

**СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра строительной механики и гидравлики**

**М.А. Веревичева**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

*Конспект лекций*

## Харьков - 2014

Веревичева М.А. Сопротивление материалов: Конспект лекций. – Харьков: УкрГАЖТ, 2014. – 222 с.

Конспект лекций включает следующие темы: простые деформации (растяжение-сжатие, плоский изгиб, сдвиг и кручение стержня круглого поперечного сечения); геометрические характеристики плоских сечений; анализ сложного напряженного состояния; теории прочности; устойчивость сжатых стержней; динамическое действие нагрузки. Теоретический материал иллюстрируется решением прикладных задач.

В приложениях содержатся сведения о механических свойствах материалов и другие справочные данные, необходимые для расчетов.

Конспект лекций предназначен для самостоятельной работы студентов направления 6.070105 «Подвижной состав железных дорог» дневной и заочной форм обучения.

Ил. 157, табл. 2, библиогр.: 13 назв.

Конспект лекций рассмотрен и рекомендован к печати на заседании кафедры строительной механика и гидравлики 11 марта 2014 г., протокол № 5.

Рецензент

доц. Г.Л. Ватуля

М.А. Веревичева

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Конспект лекций*

Ответственный за выпуск Веревичева М.А.

Редактор Ибрагимова Н.В.

---

Підписано до друку 22.04.14 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 10,0. Тираж 30. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,

61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

# СОДЕРЖАНИЕ

## **1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ..... 8**

1.1	Гипотезы сопротивления материалов.....	9
1.2	Расчетная схема .....	12
1.3	Виды элементов .....	12
1.4	Виды опор .....	13
1.5	Классификация нагрузок .....	15
1.6	Внутренние усилия. Метод сечений .....	17
1.7	Напряжения .....	20
1.7.1	Составляющие напряжений. Тензор напряжений .....	22
1.7.2	Закон парности для касательных напряжений .....	23
1.7.3	Выражение внутренних усилий через напряжения .....	23
1.8	Деформации .....	24
1.8.1	Линейные деформации.....	24
1.8.2	Угловые деформации .....	25
1.8.3	Тензор деформаций .....	27

## **2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ДЕФОРМАЦИЙ ..... 28**

2.1	Эпюры внутренних усилий .....	28
2.2	Внутренние усилия при растяжении и сжатии .....	28
2.3	Внутренние усилия при кручении .....	30
2.4	Внутренние усилия при изгибе стержней с прямой осью .....	34
2.5	Внутренние усилия в рамах .....	39
2.6	Внутренние силы в криволинейных стержнях.....	46

## **3 РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ..... 54**

3.1	Напряжения в сечениях, перпендикулярных к оси бруса .....	54
3.2	Напряжения в сечениях, наклонных к оси бруса .....	49
3.3	Деформации при растяжении и сжатии.....	57
3.3.1	Продольная и поперечная деформации.....	57
3.3.2	Коэффициент Пуассона.....	58
3.3.3	Закон Гука при растяжении-сжатии (связь между деформацией и напряжением).....	59
3.3.4	Растяжение бруса сосредоточенной силой .....	59
3.3.5	Растяжение ступенчатого бруса.....	60
3.3.6	Растяжение бруса под действием собственного веса .....	61
3.3.7	Брус равного сопротивления.....	62

3.4 Испытания материалов на растяжение и сжатие	
Механические характеристики материалов .....	63
3.4.1 Диаграммы растяжения	
пластичных и хрупких материалов.....	63
3.4.2 Диаграммы сжатия различных материалов.....	69
3.5 Расчеты на прочность .....	72
3.5.1 Метод допускаемых напряжений .....	73
3.5.2 Условие прочности при растяжении-сжатии	
Три основные задачи .....	74
3.6 Потенциальная энергия деформации и работа,	
затрачиваемая на растяжение стержня .....	75
3.7 Статически неопределимые системы,	
работающие на растяжение-сжатие .....	77
3.7.1 Расчет на силовые воздействия.....	77
3.7.2 Расчет на температурные воздействия .....	79
3.7.3 Расчет на неточность изготовления.....	80
3.8 План решения задач сопротивления материалов .....	82
3.9 Пример решения задачи .....	82

#### **4 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ..... 85**

4.1 Площадь поперечного сечения .....	85
4.2 Статический момент площади .....	87
4.3 Положение центра тяжести сечения .....	79
4.4 Моменты инерции сечения .....	90
4.4.1 Зависимость между моментами инерции при	
параллельном переносе центральных осей.....	91
4.4.2 Изменение осевых и центробежного моментов инерции	
при повороте координатных осей.....	93
4.4.3 Свойства осевых моментов .....	94
4.5 Главные оси и главные моменты инерции .....	95
4.6 Радиусы инерции сечения .....	99
4.7 Моменты инерции простейших фигур .....	100
4.7.1 Момент инерции прямоугольника.....	100
4.7.2 Моменты инерции треугольника .....	101
4.7.3 Моменты инерции круга .....	102
4.8 Моменты инерции сложных фигур.....	103
4.9 Моменты сопротивления сечения.....	99

## **5 ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ..... 110**

5.1 Виды напряженного состояния .....	111
5.2 Линейное напряженное состояние .....	111
5.2.1 Положение главных площадок .....	111
5.2.2 Значения главных напряжений .....	112
5.2.3 Выражение напряжений по произвольным площадкам через главные напряжения .....	112
5.2.4 Максимальные касательные напряжения .....	112
5.3 Плоское напряженное состояние .....	112
5.3.1 Положение главных площадок .....	114
5.3.2 Значения главных напряжений .....	114
5.3.3 Выражение напряжений по произвольным площадкам через главные напряжения .....	115
5.3.4 Максимальные касательные напряжения .....	115
5.4 Объемное напряженное состояние .....	116
5.4.1 Положение главных площадок .....	118
5.4.2 Выражение напряжений по произвольным площадкам через главные напряжения .....	118
5.4.3 Максимальные касательные напряжения .....	118
5.4.4 Обобщенный закон Гука .....	119
5.4.5 Объемная деформация .....	120
5.4.6 Потенциальная энергия деформации при объемном напряженном состоянии .....	121

## **6 ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ..... 123**

6.1 Теория наибольших нормальных напряжений .....	123
6.2 Теория наибольших относительных удлинений .....	124
6.3 Теория максимальных касательных напряжений .....	125
6.4 Энергетическая теория прочности .....	125

## **7 ПЛОСКИЙ ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ ..... 128**

7.1 Чистый изгиб.....	128
7.1.1 Деформации при чистом изгибе .....	129
7.1.2 Напряжения при чистом изгибе .....	130
7.1.3 Условие прочности .....	132
7.1.4 Рациональная форма сечений .....	132
7.2 Поперечный изгиб .....	133
7.2.1 Касательные напряжения при поперечном изгибе (формула Журавского) .....	134
7.2.2 Касательные напряжения в прямоугольном сечении .....	135

7.2.3 Касательные напряжения для двутаврового сечения .....	136
7.3 Вид напряженного состояния и теории прочности.....	137
7.4 Порядок подбора сечения и проверки прочности при изгибе .....	138
7.5 Изогнутая ось балки .....	141
7.5.1 Дифференциальное уравнение изогнутой оси .....	142
7.5.2 Метод непосредственного интегрирования .....	144
7.5.3 Метод начальных параметров.....	145
<b>8 СДВИГ.....</b>	<b>152</b>
8.1 Касательные напряжения при сдвиге .....	152
8.2 Чистый сдвиг.....	153
8.2.1 Деформации при чистом сдвиге .....	153
8.2.2 Закон Гука при чистом сдвиге. Связь между $G$ и $E$ .....	154
8.2.3 Проверка прочности при сдвиге .....	155
8.2.4 Расчеты соединений, работающих на сдвиг .....	155
<b>9 КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ С КРУГЛЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ.....</b>	<b>162</b>
9.1 Вычисление моментов, передаваемых на вал .....	163
9.2 Напряжения и деформации в поперечном сечении .....	164
9.2.1 Деформации .....	164
9.2.2 Напряжения.....	166
9.3 Условие прочности .....	167
9.4 Анализ напряженного состояния и разрушения при кручении.....	168
9.5 Определение углов закручивания.....	169
9.6 Условие жесткости .....	169
9.7 Решение задач на расчет вала .....	170
9.8 Напряжения и деформации в винтовых цилиндрических пружинах.....	173
9.8.1 Напряжения.....	173
9.8.2 Деформации .....	175
9.8.3 Потенциальная энергия пружины.....	176
9.8.4 Практические выводы .....	176
9.8.5 Задачи на расчет цилиндрической пружины .....	177
<b>10 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.....</b>	<b>180</b>
10.1 Понятие об устойчивости .....	180
10.2 Формы равновесия .....	180

10.3 Продольный изгиб. Критическая сила.....	181
10.4 Формула Эйлера определения критической силы для шарнирно закрепленного стержня.....	182
10.5 Формула Эйлера при различных условиях закрепления концов стержня.....	184
10.6 Пределы применимости формулы Эйлера. Формула Ясинского .....	185
10.7 Классификация стержней .....	186
10.8 Условие устойчивости .....	187
10.9 Решение задач на устойчивость .....	188
<b>11 ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗКИ.....</b>	<b>191</b>
11.1 Упругие колебания .....	191
11.1.1 Свободные и вынужденные колебания .....	192
11.1.2 Степень свободы динамической системы .....	192
11.1.3 Свободные колебания системы с одной степенью свободы .....	192
11.1.4 Вынужденные периодические колебания системы с одной степенью свободы .....	199
11.2 Понятие о критической частоте вращения .....	202
11.3 Расчет равномерно вращающегося кольца (маховика).....	203
11.4 Равноускоренное движение (подъем груза) .....	205
11.5 Ударное действие нагрузки .....	207
11.6 Прочность материалов при повторно-переменных напряжениях.....	208
11.6.1 Понятие об усталости материалов .....	208
11.6.2 Характеристики циклов напряжений .....	209
11.6.3 Опытное определение предела выносливости .....	211
11.6.4 Расчет на выносливость .....	212
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>215</b>
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Механические характеристики материалов.....	216
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Основные формулы для расчета простых деформаций .....	203
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Сортамент прокатной стали .....	205
ПРИЛОЖЕНИЕ Г. Геометрические характеристики некоторых сечений	218
ПРИЛОЖЕНИЕ Д. Характеристики материалов для расчетов на устойчивость .....	220
ПРИЛОЖЕНИЕ Е. Справочные сведения .....	222



# 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Создавая различные машины и сооружения, конструктор заинтересован, прежде всего, в их безотказной работе. Причинами отказов могут быть разрушение конструкций или их элементов, а также их недопустимая деформация. Проблемами расчета конструкций машин и сооружений занимается строительная механика. При этом используются основные понятия и принципы расчетов, которые вводятся в курсе сопротивления материалов на примерах расчета отдельных элементов и простейших систем.

Таким образом, *сопротивление материалов* – это наука, изучающая инженерные методы расчета элементов на прочность, жесткость и устойчивость.

*Прочность* – это способность элемента или конструкции сопротивляться внешним воздействиям, не разрушаясь. Например, в опорной колонне под действием чрезмерной нагрузки могут возникнуть трещины и последующее обрушение.

*Жесткость* – это способность элемента или конструкции сопротивляться внешним воздействиям без значительного изменения размеров. Изменения размеров (деформации) ограничиваются техническими требованиями к элементу или конструкции. Например, прогиб станины токарного станка в одну десятую миллиметра под действием силы, действующей на резец, приводит к неточной обработке детали.

*Устойчивость* – это способность конструкции и ее элементов сохранять заданную форму равновесия. Так, прямолинейный элемент фермы моста или поршень насоса могут под действием чрезмерной сжимающей силы принять изогнутую форму, что исключит возможность выполнения их функций.

Сопротивление материалов является как теоретической, так и в значительной мере экспериментальной наукой. Экспериментально определяются механические свойства материалов. На основании опытов формулируются некоторые законы, описывающие соотношения между механическими величинами (нагрузками, перемещениями и т. д.). Эти законы

могут быть чисто эмпирическими, а могут вытекать из физических соображений. Поэтому сопротивление материалов тесно связано с физикой твердого тела, теоретической механикой (в которых тело считается недеформируемым) и с теорией упругости (в которой рассматриваются произвольно большие деформации и получаются более общие результаты).

Вопрос применения результатов той или иной науки – это вопрос тех ограничений реальной действительности, которые исследователь может позволить. Поэтому прежде чем приступить к изучению науки, нужно сформулировать эти ограничения (гипотезы).

### 1.1 Гипотезы сопротивления материалов

- 1 Материал, из которого изготовлен элемент, является сплошным (т. е. заполняет форму элемента без пустот). При этом не учитывается конкретная структура материала (зернистая, кристаллическая и т. д.). Это допущение позволяет использовать математический аппарат бесконечно малых (дифференцирование, интегрирование).
- 2 Материал считается однородным (т. е. его механические свойства одинаковы во всех точках).
- 3 Материал считается изотропным (т. е. его механические свойства одинаковы в любом направлении). Из этого правила есть исключения, например древесина, свойства которой различны вдоль и поперек волокон, или армированные материалы.
- 4 Материал является идеально упругим, т. е. размеры и форма элемента полностью восстанавливаются после того как устранены внешние воздействия.
- 5 Деформации малы по сравнению с размерами элемента. Это дает возможность пренебрегать изменениями в размещении сил относительно элемента при деформации и составлять уравнения равновесия, как для недеформированного элемента.

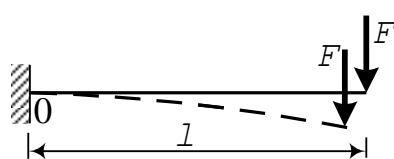


Рисунок 1.1

Так, если деформация показанной на рисунке 1.1 балки мала, то при записи уравнения равновесия можно пренебречь изменением плеча силы  $F$

относительно точки 0 и считать его равным  $l$ .

- 6 Гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли). Плоские сечения при деформации элемента остаются плоскими. Случаи, когда эта гипотеза не выполняется, оговариваются отдельно.
- 7 Принцип Сен-Венана. Способ приложения нагрузки не влияет на характер распределения деформаций и напряжений на некотором расстоянии от нагруженного сечения (это расстояние примерно равно характерному размеру сечения).

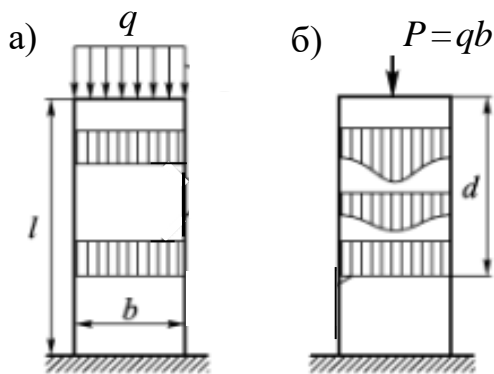


Рисунок 1.2

Например, на рисунке 1.2 показан стержень, нагруженный распределенной нагрузкой  $q$  (рисунок 1.2, а) и ее равнодействующей, приложенной в точке (рисунок 1.2, б). Распределение деформаций по мере удаления от нагруженного сечения становится одинаковым.

Если выполняются гипотезы 1 – 4 относительно свойств материала элемента и деформации малы (гипотеза 5), то имеет место линейная зависимость между деформацией элемента и приложенной нагрузкой, т.е. выполняется закон Гука (элемент является *линейно упругим*). Для таких элементов имеет место *принцип независимости действия сил*: результат действия группы сил равен сумме (алгебраической или геометрической) результатов, полученных от действия каждой силы в отдельности.

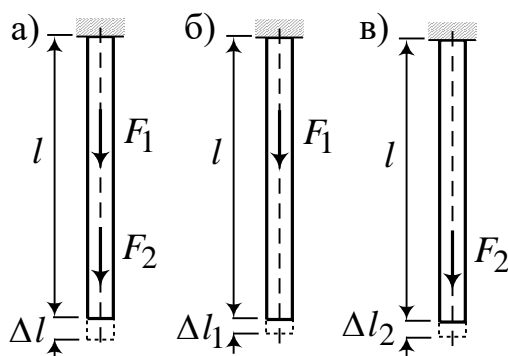


Рисунок 1.3

Например, удлинение стержня на рисунке 1.3, а от одновременного действия сил  $F_1$  и  $F_2$  равно сумме его удлинений от раздельного действия этих сил (рисунок 1.3, б, в):  $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$ . Кроме того, удлинение  $\Delta l_k$  от силы  $kF$  равно произведению

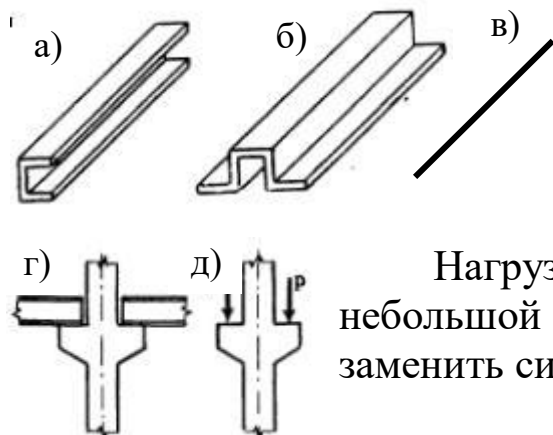
числа  $k$  на удлинение  $\Delta l$  от силы  $F$ :  
$$\Delta l_k = k \Delta l.$$

Линейная упругость всех элементов конструкции и малость деформаций достаточны для того, чтобы принцип независимости действия сил выполнялся для всей конструкции в целом.

## 1.2 Расчетная схема

Расчет любой конструкции начинается с построения ее расчетной схемы. При этом вводятся различные схематизации и упрощения нагрузок, условий опирания, конструктивных элементов. Эти упрощения должны быть такими, чтобы схема отражала все существенное для работы элемента или конструкции и не содержала второстепенных факторов. Таким образом, расчетную схему можно определить так.

**Расчетной схемой** называется условное идеализированное изображение элемента или конструкции, отображающее их основные свойства и используемое при расчетах.



Например, стержни с разным сечением (рисунок 1.4, а, б) в ряде случаев можно при расчетах заменить их осью, то есть отрезком прямой (рисунок 1.4, в).

Нагрузку, действующую по относительно небольшой площади (рисунок 1.4, г), можно заменить силой в точке (рисунок 1.4, д).

Рисунок 1.4

Для того чтобы составить расчетную схему конструкции, нужно знать, какие для этого можно использовать конструктивные элементы и виды нагрузок.

## 1.3 Виды элементов

1 **Стержень** – это элемент, длина которого намного больше размеров поперечного сечения (рисунок 1.5). Ось стержня – это линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений.

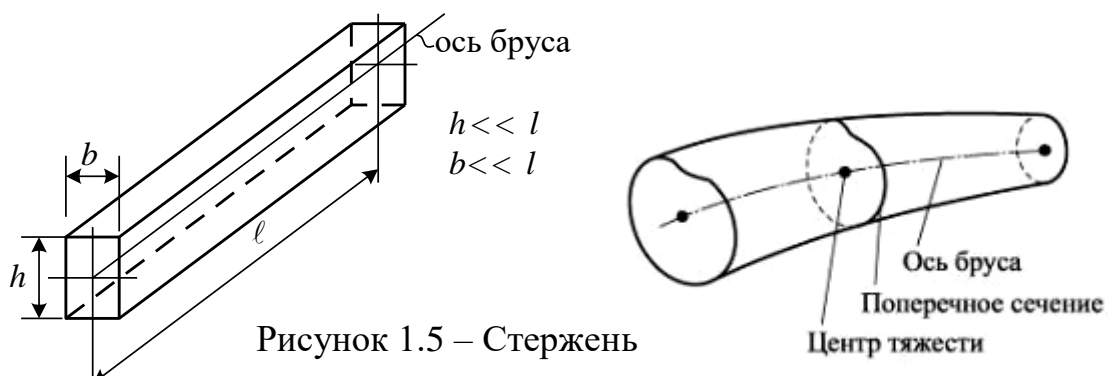
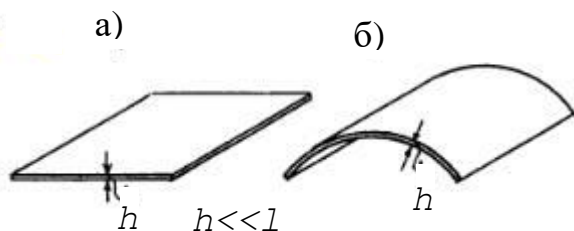


Рисунок 1.5 – Стержень

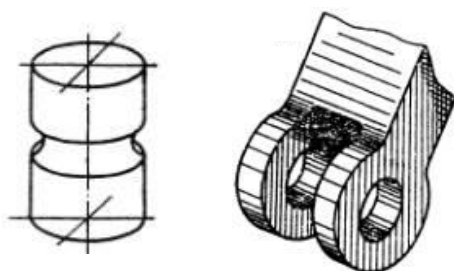
2 **Пластина (оболочка)** – это элемент, толщина которого намного меньше его размеров в плане (рисунок 1.6, а, б).



В конструкциях пластины встречаются в виде плит перекрытий и фундаментов; оболочки – в виде обшивок кораблей и вагонов, стенок резервуаров и т. д.

Рисунок 1.6 – Пластина (а) та оболонка (б)

3 **Тело** – это элемент, размеры которого соизмеримы (рисунок 1.7).



К таким элементам можно отнести блоки фундаментов, станины машин, головки болтов и т. п.

Рисунок 1.7 – Тело

## 1.4 Виды опор

Чаще всего на практике применяют следующие типы опор.

**Шарнирно-подвижная опора** не допускает перемещение по направлению опорной связи. На рисунке 1.8, а, б показаны схема и общий вид шарнирно-подвижной опоры. Приведенная опора допускает смещение опорного сечения по горизонтали и поворот его в вертикальной плоскости относительно оси цилиндрического шарнира А и не дает возможности перемещения по вертикали. На такой опоре возникает одна реакция, направленная вдоль опорной связи (рисунок 1.8, а). В общем случае направление опорной связи может быть произвольным (рисунок 1.8, в).

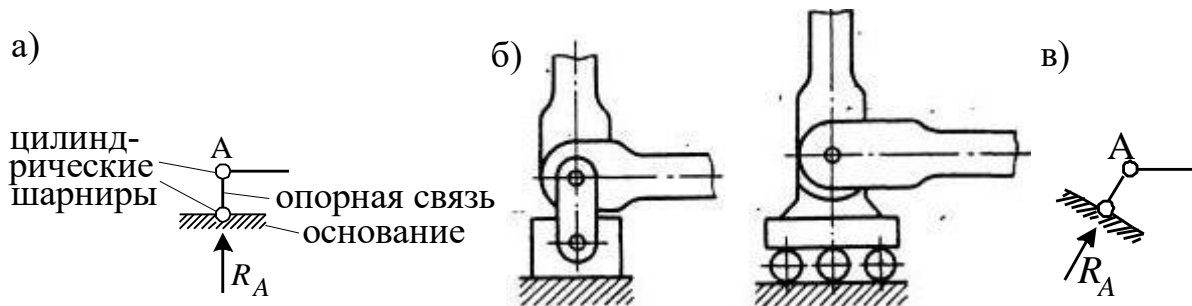


Рисунок 1.8 – Шарнирно-подвижная опора

**Шарнирно-неподвижная опора** не допускает смещений опорного сечения ни в продольном, ни в поперечном направлениях, но допускает поворот этого сечения относительно шарнира. Следовательно, шарнирно-неподвижная опора – опора с двумя связями. На такой опоре возникают две опорные реакции по направлению опорных связей (рисунок 1.9, а). Их удобно раскладывать на вертикальную и горизонтальную составляющие  $R$  и  $H$  (рисунок 1.9, б). На рисунке 1.9, в приведены общий вид и пример шарнирно-неподвижной опоры металлической колонны.

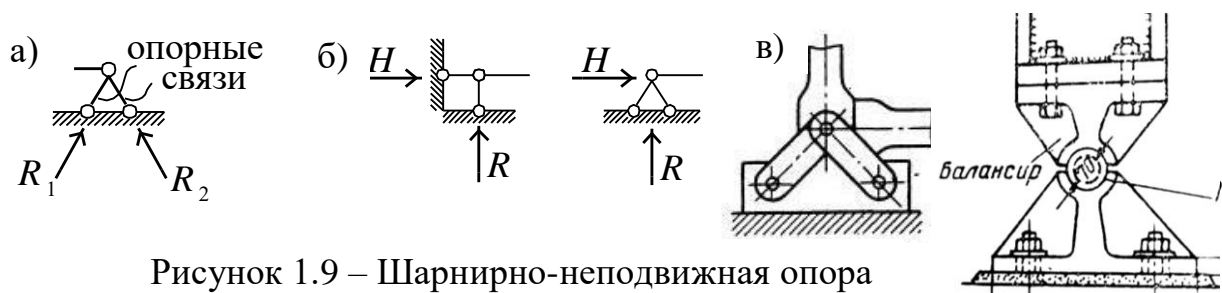


Рисунок 1.9 – Шарнирно-неподвижная опора

**Жесткое закрепление (защемление, заделка)** не допускает поворота опорного сечения и перемещения его ни в каком направлении, т. е. на это сечение наложено три связи. В такой опоре возникает вертикальная и горизонтальная составляющие опорной реакции ( $R_A$  и  $H_A$ ) и изгибающий момент  $M_A$ . На рисунке 1.10 приведены схема опоры и пример жесткого закрепления колонны.

