (величина, зворотна коефіцієнту податливості); q – навантаження на балку.

6.3 Розрахунок статично невизначних ферм при дії нерухомого навантаження

Ферми застосовуються як конструктивні елементи різних споруд. Вони в основному сприймають діючі на споруди навантаження. Ті ферми, що застосовуються на практиці, строго кажучи, статично невизначні, тому що не мають ідеальних шарнірних з'єднань у вузлах. Тут ми зупинимося на загальноприйнятому розрахунку ферм як систем з ідеально шарнірними вузлами і будемо розглядати статично невизначні шарнірно-стержневі плоскі ферми, що знаходяться під дією вузлового навантаження. Як приклад використання ферм наведемо залізничний міст (рисунок 6.16).

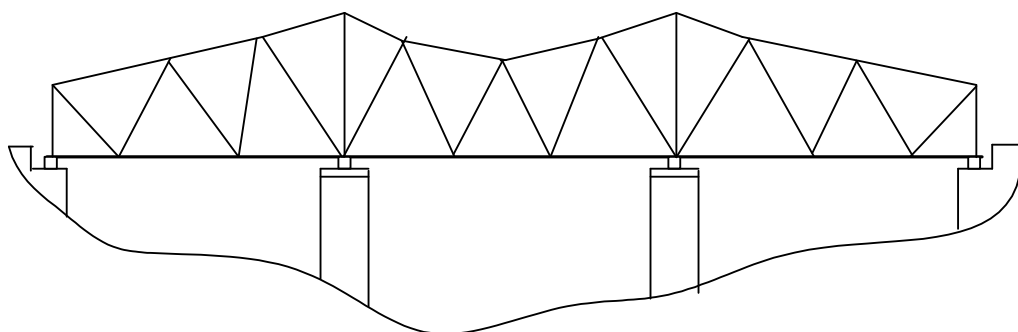


Рисунок 6.16 – Схема моста, прогонова будівля якого складена зі статично невизначних ферм

Для прогонових будівель залізничних мостів статично невизначна балкова ферма доцільніша за ряд розрізних ферм, тому що має більш плавну пружну лінію і тому не зазнає ударів, що утворюються при переході осей потяга від однієї розрізної ферми на іншу. Крім того, статично невизначна ферма є в цілому більш надійною, тому що аварії окремих її елементів (зайвих в'язей) не призводять до настільки важких наслідків, як руйнування елементів статично визначних ферм.

Звернемо увагу і на недоліки нерозрізних прогонових будівель, що полягають у чутливості до нерівномірного осідання опор. Цим пояснюється той факт, що наприкінці XIX і в першій половині XX століття не наважувалися будувати нерозрізні прогонові будівлі, не маючи достатньої впевненості в надійності роботи основ і фундаментів опор. У даний час фундаменти глибокого закладення дозволяють забезпечити необхідну надійність опор.

Нерозрізними фермами з рівнобіжними поясами перекривають звичайно прогони 80-150 м, а фермами зі збільшеною висотою над проміжними опорами – 100-250 м.

Розрізняють два види статично невизначних ферм – *зовні* і *внутрішньо статично невизначні*. Прикладом зовні статично невизначних ферм є нерозрізні ферми (рисунок 6.16 і 6.17).

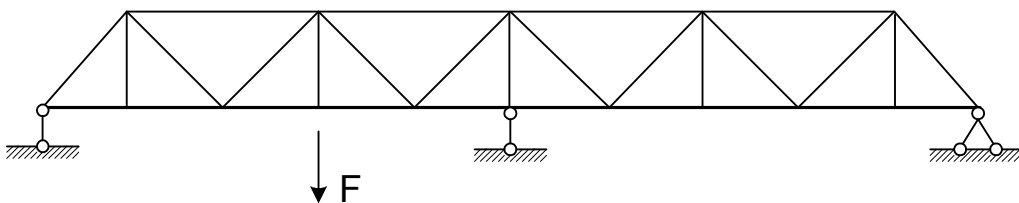


Рисунок 6.17 – Зовні статично невизначна ферма

До внутрішньо статично невизначних належать різні ферми зі *складними решітками* (рисунок 6.18) і *комбіновані системи*.

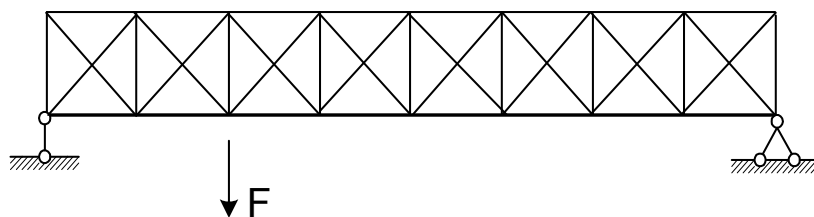


Рисунок 6.18 – Внутрішньо статично невизначна ферма

Поділ ферм на *внутрішньо* і *зовні статично невизначні системи* є умовним прийомом. Одну і ту саму систему можна розглядати як зовні, так і як внутрішньо статично невизначну. Число зайвих в'язей статично невизначної ферми, як відомо, може бути знайдене за такою формулою:

$$L = C_0 + C - 2Y, \quad (6.25)$$

де C_0 – число опорних в'язей;
 C – число стержнів ферми;
 Y – число вузлів ферми.

Нагадаємо відомий факт. Для того щоб плоска ферма була статично визначною відносно опорних пристроїв (зовнішня статична визначність), необхідно і досить трьох опорних в'язей, тобто C_0 для такої ферми дорівнює трьом.

Загальний хід розрахунку статично невизначної ферми при заданих розмірах поперечних перерізів стержнів той самий, що і для рамних систем. Необхідно лише враховувати одну особливість при визначенні переміщень вузлів, яка полягає в тому, що в стержнях ферми виникають тільки поздовжні сили, і тоді в загальній формулі Максвелла-Мора

$$\Delta_{KF} = \sum \int \frac{M_K M_F}{EJ} ds + \sum \int \frac{N_K N_F}{EA} ds + \sum \int \frac{\mu Q_K Q_F}{GA} ds$$

варто утримувати член, що містить поздовжні сили (другий член).

Викладемо порядок розрахунку один раз статично невизначної ферми (рисунок 6.17). Звільнимо задану ферму від зайвої в'язі, відкинувши проміжну опору (рисунок 6.19). Реакцію цієї в'язі приймаємо за зайву невідому X_1 .

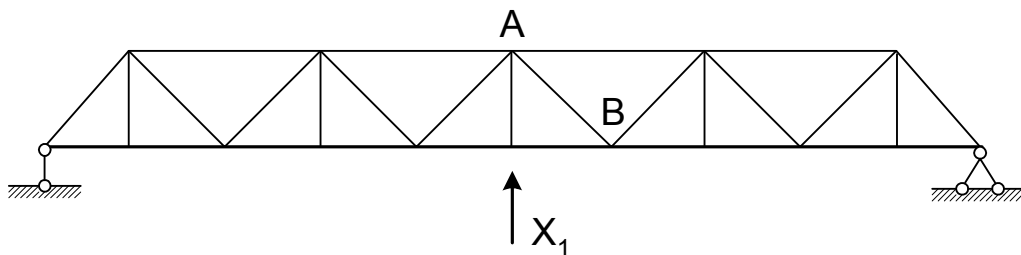


Рисунок 6.19 – Основна система заданої ферми

Для основної системи складемо канонічне рівняння деформацій. Фізичний зміст цього рівняння полягає в тому, що переміщення точки прикладання сили X_1 в її напрямку від дії X_1 і сили F дорівнює нулю:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0, \quad (6.26)$$

де δ_{11} – переміщення в напрямку X_1 , викликане цією силою, що дорівнює одиниці, $X_1 = 1$:

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^c \frac{N_{1i}^2 \ell_i}{EA_i}; \quad (6.27)$$

Δ_{1F} – переміщення в напрямку X_1 від дії заданого навантаження F ,

$$\Delta_{1F} = \sum_{i=1}^c \frac{N_{1i} N_{Fi} \ell_i}{EA_i}, \quad (6.28)$$

де N_{1i} – зусилля в i -му стержні від $X_1 = 1$;

N_{Fi} – зусилля в i -му стержні ферми від зовнішнього навантаження;

ℓ_i – довжина i -го стержня;

C – кількість стержнів ферми;

E – модуль пружності матеріалу, з якого виготовлено стержні.

З рівняння (6.26) з урахуванням виразів (6.27) і (6.28) знаходимо

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = - \frac{\sum_{i=1}^c \frac{N_{1i} N_{Fi} \ell_i}{EA_i}}{\sum_{i=1}^c \frac{N_{1i}^2 \ell_i}{EA_i}}. \quad (6.29)$$

Для ферм, стержні яких виконано з одного матеріалу, модуль пружності E можна винести за знак суми і скоротити. З рівняння (6.29) видно, що невідоме X_1 залежить від співвідношень площ перерізів стержнів, які складають ферму. Якщо ферма внутрішньо статично невизначна, то підсумовування у знаменнику формули (6.29) поширюється і на розсічений стержень.

Визначивши зайве невідоме X_1 за формулою (6.29), знаходимо зусилля в кожному i -му стержні ферми за формулою

$$N_i = N_{Fi} + N_{1i} \cdot X_1. \quad (6.30)$$

Аналогічно здійснюється розрахунок n разів статично невизначної ферми. Один з варіантів основної системи для ферми, показаної на рисунку 6.18, наведений на рисунку 6.20.

Основні невідомі визначають, використовуючи систему канонічних рівнянь. Тут необхідно зазначити, що чим більше зайвих стержнів містить ферма, тим більш важливе значення для спрощення всіх обчислень і побудов має вдалий вибір основної системи, що призводить до обернення на нуль якомога більшої кількості побічних переміщень.

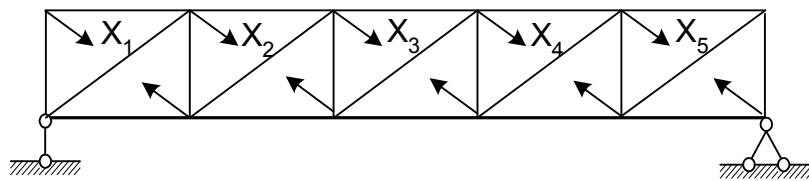


Рисунок 6.20 – Основна система

6.4 Особливості вибору основної системи та обчислення коефіцієнтів канонічних рівнянь

Розрахункова схема заданої ферми зображена на рисунку 6.21. Ферма має одну зайву в'язь. Основна система показана на рисунку 6.22.

Канонічне рівняння має такий вигляд:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

Довжини стержнів наведено в таблиці 6.1.

Знайдемо зусилля в кожному стержні ферми в основній системі від сили $X_1 = 1$ (рисунок 6.23).

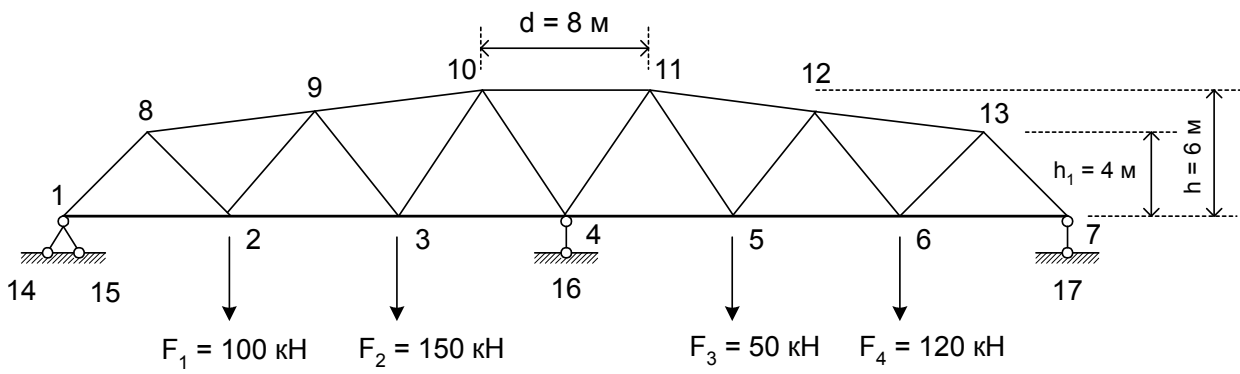


Рисунок 6.21 – Розрахункова схема ферми

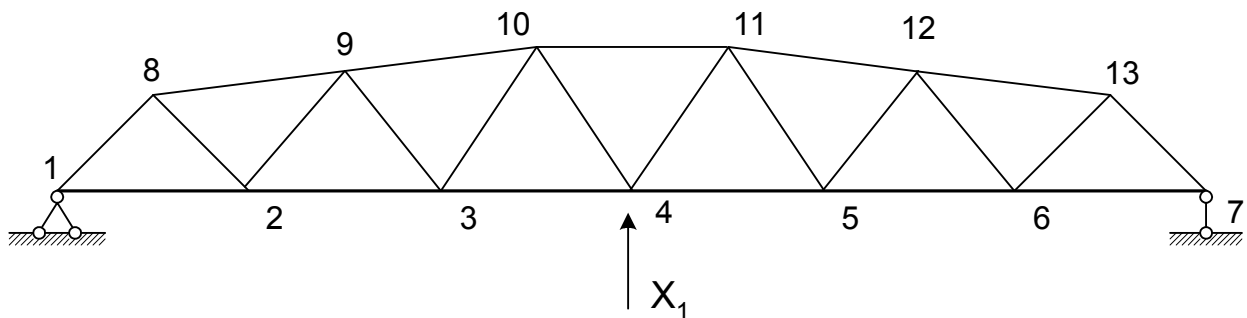


Рисунок 6.22 – Основна система

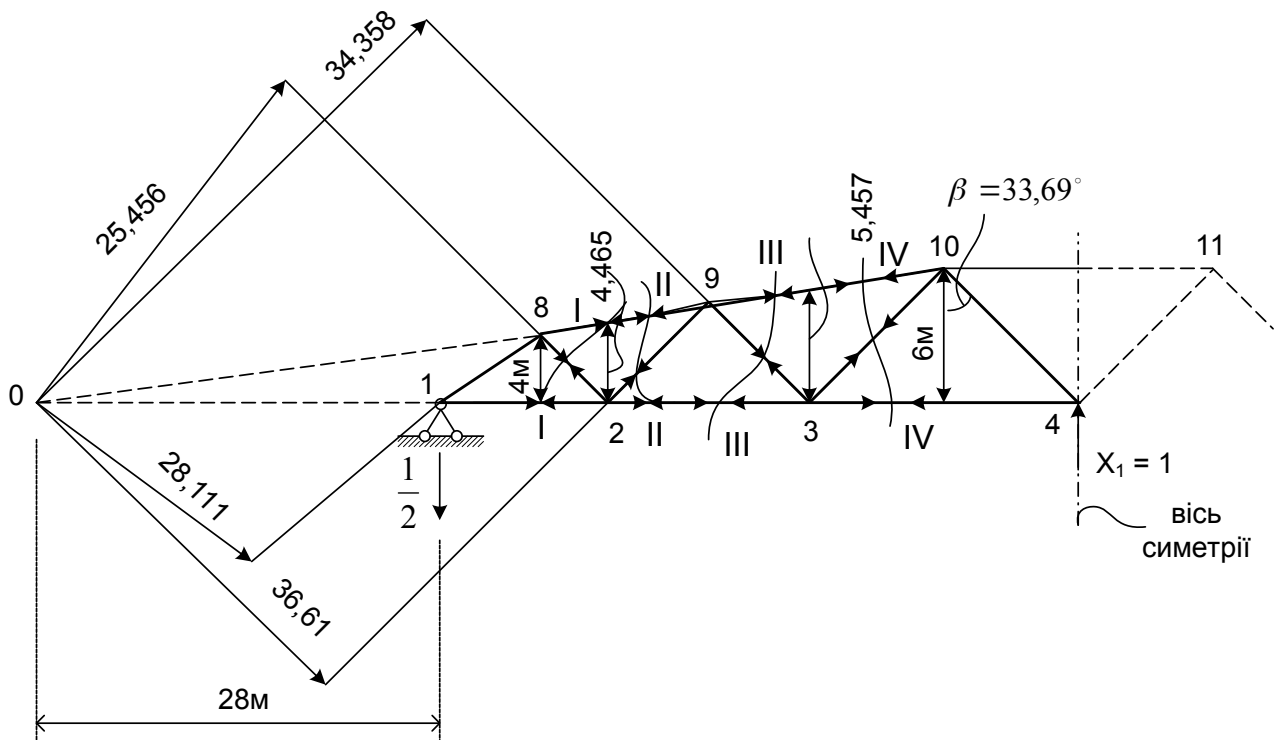


Рисунок 6.23 – До визначення зусиль від $X_1 = 1$

Таблиця 6.1 – Зусилля у стержнях статично невизначної ферми і перевірка правильності визначення зусиль