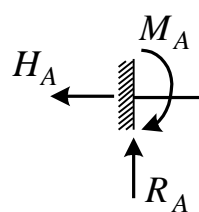
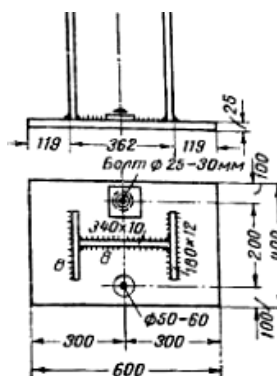


Рисунок 1.10 – Защемление



Если на элемент или систему действует нагрузка, расположенная в одной плоскости, то для неподвижного соединения с основанием элемент или система должны иметь не менее трех связей, причем связи должны быть правильно расположены: 1) не должно быть трех параллельных связей; 2) не должно быть трех связей, пересекающихся при продолжении в одной точке.

## 1.5 Классификация нагрузок

При работе сооружений или машин их части воспринимают внешние нагрузки и передают их друг другу. Классификацию внешних нагрузок можно провести по нескольким признакам: по способу приложения, по времени действия, по характеру действия. Рассмотрим эти классификации подробно.

### *Классификация по способу приложения*

1 *Объемная нагрузка* – нагрузка, которая распределяется по всему объему элемента (приложена к каждой частице материала). Например, вес или сила инерции.

2 *Поверхностная нагрузка* – нагрузка, приложенная на поверхности элемента. Например, давление жидкости на стенки резервуара, давление снега на покрытие здания и т. д. Выделяют такие виды поверхностной нагрузки.

*Сосредоточенная сила* – это сила, которая передается телу по поверхности, весьма малой в сравнении с его размерами. Условно эту силу считают приложенной в точке.

Изображается на схеме стрелочкой и обозначается чаще всего буквой  $F$  (или  $K, P, \dots$ )  $\downarrow F = 10 \text{ кН}$ .

Единицы измерения – Н (ньютон),  $\text{кН} = 10^3 \text{ Н}$ ,  $\text{мН} = 10^6 \text{ Н}$ ; килограмм силы кгс или кг ( $\text{кг} = 9,8 \text{ Н} \approx 10 \text{ Н}$ ) и другие производные от этих единиц.

*Сосредоточенный момент* (пара сил) – это момент, который условно считают приложенным в точке. Изображение момента на схеме показано на рисунке:  $\curvearrowright M = 10 \text{ кНм}$



Единицы измерения – ньютон·метр (Нм) и производные от этой единиц.

*Распределенная нагрузка* – нагрузка, приложенная по некоторой площади или линии на поверхности тела. Например, давление снега на крышу здания. Распределенная нагрузка характеризуется ее интенсивностью, т. е. величиной нагрузки, приходящейся на единицу длины, площади или объема (Н/м, Н/м<sup>2</sup>, Н/м<sup>3</sup>).

Если нагрузка имеет одинаковую интенсивность по всей площади или длине, то ее называют *равномерно распределенной*, в противном случае – *неравномерно распределенной*. На схеме распределенная нагрузка обозначается так:  $q = 10 \text{ кН/м}$



В действительности через точку, т. е. объект, не имеющий размеров, невозможно передать воздействия ненулевого значения. Поэтому сосредоточенная сила или момент – это типичная схематизация реальности, позволяющая построить физико-математическую расчетную модель. При расчете конструкции в целом такая схематизация допускается принципом Сен-Венана. Но она недопустима, если изучается зона контакта элементов. В этом случае нагрузка рассматривается как распределенная.

Например, для расчета вала шестерни (рисунок 1.11, а) реакция на опоре ( $R_1, R_2$ ) может рассматриваться как сосредоточенная нагрузка; для расчета долговечности шарика опоры то же усилие взаимодействия рассматривается как распределенное контактное давление (рисунок 1.11, б).

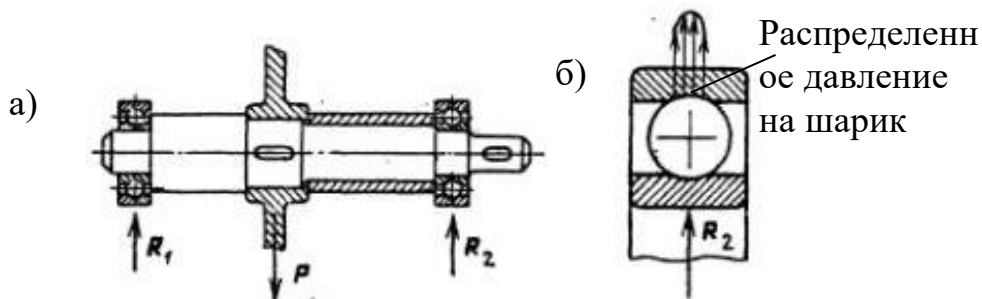


Рисунок 1.11 – Схемы для расчета вала (а) и шарнира (б)

### ***Классификация по времени действия***

По продолжительности действия нагрузки делят на *постоянные*, действующие в течение всего периода эксплуатации конструкции (вес, сила инерции), и *временные*, действующие лишь в некоторые промежутки времени (давление людей на перекрытие здания, напор ветра на башню, снеговая нагрузка и др.).

### ***Классификация по характеру действия***

По характеру действия нагрузки делят на *статические* и *динамические*.

Нагрузка, постоянная или очень медленно изменяющаяся во времени, когда скоростями и ускорениями возникающего движения можно пренебречь, называется *статической*.

Нагрузку, сообщающую массам системы ускорения, которые необходимо учитывать при расчетах, называют *динамической*. Это, например, удар (характеризуется резким изменением скорости ударяемого тела), кратковременная нагрузка или импульс (взрыв), периодическая нагрузка (например, вибрационная), подвижная нагрузка (нагрузка, изменяющая свое положение, например, подвижной состав).

## **1.6 Внутренние усилия. Метод сечений**

Между соседними частицами тела (кристаллами, атомами) всегда имеются определенные силы взаимодействия. Под действием внешних сил в элементе возникают дополнительные силы взаимодействия – ***внутренние силы***, сопровождающие деформацию материала. Эти силы во всех случаях стремятся сохранить его как единое целое, противодействуют всякой попытке изменить взаимное расположение частиц, т. е. деформировать тело.

С увеличением внешней нагрузки растут и внутренние силы. Если внешние силы превышают силы внутреннего взаимодействия, то происходит разрушение. Поэтому знание внутренних сил необходимо для оценки прочности элемента. Для

их вычисления применяют *метод сечений*, состоящий в следующем.

Рассмотрим произвольное тело, нагруженное самоуравновешенной системой сил (рисунок 1.12).

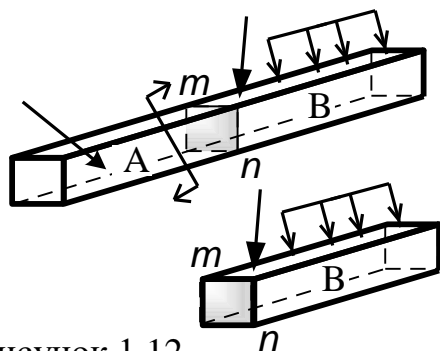


Рисунок 1.12

1 В интересующем нас сечении мысленно разрежем тело плоскостью  $m-n$  на две части А и В.

2 Мысленно отбросим часть элемента по одну сторону от сечения, например, часть А. В каждой точке обеих частей сечения действуют силы

взаимодействия. Исходя из гипотезы о сплошности материала, следует считать, что внутренние силы действуют во всех точках проведенного сечения и, следовательно, представляют собой распределенную нагрузку. Как всякую систему сил, их можно привести к одной точке (обычно к центру тяжести сечения). Таким образом, получим главный вектор и главный момент внутренних сил.

3 Определяем значения главного вектора и главного момента внутренних сил, записывая уравнения равновесия в сечении: главный вектор сил в сечении А в соответствии с третьим законом Ньютона равен по величине и противоположен по направлению равнодействующей внешних сил в части В; главный момент внутренних сил в сечении А равен по величине и противоположен по направлению равнодействующей внешних моментов в части В.

Если главный вектор и главный момент внутренних сил

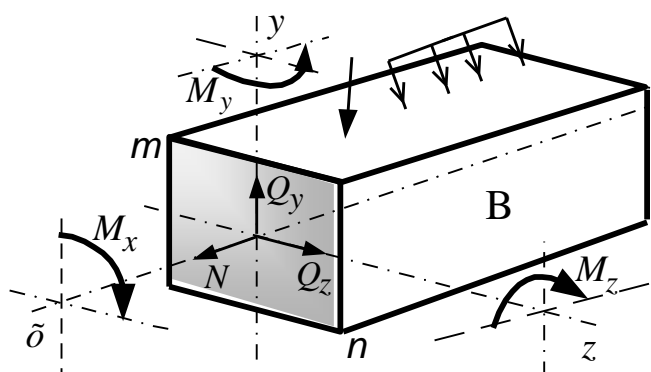


Рисунок 1.13 – Внутренние усилия

спроектировать на ось стержня  $x$  и главные центральные оси сечения  $z$  и  $y$  (см. тему 2), то на каждой стороне сечения получим **шесть внутренних силовых факторов** (рисунок 1.13):

три силы  $Q_x = N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$  и три момента  $M_x = M_K$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ .

Для внутренних силовых факторов приняты следующие названия:

$N = Q_x$  – продольная или осевая сила (направленная по оси стержня);

$Q_y, Q_z$  – поперечные силы (реже – перерезывающие);

$M_y, M_z$  – изгибающие моменты;

$M_K = M_x$  – крутящий момент.

При каждом конкретном нагружении некоторые усилия могут быть равными нулю.

В зависимости от того, какие из этих усилий отличны от нуля, выделяют 4 вида простых деформаций. Остальные деформации представляются в виде комбинации этих четырех видов и называются сложными.

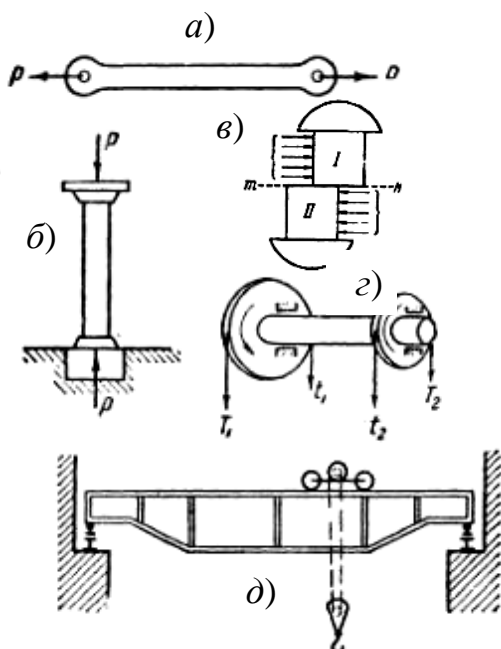
### Простые деформации

1 Деформация, при которой только  $N \neq 0$ , называется «растяжение – сжатие».

2 Деформация, при которой  $Q_z \neq 0$  ( $Q_y \neq 0$ ), называется «сдвиг» или «срез».

3 Деформация, при которой  $M_K \neq 0$ , называется «кручение».

4 Деформация, при которой  $Q_z \neq 0$  и  $M_y \neq 0$  или  $Q_y \neq 0$  и  $M_z \neq 0$ , называется «плоский изгиб».



Примеры таких деформаций приведены на рисунке 1.14:

а, б) растяжение вагонной стяжки и сжатие колонны;

в) сдвиг (перерезывание) болта;

- г) *кручение* вала;
- д) *изгиб* подкрановой балки под тяжестью крана.

ры простых деформаций

## 1.7 Напряжения

Внутренние усилия, которые мы задаем одним значением для всего сечения, на самом деле распределены («размазаны») по всему сечению и могут быть сильнее или слабее в разных точках. Поэтому необходимо ввести характеристику распределения (интенсивности) сил взаимодействия, а именно – *напряжение*.

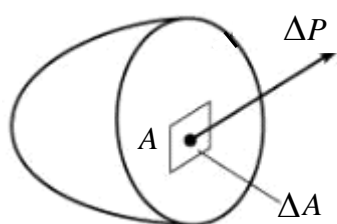


Рисунок 1.15

Рассмотрим малый элемент площади сечения  $\Delta A$  вокруг точки  $A$  и предположим, что на него действует сила  $\Delta P$  (рисунок 1.15).

**Напряжением** (полным напряжением) в точке  $A$  называется величина

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA}.$$

Таким образом, **напряжением** в точке называется внутренняя сила, отнесенная к единице площади в данной точке рассматриваемого сечения. Другими словами, это интенсивность распределения внутренних сил.

Единица измерения напряжения в системе СИ –  $\text{Н}/\text{м}^2$ , в технике напряжение обычно выражают в  $\text{кг}/\text{см}^2$ . Для единицы  $\text{Н}/\text{м}^2$  вводится специальное обозначение Па (паскаль):  $\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$ ,  $\text{кПа} = 10^3 \text{Па}$ ,  $\text{МПа} = 10^6 \text{Па}$ .

Вектор напряжения  $p$  принято раскладывать на составляющие по нормали  $n$  к сечению и в плоскости сечения, как это показано на рисунке (рисунок 1.16).

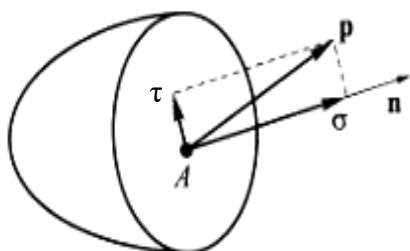


Рисунок 1.16 –  
Составляющие вектора

Составляющая напряжения  $p$  по нормали обозначается буквой  $\sigma$  и называется **нормальным напряжением**.

Составляющая напряжения  $p$  в плоскости сечения обозначается буквой  $\tau$  и называется **касательным напряжением**.

Экспериментально установлено, что влияние нормальных и касательных напряжений на прочность материала различно, поэтому составляющие вектора напряжений обычно рассматриваются отдельно.

На рисунке 1.17 приведены примеры напряжений в сечении болта: а – нормальное напряжение, возникающее при растяжении, б – касательное напряжение, возникающее при срезе.

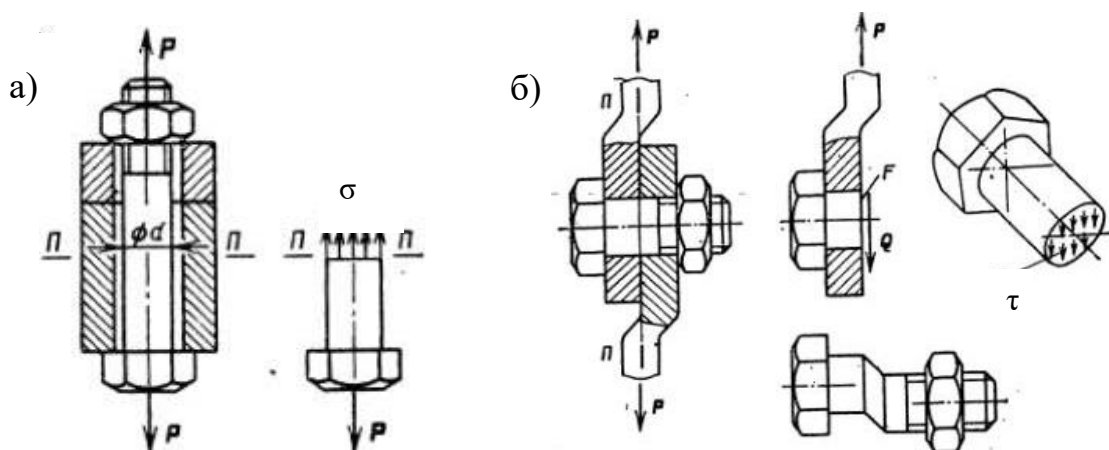


Рисунок 1.17– Напряжения в сечении болта

По величинам напряжений судят о прочности элементов конструкций и машин. Так как напряжение полностью определяет силы взаимодействия частей элемента как в целом, так и в каждой точке сечения, можно сказать, что **напряжение является критерием прочности**.

### 1.7.1 Составляющие напряжений. Тензор напряжений

Касательное напряжение (рисунок 1.16), в свою очередь, раскладывается по осям в плоскости сечения и обозначается двумя индексами. Первый индекс обозначает направление нормали к рассматриваемой площадке, второй индекс – направление составляющей напряжения.

Таким образом, в каждой точке получается набор напряжений, показанный на рисунке 1.18. Совокупность напряжений во всех сечениях, проходящих через данную точку, называется *напряженным состоянием* в точке. Подробно напряженное состояние будет изучено в теме 5.

#### Правила знаков

*Нормальное напряжение* положительно, если оно является растягивающим.

*Касательное напряжение* положительно, если оно задает момент по часовой стрелке относительно центра тяжести элемента.

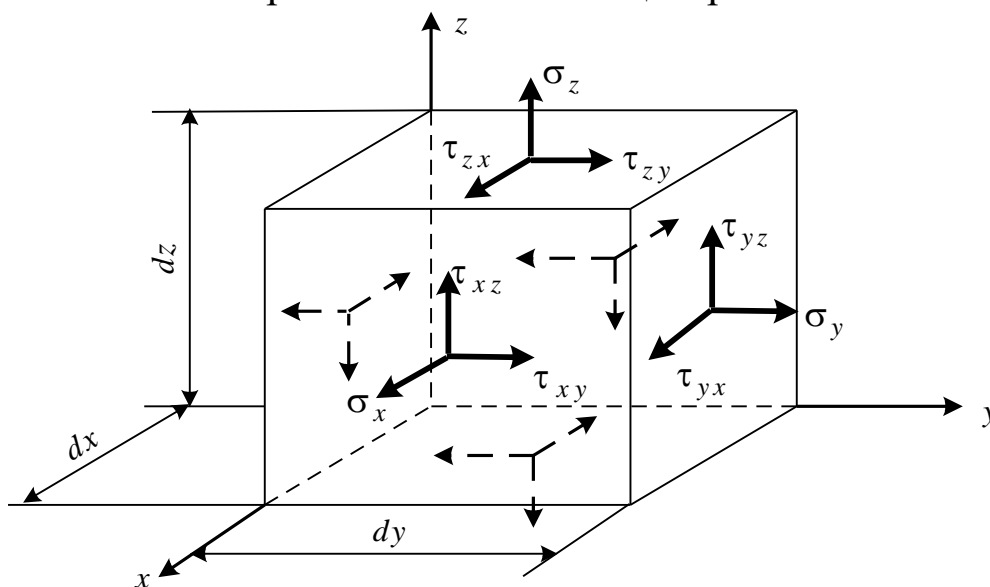


Рисунок 1.18 – Напряжения в точке

Напряжения, действующие на элемент объема (рисунок 1.18), образуют так называемый *тензор напряжений*

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Здесь первый столбец состоит из компонент напряжений, действующих на площадках, нормальных к оси  $x$ , второй – к оси  $y$ , третий – к оси  $z$ . Если задан тензор напряжений, то напряженное состояние в точке вполне определено.

### 1.7.2 Закон парности для касательных напряжений

Возьмем момент сил, действующих на элемент, относительно оси  $x$  (рисунок 1.18). В результате получим

$$(\tau_{zy} dx dy) dz = (\tau_{yz} dx dz) dy,$$

откуда

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}.$$

Аналогично, взяв момент сил относительно осей  $z$  и  $y$ , найдем

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Равенства

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

носят название *закона парности* (взаимности) касательных напряжений и формулируются так: *по двум взаимно перпендикулярным площадкам составляющие касательного напряжения, перпендикулярные линии пересечения этих площадок, равны между собой и противоположны по направлению.*

### 1.7.3 Выражение внутренних усилий через напряжения

Выделим элемент площади вокруг некоторой точки и покажем напряжения, действующие в этой точке (рисунок 1.19).



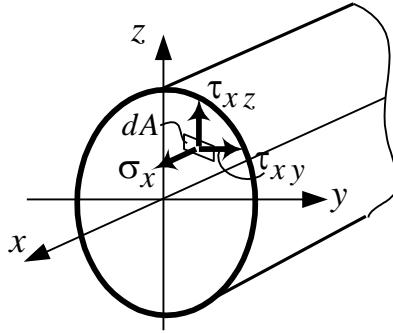


Рисунок 1.19 – Напряжения в точке

Исходя из этого представления, а также из определения внутренних усилий (рисунок 1.13), установим общие зависимости между внутренними усилиями и напряжениями:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A dN = \int_A \sigma_x dA ; \\
 Q_y &= \int_A dQ_y = \int_A \tau_{xy} dA ; \quad Q_z = \int_A dQ_z = \int_A \tau_{xz} dA ; \\
 M_y &= \int_A z dN = \int_A \sigma_x z dA ; \quad M_z = \int_A y dN = \int_A \sigma_x y dA ; \\
 M_x &= \int_A (y dQ_z - z dQ_y) = \int_A (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dA . \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

Формулы (1.2) математически выражают тот факт, что величина напряжений является мерой внутренних сил, которые возникают в материале под действием внешних сил.

## 1.8 Деформации

*Деформацией* называется изменение размеров и формы элемента при внешних воздействиях. Из определения следует, что **деформация является критерием жесткости**.

Согласно гипотезам п. 1.1 будем рассматривать только малые деформации, которые встречаются в инженерных сооружениях.

### 1.8.1 Линейные деформации

Малые перемещения частиц деформированного тела обычно раскладываются на составляющие  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , параллельные осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рисунок 1.20). Предполагаем, что эти составляющие изменяются непрерывно по объему тела.

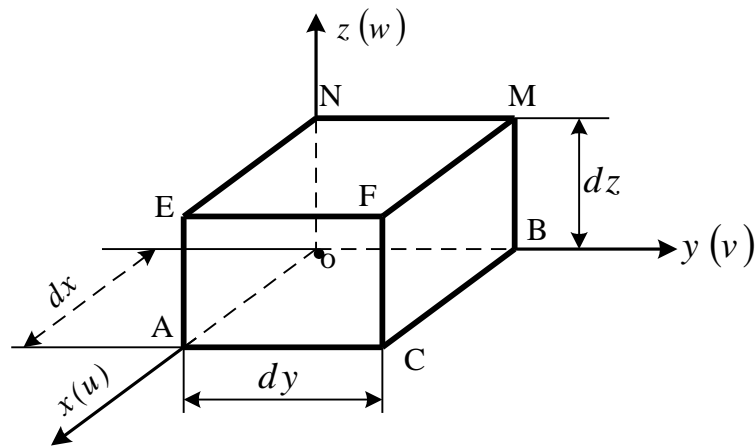


Рисунок 1.20 – К выводу зависимостей между линейными деформациями и перемещениями

Рассмотрим бесконечно малый элемент  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  упругого тела (рисунок 1.20). Если перемещение точки  $O$  вдоль оси  $x$  равно  $u$ , то перемещение бесконечно близкой к ней точки  $A$  равно  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ , так как с приращением координаты  $x$  на  $dx$

функция  $u$  получает приращение  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ .

Следовательно, *относительное удлинение* (отношение изменения длины к начальной длине) в направлении оси  $x$  равно

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.3)$$

Аналогично, линейные деформации в направлениях  $y$ ,  $z$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.4)$$

### 1.8.2 Угловые деформации

Помимо линейных деформаций  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ , тело испытывает и *угловые деформации*. Рассмотрим искажение угла между

элементарными отрезками  $OA$  и  $OB$  (рисунок 1.21). Если  $u$  и  $v$  являются перемещениями точки  $O$  в направлении осей  $x$  и  $y$ , то перемещения точки  $A$  в направлении оси  $y$  и точки  $B$  в направлении оси  $x$  будут соответственно  $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$  и  $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ .

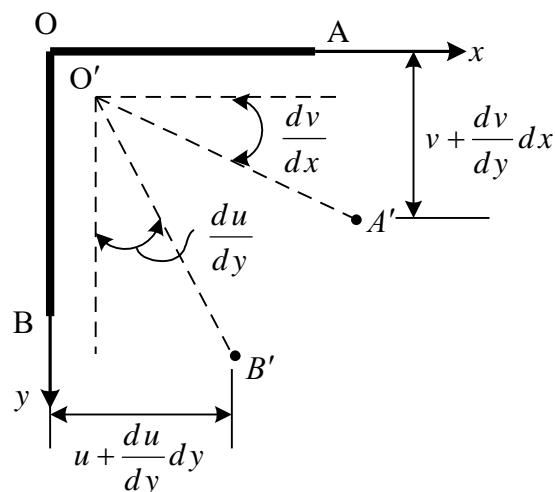


Рисунок 1.21 – К выводу зависимостей между угловыми деформациями и перемещениями

Вследствие этих перемещений новое направление  $O'A'$  будет составлять со своим первоначальным направлением указанный на рисунке 1.21 угол  $\frac{\partial v}{\partial x}$ . Таким же образом, направление  $O'B'$  будет составлять с направлением  $OB$  малый угол  $\frac{\partial u}{\partial y}$ . Отсюда следует, что первоначально прямой угол  $AOB$  между элементами  $OA$  и  $OB$  уменьшится на величину

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Это и есть *деформация сдвига* между плоскостями  $xz$  и  $yz$ .

Таким образом, деформации сдвига между плоскостями  $xz$  и  $yz$  (уже полученные) и между плоскостями  $xu$  и  $xz$ ,  $yx$  и  $yz$  (которые получаются аналогично) равны соответственно:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1.6)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.7)$$

Как и линейные деформации (1.3), (1.4), углы сдвига весьма малы и имеют порядок  $\gamma \approx 10^{-4} - 10^{-3}$ .

### 1.8.3 Тензор деформаций

Полученные относительные деформации в точке сведем в таблицу

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0,5\gamma_{xy} & 0,5\gamma_{xz} \\ 0,5\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0,5\gamma_{yz} \\ 0,5\gamma_{zx} & 0,5\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

в которой углы сдвига с целью аналогии с тензором напряжений (1.1) поделены пополам. Величины (1.8) количественно определяют деформации материала в окрестностях точки и составляют *тензор деформаций*.