№ стержня	ℓ_i , м	стабільність перерізу	N_{li}	$\frac{N_{li}^2 \ell_i}{EA_i}$	N_{Fi} , кН	$\frac{N_{Fi} N_{li} \ell_i}{EA_i}$	N_i , кН	$\frac{N_i N_{li} \ell_i}{EA_i}$
1-8	5,65 7	2А	0,70 7	1,414	-311,74	-622,270	-126,059	-252,086
1-2	8,0	2А	-0,5	1,0	220,0	-440,0	89,084	-178,168
8-2	5,65 7	А	-0,55	1,711	241,98 6	-752,903	97,979	-304,847
8-9	8,06 2	2А	0,89 6	3,236	-394,17	-1423,67	-159,576	-576,353
2-3	8,0	2А	-1,2	5,76	448,0	-2150,40	133,80 3	-642,254
2-9	6,40 3	А	0,49 8	1,588	-91,067	-290,385	39,325	125,395
9-3	6,40 3	А	-0,40	1,061	74,509	-194,172	-32,056	83,539
9-10	8,06 2	2А	1,46 6	8,663	-498,44	-2945,51	-114,598	-677,211
3-10	7,21 1	А	0,38 2	1,052	110,35 2	303,976	210,37 1	579,488
3-4	8,0	2А	-1,66	11,116	433,33 3	-2889,46	-3,139	20,931
10-11	8,0	2А	2,0	16,0	-413,33	-3306,66	110,32 9	882,632
10-4	7,21 1	А	-0,60	2,603	-36,058	156,269	-193,418	838,237
4-11	7,21 1	А	-0,60	2,605	36,058	-156,269	-121,302	525,7
4-5	8,0	2А	-1,66	11,116	393,33 3	-2620,74	-43,139	287,651
11-5	7,21 1	А	0,38 2	1,052	25,130	69,223	125,14 9	344,736
11-12	8,06 2	2А	1,46 6	8,663	-410,48	-2425,72	-26,638	-157,416
5-12	6,40	А	-0,40	1,061	37,255	-97,087	-69,310	180,623

	3							
5-6	8,0	2A	-1,2	5,76	384,0	-1843,20	69,803	-335,054
12-6	6,40 3	A	0,49 8	1,588	-45,334	-144,556	85,108	271,384
12-13	8,06 2	2A	0,89 6	3,236	-358,34	-1294,25	-123,742	-446,928
6-13	5,65 7	A	-0,55	1,711	219,98 7	-684,457	75,980	-236,4
6-7	8,0	2A	-0,5	1,0	200,0	-400,0	69,085	-138,17
13-7	5,65 7	2A	0,70 7	1,414	-282,88	-565,699	-97,770	-195,516
				$\sum_{i=1}^n =$ $= \frac{94,412}{EA}$		$\sum_{i=1}^n =$ $= - \frac{24719,973}{EA}$		$\sum_{i=1}^n =$ $= - \frac{0,087}{EA}$

Зусилля в стержні 1-8. Виріжемо вузол 1 (рисунок 6.24).

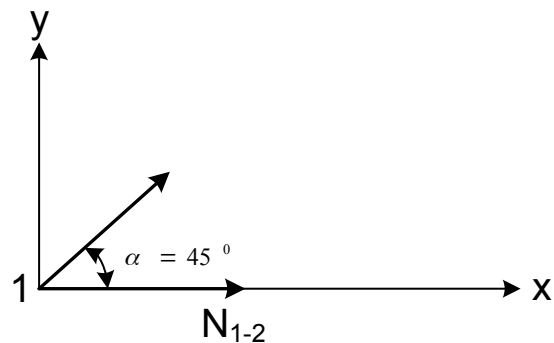


Рисунок 6.24 – Схема зусиль, що діють у вузлі 1

Спроекуємо всі сили, що діють у вузлі **1**, на вертикальну вісь:

$$\Sigma F_y = 0: \quad \frac{1}{2} - N_{1-8} \sin 45^\circ = 0.$$

Звідси

$$N_{1-8} = \frac{1}{2 \cdot 0,707} = 0,707.$$

Зусилля в стержні 1-2.

$$\Sigma M_8^{\dot{e}^3 \dot{a}} = 0: \quad \frac{1}{2} \cdot 4 + N_{1-2} \cdot 4 = 0; \quad N_{1-2} = -0,5.$$

Зусилля в стержні 8-2.

$$\Sigma M_0^{\dot{e}^3 \dot{a}} = 0: \quad \frac{1}{2} \cdot 28 + N_{8-2} \cdot 25,456 = 0; \quad N_{8-2} = -0,55.$$

Зусилля в стержні 8-9.

$$\Sigma M_2^{\dot{e}^3 \dot{a}} = 0: \quad \frac{1}{2} \cdot 8 - N_{8-9} \cdot 4,465 = 0; \quad N_{8-9} = 0,896.$$

Зусилля в стержні 9-2.

$$\Sigma \dot{I}_0^{\dot{e}^3 \dot{a}} = 0: \quad \frac{1}{2} \cdot 28 - N_{9-2} \cdot 28,111 = 0; \quad N_{9-2} = 0,498.$$

Зусилля в стержні 2-3.

$$\Sigma \dot{I}_9^{\dot{e}^3 \dot{a}} = 0: \quad \frac{1}{2} \cdot 12 + N_{2-3} \cdot 5 = 0; \quad N_{2-3} = -1,2.$$

Зусилля в стержні 9-3.

$$\Sigma \dot{I}_0^{\dot{e}^3 \dot{a}} = 0: \quad \frac{1}{2} \cdot 28 + N_{9-3} \cdot 34,358 = 0; \quad N_{9-3} = -0,407.$$

Зусилля в стержні 9-10.

$$\Sigma \dot{I}_3^{\dot{e}^3 \dot{a}} = 0: \quad \frac{1}{2} \cdot 16 - N_{9-10} \cdot 5,457 = 0; \quad N_{9-10} = 1,465.$$

Зусилля в стержні 3-10.

$$\Sigma \dot{I}_0^{\dot{e}^3 \dot{a}} = 0: \quad \frac{1}{2} \cdot 28 - N_{3-10} \cdot 36,610 = 0; \quad N_{3-10} = 0,382.$$

Зусилля в стержні 3-4.

$$\Sigma \dot{I}_{10}^{\dot{e}^3 \dot{a}} = 0: \quad \frac{1}{2} \cdot 48 + N_{3-4} \cdot 6 = 0; \quad N_{3-4} = -1,667.$$

Зусилля в стержні 10-11.

$$\Sigma \dot{I}_4^{\dot{e}^3 \dot{a}} = 0; \quad \frac{1}{2} \cdot 24 - N_{10-11} \cdot 6 = 0; \quad N_{10-11} = 2,0.$$

Зусилля в стержні 10-4.

$$\sum F_y^{\text{в}i\text{д}} = 0: \quad \frac{1}{2} + N_{10-4} \cdot \cos \beta = 0; \quad N_{10-4} = -0,601.$$

Зусилля в інших стержнях ферми немає потреби визначати, тому що навантаження і ферма симетричні. Знайдені зусилля занесемо в таблицю 6.1.

Знайдемо тепер зусилля в стержнях основної системи ферми (рисунок 6.22) від зовнішнього навантаження (рисунок 6.25).

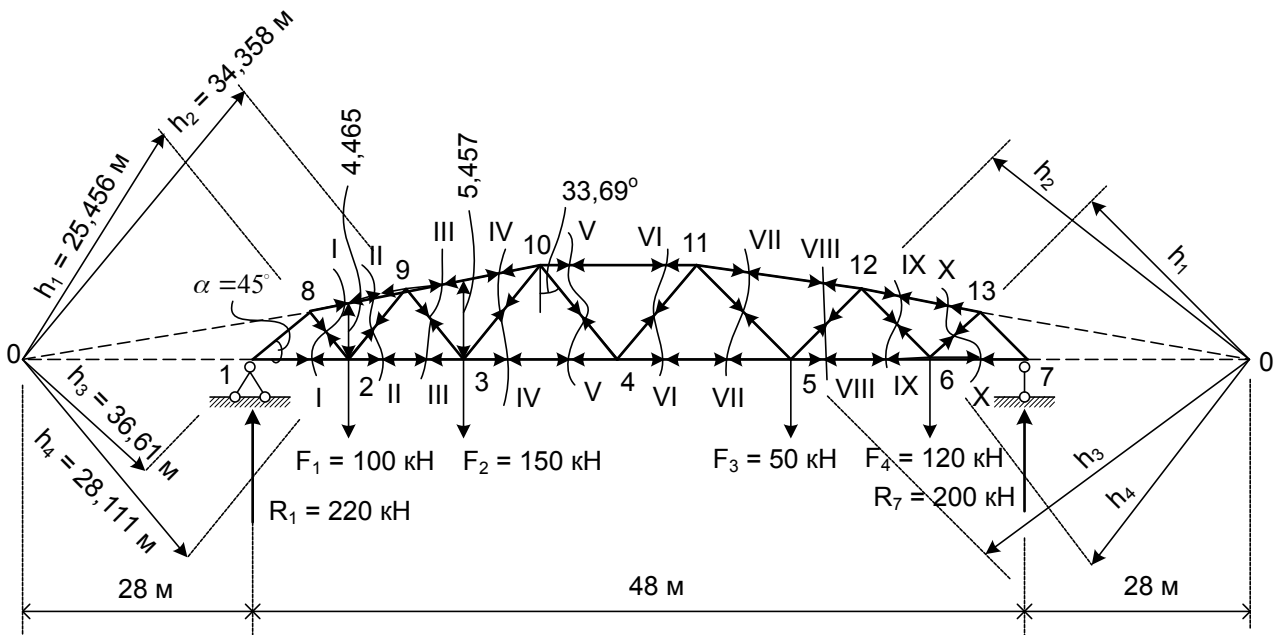


Рисунок 6.25 – До визначення зусиль від зовнішнього навантаження

Зусилля в стержні 1-8. Виріжемо вузол 1 (рисунок 6.25). Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum F_y = 0: \quad 220 + N_{1-8} \sin 45^\circ = 0; \quad N_{1-8} = -311,174 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 1-2. Перетин I-I:

$$\sum \dot{I}_8^{\text{в}i\text{д}} = 0: \quad 220 \cdot 4 - N_{1-2} \cdot 4 = 0; \quad N_{1-2} = 220 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 8-2. Перетин I-I:

$$\sum \dot{I}_0^{\text{в}i\text{д}} = 0: \quad 220 \cdot 28 - N_{8-2} \cdot 25,456 = 0; \quad N_{8-2} = 241,986 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 8-9. Перетин I-I:

$$\Sigma \dot{I}_2^{\varepsilon^3 \dot{a}} = 0: \quad 220 \cdot 8 + N_{8-9} \cdot 4,465 = 0; \quad N_{8-9} = -394,177 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 9-2. Перетин II-II:

$$\Sigma \dot{I}_0^{\varepsilon^3 \dot{a}} = 0: \quad 220 \cdot 28 - 100 \cdot 36 + N_{9-2} \cdot 28,111 = 0; \quad N_{9-2} = -91,067 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 2-3. Перетин II-II:

$$\Sigma \dot{I}_9^{\varepsilon^3 \dot{a}} = 0: \quad 220 \cdot 12 - 100 \cdot 4 - N_{2-3} \cdot 5 = 0; \quad N_{2-3} = 448 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 9-10. Перетини III-III, IV-IV:

$$\Sigma \dot{I}_3^{\varepsilon^3 \dot{a}} = 0: \quad 220 \cdot 16 - 100 \cdot 8 + N_{9-10} \cdot 5,457 = 0; \quad N_{9-10} = -498,442 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 9-3. Перетин III-III:

$$\Sigma \dot{I}_0^{\varepsilon^3 \dot{a}} = 0: \quad 220 \cdot 28 - 100 \cdot 36 - N_{9-3} \cdot 34,358 = 0; \quad N_{9-3} = 74,509 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 3-10. Перетин IV-IV:

$$\Sigma \dot{I}_0^{\varepsilon^3 \dot{a}} = 0: \quad 220 \cdot 28 - 100 \cdot 36 - 150 \cdot 44 + N_{3-10} \cdot 36,61 = 0; \quad N_{3-10} = 110,352 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 3-4. Перетин IV-IV:

$$\Sigma \dot{I}_{10}^{\varepsilon^3 \dot{a}} = 0: \quad 220 \cdot 20 - 100 \cdot 12 - 150 \cdot 4 - N_{3-4} \cdot 6 = 0; \\ N_{3-4} = 433,333 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 10-4. Перетин V-V:

$$\Sigma F_y^{\varepsilon^3 \dot{a}} = 0: \quad 220 - 100 - 150 - N_{10-4} \cdot \cos 33,69^\circ = 0; \\ N_{10-4} = -36,058 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 10-11. Перетин V-V:

$$\Sigma \dot{I}_4^{\varepsilon^3 \dot{a}} = 0: \quad 220 \cdot 24 - 100 \cdot 16 - 150 \cdot 8 + N_{10-11} \cdot 6 = 0; \\ N_{10-11} = -413,333 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 11-4. Перетин VI-VI:

$$\Sigma F_y^{\varepsilon^3 \dot{a}} = 0: \quad 200 - 50 - 120 - N_{11-4} \cos 33,69^\circ = 0; \quad N_{11-4} = 36,058 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 4-5. Перетин VI-VI:

$$\Sigma \dot{i}_{11}^{i\theta} = 0: \quad 200 \cdot 20 - 120 \cdot 12 - 50 \cdot 4 - N_{4-5} \cdot 6 = 0;$$

$$N_{4-5} = 393,333 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 11-5. Перетин VII-VII:

$$\Sigma \dot{i}_0^{i\theta} = 0: \quad 200 \cdot 28 - 120 \cdot 36 - 50 \cdot 44 + N_{11-5} \cdot 36,61 = 0; \quad N_{11-5} =$$

$$= 25,13 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 11-12. Перетин VII-VII:

$$\Sigma \dot{i}_5^{i\theta} = 0: \quad 200 \cdot 16 - 120 \cdot 8 + N_{11-12} \cdot 5,457 = 0;$$

$$N_{11-12} = -410,482 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 12-5. Перетин VIII-VIII:

$$\Sigma \dot{i}_0^{i\theta} = 0: \quad 200 \cdot 28 - 120 \cdot 36 - N_{12-5} \cdot 34,358 = 0;$$

$$N_{12-5} = 37,255 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 5-6. Перетин VIII-VIII:

$$\Sigma \dot{i}_{12}^{i\theta} = 0: \quad 200 \cdot 12 - 120 \cdot 4 - N_{5-6} \cdot 5 = 0; \quad N_{5-6} = 384 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 12-6. Перетин IX-IX:

$$\Sigma \dot{i}_0^{i\theta} = 0: \quad 200 \cdot 28 - 120 \cdot 36 + N_{12-6} \cdot 28,111 = 0;$$

$$N_{12-6} = -45,534 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 12-13. Перетин IX-IX:

$$\Sigma \dot{i}_0^{i\theta} = 0: \quad 200 \cdot 9 + N_{12-13} \cdot 4,465 = 0; \quad N_{12-13} = -358,343 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 6-13. Перетин X-X:

$$\Sigma \dot{i}_0^{i\theta} = 0: \quad 200 \cdot 28 - N_{6-13} \cdot 25,456 = 0; \quad N_{6-13} = 219,987 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 6-7. Перетин X-X:

$$\Sigma \dot{i}_{13}^{i\theta} = 0: \quad 200 \cdot 4 - N_{6-7} \cdot 4 = 0; \quad N_{6-7} = 200 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 13-7. Виріжемо вузол 7 (рисунок 6.25) і розглянемо умову його рівноваги:

$$\Sigma F_y = 0: \quad 200 + N_{13-7} \cdot \sin 45^\circ = 0; \quad N_{13-7} = -282,885 \text{ кН.}$$

Знаходимо X_1 за наступною формулою:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{\sum_{i=1}^c \frac{N_{li} N_{Fi} \ell_i}{EA_i}}{\sum_{i=1}^c \frac{N_{li}^2 \ell_i}{EA_i}};$$

$$X_1 = \frac{24719,973}{94,412} = 261,831.$$

За формулою

$$N_i = N_{Fi} + N_{li} \cdot X_1$$

визначаємо зусилля у стержнях статично невизначної ферми (див. таблицю 6.1) і здійснюємо перевірку правильності визначення зусиль (остання графа таблиці 6.1).

6.5 Особливості розрахунку статично невизначних ферм при дії температури і задане зміщення опор. Матрична форма розрахунку

Канонічне рівняння у випадку температурного впливу має такий вигляд:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1t} = 0. \quad (6.31)$$

Тут δ_{11} і Δ_{1t} визначаються за такими формулами:

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \frac{N_{li}^2 \ell_i}{EA_i}; \quad (6.32)$$

$$\Delta_{1t} = \alpha \sum_{i=1}^c N_{li} t_i \ell_i, \quad (6.33)$$

де α – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу, з якого виготовлена ферма;

t_i – зміна температури стержня порівняно з початковою.

У тому випадку, коли всі стержні нагріті однаково, формула температурного переміщення (6.33) переходить у таку:

$$\Delta_{1t} = \alpha t \sum_{i=1}^c N_{1i} \ell_i. \quad (6.34)$$

Реакція відкинutoї в'язі знаходиться так:

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = - \frac{E\alpha \sum_{i=1}^c N_{1i} t_i \ell_i}{\sum_{i=1}^c \frac{N_{1i}^2 \ell_i}{A_i}}. \quad (6.35)$$

Зусилля в кожному стержні статично невизначної ферми виразиться формулою

$$N_i = N_{1i} X_1. \quad (6.36)$$

Уявимо собі, що стержень **AB** (рисунок 6.26) довший, ніж це потрібно за конфігурацією ферми, на величину α . Запишемо канонічне рівняння методу сил:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1C} = 0. \quad (6.37)$$

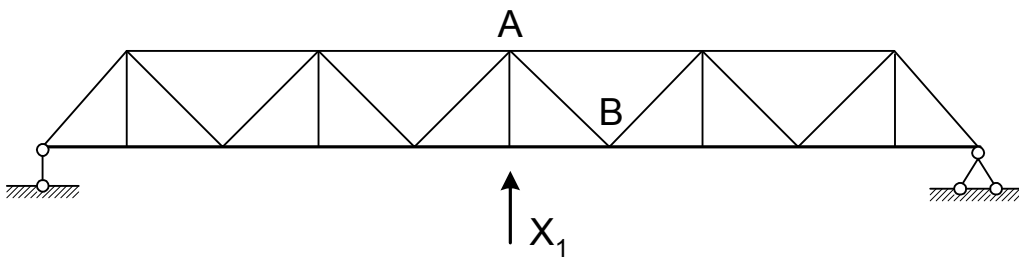


Рисунок 6.26 – Основна система заданої ферми

Переміщення в напрямку X_1 від заданого впливу (подовження стержня **AB**) визначається так:

$$\Delta_{1C} = - R \alpha,$$

де R – зусилля у стержні **AB** від $X_1 = 1$. При цьому, якщо зусилля (реакція) у стержні **AB** – розтягувальне, то перед добутком $R\alpha$ ставиться знак «плюс», а якщо стискальне – «мінус».

Визначивши δ_{11} за формулою (6.32), знаходимо X_1 з рівняння (6.37) і зусилля в кожному стержні статично невизначної ферми за формулою (6.36).

Розглянемо *матричну форму* визначення зусиль.

У фермах при великій кількості варіантів завантаження особливо доцільно використовувати обчислювальну техніку. Покажемо матричну форму, найбільш пристосовану і зручну для розрахунку на **ЕОМ**, на прикладі ферми, зображеної на рисунку 6.27.

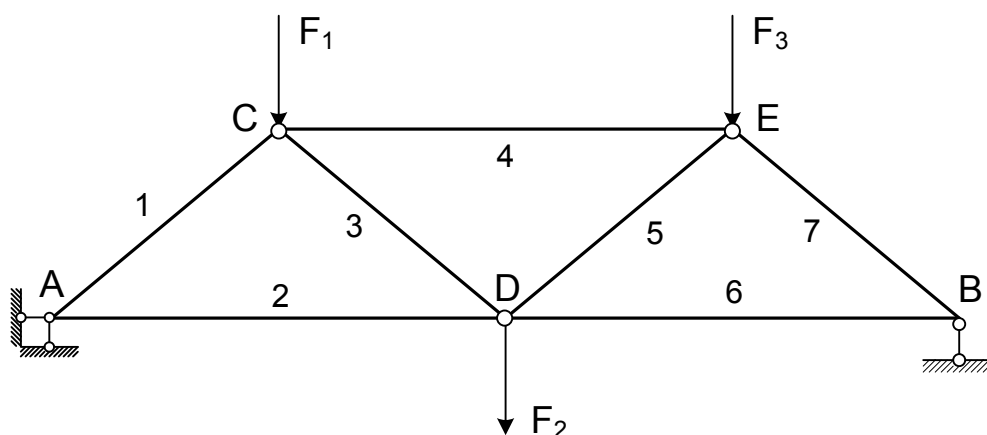


Рисунок 6.27 – До матричної форми визначення зусиль

Позначивши зусилля в будь-якому i -му стержні від сил $F_1 = 1, F_2 = 1, \dots, F_n = 1$ відповідно через $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}$, можна записати:

$$S_i = c_{i1} F_1 + c_{i2} F_2 + \dots + c_{in} F_n \quad (6.38)$$

або для ферми (рисунок 6.27):

$$S_1 = c_{11} F_1 + c_{12} F_2 + c_{13} F_3;$$

$$S_2 = c_{21} F_1 + c_{22} F_2 + c_{23} F_3;$$

.....

$$S_7 = c_{71} F_1 + c_{72} F_2 + c_{73} F_3.$$

Запишемо це в **матричній формі**:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

або скорочено

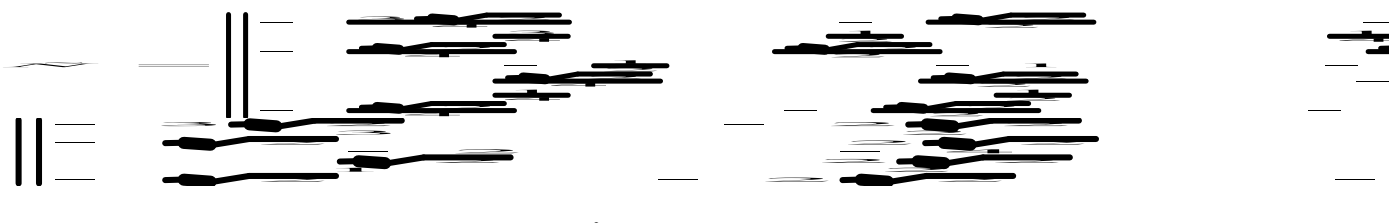
$$S = CF, \tag{6.39}$$

де S – матриця-стовпець зусиль;

F – матриця-стовпець зовнішнього навантаження;

C – прямокутна матриця зусиль від одиничних сил.

Після визначення послідовно зусиль в елементах ферми від сил $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 1$ отримаємо прямокутну матрицю C :



Для прикладу визначимо зусилля в стержні **1**, прийнявши $F_1 = F_3 = F$; $F_2 = 2F$:

$$S_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}F - \frac{\sqrt{2}}{2}2F - \frac{\sqrt{2}}{4}F = -2F\sqrt{2}.$$

Матриця C , як правило, є громіздкою, у ній мало (або зовсім нема) нульових елементів. Щоб спростити матрицю C , можна вдаватися до перетворення навантаження.

Задану систему сил замінюємо системою узагальнених сил, еквівалентних за своєю дією початковій. Задана система сил разом з реакціями є врівноваженою; подамо її як лінійну комбінацію врівноважених локальних дій.

У цьому випадку внутрішні зусилля від локальних взаємно врівноважених дій звичайно прості і, що найголовніше, носять місцевий характер. Іншими словами, локальні взаємно врівноважені навантаження викликають зусилля в обмеженому числі стержнів; безліч інших стержнів зусиль не зазнають, елементи матриці, які виражають зусилля в цих стержнях, дорівнюватимуть нулю.

Розкладемо довільну плоску врівноважену групу сил на систему самоврівноважених дій. Для цього подамо групу сил \mathbf{R} у вигляді лінійної комбінації узагальнених сил:

$$\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3; \quad \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4,$$

де \mathbf{m}_i – самоврівноважені пари; \mathbf{n}_i – дві взаємно протилежні одиничні сили, направлені по одній прямій (самоврівноважені сили).

Тоді

$$\mathbf{R} = k_1 \bar{\mathbf{m}}_1 + k_2 \bar{\mathbf{m}}_2 + k_3 \bar{\mathbf{m}}_3 + k_4 \bar{\mathbf{n}}_1 + k_5 \bar{\mathbf{n}}_2 + k_6 \bar{\mathbf{n}}_3 + k_7 \bar{\mathbf{n}}_4. \quad (6.40)$$

Для знаходження коефіцієнтів \mathbf{k} з'єднаємо послідовно точки прикладення сил (рисунок 6.27) прямими і одержаний контур будемо розглядати як допоміжну статично визначну раму (рисунок 6.28, а). Побудуємо в одержаній рамі епюри \mathbf{M} і \mathbf{N} від заданого навантаження (рисунок 6.28, б, в).

Епюра \mathbf{M} дозволяє визначити коефіцієнти \mathbf{k} при узагальнених силах \mathbf{m}_i , епюра \mathbf{N} – при силах \mathbf{n}_i . Так, \mathbf{k}_1 – це момент у точці прикладення сили \mathbf{F}_1 , \mathbf{k}_2 і \mathbf{k}_3 , відповідно, у точках прикладення сил \mathbf{F}_2 і \mathbf{F}_3 . Інші коефіцієнти визначаються з епюри \mathbf{N} . Тут $\mathbf{k}_4, \mathbf{k}_5, \mathbf{k}_6, \mathbf{k}_7$ – це поздовжні зусилля \mathbf{N} в стержнях 1, 3, 5, 7 допоміжної рами.

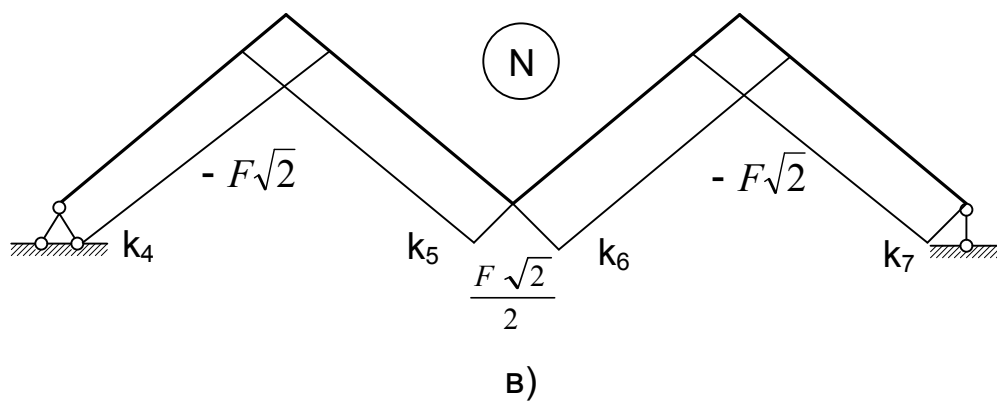
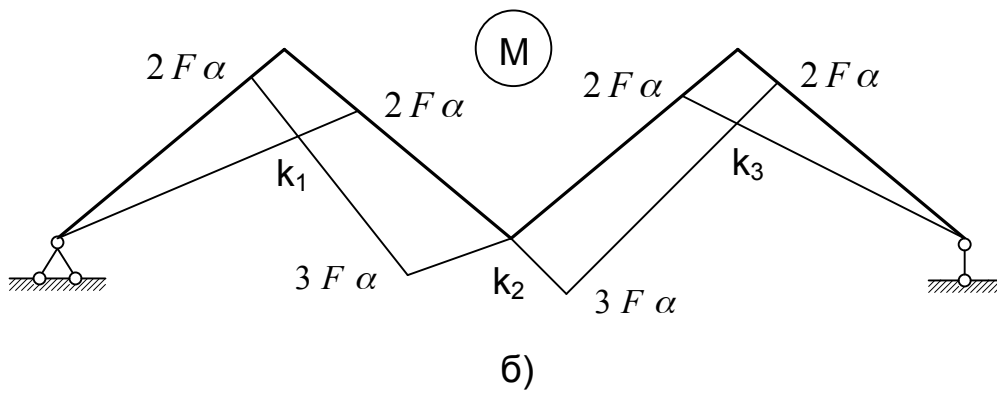
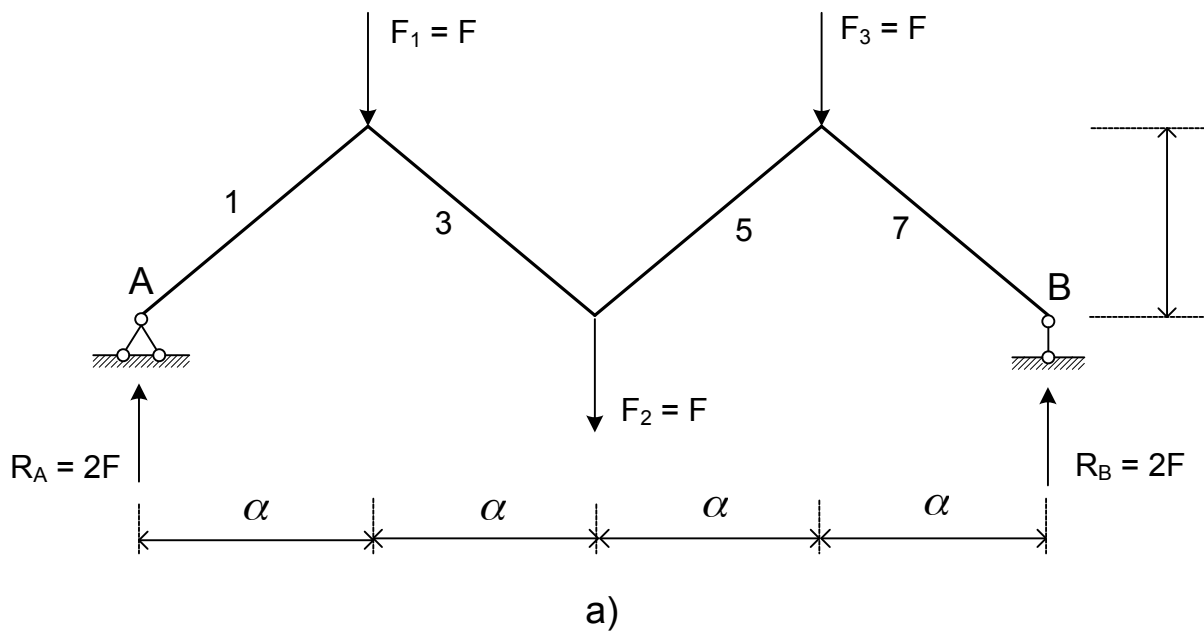


Рисунок 6.28 – До матричної форми визначення зусиль

Визначимо зусилля в елементах ферми від груп самоврівноважених узагальнених сил: $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$ і $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4$ (рисунок 6.29).