## 2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ДЕФОРМАЦИЙ

### 2.1 Эпюры внутренних усилий

Для наглядного представления внутренних усилий строятся их эпюры. *Эпюрой* называется график зависимости внутреннего силового фактора (усилия, напряжения) от координаты на оси элемента. Основная цель построения эпюры – определить положение опасного сечения или сечений и усилий в этих сечениях.

*Опасное* сечение – это сечение, в котором есть опасность разрушения, а именно – сечение с максимальными или сравнительно большими усилиями. По этим сечениям производится проверка прочности или определение размеров площади сечения элемента.

### 2.2 Внутренние усилия при растяжении и сжатии

При действии на стержень внешних нагрузок, направленных вдоль продольной оси, в поперечных сечениях возникает только один силовой фактор – продольная сила. Такие нагрузки вызывают растяжение или сжатие стержня.

Согласно методу сечений продольная сила в поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекций внешних сил на ось стержня, приложенных по одну сторону от сечения.

Продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение (направлена от сечения), и отрицательной, если она вызывает сжатие (направлена к сечению).

Построим эпюру продольных сил для ступенчатого стержня (рисунок 2.1) с учетом его собственного веса. Площадь сечения верхней части равна  $A_1$ , нижней –  $A_2$ , объемный вес материала стержня –  $\gamma$ .

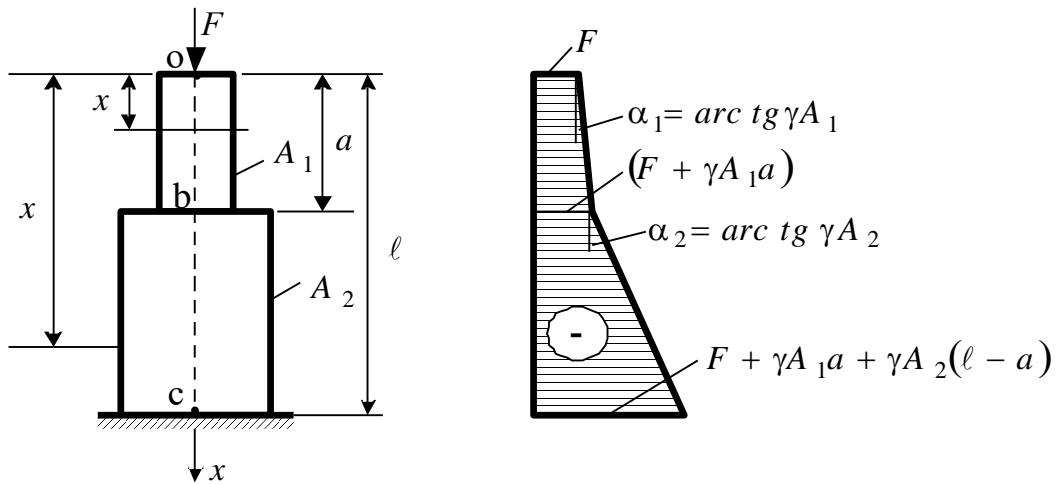


Рисунок 2.1 – К построению эпюры продольных сил в стержне

Начало координат выбираем в точке О.

Участок об:  $0 \leq x \leq a$

$$N_x = -F - \gamma A_1 x .$$

Участок bc:  $0 \leq x \leq l$

$$N_x = -F - \gamma A_1 a - \gamma A_2 (x - a) = -F - \gamma A_1 a + \gamma A_2 a - \gamma A_2 x .$$

Полученные уравнения – это уравнения наклонных прямых, так что эпюра  $N$  трапециевидна. Тангенс угла наклона прямой равен коэффициенту при  $x$ , так что угол растет с увеличением площади сечения.

### ***Дифференциальные зависимости при растяжении-сжатии***

Рассмотрим стержень, нагруженный продольной распределенной нагрузкой  $t_x$  (рисунок 2.2). Выделим из стержня элемент длиной  $dx$ .

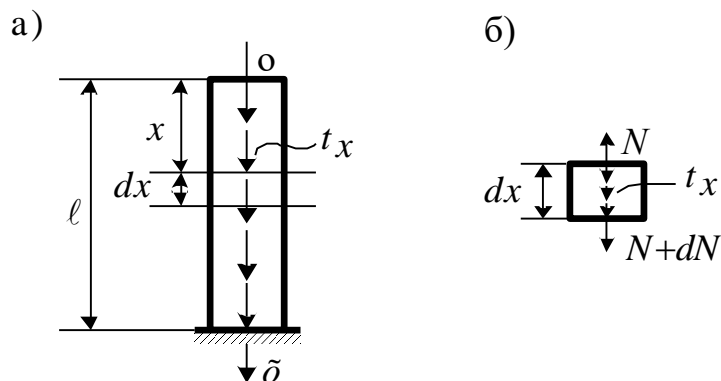


Рисунок 2.2 – К выводу дифференциальной зависимости между  $t_x$  и  $N$

На него действует нагрузка  $t_x$ , которую можно считать равномерно распределенной ввиду малости  $dx$ , и уравнивающие продольные силы: в верхнем сечении  $N$ , в нижнем  $N + dN$ , где  $dN$  – приращение продольной силы на участке длиной  $dx$ .

Составим уравнение равновесия – сумма проекций всех сил, приложенных к элементу, на ось стержня равна нулю:

$$-N + t_x dx + (N + dN) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dN}{dx} = -t_x.$$

Эта зависимость используется, в частности, при проверке правильности построения эпюры  $N$ . Если определить производные в выражениях  $N_x$  на участках об и вс, то увидим, что на участке об (рисунок 2.1) должна действовать равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $\gamma A_1$ , а на участке вс –  $\gamma A_2$ , что соответствует условию задачи.

### 2.3 Внутренние усилия при кручении

Стержень, который нагружен моментами, действующими в плоскостях, перпендикулярных его продольной оси, испытывает кручение. Такие стержни называют валами. При этом в поперечных сечениях вала возникает только одно внутреннее усилие – крутящий момент  $M_x$  (или  $M_K$ ).

Крутящий момент в сечении равен алгебраической сумме внешних моментов, расположенных по одну сторону от сечения.

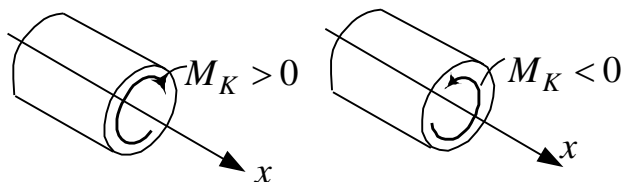


Рисунок 2.3 – Оставшаяся часть элемента

Крутящий момент считается положительным, если при взгляде на сечение вдоль оси со стороны отброшенной части элемента видно, что он

поворачивает оставшуюся часть по часовой стрелке, как показано на рисунке 2.3.

Построим эпюру  $M_K$  для вала, показанного на рисунке 2.4.

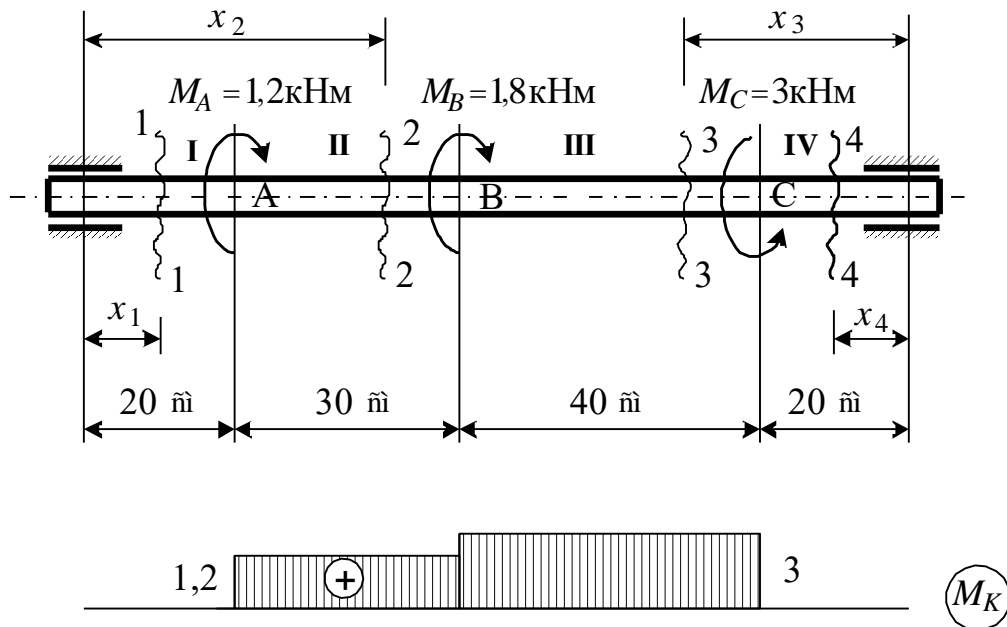


Рисунок 2.4 – К построению эпюры  $M_K$  для вала

Разбиваем стержень на четыре участка. Используя метод сечений, на участке I мысленно проводим в произвольном месте сечение 1-1 (начало координат принимаем в крайнем левом сечении), отбрасываем правую часть стержня и рассматриваем равновесие оставшейся левой части:

$$0 \leq x_1 \leq 20 \text{ см} \quad M_1 = 0.$$

Крутящий момент в произвольном сечении 2-2 участка II в соответствии с приведенным правилом знаков равен

$$20 \text{ см} \leq x_2 \leq 50 \text{ см} \quad M_2 = M_A = 1,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Крутящий момент на участке III (оставшейся частью является правая, начало координат – в крайнем правом сечении)

$$20 \text{ см} \leq x_3 \leq 60 \text{ см} \quad M_3 = M_c = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Крутящий момент на участке IV равен нулю, т. е.

$$M_4 = 0 \quad 0 \leq x_4 \leq 20 \text{ см}.$$



При построении эпюры крутящих моментов положительные значения крутящих моментов будем откладывать вверх от базисной линии, а отрицательные значения – вниз (рисунок 2.4).

## *Дифференциальные зависимости при кручении*

Помимо внешних сосредоточенных крутящих моментов, на стержень (вал) может действовать и распределенная по некоторому закону моментная нагрузка интенсивностью  $m_x$ . Между этой внешней моментной нагрузкой  $m_x$  и крутящим моментом  $M_x$  ( $M_K$ ) существует дифференциальная зависимость. Для ее получения рассмотрим стержень с моментной нагрузкой  $m_x$  (рисунок 2.5), из которого вырежем элемент длиной  $dx$ .

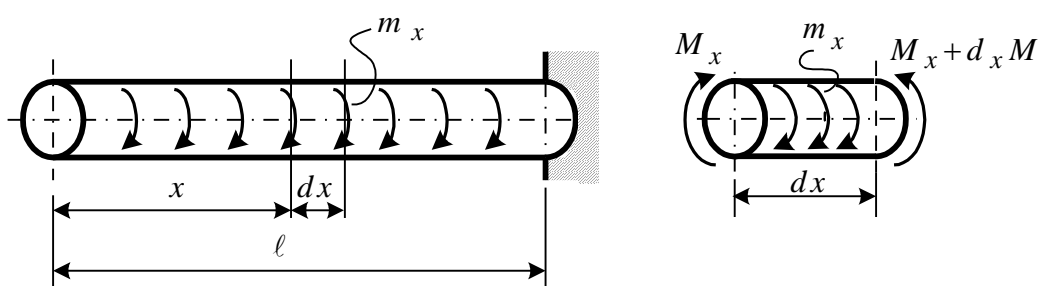


Рисунок 2.5 – К выводу дифференциальной зависимости между  $m_x$  и  $M_x$

Этот элемент нагружен уравнивающимися положительными крутящими моментами  $M_x$  и  $(M_x + dM_x)$ , где  $dM_x$  – приращение крутящего момента, и внешней распределенной моментной нагрузкой  $m_x$ , которую можно считать равномерно распределенной ввиду малости  $dx$ .

Составим уравнение равновесия для элемента:

$$\sum M_x = 0: M_x + m_x dx - (M_x + dM_x) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dM_x}{dx} = m_x.$$

Используем эту зависимость для проверки правильности построения эпюры  $M_K$  (рисунок 2.4). Вычислим первые производные на участках I, II, III, IV. Они равны нулю. Отсюда следует, что равномерно распределенная нагрузка отсутствует, что соответствует условию задачи.

## 2.4 Внутренние усилия при изгибе стержней с прямой осью

Стержень, испытывающий изгиб, называют *балкой*. В инженерной практике часто используются балки с поперечным сечением, имеющим вертикальную ось симметрии. Если внешняя нагрузка и реактивные усилия лежат в одной плоскости, которая совпадает с осью симметрии сечения, то балка будет изгибаться в той же плоскости (ось изгибаемого стержня не выходит из этой плоскости). Такой изгиб называют *плоским*. Здесь будут рассматриваться случаи, когда при плоском изгибе внешняя нагрузка перпендикулярна продольной оси балки и действует в плоскости симметрии. Поэтому в поперечных сечениях балки возникают только поперечная сила и изгибающий момент.

*Поперечная сила в любом сечении балки равна сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону от сечения, на нормаль к оси балки.*

*Поперечная сила считается положительной, если она направлена так, что стремится повернуть элемент балки по ходу часовой стрелки (рисунок 2.6, а).*

*Изгибающий момент в сечении равен алгебраической сумме всех изгибающих моментов, расположенных по одну сторону сечения.*

*Изгибающий момент считается положительным, если он изгибает элемент балки выпуклостью вниз, вызывая растяжение нижних волокон (волокну называют линию, параллельную оси) (рисунок 2.6, б).*

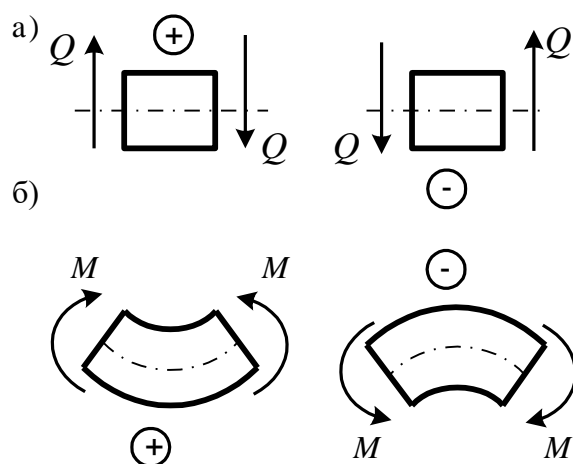


Рисунок 2.6 – Правило знаков для поперечной силы (а) и изгибающего момента (б)

При построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов положительные значения  $Q$  откладываем вверх, а  $M$  – вниз от оси (т. е. со стороны растянутых волокон).

### ***Дифференциальные зависимости при изгибе***

На участке балки, нагруженном распределенной нагрузкой, проведем два сечения на расстояниях  $x$  и  $x + dx$  от левой опоры (рисунок 2.7). Поскольку длина участка  $dx$  мала, нагрузку можно считать равномерной с интенсивностью  $q$ . Действие левой отброшенной части балки на элемент  $dx$  заменим поперечной силой  $Q$  и изгибающим моментом  $M$ , а действие правой отброшенной части – силой  $Q + dQ$  и моментом  $M + dM$ . Здесь  $dQ$  и  $dM$  – приращение поперечной силы и изгибающего момента на элементе  $dx$ .

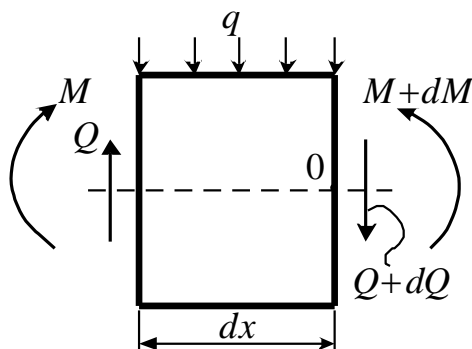


Рисунок 2.7 – К выводу дифференциальных зависимостей при изгибе

Составим для элемента два уравнения равновесия:

$$\sum Y = 0: \quad -Q + q dx + (Q + dQ) = 0;$$

$$\sum M_0 = 0: \quad M + Q dx - q dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.$$

Из первого уравнения после преобразований получим

$$\frac{dQ}{dx} = -q. \quad (2.1)$$

Интегрируя это уравнение, получаем  $Q = -qx + C$ , где  $C$  – константа интегрирования. График этой функции, то есть эпюра  $Q$  является прямой с тангенсом угла наклона  $q$  (если  $q = 0$ , то это прямая, параллельная оси).

Из второго уравнения равновесия, пренебрегая членом  $q \frac{dx^2}{2}$  как величиной второго порядка малости, найдем

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (2.2)$$

Интегрируя это уравнение при постоянной силе  $Q$  (т.е.  $q=0$ ), получаем  $M=Qx+C$ , где  $C$  – константа интегрирования. Значит, эпюра  $M$  является прямой с тангенсом угла наклона  $Q$ .

Зависимость (2.1) с учетом (2.2) может быть записана в виде

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q. \quad (2.3)$$

Интегрируя это уравнение, получаем  $M = -q \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$ , где  $C_1, C_2$  – константы интегрирования. Значит, в случае  $q \neq 0$  эпюра  $M$  является параболой, обращенной выпуклостью в сторону действия  $q$ .

Кроме того, если производная в точке равна нулю, то функция в этой точке имеет экстремум. Из (2.2) следует: если поперечная сила в точке равна нулю, то на параболе  $M$  в этой точке имеется экстремум.

На основании полученных выводов и правил вычисления усилий сформулируем основные правила, оказывающие помощь при построении эпюр  $M$  и  $Q$ .

### ***Основные правила построения и проверки эпюр***

1 На участке, где нет распределенной нагрузки, поперечная сила постоянна (*эпюра  $Q$  – прямая, параллельная оси*), изгибающий момент изменяется по линейной зависимости (*эпюра  $M$  – наклонная прямая*), причем тангенс угла наклона эпюры  $M$  равен силе  $Q$ . В частном случае могут отсутствовать и сосредоточенные силы, тогда  $Q=0$ ,  $M = \text{const}$ .

2 На участке, где имеется равномерно распределенная нагрузка, поперечная сила изменяется по линейной зависимости (*эпюра  $Q$  – наклонная прямая*), причем тангенс угла наклона эпюры  $Q$  равен  $q$ ; изгибающий момент изменяется по квадратичной зависимости и *эпюра  $M$  – парабола*, у которой

выпуклость обращена в сторону действия распределенной нагрузки  $q$ .

Если на этом участке  $Q$  в одном из сечений равна нулю, то  $M$  в этом сечении принимает экстремальное значение – максимум или минимум.

3 В сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре  $Q$  имеется скачок, равный значению этой силы и направленный в сторону действия силы (при построении эпюры слева направо). Эпюра  $M$  в этом сечении имеет перелом, направленный в сторону действия силы  $F$ .

4 В сечении, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре  $M$  имеется скачок, равный значению момента  $M$ . При этом направление скачка будет вниз (при построении эпюры слева направо), если сосредоточенный момент направлен по часовой стрелке, и вверх, если момент направлен против часовой стрелки. На эпюре  $Q$  наличие сосредоточенного момента не отражается.

### ***Пример построения эпюр внутренних усилий в балке***

Построить эпюры  $M$  и  $Q$  для балки (рисунок 2.8, а).

1 Определение опорных реакций.

Предположим, что вертикальные опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$  направлены вверх. Горизонтальная реакция в шарнирно-неподвижной опоре А равна нулю, так как внешняя горизонтальная нагрузка отсутствует. Поэтому на рисунке 2.8, а горизонтальная реакция не показана.

Для определения реакций используем два уравнения равновесия: сумма моментов относительно опорных точек А и В равна нулю:

$$\sum M_B = 0: R_A \cdot 6 - 100 \cdot 8 - 10 \cdot 9 \cdot 1,5 + 35 = 0; R_A = 150 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot 6 - 35 - 10 \cdot 9 \cdot 4,5 + 100 \cdot 2 = 0; R_B = 40 \text{ кН}.$$

Положительные знаки реакций, полученные из решения этих уравнений, указывают на то, что их действительное направление совпало с предполагаемым. Далее следует обязательно проверить правильность определения опорных реакций, проверив выполнение третьего уравнения равновесия:

$$\sum Y = 150 + 40 - 100 - 10 \cdot 9 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены правильно.

2 Разбиваем балку на участки. Границами участков являются: начало и конец балки, опорные точки, точки приложения сосредоточенных сил и моментов, точки начала и конца участков с распределенной нагрузкой. На рисунке 2.8, а это точки А, В, С, D.

3 На каждом участке составляем выражение для внутренних усилий согласно *методу сечений*.

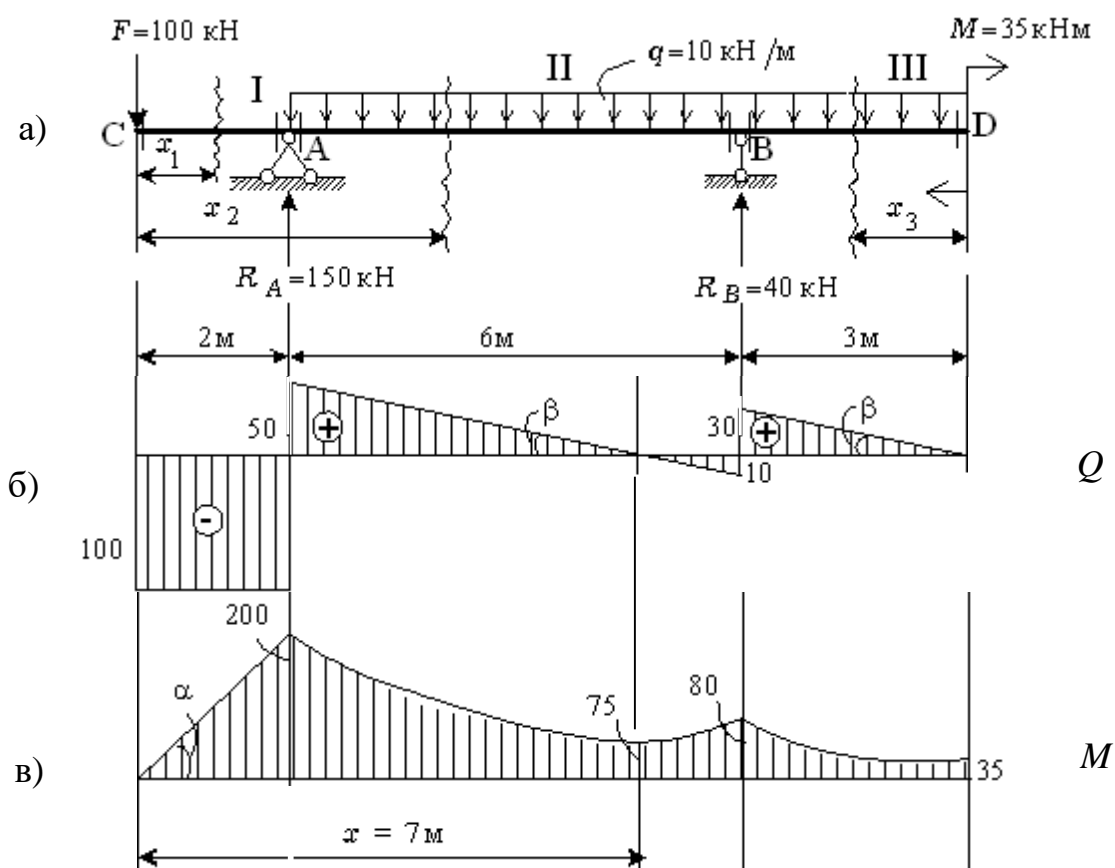


Рисунок 2.8 – Построение эпюр  $M$  и  $Q$  в однопролетной балке :  
расчетная схема балки (а); эпюра  $Q$  (б); в) эпюра  $M$  (в)

*Участок I.* Рассечем балку в произвольном сечении  $x_1$ ,  $0 \leq x_1 \leq 2$  м. Отбросим правую часть балки. Согласно правилам (стр. 31) в этом сечении поперечная сила и изгибающий момент равны

$$Q = -100; \quad M = -F \cdot x_1.$$

Поперечная сила постоянна, поэтому эпюра  $Q$  – прямая линия, проведенная параллельно оси снизу от нее на расстоянии 100 (рисунок 2.8, б).

Изгибающий момент изменяется по линейной зависимости. Поэтому для построения эпюры  $M$  на этом участке достаточно вычислить значения  $M$  в начале и конце участка: при  $x_1 = 0$   $M_C = 0$ ; при  $x_1 = 2$  м  $M_A = -200$  кНм. Откладываем отрицательные ординаты вверх оси (правило на стр. 31) и соединяем их прямой линией (рисунок 2.7, в).

*Участок II.* Рассечем балку в произвольном сечении  $x_2$ ,  $2 \text{ м} \leq x_2 \leq 8 \text{ м}$ . Отбросим правую часть балки. Получаем

$$\begin{aligned} Q &= -F + R_A - q(x_2 - 2); \\ M &= -F x_2 + R_A (x_2 - 2) - q(x_2 - 2) \frac{(x_2 - 2)}{2} = \\ &= -F x_2 + R_A (x_2 - 2) - q \frac{(x_2 - 2)^2}{2}. \end{aligned}$$

Поперечная сила изменяется по линейной зависимости. Поэтому для построения эпюры  $Q$  на этом участке достаточно вычислить значение  $Q$  в начале и конце участка: при  $x_2 = 2$  м  $Q_A = 50$  кН; при  $x_2 = 8$  м  $Q_B = -10$  кН. Полученные значения откладываем от оси и соединяем отрезком прямой.

Изгибающий момент изменяется по квадратичной зависимости. Для построения эпюры  $M$  следует определить значения изгибающего момента в трех сечениях: в начале и в конце участка, а также в сечении, где  $Q = 0$ , так как здесь момент достигает экстремального значения.