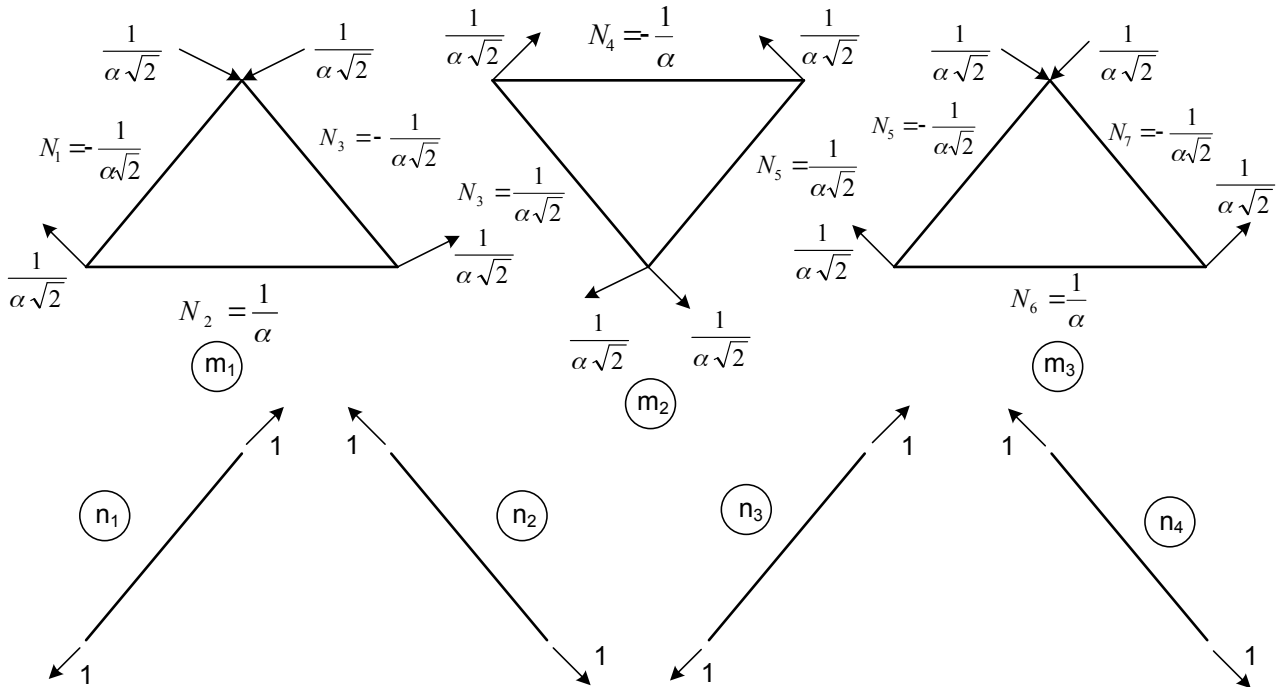


Рисунок 6.29 – До визначення зусиль в елементах ферми від груп самоврівноважених узагальнених сил: $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$ і $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4$

Якщо зусилля, одержані від самоврівноважених узагальнених сил (локальних дій), записати у вигляді матриць \mathbf{L}_m (від групи сил \mathbf{m}_i) і \mathbf{L}_n (від групи сил \mathbf{n}_i), то зусилля в будь-якому стержні може бути визначено від будь-якої комбінації дій у матричній формі:

$$S = L_m M_F + L_n N_F, \quad (6.41)$$

де S – вектор зусиль;

\mathbf{L}_m – матриця впливу групи само врівноважених пар;

M_F – вектор вузлових моментів в допоміжній рамі;

\mathbf{L}_n – матриця впливу групи самоврівноважених сил;

N_F – вектор поздовжніх сил в допоміжній рамі.

У нашому випадку:

$$L_m = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\alpha\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha\sqrt{2}} & \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} & -\frac{1}{\alpha\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha\sqrt{2}} \end{vmatrix} \quad L_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Після визначення зусиль від локальних дій і складання матриць L_m і L_n легко визначити зусилля в елементах ферми від будь-якого значення зовнішніх сил (прикладених у точках-вузлах допоміжної рами) і від будь-якої їх комбінації. Для цього визначається M_F і N_F з епюр M і N , побудованих для допоміжної рами.

Для прикладу визначимо M_F і N_F від сумарної дії сил $F_1 = F_3 = F$, $F_2 = 2F$.

$$\vec{M}_F = \begin{vmatrix} 2F\alpha \\ 3F\alpha \\ 2F\alpha \end{vmatrix}; \quad \vec{N}_F = \begin{vmatrix} -F\sqrt{2} \\ F\sqrt{2} \\ F\sqrt{2} \\ -F\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

6.6 Розрахунок статично невизначних ферм при дії рухомого навантаження

Розглянемо, як і раніше, ферму з однією зайвою в'яззю. Оскільки зусилля у стержнях статично невизначної ферми виражаються через зайву невідому X_1

$$N_i = N_{Fi} + N_{li} \cdot X_1,$$

то при розрахунку на рухоме навантаження насамперед побудуємо лінію впливу зайвої невідомої.

Будемо виходити з канонічного рівняння

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0. \quad (6.42)$$

Оскільки мова йде про одиничне навантаження $F = 1$, замінимо в рівнянні (6.42) $\Delta_{1F} = \delta_{1F}$ і далі, застосовуючи теорему про взаємність одиничних переміщень, одержимо $\delta_{1F} = \delta_{F1}$. З урахуванням цього, з рівняння (6.42) знайдемо

$$X_1 = - \frac{\delta_{F1}}{\delta_{11}}. \quad (6.43)$$

Тут δ_{F1} – вертикальне переміщення точки прикладення сили $F = 1$ при даному її положенні, викликане дією нерухомої сили $X_1 = 1$.

З формули (6.43) випливає, що лінія впливу зайвої невідомої X_1 може бути побудована як еюра вертикальних переміщень вузлів ферми δ_{F1} розподіленням всіх її ординат на головне переміщення ($-\delta_{11}$), яке визначається за формулою (6.32).

Для побудови еюри вертикальних переміщень скористаємося методом фіктивних вантажів. Відповідно до цього методу для кожного вузла вантажного поясу ферми визначається фіктивний вантаж за формулою

$$W_j = \sum_{i=1}^c \frac{N_{1i} N_{\lambda i} \ell_i}{EA_i}, \quad j = 1, \dots, K, \quad (6.44)$$

де $N_{\lambda i}$ – зусилля в i -му стержні від двох рівних і протилежних за напрямком пар сил, кожної з моментом, рівним одиниці, прикладених до двох сусідніх стержнів вантажного поясу ферми $j - 1, j + 1$ (рисунок 6.30, б);

N_{1i} – зусилля в i -му стержні ферми від $X_1 = 1$;

K – кількість завантажених вузлів (рисунок 6.30, а).

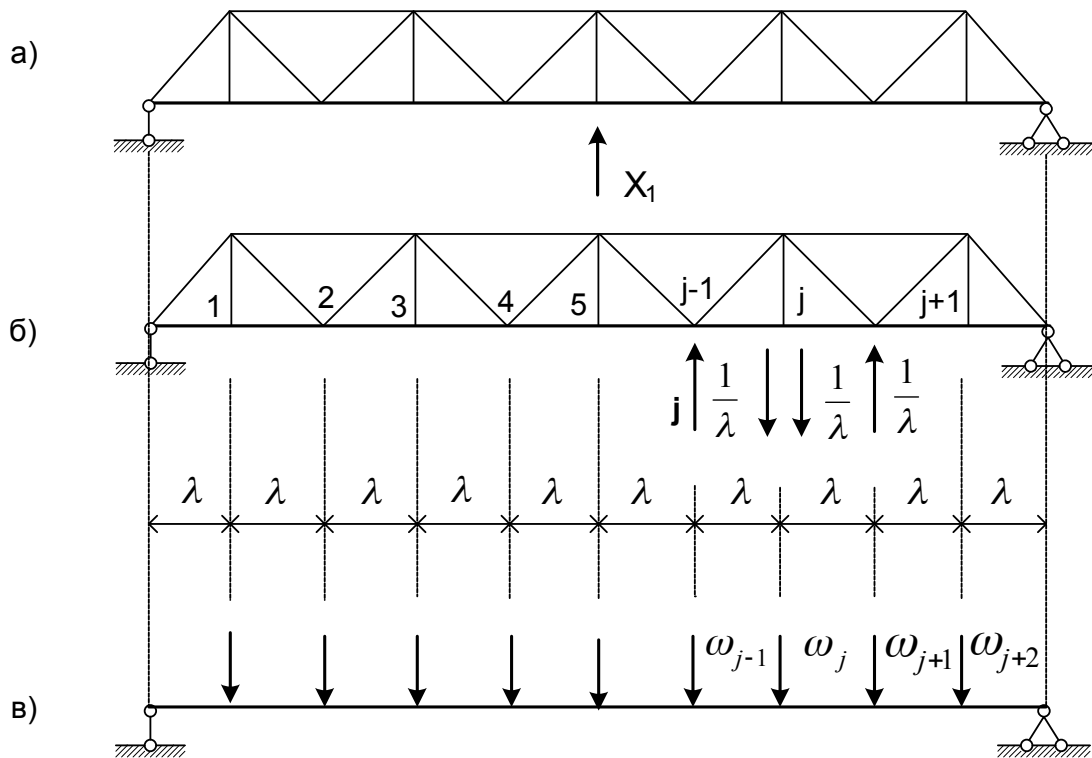


Рисунок 6.30 – До визначення фіктивних вантажів у вузлах ферми

Знайдені за формулою (6.44) фіктивні вантажі прикладаються до фіктивної балки (рисунок 6.30, в).

Побудована еюра згинальних моментів для фіктивної балки при навантаженні фіктивними вантажами і буде епурою вертикальних переміщень δ_{F1} . Зауважимо, що при побудові епю прогинів у фіктивній балці необхідно пам'ятати про те, що переміщення надпорних вузлів ферми повинні дорівнювати нулю. Для виконання цієї умови у відповідних перерізах фіктивної балки варто прикласти згинальні моменти, рівні за величиною і зворотні за знаком деформаціям опорних стійок.

Лінію впливу в довільному стержні статично невизначної ферми отримуємо за лінією впливу зайвої невідомої X_1 , користуючись такою формулою:

$$\text{л.в. } N_i = \text{л.в. } N_{Fi} + N_{1i} \cdot \text{л.в. } X_1, \quad (6.45)$$

де **л.в.** N_{Fi} – лінія впливу в основній системі;

N_{1i} – зусилля в стержні від $X_1 = 1$.

6.7 Побудова ліній впливу зайвих невідомих і внутрішніх сил у стержнях ферми. Застосування комп'ютера для побудови ліній впливу

Спочатку побудуємо лінію впливу X_1 . У стержнях основної системи ферми знайдемо зусилля від пар сил з моментом, що дорівнює одиниці, прикладених по черзі у вузлах **2**, **3**, **4** (рисунок 6.31).

Зусилля у стержнях ферми від одиничних пар наведено в таблиці 6.2. Отримані в таблиці 6.2 фіктивні вантажі прикладаємо до шарнірно обпертої балки (рисунок 6.31, г) і будуємо епюру моментів.

Лінії впливу X_1 будуються відповідно до формули (6.43). Отримана над силою X_1 ордината лінії впливу дорівнює **0,998**. Похибка складає **0,2 %**. За побудованою лінією впливу знайдемо величину X_1 від заданого навантаження (рисунок 6.31, а), кН:

$$X_1 = 100 \cdot 0,456 + 150 \cdot 0,805 + 50 \cdot 0,805 + 120 \cdot 0,456 = 261,32.$$

У результаті статичного розрахунку значення X_1 дорівнює **261,831**. Похибка складає **0,19 %**.

Побудуємо тепер лінії впливу зусиль у стержнях заданої статично невизначної ферми. Відповідно до формули (6.45) шукана лінія впливу являє собою суму двох ліній впливу: лінії впливу зусиль в основній системі ферми і лінії впливу X_1 (рисунок 6.31, д), всі ординати якої помножені на постійне число – зусилля в основній системі від $X_1 = 1$.

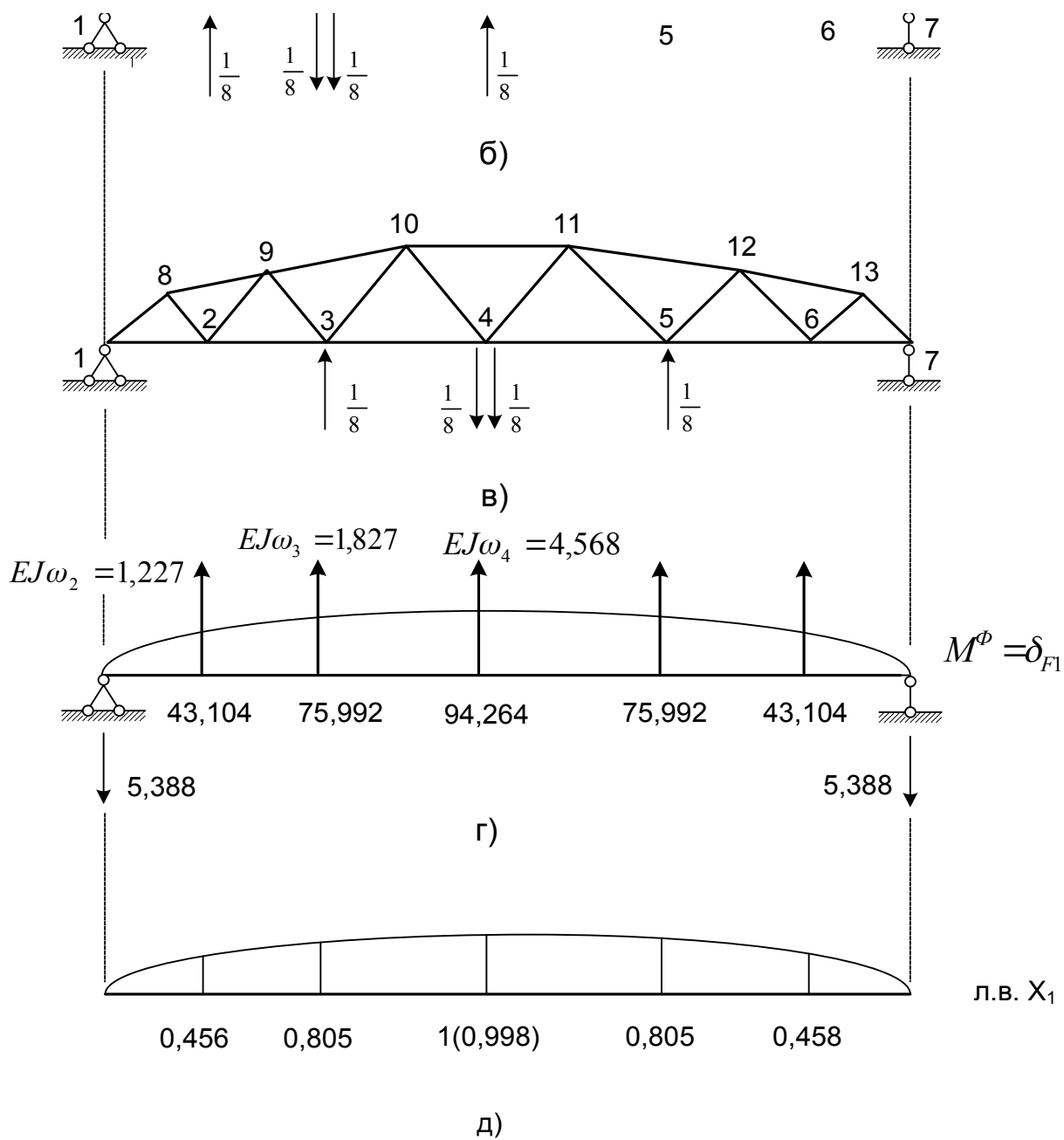


Рисунок 6.31 – Визначення фіктивних вантажів і побудова лінії впливу X_1

Таблиця 6.2 – До визначення фіктивних вантажів

№	Зусилля від одиничних пар, прикладених у вузлах		
	Вузол 2	Вузол 3	Вузол 4

стержня	$\bar{N}_{\lambda i}$	$\frac{\bar{N}_{\lambda i} N_{1i} \ell_i}{EA_i}$	$\bar{N}_{\lambda i}$	$\frac{\bar{N}_{\lambda i} N_{1i} \ell_i}{EA_i}$	$\bar{N}_{\lambda i}$	$\frac{\bar{N}_{\lambda i} N_{1i} \ell_i}{EA_i}$
1	2	3	4	5	6	7
1-8	-0,177	-0,354	0	0	0	0
1-2	0,125	0,25	0	0	0	0
8-2	0,137	-0,426	0	0	0	0
8-9	-0,224	-0,809	0	0	0	0
2-3	0,1	-0,48	0,1	-0,48	0	0
2-9	0,196	0,625	-0,16	-0,51	0	0
9-3	-0,16	0,417	0,131	-0,341	0	0
9-10	0	0	-0,183	-1,081	0	0
3-10	0	0	0,177	0,488	-0,15	-0,413
3-4	0	0	0,083	-0,553	0,083	-0,553
10-11	0	0	0	0	-0,167	-1,336
10-4	0	0	-0,15	0,65	0,15	0,65
4-11	0	0	0	0	0,15	-0,65
4-5	0	0	0	0	0,083	-0,553
11-5	0	0	0	0	-0,15	-0,413
11-12	0	0	0	0	0	0
5-12	0	0	0	0	0	0
5-6	0	0	0	0	0	0
12-6	0	0	0	0	0	0
12-13	0	0	0	0	0	0
6-13	0	0	0	0	0	0
6-7	0	0	0	0	0	0
13-7	0	0	0	0	0	0
		$\sum_{i=1}^n = - \frac{1,277}{EA}$		$\sum_{i=1}^n = - \frac{1,827}{EA}$		$\sum_{i=1}^n = - \frac{4,568}{EA}$

Лінія впливу N_{1-8} (рисунок 6.33).

Для побудови лінії впливу N_{1-8}^0 (символ N_{1-8}^0 означає, що лінія впливу будується в основній системі) скористаємося способом вирізання вузлів (рисунок 6.32).

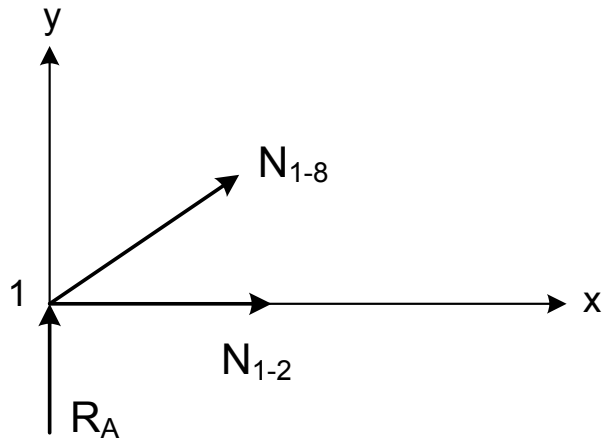


Рисунок 6.32 – Схема зусиль, що діють на вузол 1

Розглянемо два положення вантажу $F = 1$: вантаж у вузлі 1, $R_1 = 1$, $N_{1-8} = 0$; вантаж поза вузлом (на ділянці 2-7):

$$\Sigma F_y = 0,$$

$$R_1 + N_{1-8}^0 \sin 45^\circ = 0;$$

$$N_{1-8}^0 = -R_1 \frac{1}{0,707}.$$

Отже, лінія впливу N_{1-8}^0 на ділянці 2-7 буде такою же, як і лінія впливу R_1 , всі ординати якої помножені на постійне число $\left(-\frac{1}{0,707}\right)$ (рисунок 6.33, б). Тепер лінію впливу X_1 помножимо на **0,707** (рисунок 6.33, в). Лінія впливу N_{1-8} у заданій фермі дорівнює сумі побудованих ліній впливу (рисунок 6.33, г). Обчислимо за лінією впливу зусилля N_{1-8} і порівняємо з результатом аналітичного розрахунку (таблиця 6.1):

$$N_{1-8} = -100 \cdot 0,856 - 150 \cdot 0,374 + 50 \cdot 0,097 + 120 \cdot 0,086 = -126,53.$$

Похибка складає **0,37 %**.

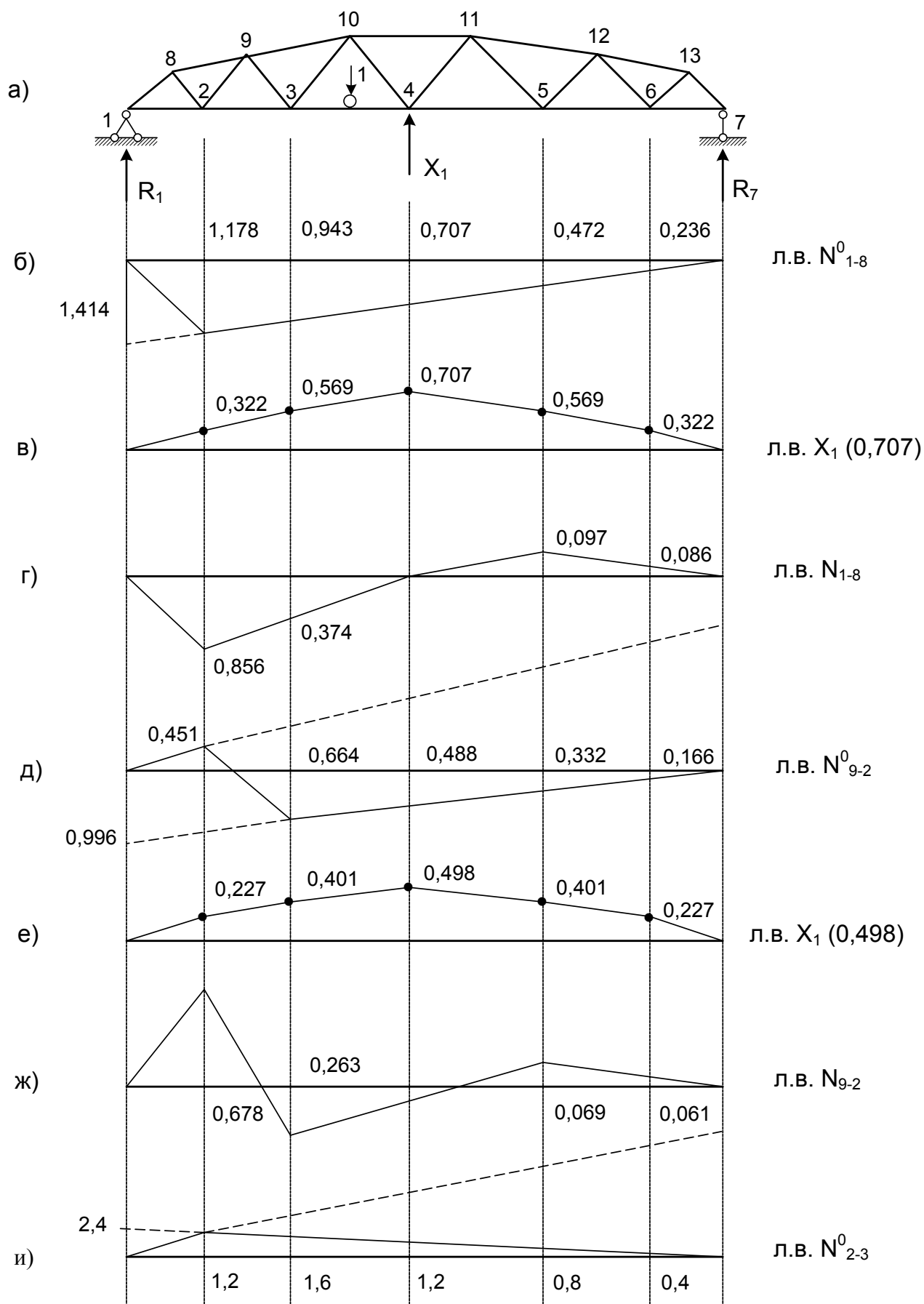


Рисунок 6.33 – Побудова ліній впливу зусиль у стержнях заданої ферми (аркуш 1)

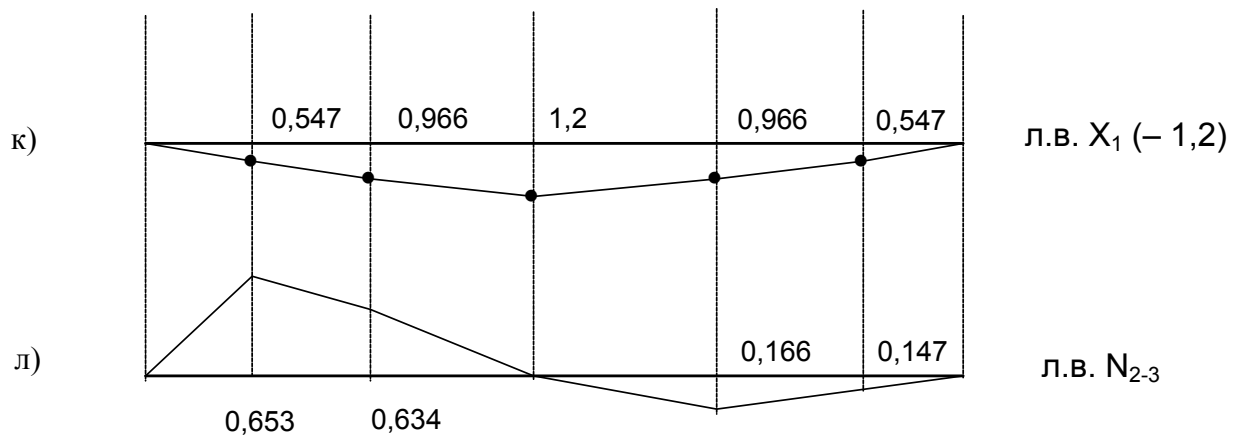


Рисунок 6.33 – Побудова ліній впливу зусиль у стержнях заданої ферми (аркуш 2)

Лінія впливу $N_{9,2}$. Для визначення зусиль від сили $F = 1$ у стержні 9-2 скористаємося перетином II-II (рисунок 6.25):

- **вантаж на ділянці 1-2:** $\Sigma M_0^{\text{пр}} = 0,$
 $R_7 \cdot 76 - N_{9,2}^0 \cdot 28,111 = 0,$
 $N_{9,2}^0 = 2,704 R_7;$

- **вантаж на ділянці 3-7:** $\Sigma M_0^{\text{лів}} = 0,$
 $R_1 \cdot 28 + N_{9,2}^0 \cdot 28,111 = 0,$
 $N_{9,2}^0 = -0,996 R_1.$

Лінія впливу $N_{9,2}^0$ показана на рисунку 6.33, д. Відповідно до таблиці 6.1, ординати лінії впливу X_1 помножимо на **0,498** (рисунок 6.33, е). Лінія впливу $N_{9,2}$ показана на рисунку 6.33, ж. Знайдемо зусилля $N_{9,2}$ за побудованою лінією впливу, кН:

$$N_{9,2} = 100 \cdot 0,678 - 150 \cdot 0,263 + 50 \cdot 0,069 + 120 \cdot 0,061 = 39,12.$$

Похибка складає $\frac{39,325 - 39,12}{39,325} \cdot 100 = 0,52 \%$.

Лінія впливу $N_{2,3}$. Перетин II-II (рисунок 6.25). Вантаж $F = 1$ на ділянці 1-2, $\Sigma M_9^{\text{пр}} = 0;$ $R_7 \cdot 36 - N_{2,3}^0 \cdot 5 = 0;$ $N_{2,3}^0 = 7,2 R_7.$ Вантаж $F = 1$ на ділянці 3-7, $\Sigma M_9^{\text{лів}} = 0;$ $R_1 \cdot 12 - N_{2,3}^0 \cdot 5 = 0;$ $N_{2,3}^0 = 2,4 R_1.$ Лінія впливу $N_{2,3}^0$ зображена на рисунку 6.33, и. Лінія впливу X_1 , всі ординати якої помножені на **1,2** (таблиця 6.1), показана на рисунку 6.33, к. Сумарна лінія впливу зображена на рисунку 6.33, л. Зусилля $N_{2,3}$ дорівнює, кН:

$$N_{2,3} = 100 \cdot 0,653 + 150 \cdot 0,634 - 50 \cdot 0,166 - 120 \cdot 0,147 = 134,46.$$

Похибка складає **0,49 %**.

Інформація, необхідна для розрахунку на ПЕОМ статично невизначної ферми на рухоме навантаження, включає загальні дані про ферму, дані про координати вузлів, величини жорсткості для кожного типу поперечного перерізу стержнів ферми.

Підготовка вхідних даних починається з зображення розрахункової схеми ферми і вибору системи координат. Вісь x направляється горизонтально, вісь y – вертикально. На вибір початку і додатного напрямку координат ніяких обмежень нема.

Вузли ферми нумеруються без пропуску, починаючи з номера один. Першими нумеруються вузли вантажного поясу, потім – решта вузлів ферми. Загальні дані про ферму включають кількість вузлів ферми, кількість стержнів, кількість типів поперечних перерізів і кількість вузлів вантажного поясу.

Дані про координати вузлів ферми записуються у вигляді масиву чисел – координат $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n$. Якщо довжина опорних стержнів не задана, то координати опорних вузлів призначаються такими, щоб довжина цих стержнів дорівнювала $1/20 \dots 1/25$ загальної довжини ферми.

Далі записуються величини жорсткості для кожного з типів поперечного перерізу стержнів ферми. Жорсткості поперечних перерізів опорних стержнів на декілька порядків перевищують жорсткості поперечного перерізу решти стержнів ферми. Оскільки внутрішні зусилля в статично невизначній фермі не залежать від конкретних величин жорсткостей, а тільки від їх відношень, можна замість жорсткостей поперечних перерізів записувати відношення цих жорсткостей до жорсткості поперечного перерізу якого-небудь стержня ферми.

До списку стержнів заносять всі стержні ферми, включаючи і опорні. Кожний стержень у списку позначається двома цифрами – номерами прилеглих вузлів, відокремлених одна від одної знаком «—». Після коду стержня через пропуск записується порядковий номер елемента з масиву жорсткостей, відповідного даному стержню. Розміщення стержнів в списку є довільним.

Підготовлені вхідні дані вводяться в ПЕОМ за допомогою текстового редактора з подальшим записом їх на диск.

7 ПРИКЛАДИ РІШЕННЯ ЗАДАЧ

7.1 Задача 3. Розрахунок плоских статично невизначних рам методом сил

Етапи розв'язання задачі:

- визначення ступеня статичної невизначності;
- вибір раціональної основної системи;
- визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь і перевірка правильності їх обчислення;
- розв'язання системи канонічних рівнянь і перевірка правильності її розв'язання;
- побудова епюри згинальних моментів у заданій статично невизначній рамі та виконання контролю її правильності;
- побудова епюр поперечних і поздовжніх сил у заданій статично невизначній рамі та перевірка їх правильності;
- підготовка початкової інформації для розрахунку рами на ПЕОМ;
- розрахунок рами на ПЕОМ;
- побудова за результатами розрахунку епюри згинальних моментів і порівняння її з епюрою, побудованою студентом самостійно.

Виконати розрахунок статично невизначної рами (рисунок 7.1).

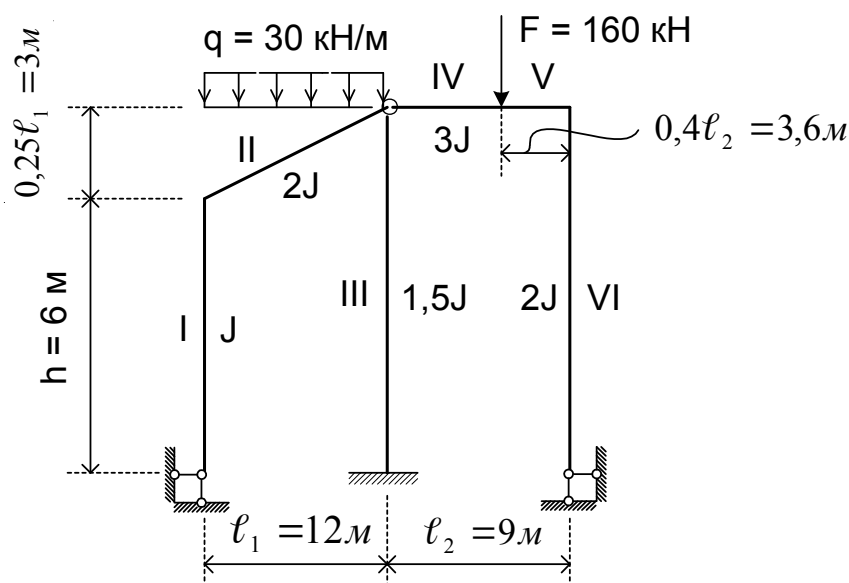


Рисунок 7.1 – Схема статично невизначної заданої рами

7.1.1 Визначення степеня статичної невизначеності

Ступінь статичної невизначеності обчислюємо, використовуючи два підходи.