Вычислим значения  $M$  в начале и в конце участка: при  $x_2 = 2$  м  $M_A = 50$  кНм; при  $x_2 = 8$  м  $M_B = -80$  кНм.

Определим сечение, в котором  $Q = 0$ . Для этого выражение поперечной силы  $Q$  приравняем к нулю:

$$Q = -F + R_A - q(x_2 - 2) = -100 + 150 - 10(x_2 - 2) = 0, \text{ откуда } x_2 = 7 \text{ м}.$$

Подставим это значение в выражение для  $M$  и найдем экстремальное значение изгибающего момента:



$$\text{при } x_2 = 7 \text{ м } M = -F \cdot 7 + R_A (7 - 2) - q \frac{(7 - 2)^2}{2} = -75 \text{ кНм}.$$

Отложив от оси вычисленные значения изгибающих моментов, проведем через них квадратную параболу с вершиной в сечении  $x_2 = 7 \text{ м}$ .

Если на участке нет точки с  $Q = 0$ , определяют значение  $M$  посередине участка.

*Участок III.* Рассечем балку в произвольном сечении  $x_3$ ,  $0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м}$ . Отбросим левую часть балки. Получаем

$$Q = qx_3; \quad M = -35 - q \frac{x_3^2}{2}.$$

Поперечная сила меняется по линейной зависимости. Значения  $Q$  в начале и конце участка:  $x_3 = 0 \quad Q_D = 0$ ;  $x_3 = 3 \text{ м} \quad Q_B = 30 \text{ кН}$ .

Изгибающий момент изменяется по квадратичной зависимости. При  $x_3 = 0 \quad M_D = -35 \text{ кНм}$ ; при  $x_3 = 3 \text{ м} \quad M_B = -80 \text{ кНм}$ . Отложив найденные ординаты, проводим через них квадратную параболу с вершиной в сечении D (в этом сечении  $Q = 0$ ). Посередине участка ( $x_3 = 1,5 \text{ м}$ )  $M = -35 - 10 \cdot 2,25/2 = -46,25 \text{ кНм}$ .

Проверим выполнение правил 1 – 4.

На участке I нет распределенной нагрузки. Сила  $Q$ , как и следует, получилась постоянной, а эпюра  $M$  – наклонной, причем тангенс угла наклона равен  $\text{tg } \alpha = -200/2 = -100 = Q$ .

Участки II и III загружены распределенной нагрузкой. Эпюры  $Q$  на этих участках имеют вид наклонных прямых, причем тангенс угла наклона обеих равен  $\text{tg } \beta = 10$ , то есть совпадает с  $q$ . Эпюра изгибающих моментов на этих участках – квадратная параболы, причем на участке II имеется экстремум.

В точках A и B приложены сосредоточенные силы (реакции). На эпюре  $Q$  в этих точках, как и положено, имеются скачки по направлению этих сил (т. е. вверх) и равные этим силам (в т. A:  $100 + 50 = 150 = R_A$ ; в т. B:  $10 + 30 = 40 = R_B$ ).

*Второй способ построения эпюр.* Можно построить эпюры,

начиная с п. 3, пользуясь правилами 1 – 4 именно для построения эпюр, а не для их проверки. Этот способ отличается от первого тем, что не записываются уравнения для усилий (кроме определения точки экстремума), а находятся их значения в крайних точках участков и соединяются прямой либо параболой в зависимости от вида нагружения.

*Участок I.* Этот участок не загружен распределенной нагрузкой, значит, поперечная сила постоянна. Достаточно знать  $Q$  в одной точке, например  $Q_C$ . Проведем сечение справа от точки С и отбросим правую часть балки. Сумма сил (с учетом знаков), перпендикулярных оси, слева от сечения равна  $Q_C = -F_1 = -100$  кН. На эпюре  $Q$  проводим прямую, параллельную оси, на расстоянии -100.

Эпюра  $M$  на этом участке – наклонная прямая. Проведем ее через две точки – С и А. Момент  $M_C$  равен сумме моментов слева от точки С и равен  $M_C = 0$ . Момент  $M_A$  равен сумме моментов слева от точки А (с учетом знаков) и равен  $M_A = -F_1 \cdot 2 = -200$  кНм. На эпюре проводим прямую между 0 и -200.

*Участок II.* Этот участок загружен распределенной нагрузкой, значит, поперечная сила на нем линейна. Нужно знать  $Q$  в начале и в конце участка (справа от т. А и слева от т. В). В т. А приложена сосредоточенная сила  $R_A$ , значит, в этой точке должен быть скачок на величину и по направлению  $R_A$ , то есть  $Q_A = -100 + 150 = 50$  кН. Далее, проводим сечение слева от т. В и отбрасываем правую часть балки. Складываем все силы, перпендикулярные оси, слева от сечения:  $Q_B = -100 + 150 - q \cdot 6 = -10$  кН. На эпюре  $Q$  проводим прямую между  $Q = 50$  и  $Q = -10$ . Эпюра на участке пересекает ось.

Эпюра  $M$  на этом участке – парабола, причем на ней имеется экстремум в точке пересечения эпюры  $Q$  с осью. Значение  $M$  в т. А уже определено и равно значению  $M$  в конце участка I (в этой точке не приложен внешний сосредоточенный момент, значит, отсутствует скачок). Значение  $M$  в т. В удобно посчитать, отбросив часть балки слева от т. В:

$M_B = -M - q \cdot 3 \cdot 1,5 = -80 \text{ кНм}$ . Значение экстремума определяем так же, как это было сделано в первом способе построения эпюр.

*Участок III.* Этот участок загружен распределенной нагрузкой, значит, поперечная сила линейна. Нужно знать  $Q$  в начале и в конце участка (справа от т. В и в т. D). В т. В определяем поперечную силу, учитывая скачок в точке приложения  $R_B$ :  $Q_B = -10 + 40 = 30 \text{ кН}$ . Проведя сечение в т. D и отбросив левую часть балки, получим  $Q_D = 0$ . Соединяем эти точки прямой линией.

Эпюра  $M$  на этом участке является параболой без экстремума. Значения  $M$  в т. В справа и слева одинаковы,  $M_B = -80 \text{ кНм}$ . Значение  $M$  в т. D получим, сложив все моменты справа от сечения D:  $M_D = -35 \text{ кНм}$ .

## 2.5 Внутренние усилия в рамах

Стержневая система, стержни которой (стойки и ригели) во всех или некоторых узлах жестко соединены между собой, называется рамой. Ось таких систем представляет собой ломаную линию. Если ломаная линия рамы лежит в одной плоскости, то ее называют плоской.

В случае плоской рамы возникающие в каком-либо сечении внутренние усилия можно свести к трем величинам: изгибающему моменту  $M$ , поперечной силе  $Q$  и продольной силе  $N$ .

Понятие об изгибающем моменте остается прежним.

Поперечная сила в сечении равна сумме проекций всех сил по одну сторону от сечения на перпендикуляр к оси элемента.

Продольная сила в сечении равна сумме проекций всех сил по одну сторону от сечения на ось элемента.

Указанные суммы берутся с учетом знаков.

Правило знаков для изгибающих моментов и поперечных сил остается прежним (рисунок 2.6). Продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение стержня, и отрицательной, если она вызывает сжатие (см. п. 2.2).

Понятия «низ» и «верх» при определении знака изгибающего момента в вертикальных элементах зависят от положения наблюдателя (слева или справа от вертикальной оси). Однако можно заметить, что при любом положении наблюдателя эпюра окажется отложенной со стороны растянутых волокон.

**Пример построения эпюр  $N, M, Q$  в раме (рисунок 2.9)**

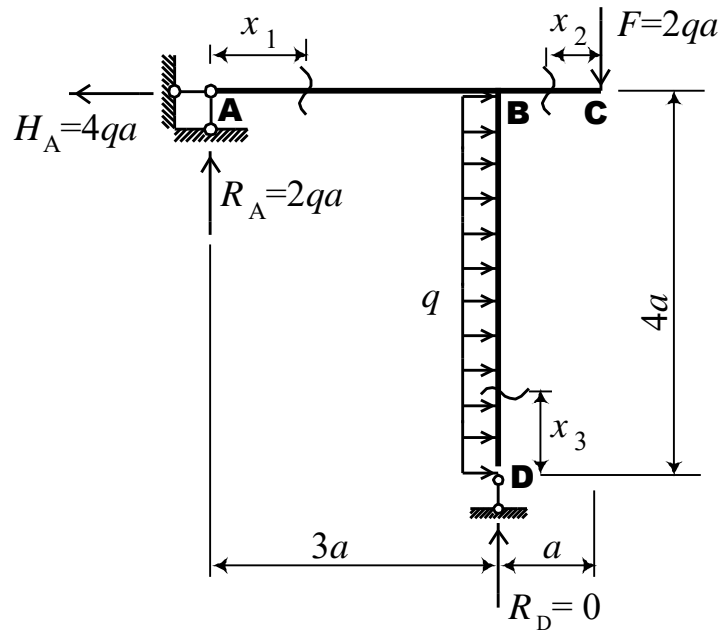


Рисунок 2.9 – Расчетная схема рамы

Определим опорные реакции из уравнений равновесия:

$$\sum X = 0: \quad H_A - 4qa = 0,$$

$$H_A = 4qa;$$

$$\sum M_A = 0: \quad R_D \cdot 3a - F \cdot 4a + 4qa \cdot 2a = 0,$$

$$R_D = (F \cdot 4a - 4qa \cdot 2a) / 3a = (8qa^2 - 8qa^2) / 3a = 0;$$

$$\sum M_D = 0: \quad -R_A \cdot 3a + H_A \cdot 4a - F \cdot a - 4qa \cdot 2a = 0,$$

$$R_A = (H_A \cdot 4a - F \cdot a - 4qa \cdot 2a) / 3a = (16qa^2 - 2qa^2 - 8qa^2) / 3a = 2qa.$$

Все реакции найдены независимо друг от друга. Правильность их определения подтверждается выполнением следующих уравнений равновесия (они не использовались при определении реакций):

$$\sum Y = R_A - F = 0,$$

$$\sum M_C = R_A \cdot 4a - 4qa \cdot 2a = 0.$$

Таким образом, опорные реакции определены правильно.

Разделим раму на три участка: АВ, ВС, ВD. На каждом участке в произвольном месте проведем сечение (рисунок 2.9) и составим уравнения равновесия для отсеченных частей рамы.

На участке АВ рассмотрим произвольное сечение  $x_1$  ( $0 \leq x_1 \leq 3a$ ), отбросив правую часть рамы. Этот участок не загружен распределенной нагрузкой, значит, продольная и поперечная силы постоянны, изгибающий момент – линейная функция. Поэтому  $N$  и  $Q$  достаточно определить в одной точке,  $M$  – в начале и конце участка:

$$N_A = H_A = 4qa, \quad Q_A = R_A = 2qa, \\ M_A = 0, \quad M_B = R_A \cdot 3a = 6qa^2.$$

Положительные значения  $M$  откладываем снизу от оси участка и соединяем их наклонной прямой (рисунок 2.10, а, б, в).

На участке ВС рассмотрим произвольное сечение  $x_2$  ( $0 \leq x_2 \leq a$ ), отбросив левую часть рамы. Этот участок также не загружен распределенной нагрузкой, поэтому характер эпюр на нем такой же, как на участке АВ; значения  $N$  и  $Q$  определяем в одной точке,  $M$  – в начале и конце участка (рисунок 2.10, а, б, в):

$$N_C = 0, \quad Q_C = F = 2qa, \\ M_C = 0, \quad M_B = -F \cdot a = -2qa^2.$$

На участке ВD рассмотрим произвольное сечение  $x_3$  ( $0 \leq x_3 \leq 4a$ ), отбросив верхнюю часть рамы. Этот участок загружен распределенной нагрузкой, значит, продольная сила постоянна, поперечная сила является линейной функцией, изгибающий момент – квадратичной. Поэтому  $N$  определяем в одной точке,  $M$  и  $Q$  – в начале и конце участка.

При определении знака изгибающего момента предположим, что наблюдатель находится слева от оси, тогда в соответствии с правилом знаков получаем:

$$N_D = 0, \quad Q_D = 0, \quad Q_B = 4qa, \\ M_D = 0, \quad M_B = 8qa^2.$$

Знак плюс перед  $M_B$  означает, что его значение на эпюре нужно отложить в сторону наблюдателя, т. е. влево.

Ординаты  $Q$  в т. В и D соединяем наклонной прямой, ординаты  $M$  – квадратичной параболой (рисунок 2.10, а, б, в).

На рассматриваемом участке эпюра  $Q$  не пересекает ось, поэтому на эпюре  $M$  отсутствует экстремум. Если же экстремум имеет место, то его положение и значение определяются так же, как и при построении эпюр внутренних усилий в балке.

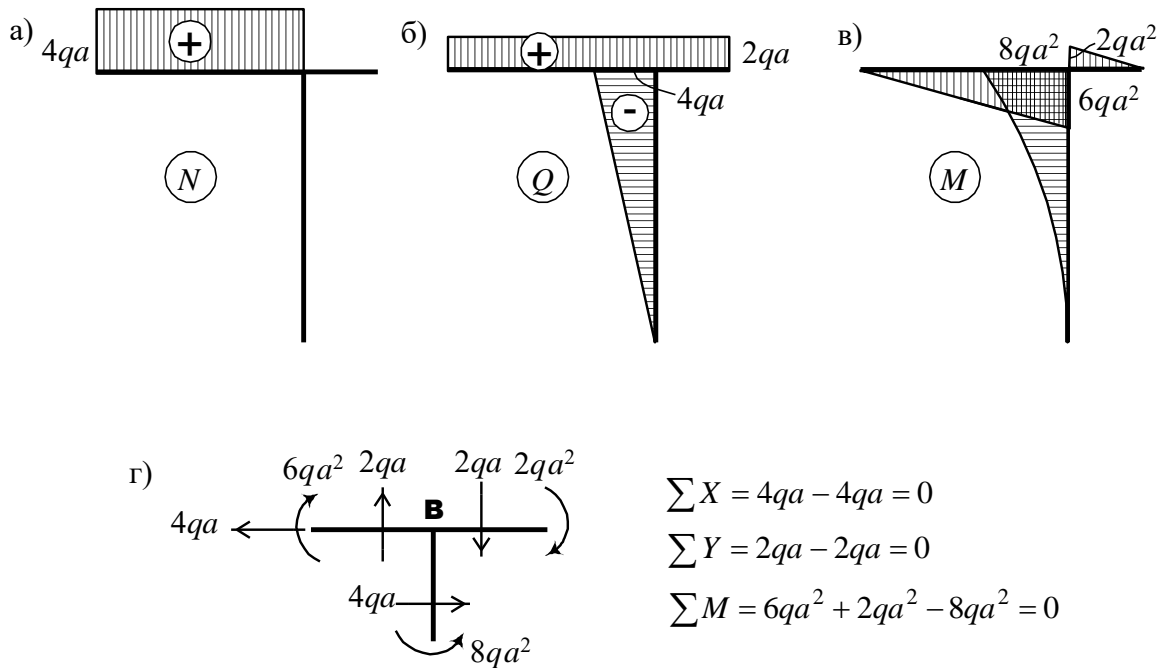


Рисунок 2.10 – Эпюры внутренних усилий (а, б, в) и их проверка (г)

После построения эпюр необходимо проверить равновесие узлов рамы, в которых соединяются два или более элементов. В данном случае – это узел В. Вырежем этот узел тремя сечениями (слева, справа и снизу) и покажем усилия  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  в этих сечениях в соответствии с построенными эпюрами (рисунок 2.10, г). Проверка, приведенная на рисунке, показывает, что узел В находится в равновесии.

## 2.6 Внутренние силы в криволинейных стержнях

В поперечных сечениях криволинейного стержня возникают те же внутренние силы, что и в раме. Изгибающий момент определяется так же, как для прямолинейного стержня. Продольная сила в сечении равна сумме проекций всех внешних

сил по одну сторону от сечения на касательную к оси стержня в этом сечении. Поперечная сила в сечении равна сумме проекций всех внешних сил по одну сторону от сечения на нормаль (перпендикуляр) к оси стержня в этом сечении. Покажем это на следующем примере (рисунок 2.11, а).

Ограничимся вначале случаем вертикальной нагрузки. На рисунке 2.11, а показана сила  $F_i$ , приложенная в произвольном сечении бруса на расстоянии  $a_i$  от левой опоры и  $b_i$  – от правой. В общем случае количество сил равно  $n$ .

Для определения вертикальных опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$  составим уравнения равновесия вида  $\sum M_A = 0$  и  $\sum M_B = 0$ .

В результате получим

$$R_A = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^n F_i b_i ; \quad R_B = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^n F_i a_i .$$

Горизонтальная опорная реакция в т. В равна нулю. Это следует из уравнения  $\sum F_x = 0$ .

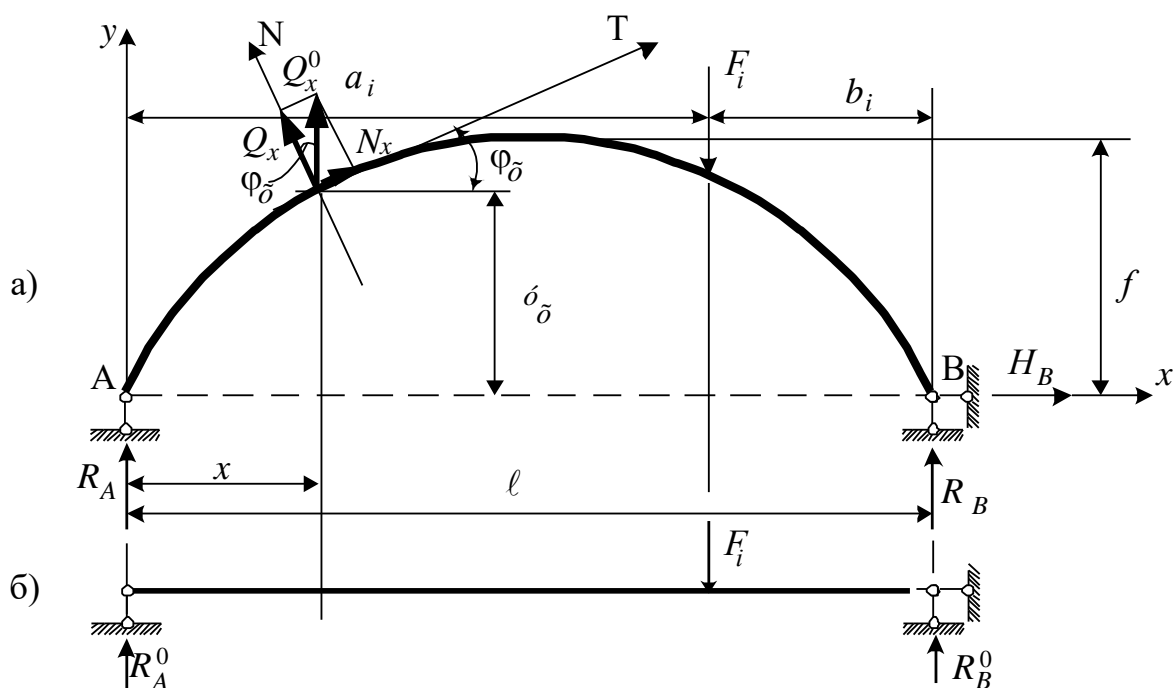


Рисунок 2.11 – Расчетная схема криволинейного бруса

Рассмотрим наряду с кривым брусом балку, опирающуюся в т. А и В и нагруженную так же, как брус (рисунок 2.11, б).



Полученные формулы для реакций показывают, что реакции  $R_A$  и  $R_B$  совпадают с опорными реакциями в балке:  $R_A = R_A^0$ ,  $R_B = R_B^0$ .

В произвольном сечении  $x$  кривого бруса изгибающий момент, поперечная и продольная силы соответственно равны

$$M_x = M_x^0, \quad Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x, \quad N_x = -Q_x^0 \sin \varphi_x,$$

где  $M_x^0$ ,  $Q_x^0$  – соответственно изгибающий момент и поперечная сила от заданной вертикальной нагрузки в сечении  $x$  в балке;

$$\cos \varphi_x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_x}}; \quad \sin \varphi_x = \frac{\operatorname{tg} \varphi_x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_x}},$$

где  $\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{dy}{dx}$  – производная функции  $y(x)$ , описывающей ось балки.

В криволинейных стержнях, очерченных *по дуге окружности*, положение произвольного сечения целесообразно определять при помощи полярной системы координат. Тогда выражения внутренних усилий будут представлены как функции угла  $\alpha$  (например, как на рисунке 2.12).

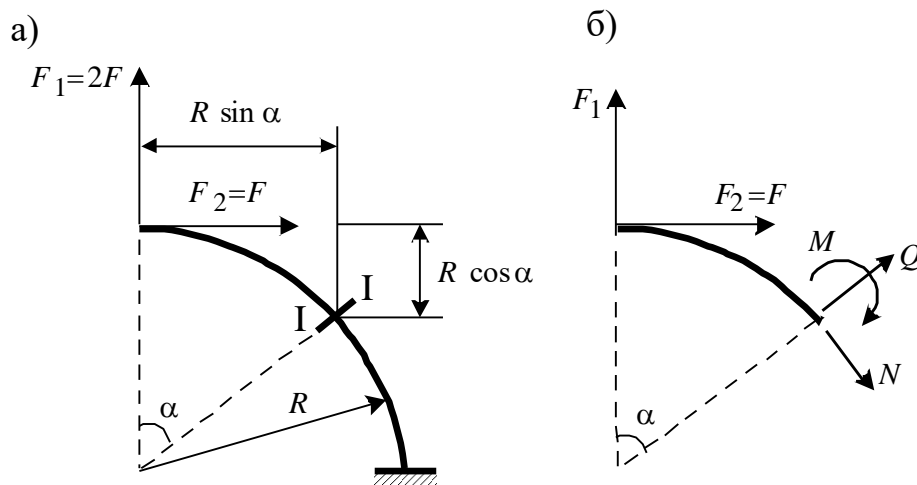


Рисунок 2.12 – Определение усилий в кривом стержне, очерченном по дуге окружности

Рассечем стержень в сечении I-I под произвольным углом  $\alpha$  и отбросим правую часть стержня (рисунок 2.12, б). Уравновесим оставшуюся часть внутренними усилиями  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  положительного направления. Запишем выражения этих внутренних усилий:

$$N = F_1 \sin \alpha - F_2 \cos \alpha ,$$

$$Q = F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \alpha ,$$

$$M = F_1 R \sin \alpha + F_2 (R - R \cos \alpha) .$$

Вычислим значения  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  при различных углах  $\alpha$ :

$$\text{при } \alpha = 0 \quad N = -F, \quad Q = 2F, \quad M = 0,$$

$$\text{при } \alpha = 45^\circ \quad N = 0,7F, \quad Q = 2,1F, \quad M = 1,7FR,$$

$$\text{при } \alpha = 90^\circ \quad N = 2F, \quad Q = F, \quad M = 3FR .$$

Откладывая полученные значения внутренних усилий по нормали к оси (т. е. по радиусу), построим эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$  (рисунок 2.13).

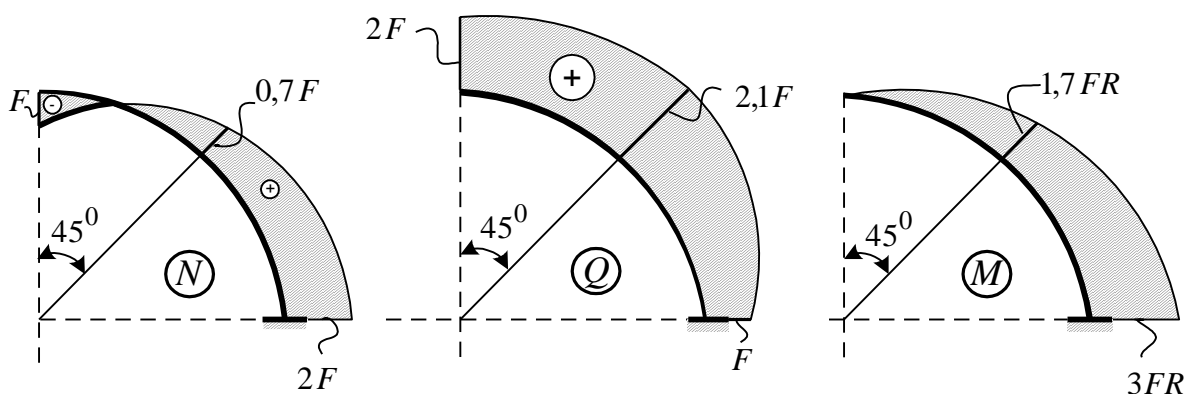


Рисунок 2.13 – Эпюры  $N$ ,  $Q$ ,  $M$

### *Дифференциальные зависимости при изгибе кругового стержня*

Выделим из произвольно нагруженного кругового стержня элемент  $ds$  двумя бесконечно близкими сечениями под углами  $\alpha$  и  $\alpha + d\alpha$  (рисунок 2.14). Элемент нагружен распределенной нагрузкой  $q$ . В силу малости элемента она считается равномерной.

В сечениях, ограничивающих элемент, действуют внутренние силы: продольные силы  $N$  и  $N + dN$ , поперечные силы  $Q$  и  $Q + dQ$ , изгибающие моменты  $M$  и  $M + dM$ .

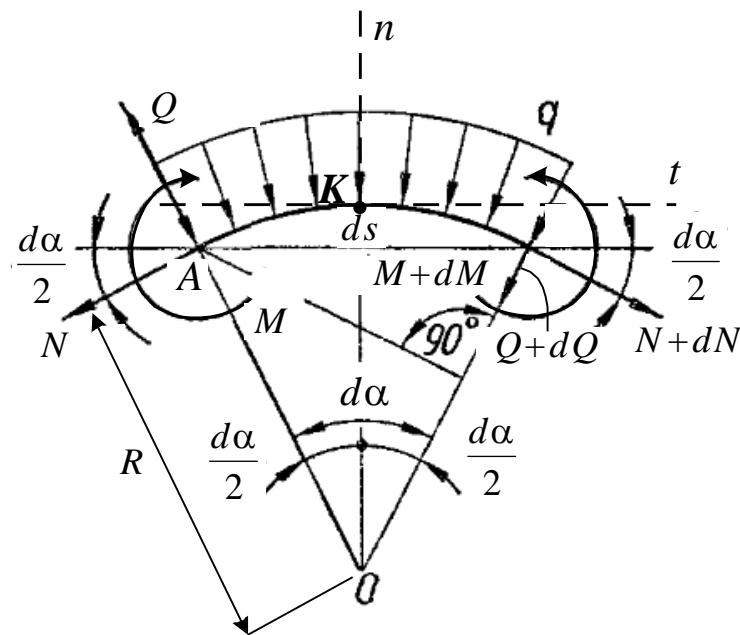


Рисунок 2.14 – К определению дифференциальных зависимостей в круговом стержне

Обозначим через  $n$  нормаль к элементу в т.  $K$ , через  $t$  – касательную к элементу в т.  $K$ . Составим уравнения равновесия элемента.

Первое уравнение равновесия

$$\sum_t = 0:$$

$$Q \sin \frac{d\alpha}{2} + N \cos \frac{d\alpha}{2} + (Q + dQ) \sin \frac{d\alpha}{2} - (N + dN) \cos \frac{d\alpha}{2} = 0.$$

Учитывая, что для малых углов  $d\alpha$   $\sin\frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$ ,  $\cos\frac{d\alpha}{2} \approx 1$ ,  
получим

$$\frac{dN}{d\alpha} = Q. \quad (2.4)$$

Второе уравнение равновесия:

$$\sum n = 0:$$

$$Q \cos \frac{d\alpha}{2} - (Q + dQ) \cos \frac{d\alpha}{2} - N \sin \frac{d\alpha}{2} - (N + dN) \sin \frac{d\alpha}{2} - qR d\alpha = 0,$$

откуда

$$\frac{dQ}{d\alpha} = -N - qR. \quad (2.5)$$

Третье уравнение:

$$\sum M_A = 0: Qrd\alpha + M - (M + dM) - qrd\alpha \frac{rd\alpha}{2} = 0,$$

откуда, отбрасывая величины второго порядка малости, найдем

$$\frac{dM}{d\alpha} = QR. \quad (2.6)$$

Из формул (2.4) – (2.6) следуют такие свойства эпюр  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  для круговых стержней:

- 1) согласно формулам (2.4) и (2.6), в сечениях, где  $Q=0$ , на эпюрах  $N$  и  $M$  имеются экстремумы, т. е. касательные к эпюрам параллельны касательным к оси стержня в этих сечениях;
- 2) согласно выражению (2.5), в сечениях, где  $N=0$ , на эпюре  $Q$  имеются экстремумы (в отсутствие распределенной нагрузки  $q$ ).

Зависимости (2.4) – (2.6) позволяют проверять правильность составления выражений для  $N$ ,  $Q$  и  $M$  при изгибе кругового криволинейного стержня. Так, нетрудно убедиться, что выражения для  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  в примере (рисунок 2.12) составлены правильно:

$$\frac{dN}{d\alpha} = F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \alpha = Q,$$

$$\frac{dQ}{d\alpha} = -F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \alpha = -N \quad (q=0),$$

$$\frac{dM}{d\alpha} = F_1 R \cos\alpha + F_2 R \sin\alpha = QR .$$

### 3 РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

**Растяжение (сжатие)** – это деформация, которая происходит под действием сил, направленных вдоль оси элемента.

Растянутый (сжатый) стержень называют также *брусом*.

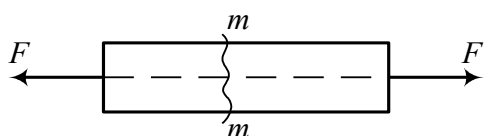


Рисунок 3.1 – Центральное растянутое стержень

Простейший вариант такой деформации – растяжение под действием двух равных противоположно направленных сил, приложенных к торцам элемента и направленных вдоль его оси (рисунок 3.1).

Для уравнивания внешних сил при растяжении (сжатии) в сечении возникает единственное *внутреннее усилие, действующее вдоль оси элемента, – продольная (осевая) сила  $N$*  (п.п. 1.6, 2.2).

Растяжение или сжатие происходит в различных элементах конструкций и машин. Например, трос подъемника при подъеме груза растянут, колонны каркаса многоэтажного здания преимущественно сжаты, элементы ферм могут быть растянутыми или сжатыми и т. д. Примером растянутого элемента может служить также винт вагонной стяжки.

#### 3.1 Напряжения в сечениях, перпендикулярных к оси бруса

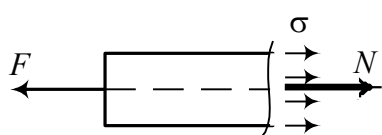


Рисунок 3.2 – К определению нормальных

Сделаем поперечный разрез *m-m* на некотором удалении от торца стержня (рисунок 3.1) и отбросим правую часть, действие которой заменим продольной силой  $N$ , распределенной по сечению (рисунок 3.2).

Сечение при растяжении осталось плоским (гипотеза плоских сечений, п. 1.1). Интенсивность внутренних сил в сечении, т. е. величина их на единицу площади, является

нормальным напряжением  $\sigma$  (п. 1.7.1).

Согласно гипотезе Сен-Венана (п. 1.1) в сечении, достаточно удаленном от торца, напряжения распределены равномерно:  $\sigma = \text{const}$ . Выразим продольную силу как равнодействующую напряжений по сечению:

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma A,$$

откуда получаем формулу для определения нормальных напряжений в сечении, перпендикулярном оси:

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}}, \quad (3.1)$$

где  $N$  – продольная сила в сечении;

$A$  – площадь поперечного сечения.

Формулу (3.1) можно применять при определении нормальных напряжений в растянутых стержнях и в коротких сжатых стержнях (понятие короткого и длинного стержней вводится при изучении устойчивости сжатых стержней; длинный стержень может изогнуться при осевом сжатии).

Касательные напряжения  $\tau$  в поперечном сечении равны нулю, потому что все внутренние силы перпендикулярны сечению.

### 3.2 Напряжения в сечениях, наклонных к оси бруса

Рассмотрим напряжения, которые возникают в бруске по площадкам, наклонным к его оси (рисунок 3.3).

Рассечем стержень по наклонному сечению и отбросим правую его часть (рисунок 3.3, б). На наклонной площадке полные напряжения  $p_\alpha$  будут направлены вдоль продольной оси и распределены равномерно. Оставшаяся левая часть стержня уравнивается продольной силой  $N$ :

$$N = p_\alpha A_\alpha,$$

где  $A_\alpha$  – площадь наклонного сечения,

$$A_\alpha = A / \cos \alpha.$$



Таким образом, полное напряжение на наклонной площадке равно

$$p_{\alpha} = \frac{N}{A_{\alpha}} = \frac{N}{A} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha, \quad (3.2)$$

где  $\sigma$  – напряжение в сечении, перпендикулярном оси ( $\alpha = 0$ ).

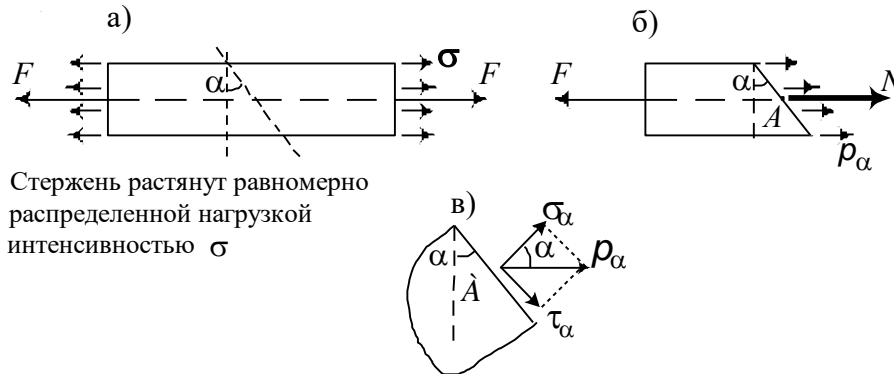


Рисунок 3.3 – Напряжения на наклонных площадках растянутого стержня

Разложим полное напряжение на нормальное и касательное напряжения (п. 1.7.1, рисунок 3.3, в):

$$\sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cos \alpha, \quad \tau_{\alpha} = p_{\alpha} \sin \alpha,$$

откуда с учетом формулы (3.2) имеем

$$\boxed{\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha} \quad (3.3)$$

формулы для напряжений в сечении, наклонном к поперечному под углом  $\alpha$ .

Исследуем эти выражения.

*Нормальное напряжение:*

– максимально  $\sigma_{\max} = \sigma$  при  $\alpha = 0$ , т. е. в поперечном сечении;

– минимально  $\sigma_{\min} = 0$  при  $\alpha = 90^\circ$ , т. е. на площадках, параллельных оси бруса;

$$\sigma_{\alpha} = 0,5\sigma \text{ при } \alpha = 45^\circ.$$

*Касательное напряжение:*

– максимально по абсолютной величине при  $\alpha = 45^\circ$  ( $\alpha = 135^\circ$ ), т. е. на площадках, наклоненных к оси бруса под углом  $45^\circ$

(рисунок 3.4), значение максимального напряжения  $\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$ ;

– минимально по абсолютной величине при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 90^\circ$ , т. е. на площадках, перпендикулярных и параллельных оси бруса, при этом  $\tau_{\min} = 0$ .

Напряжения, действующие по площадкам  $\alpha = 45^\circ$  ( $135^\circ$ ), показаны на рисунке 3.4.

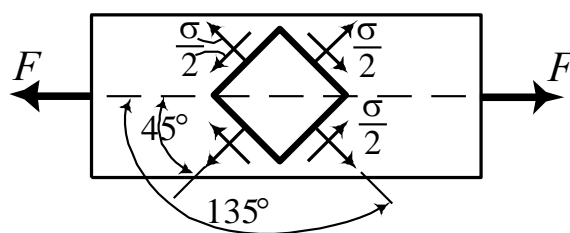


Рисунок 3.4 – Действие напряжений на площадках, наклоненных к оси бруса под углом  $\alpha = 45^\circ$  ( $135^\circ$ )

### 3.3 Деформации при растяжении и сжатии

#### 3.3.1 Продольная и поперечная деформации

Рассмотрим брус, нагруженный на конце силой  $F$  (рисунок 3.5).

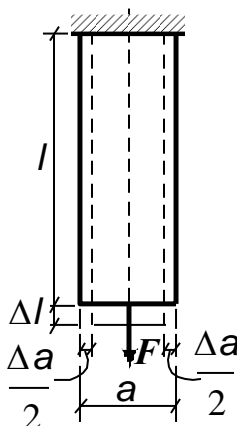


Рисунок 3.5 – Деформации бруса при растяжении

Длину бруса до деформации обозначим через  $l$ , а изменение длины – через  $\Delta l$ . Изменение длины бруса  $\Delta l$  называется *абсолютным удлинением* (укорочением) или *абсолютной*

*продольной деформацией*. Полное удлинение (укорочение) измеряется в линейных единицах длины (м, см, мм).

*Относительным удлинением (относительной продольной деформацией)* называют ту долю абсолютной продольной деформации, которая приходится на единицу длины бруса. Относительное удлинение равно отношению абсолютного удлинения к начальной длине:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3.4)$$

Величины как относительных, так и абсолютных продольных деформаций стержней, выполненных из наиболее распространенных строительных материалов, весьма малы (см. п. 1.1). Так, для реальных строительных материалов они имеют порядок  $\varepsilon \approx 10^{-3}$ .

Продольная деформация сопровождается изменением поперечных размеров: при растяжении они уменьшаются, а при сжатии увеличиваются. Изменение поперечных размеров бруса при растяжении и сжатии называется поперечной деформацией.

Обозначим через  $a$  один из поперечных размеров бруса до деформации (рисунок 3.5). При растяжении этот размер уменьшится на величину  $\Delta a$ , которая называется *абсолютной поперечной деформацией* или абсолютным поперечным сужением. Отношение абсолютного поперечного сужения к начальному размеру называется *относительной поперечной деформацией*

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}. \quad (3.6)$$

Относительная деформация – безразмерная величина.

### 3.3.2 Коэффициент Пуассона

Относительная поперечная деформация при малых деформациях прямо пропорциональна соответствующей продольной деформации и обратна ей по знаку:

$$\varepsilon' = -\nu \varepsilon, \quad (3.7)$$

где  $\nu$  – коэффициент поперечной деформации, или коэффициент Пуассона.

Итак, коэффициент Пуассона равен абсолютной величине отношения относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (3.8)$$

Это безразмерный коэффициент, характеризующий упругие свойства материала и определяемый экспериментально.

Считая, что объем элемента при деформации не уменьшается, можно показать, что значение коэффициента Пуассона не превышает 0,5:  $0 < \nu \leq 0,5$ . Например, для пробки  $\nu$  близок к нулю, для каучука – близок к 0,5, для прокатной стали  $\nu = 0,3$ .

### 3.3.3 Закон Гука при растяжении-сжатии (связь между деформацией и напряжением)

В 1676 г. английский ученый Р. Гук опытным путем обнаружил пропорциональную зависимость между величиной растягивающей силы и соответствующим ей удлинением. В 1826 г. французский ученый Л. Навье определил коэффициент пропорциональности как модуль упругости  $E$  – отношение нагрузки, приходящейся на единицу площади сечения, к произведенному ею относительному удлинению (это определение отличается от введенного Т. Юнгом модуля, но Юнг установил, что закон Гука верен только в пределах упругости).

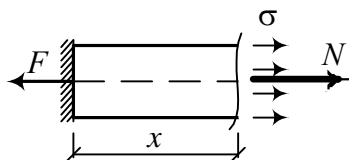
Применяя введенное в 1822 г. французским ученым Л. Коши понятие напряжения, закон Гука формулируют в виде

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3.9)$$

то есть нормальное напряжение в сечении равно произведению модуля упругости  $E$  на относительное удлинение.

Модуль упругости характеризует одно из важнейших свойств материала – жесткость. Его значение для материала определяется опытным путем, измеряется в мегапаскалях (МПа).

### 3.3.4 Растяжение бруса сосредоточенной силой



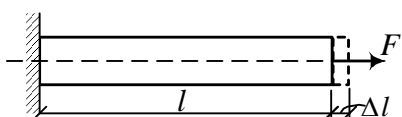
Рассмотрим произвольное сечение стержня, в котором действует продольная сила  $N$  (рисунок 3.6).

Подставим в закон Гука выражения  $\sigma$  (3.1) и  $\varepsilon$  (3.4):

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta x}{x},$$

откуда для сечения на расстоянии  $x$  от закрепления

$$\Delta x = \frac{N x}{EA} \quad (3.10)$$



Для удлинения всего бруса сосредоточенной силой (рисунок 3.7) получаем



$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}, \quad (3.11)$$

где  $\Delta l$  – удлинение бруса (рисунок 3.7);

$l$  – исходная длина бруса;

$F$  – сила, приложенная на свободном конце бруса;

$E$  – модуль упругости I рода;

$A$  – площадь поперечного сечения.

Произведение  $EA$  называется *жесткостью при растяжении-сжатии* и имеет размерность силы.

Если брус удлиняется, то  $\Delta l > 0$ , если укорачивается –  $\Delta l < 0$ .

### 3.3.5 Растяжение ступенчатого бруса

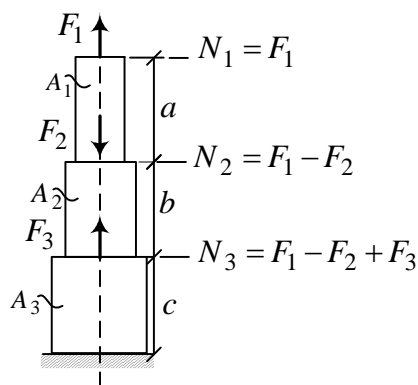


Рисунок 3.8

Если брус растягивается несколькими силами, как показано на рисунке 3.8, то в пределах каждого участка, где продольная сила имеет постоянное значение, вычисление перемещений от каждой силы можно производить по формулам (3.9). Полное удлинение в соответствии с принципом независимости (п. 1.1) действия сил равно сумме удлинений от каждой из сил в отдельности.

Для приведенного стержня удлинение равно

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{N_1 a}{EA_1} + \frac{N_2 b}{EA_2} + \frac{N_3 c}{EA_3} = \\ &= F_1 \left( \frac{a}{EA_1} + \frac{b}{EA_2} + \frac{c}{EA_3} \right) - F_2 \left( \frac{b}{EA_2} + \frac{c}{EA_3} \right) + F_3 \frac{c}{EA_3}. \end{aligned}$$

### 3.3.6 Растяжение бруса под действием собственного веса

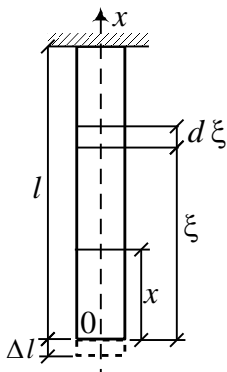


Рисунок 3.9

Рассмотрим растяжение бруса собственным весом, распределенным по длине стержня (рисунок 3.9). Удельный вес материала равен  $\gamma$ , площадь поперечного сечения –  $A$ . Начало координат поместим в нижнюю точку стержня.

Определим удлинение части стержня выше сечения  $x$ .

Удлинение элемента бесконечно малой длины  $d\xi$ , на котором продольную силу можно принять постоянной, равно согласно выражению (3.10)

$$\Delta d\xi = \frac{N_\xi d\xi}{EA}.$$

В сечении на расстоянии  $\xi$  от свободного конца бруса продольная сила равна

$$N_\xi = \gamma \xi A.$$

Полное удлинение участка длиной  $x$  получим, просуммировав удлинения всех бесконечно малых отрезков выше сечения:

$$\Delta x = \int_x^l \frac{N_\xi d\xi}{EA} = \int_x^l \frac{\gamma \xi A d\xi}{EA} = \frac{\gamma}{EA} (l^2 - x^2).$$

Удлинение всего бруса получим при  $x = 0$ :

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (3.12)$$

#### Замечания

1 Если приложить вес бруса  $P = \gamma l A$  к нижнему сечению как сосредоточенную силу, то его удлинение согласно выражению (3.11) будет равно

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA} = \frac{(\gamma l A)l}{EA} = \frac{\gamma l^2}{E}.$$

Таким образом, удлинение бруса от собственного веса вдвое меньше того, которое вызвал бы груз, равный весу бруса и приложенный на его конце.

2 Приложим вес бруса как сосредоточенную силу на середине его длины. Удлинение бруса получим по формуле (3.10), подставив в качестве начальной длины  $x = l/2$ :

$$\Delta l = \frac{P(l/2)}{EA} = \frac{(\gamma l A)l}{2EA} = \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

Таким образом, удлинение бруса от собственного веса такое же, как от сосредоточенной силы, равной весу бруса и приложенной в его центре тяжести.

### 3.3.7 Брус равного сопротивления

В некоторых инженерных конструкциях собственный вес – одно из основных нагружений. При расчете канатов подъемников, опор мостовых ферм, стен высоких зданий, башен маяков влияние собственного веса нужно учитывать. При этом продольная сила и напряжение возрастают по мере приближения сечения к основанию. Если площадь поперечного сечения при этом не изменяется, то все сечения, кроме нижнего, оказываются недогруженными. Поэтому в случаях, когда необходимо учитывать вес, применяют брусья переменного сечения, в которых напряжение во всех сечениях одинаково и равно допускаемому  $[\sigma]$  (см. ниже п. 3.5.1). Такой брус наиболее экономичен с точки зрения затрат материала и называется *брусом равного сопротивления или равнопрочным*.

Боковая поверхность такого бруса с распределенным весом  $\gamma$  имеет сложную форму (рисунок 3.10, а), поэтому вместо него часто применяют брусья в виде усеченных пирамид или ступенчатые (рисунок 3.10, б, в).

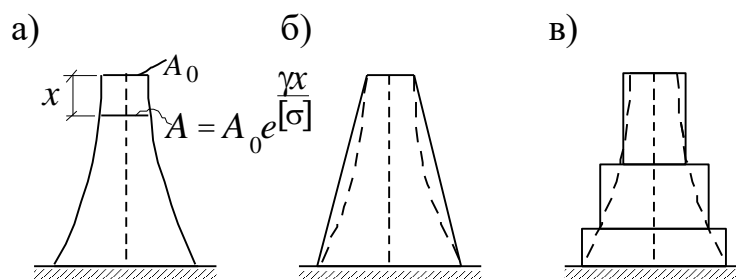


Рисунок 3.10 – Брусья переменного сечения: брус равного сопротивления (а); усеченная пирамида (б); ступенчатый брус (в)

### 3.4 Испытания материалов на растяжение и сжатие. Механические характеристики материалов

Чтобы иметь возможность судить о прочности элементов конструкций под нагрузкой, нужно изучить основные свойства применяемых материалов и их поведение при увеличении нагрузки вплоть до разрушения. Для этого образцы материала испытывают в лаборатории на специальных машинах.

Металлические образцы для испытания на растяжение изготавливают в виде цилиндрических стержней круглого сечения или прямоугольных плоских образцов. Цилиндрические образцы имеют на концах утолщения (головки), а плоские – уширения. Этими концами образцы закладывают в захваты испытательной машины, после чего растягивают. Часть образца между головками называется рабочей частью. Для получения сравнительных результатов испытаний данного материала, произведенных на различных образцах, необходимо, чтобы образцы имели определенные соотношения размеров. Эти соотношения и сами размеры установлены стандартом (ГОСТ 1497-84).

#### 3.4.1 Диаграммы растяжения пластичных и хрупких материалов

Рассмотрим вначале результаты испытаний на растяжение образцов *пластичных материалов* на примере низкоуглеродистой стали (рисунок 3.11).



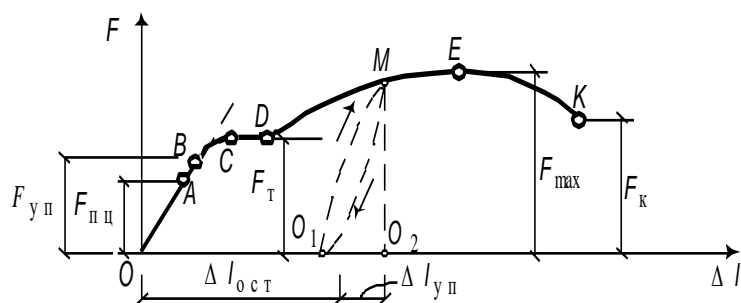


Рисунок 3.11 – Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали

В начальной стадии нагружения до т. А диаграмма растяжения представляет собой наклонную прямую, что указывает на пропорциональность между нагрузкой и деформацией – справедливость закона Гука (3.9). Максимальная нагрузка, при которой эта пропорциональность еще не нарушается, на диаграмме обозначена через  $F_{пц}$  и используется для вычисления предела пропорциональности. *Пределом пропорциональности* называется напряжение  $\sigma_{пц}$ , до которого существует прямо пропорциональная зависимость между нагрузкой и деформацией:

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0},$$

где  $A_0$  – площадь поперечного сечения образца.

Для стали Ст3 предел пропорциональности приблизительно равен  $\sigma_{пц} = (195 - 200) \text{ МПа}$ .

Зона ОА называется зоной упругости. Здесь возникают только упругие, очень незначительные деформации (0,1 %). Данные, характеризующие эту зону, позволяют определить значение модуля упругости  $E$ .

После достижения предела пропорциональности деформации начинают расти быстрее, чем нагрузка, и диаграмма становится криволинейной. На этом участке, в непосредственной близости от т. А, находится т. В, соответствующая пределу упругости. *Пределом упругости*  $\sigma_{уп}$  называется максимальное напряжение, при котором в материале не обнаруживаются признаков пластической (остаточной) деформации (0,001 – 0,03 %).

Предел упругости характеризует начало перехода от упругой деформации к пластической.

У большинства металлов значения предела пропорциональности и предела упругости незначительно отличаются друг от друга. Для стали Ст3  $\sigma_{уп} = (205 - 210)$  МПа.

При дальнейшем нагружении криволинейная часть диаграммы переходит в почти горизонтальный участок  $CD$  – площадку текучести. Здесь деформации растут практически без увеличения нагрузки. Нагрузка  $F_T$ , соответствующая т.  $D$ , используется при определении физического предела текучести

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}.$$

*Физическим пределом текучести*  $\sigma_T$  называется наименьшее напряжение, при котором образец деформируется без заметного увеличения растягивающей нагрузки.

Предел текучести является одной из основных механических характеристик прочности металлов. Для Ст3  $\sigma_T = (220 - 250)$  МПа. При этом относительная деформация составляет  $\varepsilon = (\Delta l / l) \cdot 100\% \approx 2\%$ .

Зона  $BD$  называется *зоной общей текучести*. В этой зоне значительно развиваются пластические деформации. При этом у образца повышается температура, изменяются электропроводность и магнитные свойства. Особенно наглядно фронт распространения пластической деформации вдоль образца можно наблюдать при испытании плоских полированных образцов. На поверхности таких образцов в момент возникновения пластической деформации появляются темные наклонные полосы, которые, как правило, с осью образца составляют углы  $45^\circ - 60^\circ$  (линии Людерса-Чернова). Эти линии возникают вследствие необратимых сдвигов, происходящих в кристаллах под действием небольших касательных напряжений. Описанные явления вызывают изменение внутренней структуры металла, что приводит к его упрочнению. Диаграмма после зоны текучести снова становится криволинейной. Образец способен воспринимать возрастающее усилие до значения  $F_{max}$  – т.  $E$  на

диаграмме. Усилие  $F_{\max}$  используется для вычисления временного сопротивления

$$\sigma_B = \frac{F_{\max}}{A}.$$

Напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца, называется *временным сопротивлением (пределом прочности)*.