Виходячи з поняття замкнутого контуру кількість зайвих в'язей дорівнює:

$$L = 3K - Ш = 3 \cdot 4 - 9 = 3.$$

Тут, крім двох контурів самої рами, враховуємо два контури, що утворюють шарнірно-нерухомі опори. У кожній шарнірно-нерухомій опорі нараховується по 4 простих шарніри (середній шарнір подвійний, оскільки з'єднує 3 диски – стержень рами та два опорні стержні). Ще один простий шарнір знаходиться в кінці II ділянки рами. Таким чином, всього шарнірів: $2 \cdot 4 + 1 = 9$.

За формулою Чебишева кількість зайвих в'язей визначається так:

$$L = C_0 + 2Ш - 3Д = 7 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 3.$$

Рама складається з двох дисків (I-II і III-IV). Ці диски з'єднуються між собою одним шарніром ($Ш = 1$). Зрештою, рама прикріплена до опорного диска за допомогою семи опорних в'язей – стержнів ($C_0 = 7$; крайні опори мають 4 в'язі, середня – 3).

7.1.2 Вибір основної системи

Основна система вибирається виходячи з таких міркувань:

- вона повинна бути геометрично незмінюваною;
- епюри згинальних моментів (одиничні та вантажні), побудовані в основній системі, повинні мати по можливості більше ділянок із нульовими ординатами;
- зусилля в такій системі повинні визначатися якнайпростіше;
- кількість обчислень для визначення коефіцієнтів повинна бути мінімальною;
- система канонічних рівнянь в ідеалі повинна розпадатися на незалежні одне від одного рівняння.

Покажемо три можливих варіанти основної системи для заданої рами (рисунок 7.1). У зв'язку з тим, що рама тричі статично невизначна, відкидаємо кожного разу три в'язі, замінюючи їх відповідними зусиллями, що виникають у цих в'язях у заданій системі.

У схемі, показаній на рисунку 7.2, а, відкинута горизонтальні опорні стержні та замінено поки що невідомими реактивними зусиллями в них X_1 і X_3 . Крім того, розміщено шарнір між середньою стійкою та правим ригелем, тобто відкинута в'язь, що чинить опір взаємному їх повороту (реактивний момент X_2).

У схемі, поданій на рисунку 7.2, б, відкинута защемлення середньої стійки, тобто три в'язі, які замінені їх реактивними зусиллями X_1 , X_2 і моментом X_3 . Таким чином, отримана тришарнірна рама.

У схемі, показаній на рисунку 7.2, в, відкинута вертикальна в'язь лівої опори та повністю права опора відповідно з реактивними зусиллями X_1 , X_2 , X_3 .

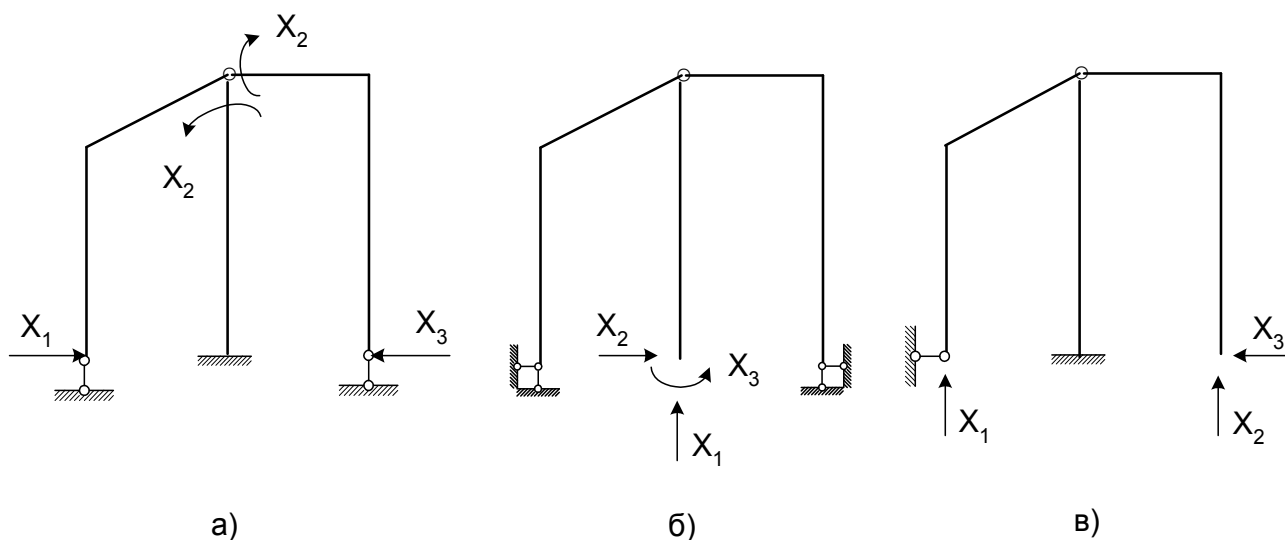


Рисунок 7.2 – Варіанти основної системи

Побудуємо для розглянутих варіантів основної системи одиничні та вантажні епюри (рисунки 7.3, 7.4, 7.5).

Аналіз епюр (рисунки 7.3, 7.4, 7.5) показує, що раціональною буде основна система, зображена на рисунку 7.2, а. Тут задовольняється більшість із перерахованих вище вимог.

Відповідно системи, показані на рисунках 7.2, б, в, виходячи з тих самих міркувань, не раціональні.

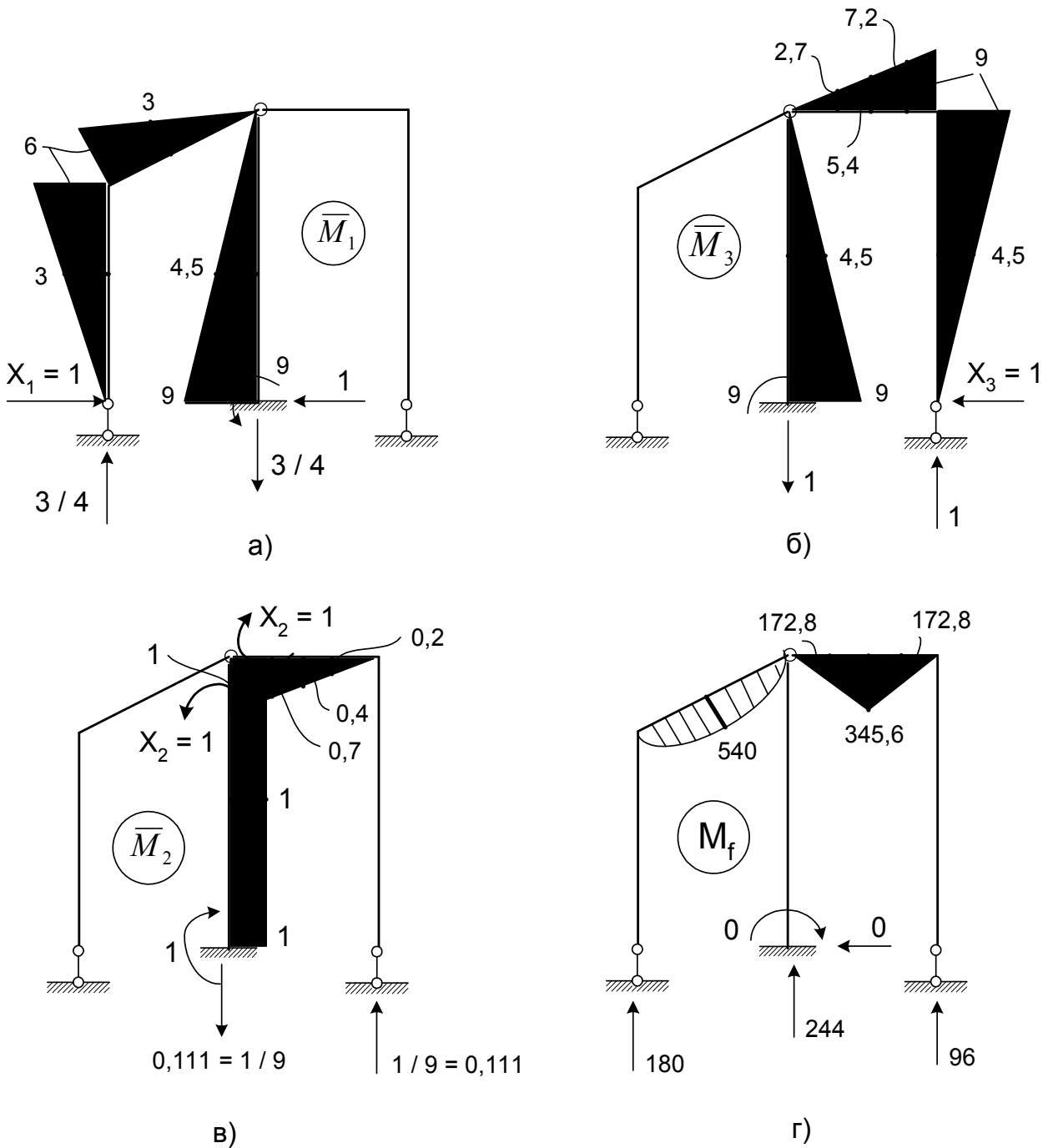


Рисунок 7.3 – Одиничні та вантажна епюри для варіанта основної системи (див. рисунок 7.2, а)

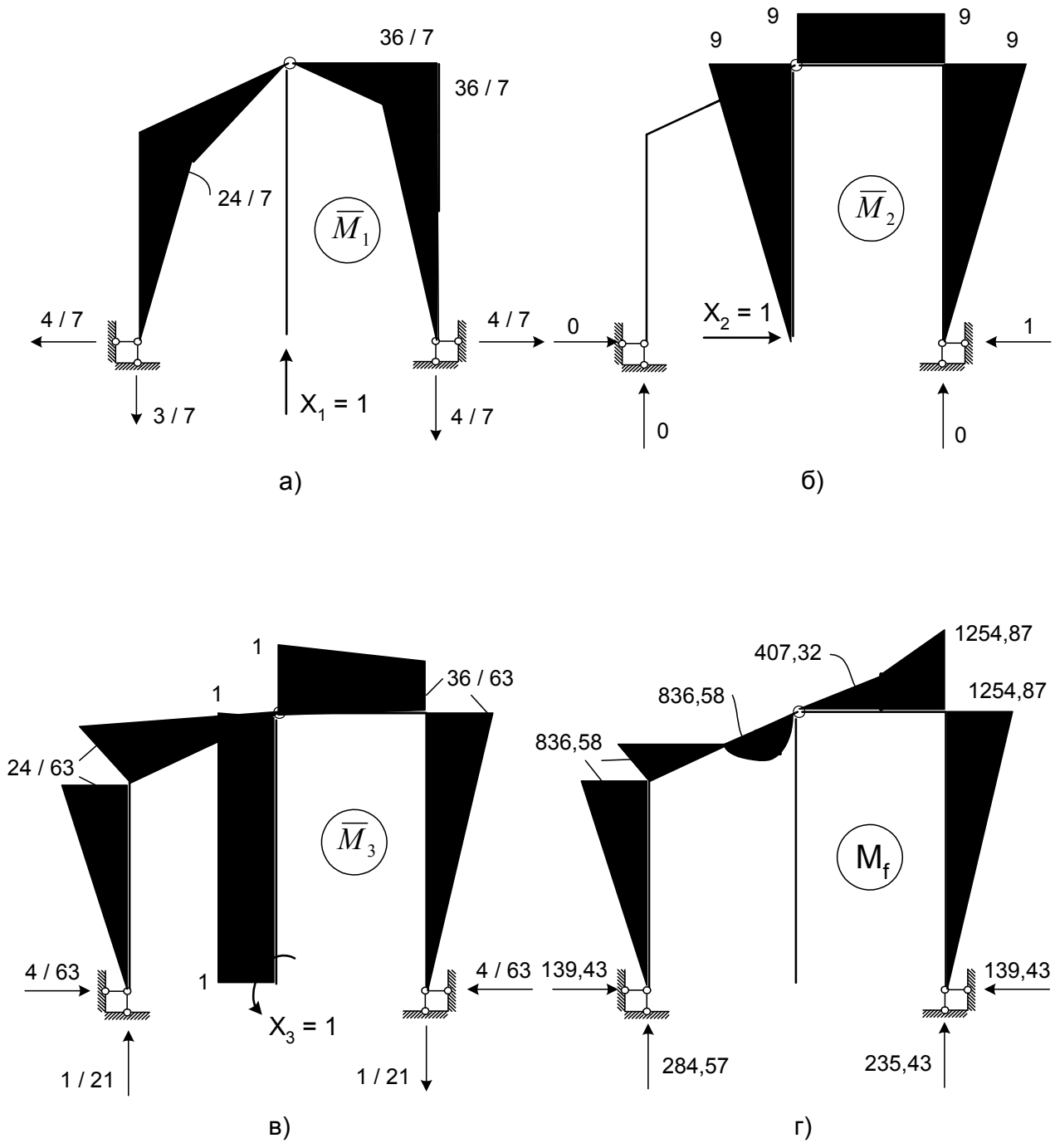


Рисунок 7.4 – Одиничні та вантажна епюри для варіанта основної системи, показаної на рисунку 7.2, б

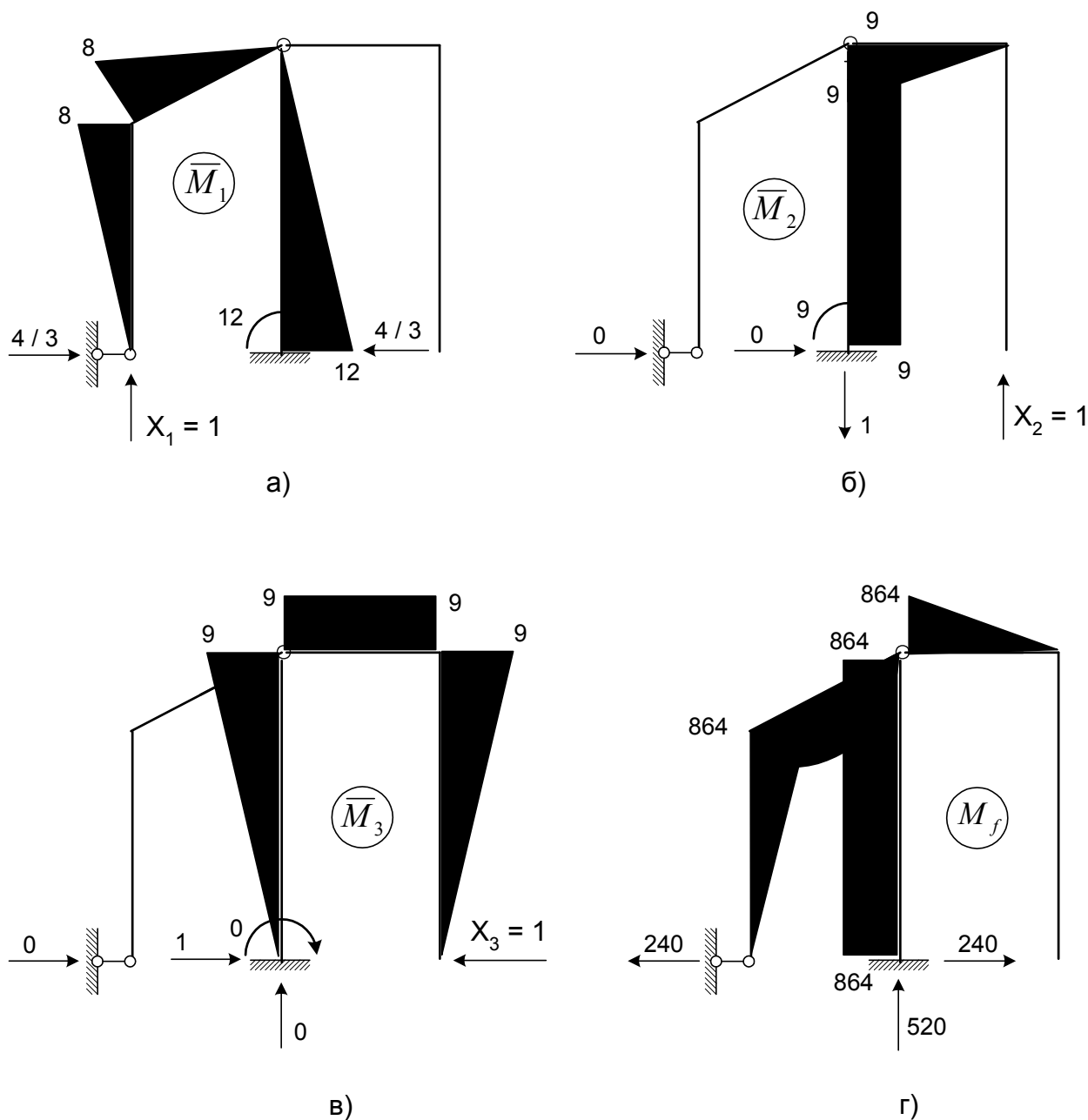


Рисунок 7.5 – Одиничні та вантажна епюри для варіанта основної системи, показаної на рисунку 7.2, в