Для стали марки Ст3 временное сопротивление  $\sigma_B = (370 - 470)$  МПа. Относительная деформация при этом составляет  $\approx 16\%$ .

Зона *DE* называется *зоной упрочнения*. Здесь удлинение происходит равномерно по всей длине, первоначальная цилиндрическая форма образца сохраняется, а поперечное сечение изменяется незначительно и также равномерно. При максимальном усилии на образце в наиболее слабом месте возникает локальное уменьшение поперечного сечения – *шейка* (а иногда и две). Дальнейшая деформация происходит в этой зоне образца. Сечение в середине шейки продолжает быстро уменьшаться, но напряжения в этом сечении все время растут, хотя растягивающее усилие и убывает. Вне области шейки напряжения уменьшаются, и поэтому удлинения остальной части образца не происходит. Наконец, в т. *K* образец разрушается. Сила, соответствующая т. *K*, называется разрушающей, а напряжение – истинным пределом прочности, которое равно

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A_K},$$

где  $A_K$  – площадь поперечного сечения в месте разрыва.

Зона *EK* называется зоной местной текучести. Истинное напряжение в момент разрыва (в шейке) в образце из стали Ст3 достигает 900 – 1000 МПа.

Помимо указанных характеристик прочности по результатам испытаний образца (рисунок 3.11) определяют *характеристики пластичности*.

Относительное удлинение после разрыва

$$\delta = \frac{l_K - l_0}{l_0} \cdot 100\%,$$

где  $l_k$  – расчетная длина рабочей части образца после разрыва;

$l_0$  – первоначальная длина рабочей части образца

$$(l_0/d_0 = 5 \div 10);$$

$d_0$  – первоначальный диаметр образца.

Для стали марки Ст3 характеристика пластичности  $\delta = (25 - 27)\%$ .

Другой характеристикой пластичности является относительное сужение после разрыва  $\psi$ , %:

$$\psi = \frac{A_0 - A_k}{A_0} \cdot 100\%,$$

где  $A_0$  – начальная площадь поперечного сечения образца.

Для стали марки Ст3  $\psi = (60 - 70)\%$ .

Если образец после нагрузки, соответствующей пределу текучести (рисунок 3.11), разгрузить, то процесс разгрузки будет изображен линией  $MO_1$ , почти параллельной первоначальному упругому участку диаграммы. Удлинение, полученное образцом до начала разгрузки, при разгрузке полностью не исчезает. *Остаточное удлинение  $\Delta l_{ост}$  называется пластическим удлинением* ( $\Delta l_{уп}$  – упругое удлинение). Следовательно, за пределом упругости полное удлинение образца состоит из двух частей – упругой и пластической:

$$\Delta l = \Delta l_{уп} + \Delta l_{ост},$$

а до предела упругости – только из чисто упругой –  $\Delta l_{ост} = 0$ .

Если после разгрузки образца его тут же снова нагрузить, то процесс повторного нагружения отобразится линией  $O_1M$ , которая почти совпадает с линией  $MO_1$ , описывающей процесс разгрузки. Обе линии (разгрузки и нагрузки) образуют петлю – *петлю гистерезиса*. Площадь петли гистерезиса соответствует потерям механической энергии за один цикл, которые весьма малы. Эти потери называются внутренним (молекулярным) трением.

При дальнейшем нагружении (после т.  $M$ ) кривая продолжается так, как будто не было промежуточной разгрузки. Следовательно, у образца после предварительного

деформирования улучшились упругие свойства – повысились предел пропорциональности и предел упругости, но зато ухудшились пластические свойства – уменьшилось остаточное удлинение после разрыва, т. е. материал стал более хрупким. Явление повышения упругих свойств материала в результате предварительного пластического деформирования называется *наклепом*.

Диаграмма растяжения в осях  $F - \Delta l$  (рисунок 3.11) характеризует свойства образца, так как зависит от его размеров. Для оценки механических свойств материала диаграмму растяжения перестраивают в координатах “напряжение-деформация”. Для этого все ординаты делят на первоначальную площадь поперечного сечения  $A_0$ , а все абсциссы – на первоначальную длину рабочей части  $l_0$ . В результате получаем диаграмму напряжений  $\sigma - \varepsilon$ , которая имеет тот же вид, что и диаграмма  $F - \Delta l$ , так как  $A_0$  и  $l_0$  постоянны. Эта диаграмма является условной, поскольку при ее построении не учитывается изменение значений  $A_0$  и  $l_0$  в процессе испытания. Истинные напряжения в каждый момент нагружения будут больше условных. Заметное отклонение истинных напряжений от условных происходит после предела текучести, так как сужение сечения становится более значительным. Диаграммы истинных напряжений строятся, как правило, для теоретических исследований, например, при решении задач образования больших деформаций. Условные диаграммы используются на практике для определения механических характеристик материала  $\sigma_{\text{пл}}, \sigma_{\text{уп}}, \sigma_{\text{T}}, \sigma_{\text{В}}, \sigma_{\text{К}}, \delta, \psi$  и модуля упругости  $E$ .

Некоторые материалы не имеют физического предела текучести (например, низколегированная сталь), в этом случае он определяется условно как напряжение, при котором остаточное удлинение достигает 0,2 % от рабочей длины образца.

При растяжении образцов из *хрупкого материала* (чугуна) на диаграмме (рисунок 3.12) почти не получается прямолинейного участка: искривление линии графика начинается при сравнительно низких напряжениях, но так как деформации в этом случае малы, отклонение от закона Гука незначительное.

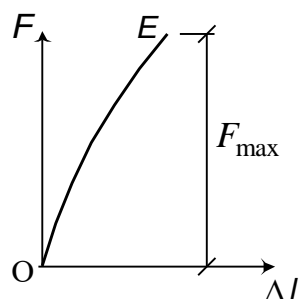


Рисунок 3.12 – Диаграмма растяжения чугуна

Разрыв образцов из хрупких материалов происходит почти внезапно при очень малых удлинениях ( $\approx 0,4-1\%$  от расчетной длины образца).

Характер разрушения чугунного образца существенно отличается от разрушения стального. Разрушение чугунного образца происходит в результате отрыва по площадке, перпендикулярной направлению растягивающей силы. На поверхности излома видна крупнозернистая структура материала.

### 3.4.2 Диаграммы сжатия различных материалов

Если на концах прямого бруса приложены силы, направленные вдоль его оси навстречу друг другу, то в брусѣ возникает сжатие. Длина бруса должна быть не более чем в пять-шесть раз больше меньшего из его поперечных размеров, чтобы не возникало продольного изгиба (то есть искривления прямолинейной формы бруса).

Испытанию на сжатие подвергают короткие образцы обычно круглого или квадратного сечения. Образец помещают между опорными плитами прѣсса, которые, сближаясь, сжимают его. Но на результат опыта сильно влияет трение, возникающее между основаниями образца и опорными плитами прѣсса. Сжатый в продольном направлении образец стремится расширяться в поперечных направлениях, однако у концов образца трение препятствует такому расширению.

Для уменьшения влияния трения производят смазку маслом или парафином. При этом предел прочности получается несколько ниже по сравнению с образцами, испытываемыми без смазки. Таким образом, получаемый из опыта предел прочности

является в значительной мере условной величиной, поэтому установлены стандартные пределы.

Хрупкие материалы, например, чугун, при испытании на сжатие без смазки торцов разрушается в основном от сдвига по площадкам с наибольшими касательными напряжениями (рисунок 3.13, а). Диаграмма с самого начала имеет почти линейную зависимость (рисунок 3.13, в). На этом участке диаграммы форма и размеры образца изменяются незначительно. При приближении к максимальной нагрузке кривая диаграммы становится более полой, и образец принимает слегка бочкообразную форму.

При хорошо смазанных торцах разрушение образцов из хрупких материалов сопровождается образованием продольных трещин (рисунок 3.13, б). Причиной их появления является неравномерное распределение усилий по поверхности соприкосновения образца с плитой, которое при больших деформациях вызывает перекося элементарных частиц внутри образца. В результате появляются отрывающие усилия в сечениях, параллельных оси бруса.

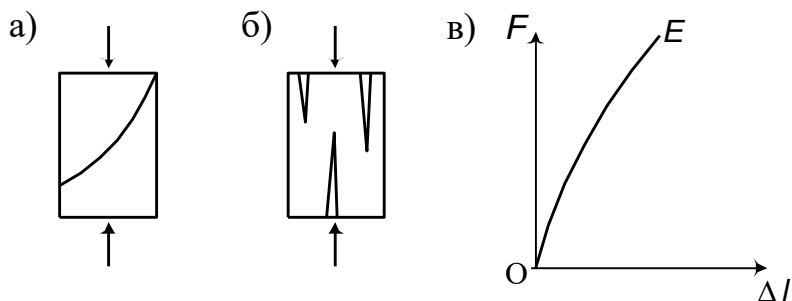


Рисунок 3.13 – Диаграмма сжатия чугуна

Большинство хрупких материалов (бетон, камень) разрушаются при сжатии так же, как чугун, и имеют подобную диаграмму (рисунок 3.13, в). Хрупкие материалы сопротивляются сжатию значительно лучше, чем растяжению. Например, у серого чугуна предел прочности на сжатие равен 560–900 МПа, а на растяжение – 120–190 МПа, т. е. примерно в 4-5 раз меньше.

Образцы из пластичных материалов – стали, свинца, меди (рисунок 3.14) при сжатии значительно укорачиваются, сильно расширяясь в поперечном направлении, но трещин, характерных для сдвига, в них не наблюдается.

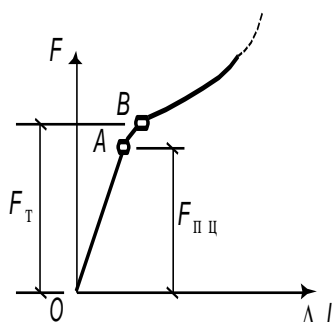


Рисунок 3.14 – Диаграмма сжатия низкоуглеродистой стали

Начальный участок диаграммы является прямолинейным – до т. А (рисунок 3.14). Угол наклона совпадает с углом наклона аналогичного участка диаграммы растяжения. Это свидетельствует о том, что модуль упругости у стали при растяжении и сжатии можно принимать одинаковым. После т. А диаграмма плавно переходит в кривую, подобную диаграмме растяжения. Площадка текучести здесь выражена слабо. При дальнейшем нагружении, когда развиваются значительные пластические деформации, образец сплющивается, принимая бочкообразную форму. Обычно на этом испытание заканчивают, так как образец разрушить не удастся, не удастся определить и предел прочности. Значения предела пропорциональности и предела текучести при растяжении и сжатии практически одинаковы.

Рассмотрим еще диаграмму сжатия древесины (рисунок 3.15). Древесина относится к анизотропным материалам, сопротивляемость которых внешней нагрузке зависит от расположения волокон при испытании.

При сжатии образца вдоль волокон (кривая 1 на рисунке 3.15, а) на участке ОА древесина работает почти упруго, и рост деформаций фактически происходит пропорционально увеличению нагрузки.

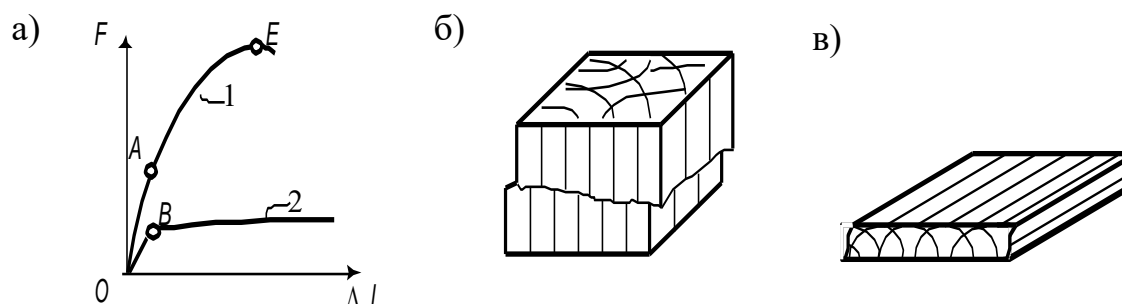




Рисунок 3.15 – Диаграмма сжатия древесины  
вдоль (1) и поперек (2) волокон

При дальнейшем увеличении нагрузки деформации начинают расти быстрее, чем усилия. Это указывает на упругопластическую область работы материала. Разрушение образца происходит при нагрузке  $F_{\max}$  (т.  $E$ ) с образованием характерной складки (рисунок 3.15, б).

При сжатии образца поперек волокон (кривая 2 на рисунке 3.15, а) до небольшой нагрузки (т.  $B$ ), соответствующей пределу пропорциональности, между нагрузкой и деформацией существует линейная зависимость. Затем деформации быстро увеличиваются, а нагрузка растет незначительно. В результате образец спрессовывается – уплотняется. Разрушающая нагрузка определяется условно. Она соответствует деформации сжатия образца на  $1/3$  своей первоначальной высоты. *Сопротивление древесины сжатию вдоль волокон в 8-10 раз больше сопротивления поперек волокон.*

Описанные выше испытания материалов проводятся при нормальных условиях, т. е. при температуре  $20^{\circ}\text{C}$ , непрерывном и плавном перемещении захватов машины со скоростью не более 10 мм/мин. Однако существуют различные условия, в которых приходится работать материалу строительных конструкций. Например, при повышенных или пониженных температурах, при действии радиоактивных, особенно нейтронных, проникающих излучений, при быстром изменении нагрузки и др. При этом механические свойства материалов изменяются и зависят от условий эксплуатации конструкций, элементов машин и механизмов.

Механические характеристики некоторых материалов приведены в приложении А.

### 3.5 Расчеты на прочность

В строительстве и машиностроении применяют различные методы расчета на прочность, которые различаются выбором критерия наступления опасного состояния, при котором может наступить разрушение, то есть выбором условия прочности. При расчете механических узлов и деталей машиностроительных конструкций основным остается метод допускаемых напряжений.

### 3.5.1 Метод допускаемых напряжений

При выборе размеров элемента конструкции нужно обеспечить некоторый запас, обеспечивающий невозможность его разрушения или пластических деформаций. Элемент должен быть запроектирован так, чтобы не наступило *опасное состояние*, то есть чтобы наибольшие напряжения, возникающие в нем при работе, были не больше тех, при которых материал разрушается (т. е. предела прочности  $\sigma_B$ ) или наблюдается текучесть (т. е. предела текучести  $\sigma_T$ ).

Чтобы не допустить риск разрушения сооружения, можно допускать в его элементах напряжения, которые будут составлять лишь часть предела прочности материала. Таким образом, должно выполняться *условие прочности*:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad (3.13)$$

где  $\sigma_{\max}$  – наибольшее напряжение, возникающее в одной из точек опасного сечения и определяемое расчетом;

$[\sigma]$  – *допускаемое напряжение*, полученное для данного материала на основании экспериментальных исследований.

*Допускаемым напряжением* называют то наибольшее напряжение, при котором конструкция будет работать длительное время без опасности ее разрушения.

Допускаемое напряжение  $[\sigma]$  определяется следующим образом:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{оп}}}{n},$$

где  $n > 1$  – коэффициент запаса;

$\sigma_{оп}$  – напряжение в опасном состоянии, которое равно

$$\sigma_{оп} = \begin{cases} \sigma_B & \text{для хрупких материалов,} \\ \sigma_T & \text{для пластичных материалов.} \end{cases}$$

Значение коэффициента запаса зависит от материала, назначения сооружения, характера действия нагрузок и многих других факторов. Основными факторами, которые влияют на выбор его значения, являются: соответствие механических свойств материала конструкции и отдельно испытанных образцов; учет конкретных условий работы рассчитываемой конструкции; степень точности метода определения напряжений; неточность задания внешней нагрузки; долговечность и значимость проектируемого сооружения или машины.

Для строительных сталей значение коэффициента запаса прочности принимается  $n=1,4-1,6$ ; для хрупких материалов  $n=2,5-3,5$ ; для древесины  $n=3,5-6$ .

Значения допускаемых напряжений устанавливаются техническими условиями и нормами проектирования.

### ***3.5.2 Условие прочности при растяжении-сжатии.***

#### ***Три основные задачи***

При растяжении (сжатии) максимальные напряжения возникают в сечениях, перпендикулярных оси (п. 3.1).

Подставив в условие (3.13) выражение для напряжения (3.1), получим *условие прочности при растяжении-сжатии*:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (3.14)$$

где  $N$  – продольная сила в сечении;

$A$  – площадь поперечного сечения.

Записав условие (3.14) в трех вариантах, получим три основные задачи, возникающие при растяжении-сжатии.

**1 Проверка прочности.** При заданных внешней нагрузке и поперечном сечении проверить прочность элемента. Для этого определяются продольные силы в стержне, и в опасных сечениях проверяется выполнение условия (3.14).

2 *Подбор сечения.* Для этого определяются продольные силы в стержне, и в опасном сечении (одном или нескольких) из условия (3.14) выражается площадь:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (3.15)$$

3 *Определение наибольшей допускаемой силы.* Определяется наибольшая сила, при которой обеспечена прочность элемента с заданными размерами. Из условия (3.14)

$$F_{\max} \leq [\sigma]A. \quad (3.16)$$

### 3.6 Потенциальная энергия деформации и работа, затрачиваемая на растяжение стержня

В упругой стадии после разгрузки деформируемых тел их первоначальный объем и форма полностью восстанавливаются. Это указывает на наличие в нагруженном теле некоторого запаса энергии – потенциальной энергии деформации.

Вычислим работу, затрачиваемую на растяжение призматического стержня, закрепленного верхним концом и нагруженного на нижнем конце силой  $F$  (рисунок 3.16, а). Зависимость между растягивающей силой и удлинением в упругой стадии линейна, поэтому изображается на диаграмме наклонной прямой (рисунок 3.16, б).

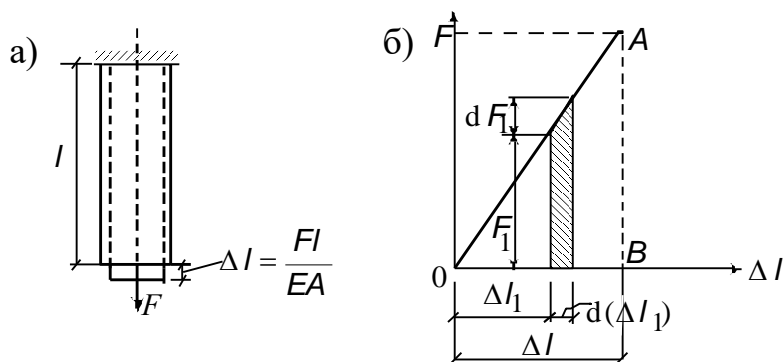


Рисунок 3.16 – К определению потенциальной энергии деформации

Пусть в некоторый момент нагружения растягивающая сила равна  $F_1$ , а удлинение –  $\Delta l_1$ .

Растягивающей силе придадим бесконечно малое приращение  $dF_1$ , тогда стержень получит бесконечно малое удлинение  $d(\Delta l_1)$  и сила  $F_1$  совершит на перемещении  $d(\Delta l_1)$  работу  $F_1 \cdot d(\Delta l_1)$ .

Работа, затрачиваемая на растяжение образца в упругой стадии, равна

$$W = \int_0^{\Delta l} F_1 \cdot d(\Delta l_1).$$

Интеграл в правой части равенства представляет собой площадь треугольника  $OAB$  (рисунок 3.16, б) и равен

$$W = \frac{F \Delta l}{2}.$$

При принятых предпосылках затраченная на растяжение образца работа полностью переходит в потенциальную энергию  $U$ . Возникающими при этом потерями, ввиду их малости, пренебрегаем. Тогда

$$U = W = \frac{F \Delta l}{2}. \quad (3.17)$$

Подставив в (3.17) вместо  $\Delta l$  его выражение (3.11), найдем

$$U = \frac{F^2 l}{2EA}. \quad (3.18)$$

Формулой (3.18) можно пользоваться только в том случае, когда продольная сила и площадь поперечного сечения постоянны.

Удельная потенциальная энергия, т. е. энергия, отнесенная к единице объема, равна

$$u = \frac{U}{V} = \frac{F^2 l}{2EA} \frac{1}{Al} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\sigma \cdot (E\varepsilon)}{2E} = \frac{\sigma \varepsilon}{2}. \quad (3.19)$$

Для определения работы, затрачиваемой на растяжение стержня за пределом пропорциональности, можно распространить проведенные рассуждения на всю диаграмму растяжения (рисунок 3.17).

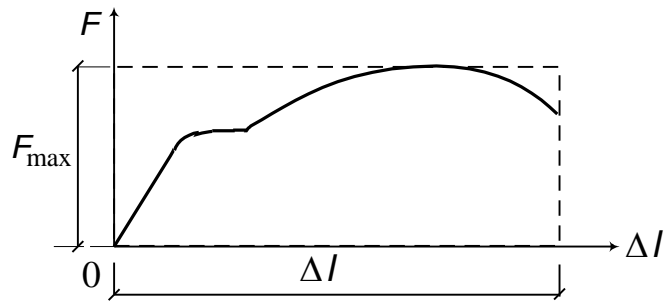


Рисунок 3.17 – К определению работы, затрачиваемой на растяжение стержня за пределом пропорциональности

Из этих соображений можно заключить, что работа, затраченная на разрыв образца, равна полной площади диаграммы растяжения

$$A = \eta F_{\max} \Delta l,$$

где  $\eta$  – коэффициент заполнения диаграммы. Для стали марки Ст3  $\eta = 0,85 - 0,87$ .

Основные формулы для расчетов при растяжении-сжатии приведены в приложении Б.

### 3.7 Статически неопределимые системы, работающие на растяжение-сжатие

**Статически неопределимыми системами** называются системы, имеющие число неизвестных реакций или усилий, превышающее число уравнений равновесия, которые можно составить для определения этих неизвестных. Для решения таких задач составляют дополнительные уравнения, исходя из рассмотрения условий деформации системы.

#### 3.7.1 Расчет на силовые воздействия

Пусть стержень  $AB$  постоянного сечения, выполненный из однородного материала, закрепленный по концам, нагружен силой  $F$  в пределах его длины  $l$ , как показано на рисунке 3.18, а.

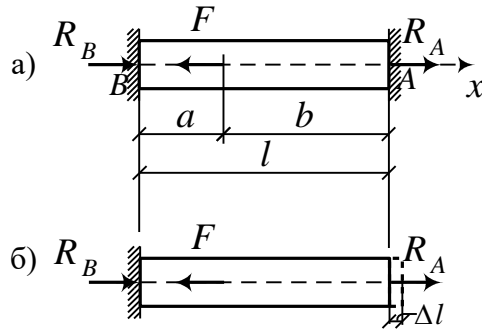


Рисунок 3.18 – К расчету статически неопределимой системы на силовые воздействия

От действия силы  $F$  в заделках  $A$  и  $B$  возникают опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$ . Примем их направления противоположными направлению силы  $F$ . Для системы сил, действующих вдоль одной оси, возможно составить единственное уравнение равновесия:

$$\sum x = 0: R_A + R_B = F.$$

Число неизвестных превышает число возможных уравнений равновесия на единицу, то есть система один раз статически неопределима. Для ее решения нужно составить одно дополнительное уравнение. Оно в данной задаче выражает следующее условие: длина бруса  $l$  не может измениться, так как он жестко закреплен с двух сторон, т. е.

$$\Delta l = 0.$$

Отбросим одну из заделок, например, правую, и заменим ее действие на стержень реакцией  $R_A$  (рисунок 3.18, б). В этой системе (теперь статически определимой), используя выражение (3.11) и принцип независимости действия сил, найдем  $\Delta l$ :

$$\Delta l = \frac{R_A l}{EA} - \frac{Fb}{EA} = 0.$$

Отсюда определим

$$R_A = \frac{Fb}{l}.$$

Из уравнения равновесия следует

$$R_B = \frac{Fa}{l}.$$

Реакции  $R_A$  и  $R_B$  получены со знаком плюс, что указывает на правильность выбранного направления. Таким образом, раскрыта статическая неопределимость системы. Эпюра продольных сил строится обычным путем с применением метода сечений (см. п.п. 1.6, 2.2).

### 3.7.2 Расчет на температурные воздействия

В статически определимых системах температурные воздействия и неточность изготовления элементов систем не вызывают усилий.

При изменении температуры в статически неопределимых системах возникают отличные от нуля усилия.

Покажем это. Рассмотрим стальной брус (рисунок 3.19, а), заделанный своими концами в стены, которые считаются неподвижными, так что длина бруса  $l$  остается неизменной.

Пусть температура бруса повысилась с  $t_1$  до  $t_2$ . Повышение температуры составляет  $\Delta t = t_2 - t_1$ . От повышения температуры брус стремится удлиниться, но стены препятствуют этому удлинению, давят на концы бруса и вызывают в нем сжимающие напряжения от реакции  $R_t$ . В отсутствие внешних сил единственное для данной системы уравнение равновесия  $\sum x = 0$  дает, что реакции на обеих опорах одинаковы по величине и противоположно направлены, как и показано на рисунке 3.19, а.

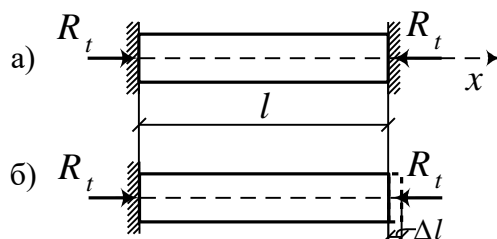


Рисунок 3.19 – К расчету статически неопределимых систем на температурные воздействия

Предположим, что правая стена убрана (рисунок 3.19, б). Тогда удлинение бруса, вызванное температурой, равно

$$\Delta l_t = \alpha l \Delta t ,$$



где  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения материала бруса (для стали  $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$  1/град).

В действительности стена у правого конца бруса имеется. Она сжимает брус силой  $R_t$ , укорачивая его:

$$\Delta l_R = \frac{R_t l}{EA}.$$

Удлинение  $\Delta l_t$  и укорочение  $\Delta l_R$  должны быть равны, так как в действительности длина бруса не изменяется:

$$\alpha t l = \frac{R_t l}{EA},$$

откуда

$$R_t = EA \alpha t.$$

### 3.7.3 Расчет на неточность изготовления

При изготовлении конструкции неизбежны небольшие неточности, например в длинных элементах. В статически неопределимых системах такие неточности вызывают дополнительные напряжения.

Пусть брус подвешен на трех стержнях (рисунок 3.20), причем средний стержень 2 сделан короче на величину  $\delta$ , чем стержни 1.

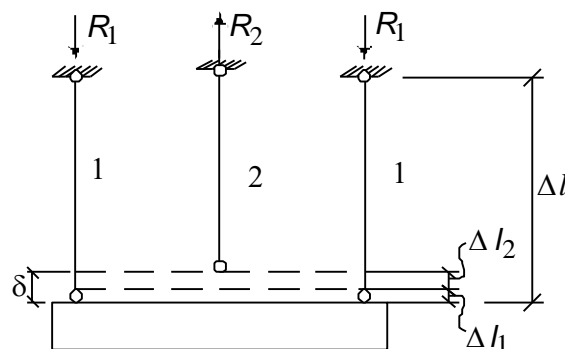


Рисунок 3.20 – К расчету статически неопределимых систем на неточность сборки

Если стержни расположены симметрично, то левая и правая крайние реакции совпадают, уравнение равновесия имеет вид

$$2R_1 - R_2 = 0 \quad (3.20)$$

и содержит две неизвестные реакции.

Запишем условие деформирования стержней. Чтобы соединить конструкцию с бруском, средний стержень необходимо растянуть на величину  $\Delta l_2$ , а крайние стержни сжать на величину  $\Delta l_1$  так, чтобы нижние концы всех стержней расположились на одной горизонтали. Отсюда условие совместности деформаций:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta.$$

Выразим удлинения через усилия (3.11):

$$\frac{R_1 l}{E_1 A_1} + \frac{R_2 l}{E_2 A_2} = \delta. \quad (3.21)$$

Решая совместно полученное уравнение совместности (3.21) и уравнение равновесия (3.20), получим

$$R_1 = \frac{\delta}{l \left[ \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{2}{E_2 A_2} \right]}; \quad R_2 = \frac{2\delta}{l \left[ \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{2}{E_2 A_2} \right]}.$$

### 3.8 План решения задач сопротивления материалов

- 1 Выяснить характер и величину всех внешних сил, приложенных к элементу или конструкции, включая реакции. Создать расчетную схему элемента.
- 2 Для материала, из которого выполнен элемент или конструкция, выяснить величину допускаемого напряжения. Если требуется, самостоятельно выбрать материал, отвечающий назначению конструкции и характеру действия внешних сил.
- 3 Определить положение опасного сечения, построив при необходимости эпюры внутренних усилий (тема 2).
- 4 Записать условие прочности  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$  в одной из точек опасного сечения и, пользуясь им, проверить прочность, подобрать сечение или определить допускаемую нагрузку. Правило определения  $\sigma_{\max}$  зависит от вида деформации и напряженного состояния. Для растяжения-сжатия  $\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A}$ .
- 5 В большинстве случаев проверка прочности должна быть дополнена проверками на жесткость (ограничение деформаций) и устойчивость (невозможность общего изменения элементами запроектированной формы равновесия).

### 3.9 Пример решения задачи

Рассмотрим винт вагонной стяжки (рисунок (3.21)). При равномерном движении поезда сила тяги локомотива, передающаяся через стяжку, уравнивается сопротивлением движению остальной части поезда. Сила тяги передается на винт стяжки при помощи винтовой нарезки так, что силы  $P$  направлены по оси винта. Стержень винта подвергается растяжению.

*Задача.* Подобрать поперечные размеры винта, обеспечивающие его прочность. Сила тяги  $P = 25 \text{ т}$ .

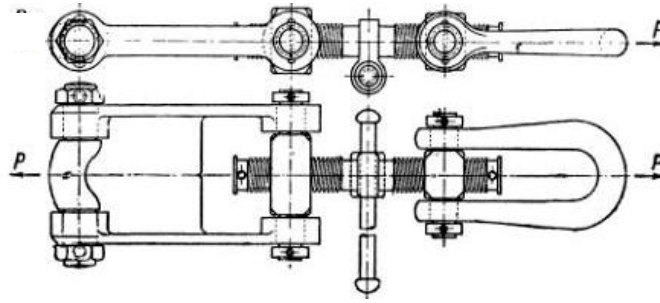


Рисунок 3.21 – Винт вагонной стяжки

*Решение.* На винт действуют внешние силы  $P = 25 \text{ т}$ .

Стержень стяжки выполняется из стали с допускаемым напряжением  $[\sigma] \approx 1500 \text{ кг/см}^2$ . Это значение, которое можно взять из справочника, получается следующим образом. Предел прочности применяемой стали  $\sigma_B = 5000 \text{ кг/см}^2$ . Выбор такой стали определяется тем, что винт стяжки должен быть не очень тяжелым, а это требует материала высокой прочности. С другой стороны, материал винта должен хорошо сопротивляться ударам и толчкам, а сталь с очень высоким пределом прочности является хрупкой.

Винт стяжки не только не должен разрываться, но в нем не должно возникать остаточных деформаций, чтобы не произошло заедание в нарезке. Предел упругости для выбранного материала составляет примерно 0,6 от предела прочности:  $\sigma_{уп} \approx 0,6\sigma_B$ . Как показывает изучение динамических нагрузок, при внезапном приложении сил (трогание с места) напряжение увеличивается примерно вдвое по сравнению со статическим растяжением, при котором определяют механические характеристики материалов в лаборатории. Поэтому величина допускаемых напряжений не должна превышать

$$0,5 \cdot 0,6\sigma_B = 0,3\sigma_B.$$

Это дает коэффициент запаса  $1/0,3 \approx 3,3$ . Таким образом, допускаемое напряжение может быть принято равным

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n} = 1500 \text{ кг/см}^2.$$

Необходимая площадь при  $P = 25 \text{ т}$  равна (3.15)

$$A \geq \frac{P}{[\sigma]} = \frac{25000 \text{ кг}}{1500 \text{ кг/см}^2} = 16,7 \text{ см}^2.$$

Диаметр стержня стяжки  $d$  определяется условием

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \geq 16,7 \text{ см}^2,$$

откуда

$$d \geq \sqrt{\frac{A \cdot 4}{\pi}} = \sqrt{\frac{16,7 \cdot 4}{\pi}} \approx 4,5 \text{ см}.$$

Полученный диаметр определен по дну нарезки для наименьшей площади поперечного сечения.

## 4 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

В расчетах по сопротивлению материалов определяются напряжения, деформации и перемещения в стержнях при внешних воздействиях. Для расчета этих величин при растяжении-сжатии было достаточно знать площадь поперечного сечения. При других деформациях этого оказывается недостаточно.

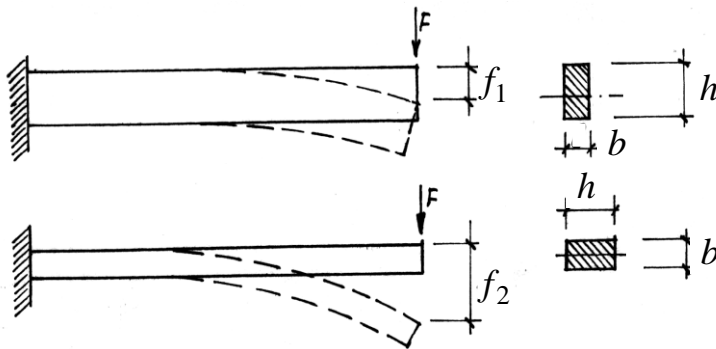


Рисунок 4.1

Это можно продемонстрировать, рассматривая изгиб двух консольных балок с одинаковым поперечным сечением, но по-разному ориентированных, как показано на рисунке 4.1.

Очевидно, прогиб второй консоли  $f_2$  больше, чем первой  $f_1$ . Таким образом, площадь не характеризует в полной мере деформации и, как будет видно из дальнейшего, напряжения при изгибе и кручении.

Данная тема посвящен введению необходимых геометрических характеристик.

### 4.1 Площадь поперечного сечения

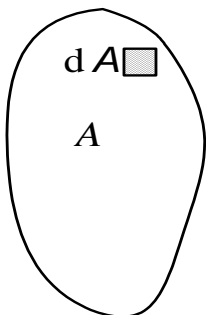


Рисунок 4.2

Площадь сечения  $A$  определяется как сумма элементарных площадок по всему сечению:

$$A = \int_A dA .$$

Очевидно, *размерность* площади –  $m^2$ , *знак* –  $A > 0$ , площадь строго положительна.



## 4.2 Статический момент площади

Пусть даны сечение бруса площадью  $A$  и оси  $z$ ,  $y$ , лежащие в плоскости этого сечения (рисунок 4.3).

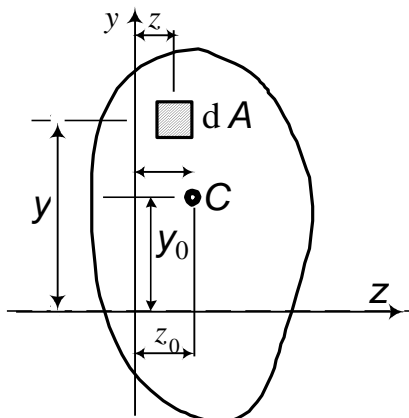


Рисунок 4.3 – К определению статического момента площади сечения

Выделим элемент площади  $dA$ , расположенный на расстоянии  $y$  от оси  $z$ . Статическим моментом элементарной площадки  $dA$  относительно оси  $z$  называется произведение этой площадки на координату  $y$ :

$$dS_z = y \cdot dA.$$

Статический момент всей площади относительно оси  $z$  равен сумме статических моментов элементарных площадок (аналогично вводится статический момент относительно оси  $y$ ). Так как элементарных площадок бесконечно много, то сумму заменяем интегралом по всей площади сечения:

$$S_z = \int_A y \cdot dA, \quad S_y = \int_A z \cdot dA. \quad (4.1)$$

Итак, **статическим моментом** относительно оси называется интеграл по всей площади сечения от произведений элементарных площадок на их координаты относительно этой оси (4.1).

### *Свойства статического момента*

1 *Размерность* статического момента –  $m^3$ , *знак* может быть произвольным (т. е. момент может быть положительным,



отрицательным или нулевым).

2 На основании известной из теоретической механики теоремы о моменте равнодействующей, сумма статических моментов элементарных площадок относительно какой-нибудь оси равна моменту всей площади относительно этой оси. Итак, *статический момент сечения относительно оси равен произведению площади сечения на координату центра тяжести относительно этой оси:*

$$S_z = \int_A y \cdot dA = y_c \cdot A, \quad S_y = \int_A z \cdot dA = z_c \cdot A, \quad (4.2)$$

где  $A$  – площадь сечения;

$y_c, z_c$  – координаты центра тяжести сечения  $S$  относительно осей соответственно  $z$  и  $y$ .

3. *Статический момент сечения относительно центральной оси равен нулю.* На самом деле, если ось проходит через центр тяжести, то его координата относительно этой оси равна нулю. Поэтому согласно соотношениям (4.2) статический момент относительно этой оси равен нулю. Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются *центральными*.

### 4.3 Положение центра тяжести сечения

*Случай 1* (см. также п. 4.8).

Если сечение имеет ось симметрии, то центр тяжести находится на этой оси.

Если сечение имеет две оси симметрии, то центр тяжести находится в точке пересечения этих осей.

*Случай 2* (см. также п. 4.8). Сечение не имеет осей симметрии. Рассмотрим этот случай на примере рисунка 4.4.

Введем произвольные оси  $z, y$ . Разобьем сечение на простые фигуры, для которых положение центров тяжести  $C_1, C_2, C_3$  известно (то есть известны их координаты  $z_1, z_2, z_3, y_1, y_2, y_3$  относительно осей  $z$  и  $y$ ). При определении координат  $z_3, y_3$  учитываем, что центр тяжести прямоугольного треугольника находится на расстоянии одной третьей части катета от прямого угла.

Составим статический момент площади относительно оси  $y$ . Это можно сделать двумя способами: во-первых, статический момент – интегральная величина, поэтому момент «суммы» сечений равен сумме моментов этих сечений:

$$S_y = A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3;$$

во-вторых, согласно формуле (4.2)

$$S_y = A \cdot z_c,$$

где

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 16 + 18 + 20,25 = 54,25 \text{ см}^2.$$

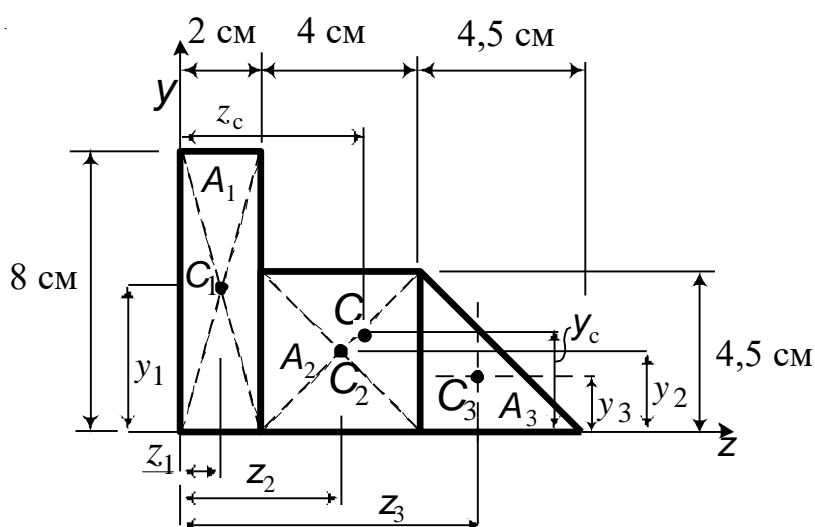


Рисунок 4.4 – К выводу формул для координат центра тяжести

Приравняем эти выражения друг другу:

$$Az_c = A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3,$$

откуда найдем

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3}{A} = \frac{16 \cdot 1 + 18 \cdot 4 + 20,25 \cdot 7,5}{54,25} = 4,42 \text{ см}. \quad (4.3)$$

Аналогично

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A} = \frac{16 \cdot 4 + 18 \cdot 2,25 + 20,25 \cdot 1,5}{54,25} = 2,49 \text{ см}. \quad (4.4)$$

Таким образом, чтобы найти положение центра тяжести поперечного сечения относительно заданных осей, нужно сложить статические моменты площадей составляющих фигур относительно этих осей и разделить сумму на площадь фигуры.

## 4.4 Моменты инерции сечения

Возьмем произвольное сечение площадью  $A$  и проведем оси координат  $z$  и  $y$  (рисунок 4.5).

Выделим элемент площади  $dA$ , расположенный на расстоянии  $y$  от оси  $z$  и расстоянии  $z$  от оси  $y$ . Составим произведения  $dA \cdot y^2$  и  $dA \cdot z^2$ . Произведение  $dA \cdot y^2$  называется моментом инерции элементарной площадки  $dA$  относительно оси  $z$ . Аналогично  $dA \cdot z^2$  – момент инерции площадки  $dA$  относительно оси  $y$ .

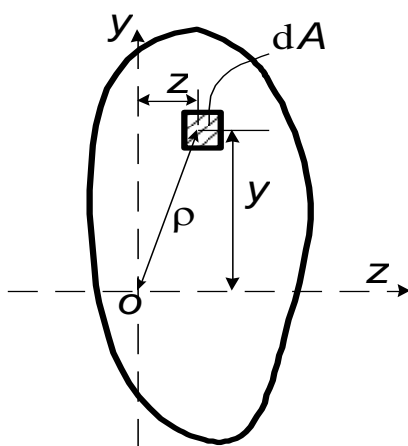


Рисунок 4.5 – К выводу формул для определения моментов инерции

Момент инерции всей площади равен сумме моментов инерции элементарных площадок:

$$J_z = \int_A y^2 dA; \quad (4.5)$$

$$J_y = \int_A z^2 dA. \quad (4.6)$$

Итак, **моментом инерции сечения относительно оси** называется интеграл, взятый по всей площади сечения от произведения элементарной площадки на квадрат ее расстояния до этой оси.

**Центробежным моментом сечения относительно осей  $z$ ,  $y$**  называется интеграл по площади сечения от произведения площадки  $dA$  на ее координаты  $z$  и  $y$ :

$$J_{zy} = \int_A z y dA. \quad (4.7)$$

**Полярным моментом инерции сечения** называется интеграл по площади сечения от произведения площадки  $dA$  на квадрат ее расстояния до точки  $O$  (полюса):

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA. \quad (4.8)$$

*Размерность* осевых и полярного моментов инерции –  $m^4$ , *знак*:  $J_z, J_y, J_\rho$  строго больше нуля.

*Размерность* центробежного момента –  $m^4$ ; *знак* – центробежный момент может быть величиной положительной, отрицательной или равной нулю.

#### 4.4.1 Зависимость между моментами инерции при параллельном переносе центральных осей

Пусть заданы моменты инерции  $J_z, J_y$  сечения относительно осей  $z$  и  $y$ , проходящих через центр тяжести сечения. Найдем моменты инерции относительно осей  $z_1$  и  $y_1$ , параллельных осям  $z$  и  $y$  и проходящих от них на расстояниях  $a, b$  (рисунок 4.6).

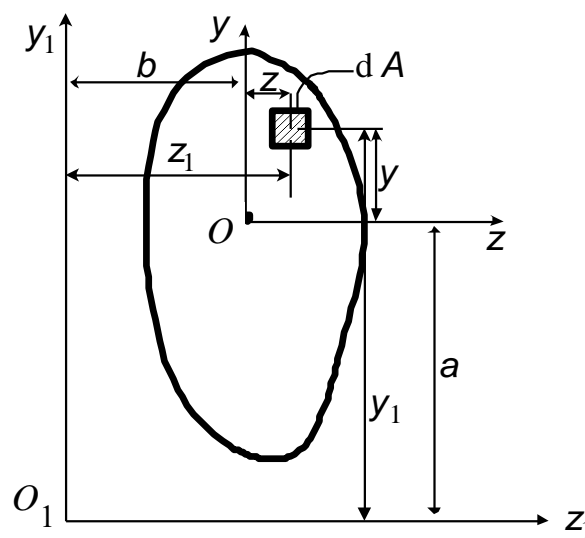


Рисунок 4.6 – К выводу зависимостей между моментами инерции при параллельном переносе центральных осей

Определим момент инерции площади фигуры относительно оси  $z_1$ :

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA.$$

Первый член в правой части полученного уравнения представляет собой осевой момент инерции  $J_z$  (4.5).

Интеграл во втором слагаемом – статический момент площади (4.2) относительно оси  $z$ . Он равен нулю, так как по условию задачи ось  $z$  проходит через центр тяжести. Интеграл в третьем слагаемом равен площади сечения.

Таким образом, при параллельном переносе центральной оси

$$J_{z_1} = J_z + a^2 A, \quad (4.9)$$

то есть момент инерции сечения относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно центральной оси плюс произведение площади сечения на квадрат расстояния между этими осями.

Аналогично получаем

$$J_{y_1} = J_y + b^2 A. \quad (4.10)$$

Формула пересчета центробежного момента инерции при параллельном переносе центральных осей (рисунок 4.6) имеет вид

$$J_{z_1 y_1} = J_{zy} + abA. \quad (4.11)$$

При вычислении моментов инерции по формуле (4.11)  $a$  и  $b$  следует брать с учетом знака в системе координат  $z_1, y_1$ .

Складывая формулы (4.9), (4.10) и учитывая, что  $J_{\rho_1} = J_{z_1} + J_{y_1}$ , получаем зависимость для полярного момента инерции при параллельном переносе осей из центра тяжести (полюс  $O$ ) в произвольную точку (полюс  $O_1$ ):

$$J_{\rho_1} = J_{\rho} + (a^2 + b^2)A. \quad (4.12)$$

#### 4.4.2 Изменение осевых и центробежного моментов инерции при повороте координатных осей

В сечении площадью  $A$  выберем произвольные оси координат  $z$  и  $y$ . Предположим, что относительно этих осей вычислены моменты инерции  $J_z, J_y, J_{zy}$ . Повернем оси координат против хода часовой стрелки (положительное значение угла) на некоторый угол  $\alpha$  (рисунок 4.7).

Выделим элементарную площадку  $dA$  и выразим ее новые координаты  $z_1, y_1$  через старые:

$$z_1 = z \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad y_1 = y \cos \alpha - z \sin \alpha.$$

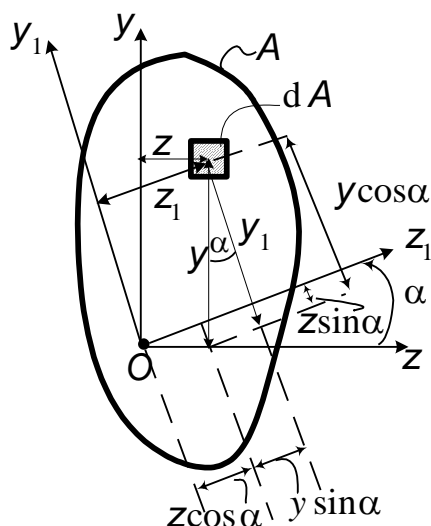


Рисунок 4.7 – К выводу зависимостей между моментами инерции при повороте осей

Найдем моменты инерции относительно новых осей:

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \int_A y^2 \cos^2 \alpha dA - 2 \int_A zy \cos \alpha \cdot \sin \alpha dA + \int_A z^2 \sin^2 \alpha dA = \\ &= J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - 2J_{zy} \sin \alpha \cdot \cos \alpha = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha; \\ J_{y_1} &= \int_A z_1^2 dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = J_z \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{zy} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Окончательно

$$J_{z_1} = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha, \quad (4.13)$$

$$J_{y_1} = J_z \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{zy} \sin 2\alpha. \quad (4.14)$$

Получим теперь зависимость для центробежного момента инерции относительно осей  $z_1$  и  $y_1$ :

$$J_{z_1 y_1} = \int_A z_1 y_1 dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - z \sin \alpha) dA.$$

Раскрывая скобки и учитывая, что  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ , получаем

$$J_{z_1 y_1} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha. \quad (4.15)$$

#### 4.4.3 Свойства осевых моментов

1 Полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей, проходящих через полюс (см. рисунок 4.5):

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA = J_z + J_y. \quad (4.16)$$

2 Полярный момент  $J_\rho$  определяется только положением т. О. Поэтому из выражения (4.16) следует, в частности, что сумма осевых моментов  $J_z + J_y$  при повороте осей постоянна и равна  $J_\rho$ .

Этот же результат можно получить, сложив почленно выражения (4.13) и (4.14):

$$J_{z_1} + J_{y_1} = J_z + J_y -$$

сумма осевых моментов при повороте осей не изменяется и равна, например, сумме центральных моментов.

3 Из формул (4.9) – (4.11) видно, что моменты инерции принимают минимальные значения при  $a=0$  или  $b=0$ , т. е. когда оси проходят через центр тяжести. Следовательно, при произвольном параллельном переносе осей минимальным

моментом инерции является момент относительно центральной оси.

4 Если одна из пары взаимно перпендикулярных осей  $z$ ,  $y$  является осью симметрии, то центробежный момент относительно этой пары осей равен нулю.

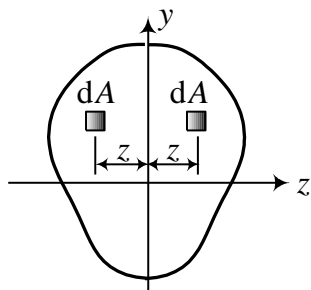


Рисунок 4.8

Пусть, например, сечение симметрично относительно оси  $y$  (рисунок 4.8). Тогда любому элементу площади  $dA$ , расположенному справа от оси  $y$ , соответствует симметрично расположенный элемент слева от оси. Координаты  $z$  этих элементов различаются только знаком, поэтому каждое произведение  $zy dA$  имеет пару, такую же по величине и противоположную по знаку, и сумма этих произведений равна нулю, следовательно  $J_{zy} = 0$ .

5 При повороте осей на  $90^\circ$  центробежный момент меняет знак на противоположный: подставим в (4.15)  $\alpha = 90^\circ$ , получим

$$J_{z_1y_1} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha = \frac{J_z - J_y}{2} \cdot 0 + J_{zy} \cdot (-1) = -J_{zy}.$$

#### 4.5 Главные оси и главные моменты инерции

Формулы (4.13), (4.14), (4.15) показывают, что если оси координат постепенно поворачивать, то величины моментов инерции будут непрерывно меняться. При некотором значении угла центробежный момент  $J_{zy}$  станет равным нулю. Такое положение осей и моменты относительно них используются при определении напряжений и перемещений при различных видах деформаций, и поэтому выделяются среди остальных.

Пара взаимно перпендикулярных осей, относительно которых центробежный момент равен нулю, а осевые моменты принимают экстремальные значения, называются *главными осями*.



Главные оси, проходящие через центр тяжести, называются *главными центральными осями*.

Моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*.