7.1.3 Система канонічних рівнянь

Умови еквівалентності основної (рисунок 7.2, а) і заданої (рисунок 7.1) систем записуються у вигляді системи **канонічних рівнянь**. Кожне рівняння являє собою математичний запис того факту, що переміщення за напрямком відкинutoї в'язі, викликане невідомими реактивними зусиллями та зовнішнім навантаженням, дорівнює нулю:

$$\begin{aligned}
X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1f} &= 0; \\
X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2f} &= 0; \\
X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3f} &= 0.
\end{aligned}
\tag{7.1}$$

У матричній формі система (7.1) записується так:

$$AX = -H, \tag{7.2}$$

де

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} \Delta_{1f} \\ \Delta_{2f} \\ \Delta_{3f} \end{bmatrix}. \tag{7.3}$$

7.1.4 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь

Коефіцієнти та вільні члени системи рівнянь (7.1) або (7.2) являють собою переміщення, які визначаються методом Мора. Для обчислення інтегралів, що входять у формулу Мора, застосуємо правило Верещагіна:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \sqrt{153} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \right] = -\frac{308,22}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 \right] = -\frac{27}{EJ};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \right] = -\frac{162}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2^2}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 9 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{7}{EJ};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_3}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 \right] = \frac{22,5}{EJ};$$

$$\delta_{33} = \sum \int \frac{\bar{M}_3^2}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \right] = \frac{364,5}{EJ};$$

$$\Delta_{1f} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_f}{EJ} dx = - \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 144}{8} \cdot \sqrt{153} \cdot 3 \right] = - \frac{6679,43}{EJ};$$

$$\Delta_{2f} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_f}{EJ} dx = - \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 345,6 \cdot 3,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 345,6 \cdot 5,4 \left(\frac{2}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{241,92}{EJ};$$

$$\Delta_{3f} = \sum \int \frac{\bar{M}_3 M_f}{EJ} dx = - \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 345,6 \cdot 3,6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5,4 + \frac{1}{3} \cdot 9 \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 345,6 \cdot 5,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,4 \right] = - \frac{2488,32}{EJ}.$$

7.1.5 Перевірка правильності обчислення коефіцієнтів і вільних членів

Для виконання перевірки будемо сумарну одиничну епюру M_s (рисунок 7.6).

$$M_s = \bar{M}_1 + M_2 + M_3 \quad (7.4)$$

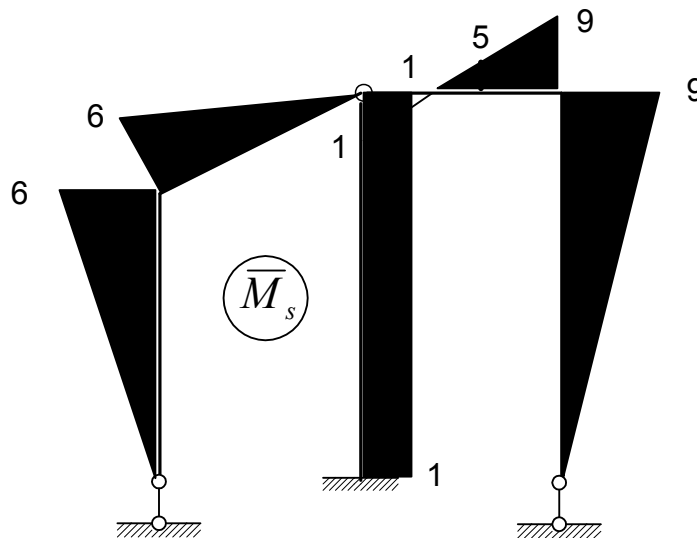


Рисунок 7.6 – Сумарна одинична епюра M_s .
Виконаємо універсальну перевірку:

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{M_s^2 dx}{EJ} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + 2\delta_{12} + 2\delta_{13} + 2\delta_{23}. \quad (7.5)$$

Обчислюємо ліву частину формули (7.5):

$$\sum \int \frac{M_s^2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{153} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 9 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 9 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \left(\frac{2}{3} \cdot 9 - \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \right] = - \frac{346,72}{EJ}.$$

Тепер обчислюємо праву частину формули (7.5):

$$\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + 2\delta_{12} + 2\delta_{13} + 2\delta_{23} = \frac{1}{EJ} (308,22 + 7 + 364,5 - 2 \cdot 27 - \\ - 2 \cdot 162 + 2 \cdot 22,5) = \frac{346,72}{EJ}.$$

Порівнюючи ліву та праву частини формули (7.5) бачимо, що рівність виконується. Тобто, коефіцієнти системи рівнянь (7.1) знайдено правильно. У випадку неспівпадання результатів для пошуку помилки рекомендується провести порядкові перевірки:

$$\delta_{1S} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_s dx}{EJ} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13}; \quad (7.6)$$

$$\delta_{2S} = \sum \int \frac{M_2 M_s dx}{EJ} = \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23}; \quad (7.7)$$

$$\delta_{3S} = \sum \int \frac{M_3 M_s dx}{EJ} = \delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33}. \quad (7.8)$$

Тепер перевіримо правильність обчислення вільних членів:

$$\Delta_{Sf} = \sum \int \frac{M_s M_f dx}{EJ} = \Delta_{1f} + \Delta_{2f} + \Delta_{3f}; \quad (7.9)$$

$$\sum \int \frac{M_s M_f dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 144}{8} \cdot \sqrt{153} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 345,6 \cdot 3,6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 9 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 345,6 \cdot 5,4 \cdot \left(- \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = - \frac{8925,83}{EJ}.$$

Обчислимо праву частину формули (7.9):

$$\Delta_{1f} + \Delta_{2f} + \Delta_{3f} = - \frac{1}{EJ} (6679,43 - 241,92 + 2488,32) = - \frac{8925,83}{EJ}.$$

Порівнюючи ліву та праву частини формули (7.9) бачимо, що результати співпадають. Тобто вільні члени системи канонічних рівнянь (7.9) знайдено правильно.

7.1.6 Розв'язання системи канонічних рівнянь

Для розв'язання системи лінійних рівнянь методу сил (7.1) можна застосовувати різні методи (метод “виключення” Гауса, схему Жордана, метод “квадратного кореня” та ін.). У зв'язку з тим, що матриця \mathbf{A} (7.3) коефіцієнтів цих рівнянь симетрична, то ефективним буде метод “квадратного кореня”. Відповідно до цього методу матриця коефіцієнтів \mathbf{A} перетворюється у дві діагональні матриці:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad (7.10)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \sqrt{\delta_{11}}; & \alpha_{12} &= \alpha_{21} = \frac{\delta_{12}}{\sqrt{\delta_{11}}}; & \alpha_{13} &= \alpha_{31} = \frac{\delta_{13}}{\sqrt{\delta_{11}}}; \\ \alpha_{22} &= \sqrt{\delta_{22} - \alpha_{12}^2}; & \alpha_{23} &= \alpha_{32} = \frac{\delta_{23} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{13}}{\alpha_{22}}; \\ \alpha_{33} &= \sqrt{\delta_{33} - \alpha_{13}^2 - \alpha_{23}^2}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Обчислимо коефіцієнти перетвореної матриці \mathbf{A} згідно з формулами (7.11):

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 17,556; & \alpha_{12} &= \alpha_{21} = -1,538; & \alpha_{13} &= \alpha_{31} = -9,228; \\ \alpha_{22} &= 2,153; & \alpha_{23} &= \alpha_{32} = 3,858; & \alpha_{33} &= 16,262. \end{aligned}$$

Тепер розв'яжемо допоміжну систему:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} y_1 &= -\Delta_{1f}; \\ \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 &= -\Delta_{2f}; \\ \alpha_{31} y_1 + \alpha_{32} y_2 + \alpha_{33} y_3 &= -\Delta_{3f}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Звідси отримуємо:

$$y_1 = 380,464; \quad y_2 = 159,421; \quad y_3 = 331,09.$$

Тепер знайдемо X_1 , X_2 , X_3 з такої системи рівнянь:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \quad (7.13)$$

У результаті розв'язання системи (7.13) отримуємо

$$X_3 = 20,36; \quad X_2 = 37,56 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad X_1 = 35,66 \text{ кН}.$$

7.1.7 Перевірка правильності розв'язання системи канонічних рівнянь

Якщо система рівнянь розв'язана правильно, то повинна виконуватись така умова:

$$X_1 \delta_{1S} + X_2 \delta_{2S} + X_3 \delta_{3S} + \Delta_{Sf} = 0. \quad (7.14)$$

Перевіримо цю умову:

$$35,66 (308,22 - 27 \cdot 162) + 37,56 (-27 + 7 + 22,5) + 20,36 (-162 + 22,5 + 364,5) + (-6679,43 + 241,92 - 2488,32) = 0,45.$$

Помилка складає $5,04 \cdot 10^{-3} \%$.

7.1.8 Побудова епюри M у заданій статично невизначній системі

Побудова розрахункової епюри виконується відповідно до формули

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3 + M_f. \quad (7.15)$$

“Виправлені” епюри $M_1 X_1$, $M_2 X_2$, $M_3 X_3$ і розрахункова епюра показані на рисунку 7.7; епюра M_f – на рисунку 7.3, г. Ординати епюр обчислюємо на границях і всередині ділянок.

7.1.9 Перевірка правильності побудови епюри М

Якщо розрахункові епюри моментів (рисунок 7.7, г) побудовано правильно, то повинна виконуватись така умова:

$$\sum \int \frac{M_s M dx}{EJ} = 0. \quad (7.16)$$

Умова (7.16) свідчить про те, що сума переміщень у заданій системі в напрямках відкинутих в'язей, що мали місце при утворенні основної системи, дорівнює нулю. Якщо в рівняння (7.16) підставити вирази для M_s (7.4) і M (7.15) і виконати прості перетворення, то отримаємо умову (7.14). Тобто перевірка виразу (7.14) свідчить про правильність розв'язання поставленої задачі взагалі, а не тільки системи рівнянь (7.3). У подальшому помилка може бути допущена при побудові розрахункової епюри моментів (7.15). Тому ще раз необхідно переконатися у виконанні цієї умови:

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M_s M}{EJ} dx &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 213,96 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{153} \cdot \frac{2}{3} \cdot 213,96 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 144}{8} \sqrt{153} \cdot 3 + \right. \\ &+ \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 9 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 37,56 - \frac{1}{2} \cdot 100,14 \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 183,24 \cdot 3,6 \left(\frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 5 \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 250,68 \cdot 3,6 \left(\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 9 \right) + \\ &+ \left. \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 250,68 \cdot 5,4 \left(-\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 37,56 \cdot 5,4 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 5 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 183,24 \right] = \\ &= 0,052. \end{aligned}$$

Помилка становить, як і раніше, $\approx 5 \cdot 10^{-3} \%$.

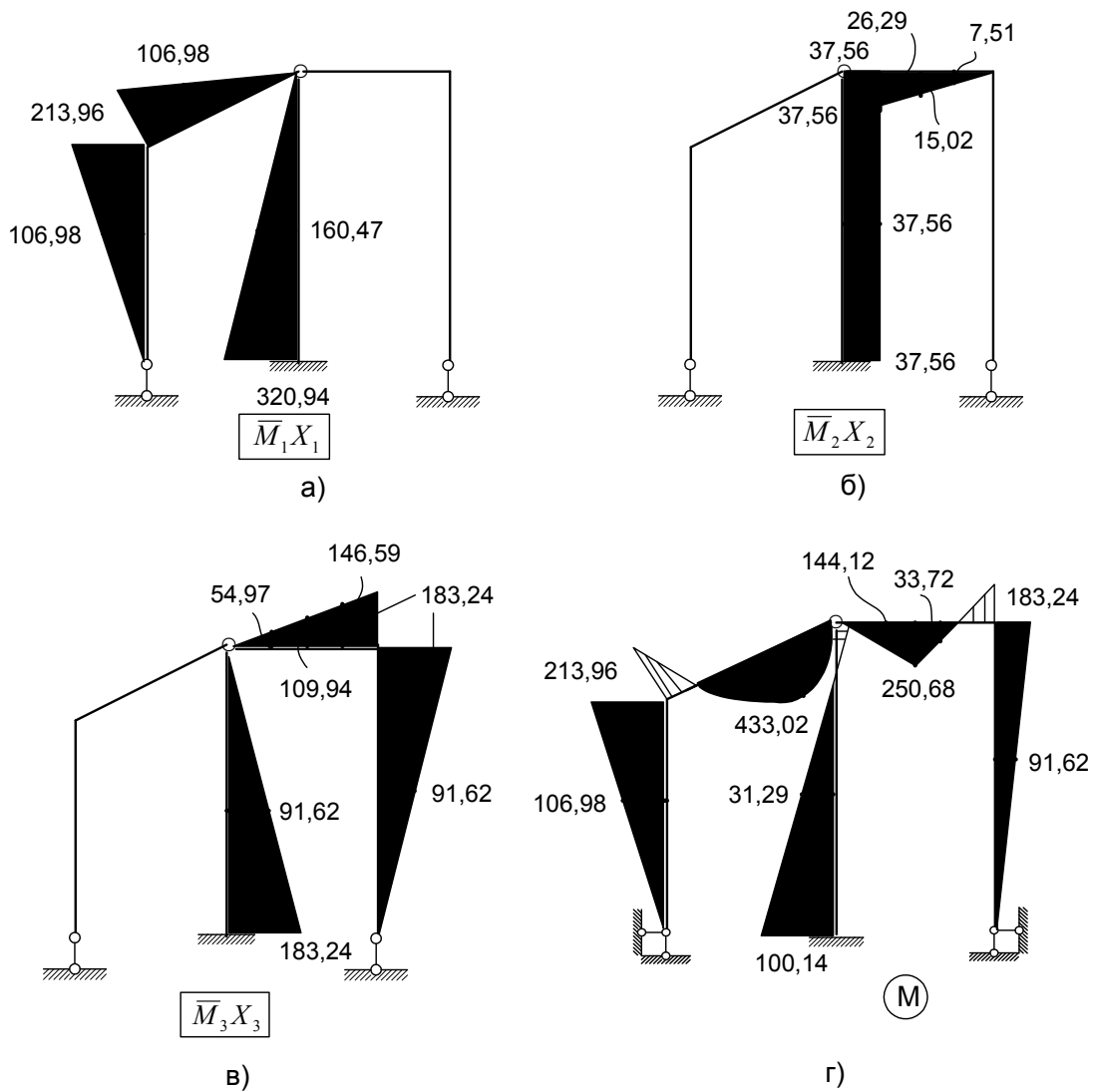


Рисунок 7.7 – “Виправлені” епюри (а, б, в) і розрахункова епюра моментів (г)

7.1.10 Побудова епюр Q і M

Розрахункову епюру поперечних сил будемо за епюрою моментів (рисунок 7.8), використовуючи диференціальні залежності

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad (7.17)$$

або

$$Q = Q^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{\ell_n}. \quad (7.18)$$

Кожний елемент рами довжиною ℓ_n (стійки, похилі та горизонтальні ригелі) розглядається як балка на двох шарнірних

опорах, завантажена кінцевими моментами та зовнішнім навантаженням (якщо зовнішнє навантаження на цій ділянці відсутнє, то $Q^0 = 0$). M_n і M_{n-1} – відповідно правий і лівий кінцеві моменти, що діють на даний елемент. Для вертикальних елементів (стійок) поняття “правий” і “лівий” залежать від спостерігача. У формулу (7.18) M_n і M_{n-1} підставляються зі своїми знаками.

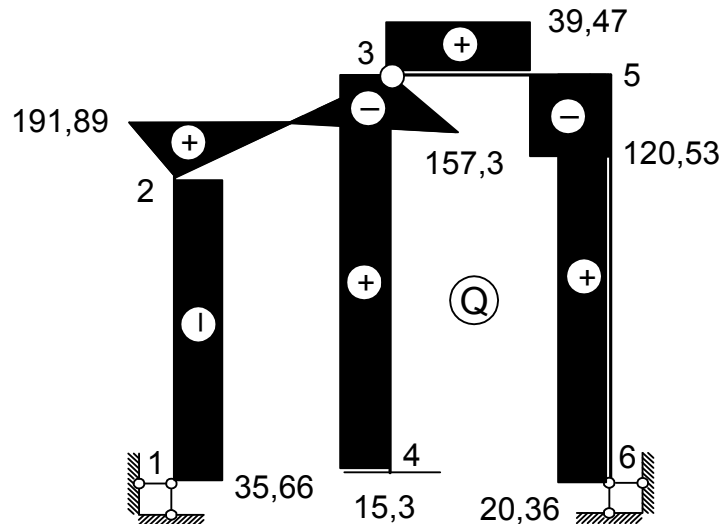


Рисунок 7.8 – Розрахункова епюра поперечних сил

Використовуючи епюру моментів (рисунок 7.7, г) і схему заданої рами (рисунок 7.1), будемо епюру Q .

Елемент 1-2: $Q_1 = Q_2 = \frac{-213,96 - 0}{6} = -35,66 \text{ кН.}$

Елемент 2-3 (рисунок 7.2).

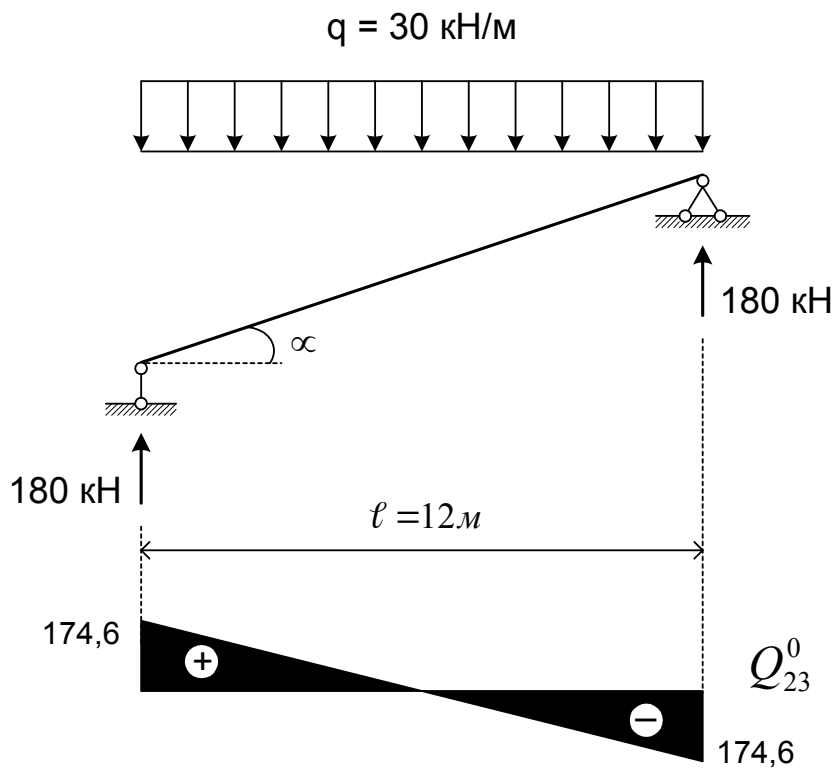


Рисунок 7.9 – Схема элемента 2-3

$$\cos\alpha = \frac{12}{153} = 0,970;$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{153} = 0,242;$$

$$Q_2 = 174,6 + \frac{0 + 213,96}{153} = 191,89 \text{ кН};$$

$$Q_3 = -174,6 + \frac{0 + 213,96}{153} = -157,3 \text{ кН}.$$

Элемент 3-4: $Q_3 = Q_4 = \frac{37,56 + 100,14}{9} = 15,3 \text{ кН}.$

Элемент 3-5 (рисунок 7.10).

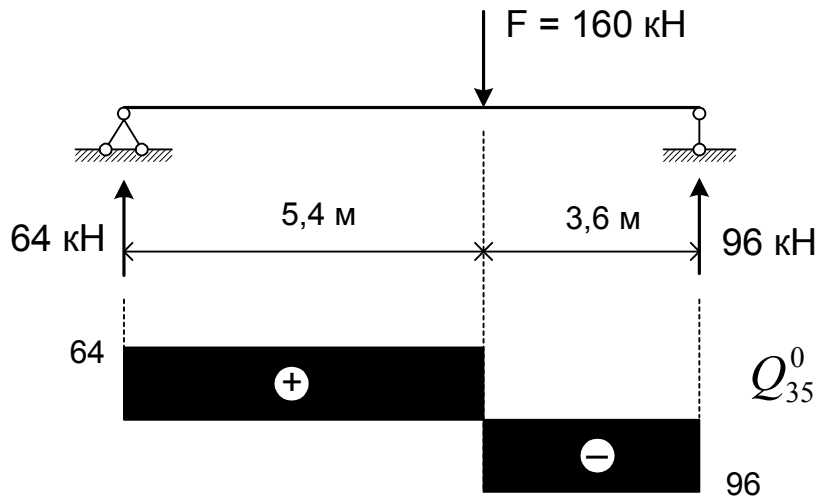


Рисунок 7.10 – Схема елемента 3-5

Елемент 5-6: $Q_5 = Q_6 = \frac{183,24 - 0}{0} = 20,36 \text{ кН.}$

Епюру поздовжніх сил побудуємо способом вирізання вузлів (рисунок 7.8).

$$\Sigma N_{y1} = 0; \quad N_{21} \cos\alpha + 191,89 + 35,66 \sin\alpha = 0.$$

Вузол 2

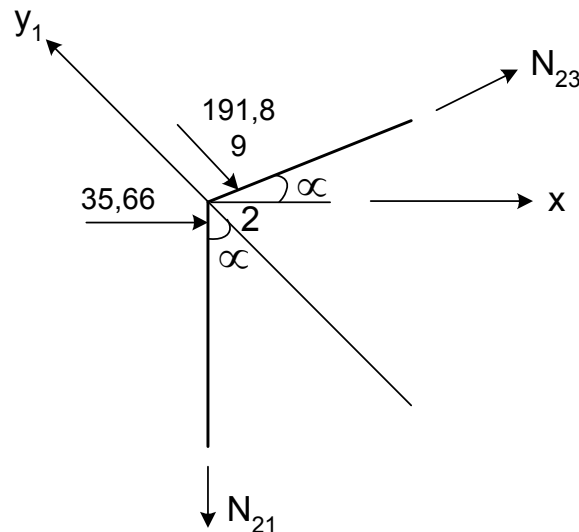


Рисунок 7.11 – Схема сил, що діють на вузол 2

$$N_{21} = \frac{-191,89 - 35,66 \cdot 0,242}{0,97} = -206,72 \text{ кН;}$$

$$\Sigma N_x = 0;$$

$$N_{23} \cdot \cos\alpha + 35,66 + 191,89 \cdot \sin\alpha = 0;$$

$$N_{23} = \frac{-35,66 - 191,89 \cdot 0,242}{0,97} = -84,64 \text{ кН.}$$

Вузол 5 (рисунок 7.12)

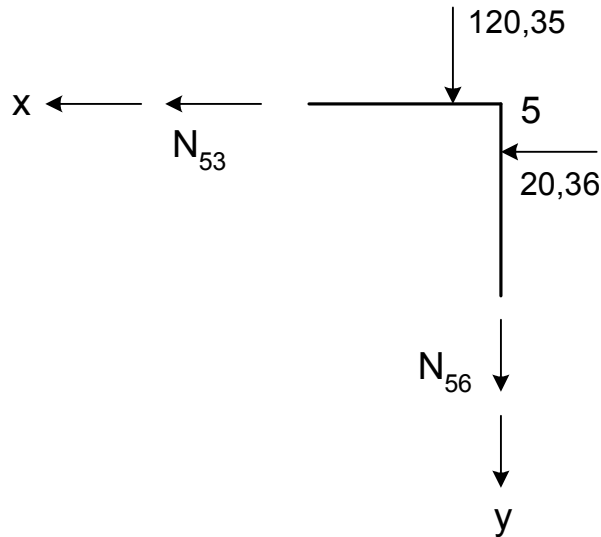


Рисунок 7.12 – Схема сил, що діють на вузол 5

$$\Sigma N_x = 0;$$

$$N_{53} + 20,36 = 0;$$

$$N_{53} = -20,36 \text{ кН.}$$

$$\Sigma N_y = 0;$$

$$120,53 + N_{56} = 0;$$

$$N_{56} = -120,53 \text{ кН.}$$

Вузол 3 (рисунок 7.13)

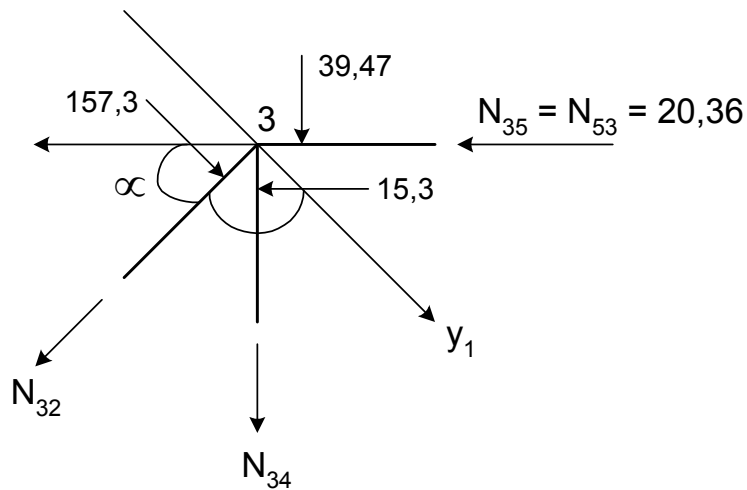


Рисунок 7.13 – Схема сил, що діють на вузол 3

$$\Sigma N_{y1} = 0;$$

$$N_{34} \cdot \cos\alpha + 157,3 + 39,47 \cos\alpha - 15,3 \sin\alpha - 20,36 \sin\alpha = 0;$$

$$N_{34} = \frac{-157,3 - 39,47 \cdot 0,97 + 15,3 \cdot 0,242}{0,97} + \frac{20,36 \cdot 0,242}{0,97} = -192,74 \text{ кН.}$$

$$\Sigma N_x = 0;$$

$$N_{32} \cos\alpha + 20,36 + 15,3 - 157,3 \sin\alpha = 0;$$

$$N_{32} = \frac{-20,36 - 15,3 + 157,3 \cdot 0,242}{0,97} = 2,48 \text{ кН.}$$

Розрахункова епюра поздовжніх сил показана на рисунку 7.14.

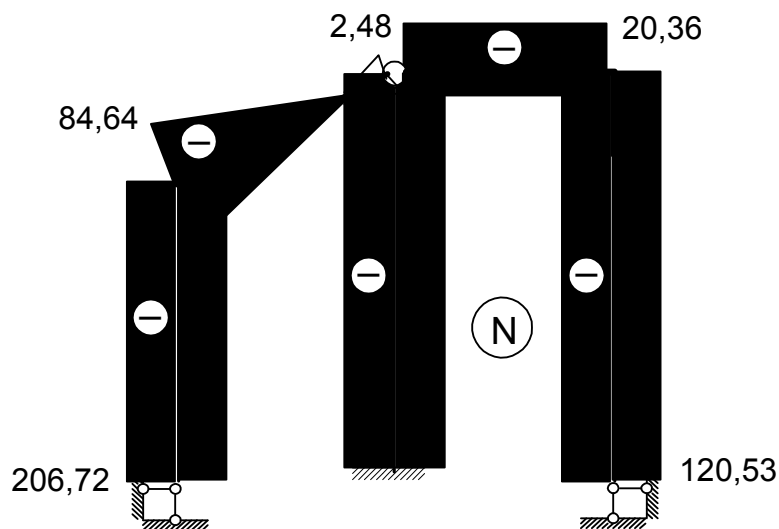


Рисунок 7.14 – Розрахункова епюра поздовжніх сил
7.1.11 Перевірка правильності побудови епюр Q і N

Відсікаємо раму від опорних закріплень і розглядаємо її рівновагу (рисунок 7.15) під дією зовнішнього навантаження та опорних реакцій (величини та напрямки опорних реакцій визначаються з епюр Q (рисунок 7.8) і N (рисунок 7.14)).

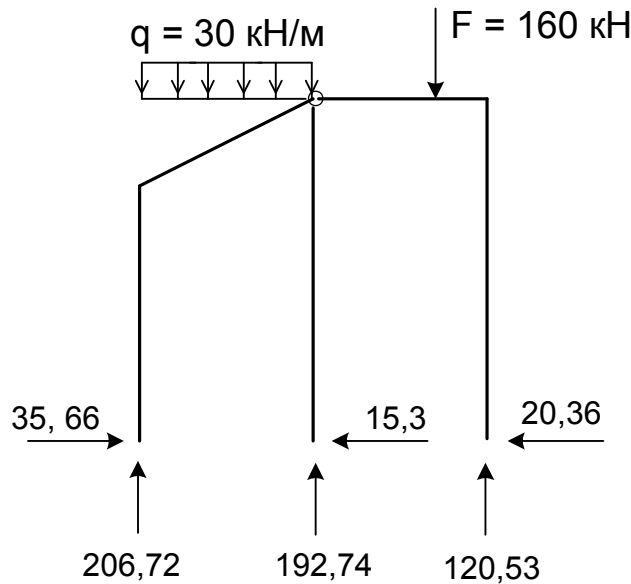


Рисунок 7.15 – Перевірка умови рівноваги рами

Складаємо умови рівноваги:

$$\Sigma X = 0: \quad 35,66 - 15,3 - 20,36 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0: \quad 30 \cdot 12 + 160 - 206,72 - 192,74 - 120,53 = -0,01 \approx 0.$$

Список літератури

- 1 Амензаде Ю.А. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1971. – 287 с.
- 2 Галеркин Б.Г. Упругие тонкие плиты. – М.: Госстройиздат, 1934. – 370 с.
- 3 Дарков А.В., Кузнецов Н.Н. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1962. – 743 с.
- 4 Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
- 5 Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
- 6 Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Ин. лит., 1953. – 452 с.
- 7 Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ / А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников; Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1976. – Ч. I, II.
- 8 Рабинович И.М. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Госстройиздат, 1960. – 519 с.
- 9 Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991. – 439 с.
- 10 Справочник по теории упругости / Ред. П.М. Варвак, А.Ф. Рябов. – К.: Будівельник, 1971. – 418 с.
- 11 Строительная механика: Руководство к практическим занятиям / Под ред. Ю.И. Бутенко. – К.: Вища школа, 1989. – 367 с.
- 12 Строительная механика стержневых систем и оболочек / Под ред. Ю.И. Бутенко. – К.: Вища школа, 1980. – 488 с.
- 13 Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1963. – 635 с.
- 14 Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1974. – 560 с.
- 15 Чихладзе Е.Д., Вереви́чева М.А. Розрахунок пластин з використанням ПЕОМ: Навч. посібник. – Харків: ХарДАЗТ, 2001. – 103 с.
- 16 Чихладзе Э.Д. Строительная механика. – Харьков: УкрГАЖТ, 2002. – 300 с.