Главные оси обозначаются буквами  $u, v$ .

### *Положение главных осей*

1. Угол между главными и центральными осями получим, приравняв нулю центробежный момент (4.15):

$$J_{z_1y_1} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha = 0,$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z}. \quad (4.17)$$

2. Покажем, что угол поворота осей, при котором  $J_{zy} = 0$ , обеспечивает экстремум осевых моментов.

Моменты принимают экстремальные значения, если их производные по углу равны нулю:

$$\frac{dJ_{z_1}}{d\alpha} = -(J_z - J_y) \sin 2\alpha - 2J_{zy} \cos 2\alpha = 0,$$
$$\frac{dJ_{y_1}}{d\alpha} = -(J_y - J_z) \sin 2\alpha + 2J_{zy} \cos 2\alpha = 0,$$

откуда получаем то же самое значение  $\operatorname{tg} 2\alpha$ .

Таким образом, *положение главных осей* определяется выражением (4.17).

По этой формуле определяются два значения угла  $\alpha$ , отличающиеся друг от друга на  $90^\circ$ , и положение двух взаимно перпендикулярных главных осей.

### *Некоторые свойства главных осей*

1 Из формулы (4.17) следует, что

– если  $J_{zy} \neq 0$  и  $J_z - J_y \neq 0$ , то для  $\alpha$  получим два корня:  
 $\alpha_1$  и  $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$ ;

– если  $J_{zy} = 0$ ,  $J_z - J_y \neq 0$ , то  $\operatorname{tg} 2\alpha = 0$ ,  $\alpha_1 = 0^\circ$ ,  $\alpha_2 = 90^\circ$ , т. е. исходные оси – главные;

– если  $J_{zy} \neq 0$ ,  $J_z - J_y = 0$ , то  $\operatorname{tg} 2\alpha = \infty$ ,  $\alpha_1 = 45^\circ$  и  $\alpha_2 = 135^\circ$ .

Примером этого случая может быть сечение в виде равнобокого уголка (рисунок 4.9), для которого осевые моменты инерции относительно центральных осей  $z$  и  $y$  равны между собой, а центробежный момент инерции  $J_{zy} \neq 0$ ; главные оси  $u$  и  $v$  составляют с этими осями углы  $45^\circ$  и  $135^\circ$ .

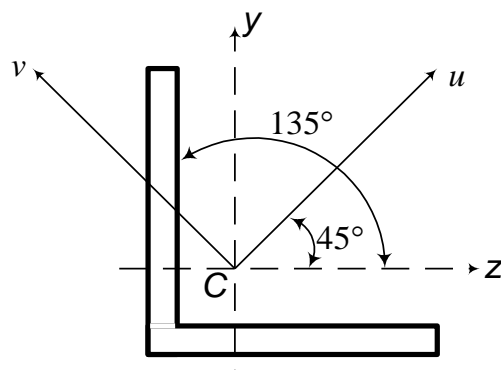


Рисунок 4.9 – Главные центральные оси инерции равнобокого уголка

2 Из п. 4.3 (свойство 4) следует, что пара осей, одна из которых является осью симметрии, – главные оси.

3 Если главные моменты инерции относительно осей, проходящих через точку  $O$ , равны по величине, то все оси, проходящие через эту точку, – главные. Кроме того, все осевые моменты в этом случае одинаковы. Действительно, пусть  $u, v$  – главные оси ( $J_{uv} = 0$ ), и  $J_u = J_v$ . Проведем оси  $z, y$  под произвольным углом  $\alpha$  к осям  $u, v$ . Тогда согласно формуле (4.15)

$$J_{zy} = \frac{J_u - J_v}{2} \sin 2\alpha + J_{uv} \cos 2\alpha = 0,$$

т. е. оси  $z, y$  также являются главными.

Далее, из формулы (4.13) при  $J_u = J_v$  получаем

$$J_z = J_y = J_u \cos^2 \alpha + J_u \sin^2 \alpha = J_u = J_v.$$

4 Если через точку  $O$  можно провести более одной пары главных осей сечения, то все оси, проходящие через эту точку, являются главными. Действительно, пусть  $u, v$  и  $z, y$  – две пары главных осей с общим началом координат, причем вторая пара повернута относительно первой на угол  $\alpha$ . Тогда согласно формуле (4.15)

$$J_{zy} = \frac{J_u - J_v}{2} \sin 2\alpha + J_{uv} \cos 2\alpha.$$

Так как моменты  $J_{zy}$  и  $J_{uv}$  по условию равны нулю, получаем  $J_u = J_v$ , и на основании свойства 2 все оси, проходящие через точку  $O$ , – главные.

Из пунктов 2, 4 следует, что у сечений, имеющих более двух осей симметрии, все центральные оси являются главными. К таким сечениям относятся круг, правильные многоугольники (см. рисунок 4.10), т. е. сечения, обладающие круговой симметрией.

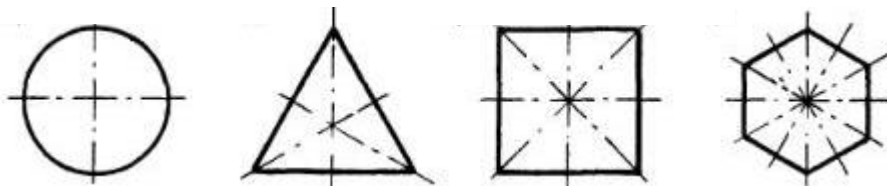


Рисунок 4.10 – Сечения с круговой симметрией

*Осевые моменты инерции этих сечений относительно всех центральных осей одинаковы.*

### **Значения главных моментов инерции**

Так как сумма осевых моментов постоянна (4.16), то при постоянном увеличении угла  $\alpha$  один из моментов инерции возрастает, а другой убывает, и относительно главных осей первый принимает значение  $\max$ , а второй –  $\min$ . Эти моменты обозначаются через  $J_v (J_{\max})$ ,  $J_u (J_{\min})$ .

Выражения для нахождения главных моментов инерции  $J_{\max}$  и  $J_{\min}$  можно получить, исключив из (4.13) и (4.14) угол  $\alpha$  при помощи (4.17):

$$J_{\max}^{\min} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}. \quad (4.18)$$

Знак плюс перед вторым слагаемым в (4.18) относится к максимальному моменту инерции, знак минус – к минимальному.

Рассмотрим еще один вопрос. По полученным результатам вычислений (4.18) невозможно установить, относительно какой из главных осей момент инерции принимает наибольшее или наименьшее значение. Для этого следует использовать такое правило: ось максимум (или минимум) всегда составляет меньший угол с той центральной осью ( $z$  или  $y$ ), относительно которой момент инерции имеет большее (или меньшее) значение.

#### 4.6 Радиусы инерции сечения

*Радиусом инерции* сечения относительно оси  $z$  называется величина  $i_z$ , определяемая из равенства

$$J_z = A i_z^2.$$

Из определения следует, что радиус инерции равен расстоянию от оси  $z$  до той точки, в которой следует сосредоточить (условно) площадь сечения  $A$ , чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего сечения.

Аналогично определяется  $i_y$ :

$$J_y = A i_y^2.$$

Таким образом,

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} ; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} . \quad (4.19)$$

Радиусы инерции, соответствующие главным осям, называются главными радиусами инерции и определяются по формулам

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{J_{\max}}{A}} ; \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} . \quad (4.20)$$

Из определения следует, что значение радиуса инерции *положительно*, его *размерность* – м.

## 4.7 Моменты инерции простейших фигур

### 4.7.1 Момент инерции прямоугольника

Вычислим момент инерции прямоугольника *относительно горизонтальной центральной оси z* (рисунок 4.11).

Разобьем весь прямоугольник на бесконечно малые элементы линиями, параллельными оси z.

Момент инерции элемента

$$dJ_z = y^2 dA = y^2 (b dy).$$

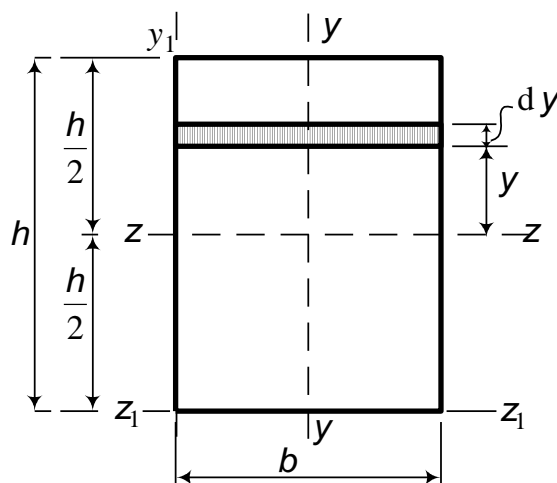


Рисунок 4.11 – К определению моментов инерции прямоугольника

Момент инерции всего прямоугольника

$$J_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12} \quad (4.21)$$

Аналогично получаем

$$J_y = \frac{b^3 h}{12}. \quad (4.22)$$

Момент инерции *относительно оси z<sub>1</sub>, проходящей по основанию*, найдем по формуле параллельного переноса (4.9):

$$J_{z_1} = J_z + a^2 A = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} \cdot bh = \frac{bh^3}{3}.$$

Аналогично

$$J_{y_1} = \frac{b^3 h}{3}.$$

#### 4.7.2 Моменты инерции треугольника

Определим момент инерции треугольника *относительно оси  $z_1$ , проходящей через его вершину параллельно основанию* (рисунок 4.12).

Разобьем весь треугольник на тонкие полосы линиями, параллельными оси  $z_1$ . Рассмотрим полосу, находящуюся на расстоянии  $y$  от вершины. Высота этой полосы равна  $dy$ , ширина  $by/h$  (найдена из пропорции  $z/y = b/h$ ).

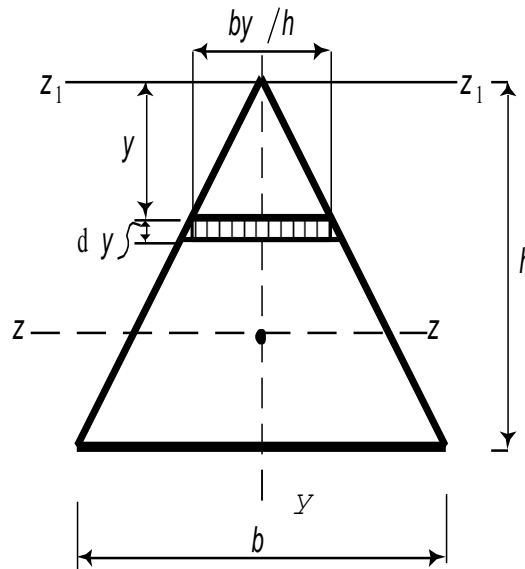


Рисунок 4.12 – К определению моментов инерции треугольника

Момент инерции полосы

$$dJ_{z_1} = y^2 \frac{b}{h} y dy.$$

Момент инерции всего треугольника

$$J_{z_1} = \int_0^h y^3 \frac{b}{h} dy = \frac{b}{h} \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{4}.$$

Найдем момент инерции относительно *центральной оси  $z$* , используя формулу (4.9):

$$J_z = J_{z_1} - a^2 A = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{36}. \quad (4.23)$$

Относительно оси симметрии можно получить

$$J_y = \frac{b^3 h}{48}. \quad (4.24)$$

### 4.7.3 Моменты инерции круга

Для круга (рисунок 4.13) найдем сначала полярный момент инерции относительно его центра. Круг с радиусом  $R$  разобьем на бесконечно малые элементы, представляющие собой концентрические кольца. Возьмем одно из таких колец с радиусом  $\rho$  и толщиной  $d\rho$ .

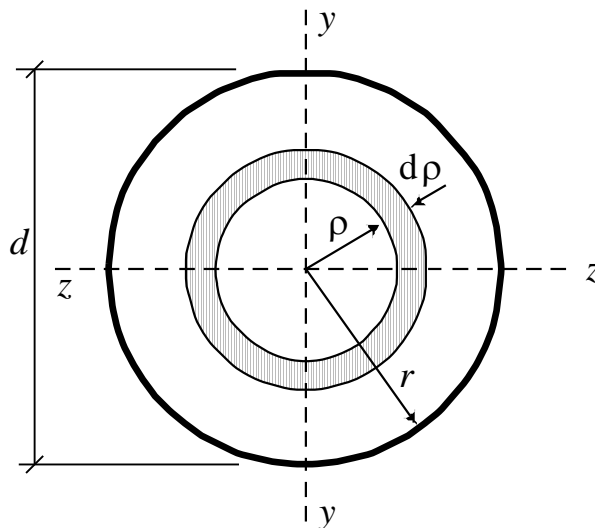


Рисунок 4.13 – К определению момента инерции круга

Полярный момент инерции кольца

$$d J_\rho = (2 \pi \rho d \rho) \rho^2.$$

Чтобы получить полярный момент инерции всей площади круга, нужно просуммировать моменты инерции всех колец:

$$J_\rho = \int_0^R 2 \pi \rho^3 d \rho = 2 \pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}. \quad (4.25)$$

Вследствие симметрии круга моменты инерции относительно всех осей, проходящих через центр круга, равны между собой, т. е.  $J_z = J_y$ . С другой стороны, зная, что  $J_p = J_z + J_y$  (4.16), получим

$$J_z = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}. \quad (4.26)$$

#### 4.8 Моменты инерции сложных фигур

При расчетах балок на прочность и жесткость необходимо определять значения геометрических характеристик сложных поперечных сечений, а именно положение главных центральных осей и главных центральных моментов инерции.

Порядок их определения рассмотрим на примерах.

*Случай 1.* Сечение имеет две оси симметрии (рисунок 4.14). Определить моменты инерции кольца.

Центральные и главные оси совпадают с осями симметрии.

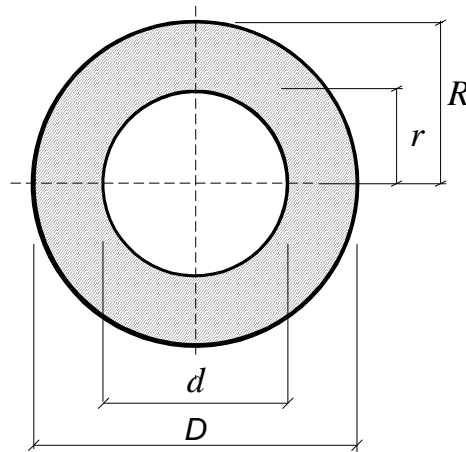


Рисунок 4.14

Представляем кольцо как сложное сечение: внешний круг диаметра  $D$ , из которого вырезан внутренний круг диаметра  $d$ . Соотношение внутреннего и внешнего диаметров  $\alpha = d/D = r/R$ .

Согласно формулам (4.25), (4.26) получаем



$$J_z = J_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \alpha^4).$$

$$\boxed{J_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \alpha^4).} \quad (4.27)$$

*Случай 2.* Сечение имеет одну ось симметрии. Определить положение главных центральных осей и главные моменты инерции симметричного поперечного сечения стального стержня, составленного из прокатных профилей – двутавра I40 и швеллера [30 (рисунок 4.15).

Выпишем из сортамента (приложение В) необходимые размеры и геометрические характеристики двутавра и швеллера.

Для I40: размеры указаны на рисунке 4.15,  $A_1 = 72,6 \text{ см}^2$ ,  $J_{z_1} = 19062 \text{ см}^4$ ,  $J_{y_1} = 667 \text{ см}^4$ . Центр тяжести находится на пересечении осей симметрии двутавра в т.  $C_1$ .

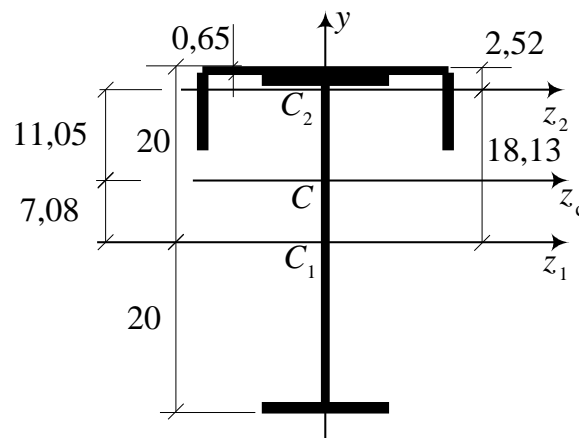


Рисунок 4.15 – Симметричное сечение, размеры – в сантиметрах (см)

Для швеллера [30: размеры и расстояние по вертикали от внешней грани до центра тяжести  $C_2$  указаны на рисунке (это расстояние  $z_0 = 2,52 \text{ см}$  указано в сортаменте),  $A_2 = 46,5 \text{ см}^2$ ,  $J_{z_2} = 327 \text{ см}^4$ ,  $J_{y_1} = 5810 \text{ см}^4$ . Заметим, что в сортаменте (приложение В) швеллер поставлен на короткую сторону, и его ось  $y$  параллельна длинной стороне. Относительно этого

положения наш швеллер повернут на  $90^\circ$ , значит, его оси поменялись местами. Поэтому и индексы в моментах инерции из сортамента мы поменяли местами.

Сечение имеет ось симметрии  $y$ , значит, центр тяжести лежит на этой оси (центральная ось  $y_c$  совпадает с осью  $y$ ). Остается определить положение центральной оси  $z_c$ .

Для этого проведем произвольным образом вспомогательную ось  $z$ , например, совместим ее с центральной осью двутавра  $z_1$ . Тогда координаты центров тяжести составляющих 1 и 2 (то есть двутавра и швеллера) и площадь сечения равны

$$y_1 = 0; y_2 = 20 + 0,65 - 2,52 = 18,13 \text{ см};$$

$$A = A_1 + A_2 = 119,1 \text{ см}^2.$$

*Центр тяжести сечения (4.3):*

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A} = \frac{18,13 \cdot 46,5}{119,1} = 7,08 \text{ см}.$$

*Моменты инерции относительно центральных осей*

Момент инерции – это интегральная величина, поэтому момент инерции сложного сечения равен сумме моментов инерции его составляющих, то есть в нашем случае двутавра и швеллера. Согласно формулам (4.9), (4.10) для осевых моментов инерции получаем:

$$\begin{aligned} J_{z_c} &= J_{z_c}^I + J_{z_c}^{II} = \sum_{i=1}^2 (J_{z_i} + A_i a_i^2) = \\ &= J_{z_1} + A_1 (y_1 - y_c)^2 + J_{z_2} + A_2 (y_2 - y_c)^2 = 28706 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$J_{y_c} = \sum_{i=1}^2 (J_{y_i} + A_i b_i^2) = J_{y_1} + J_{y_2} = 6477 \text{ см}^4.$$

Центральная ось  $y$  является осью симметрии сечения, поэтому (п. 4.4.3, свойство 4) центробежный момент сечения относительно центральных осей равен нулю:  $J_{z_c y_c} = 0$ .

*Главные оси*

Поскольку  $y$  – ось симметрии, то пара осей  $z_c, y_c$  являются главными осями (п. 4.5, свойство 2), а моменты инерции относительно центральных осей – главными моментами инерции. Расположим их по возрастанию:

$$J_{\min} = J_u = J_{y_c} = 6477 \text{ см}^4, \quad J_{\max} = J_v = J_{z_c} = 28706 \text{ см}^4.$$

Ось  $z_c$  является максимальной главной осью  $v$ ;  $y_c$  – минимальной главной осью  $u$ .

*Случай 3.* Сечение не имеет осей симметрии (рисунок 4.16). Разобьем его на два прямоугольника, как это показано на рисунке.

Координаты и площади составляющих 1 и 2:

$$z_1 = 0,5 \text{ см}; \quad y_1 = 6 \text{ см}; \quad A_1 = 12 \text{ см}^2;$$

$$z_2 = 4,5 \text{ см}; \quad y_2 = 11,5 \text{ см}; \quad A_2 = 7 \text{ см}^2;$$

$$A = A_1 + A_2 = 19 \text{ см}^2.$$

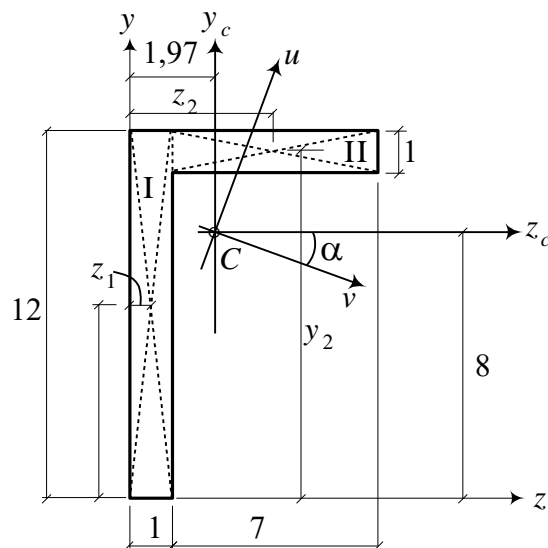


Рисунок 4.16 – Схема заданного сечения, все размеры – в сантиметрах (см)

*Центр тяжести сечения (4.3). (4.4):*

$$z_c = \frac{z_1 A_1 + z_2 A_2}{A} = \frac{0,5 \cdot 12 + 4,5 \cdot 7}{19} = 1,97 \text{ см} \approx 2 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A} = \frac{6 \cdot 12 + 11,5 \cdot 7}{19} = 8 \text{ см}.$$

Моменты инерции составляющих простых сечений относительно собственных осей  $z_1, y_1$ ;  $z_2, y_2$  вычисляются по формулам для прямоугольного сечения (4.21), (4.22):

$$J_{z_1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{1 \cdot 12^3}{12} = 144 \text{ см}^4, \quad J_{y_1} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{1^3 \cdot 12}{12} = 1 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_2} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{7 \cdot 1^3}{12} = 0,6 \text{ см}^4, \quad J_{y_2} = \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{7^3 \cdot 1}{12} = 28,6 \text{ см}^4.$$

Моменты инерции всего сечения относительно центральных осей вычисляем по формулам (4.9), (4.10):

$$J_{z_c} = J_{z_c}^I + J_{z_c}^{II} = \sum_{i=1}^2 (J_{z_i} + A_i a_i^2) =$$

$$= J_{z_1} + A_1 (y_1 - y_c)^2 + J_{z_2} + A_2 (y_2 - y_c)^2 = 278 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = J_{y_c}^I + J_{y_c}^{II} = \sum_{i=1}^2 (J_{y_i} + A_i b_i^2) =$$

$$= J_{y_1} + A_1 (z_1 - z_c)^2 + J_{y_2} + A_2 (z_2 - z_c)^2 = 100 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент относительно центральных осей вычисляем по формуле (4.11) с учетом того, что для сечений 1 и 2 их центральные оси являются осями симметрии, поэтому их центробежные моменты  $J_{z_1 y_1}$  и  $J_{z_2 y_2}$  равны нулю. Таким образом,

$$J_{z_c y_c} = \sum_{i=1}^2 (J_{z_i y_i} + A_i a_i b_i) =$$

$$= 0 + A_1 (y_1 - y_c)(z_1 - z_c) + 0 + A_2 (y_2 - y_c)(z_2 - z_c) = 97 \text{ см}^4.$$

Угол наклона главных осей определяем, используя формулу (4.17):

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2J_{z_c y_c}}{J_{y_c} - J_{z_c}} = \frac{2 \cdot 97}{100 - 278} = -1,09,$$

отсюда  $2\alpha = -47,5^\circ$ ,  $\alpha = -23,7^\circ$ .

Главные моменты инерции вычисляем по формуле (4.18):

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2} .$$

Отсюда

$$J_v = J_{\max} = 320 \text{ см}^4 ,$$

$$J_u = J_{\min} = 58 \text{ см}^4 .$$

*Выполним проверку правильности вычислений:*

1)  $J_{z_c} + J_{y_c} = J_{\max} + J_{\min} = 378 \text{ см}^4$  – сумма главных моментов равна сумме центральных моментов;

2)  $J_{uv} = \frac{J_{z_c} - J_{y_c}}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha = 0$  – центробежный момент относительно осей  $u, v$  действительно равен нулю;

3) главные моменты действительно являются экстремальными:

$$J_{\min} < J_{z_c} , \quad J_{\min} < J_{y_c} ; \quad J_{\max} > J_{z_c} , \quad J_{\max} > J_{y_c} .$$

Нетрудно убедиться, что условия проверок выполняются.

#### 4.9 Моменты сопротивления сечения

**Моментом сопротивления сечения  $W_z$  относительно оси  $z$**  называется отношение момента инерции сечения относительно этой оси  $J_z$  к максимальному расстоянию от оси до границы сечения (рисунок 4.17).

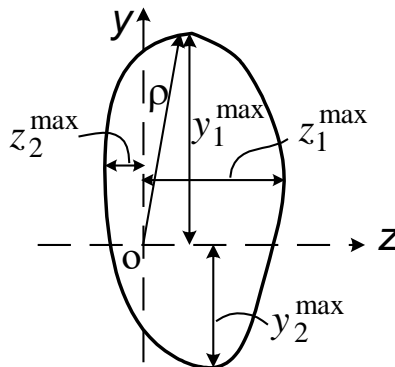


Рисунок 4.17 – К определению момента сопротивления

Имеются два максимальных расстояния от оси  $y$  до границы сечения (рисунок 4.17): в положительном направлении оси  $y$  – это расстояние  $y_1^{\max}$ , в отрицательном направлении  $y_2^{\max}$ . Аналогично есть два максимальных расстояния до оси  $z$ . Поэтому определяются два момента сопротивления относительно каждой оси:

$$W_{z,1} = \frac{J_z}{y_1^{\max}}, \quad W_{z,2} = \frac{J_z}{|y_2^{\max}|}; \quad W_{y,1} = \frac{J_y}{z_1^{\max}}, \quad W_{y,2} = \frac{J_y}{|z_2^{\max}|}. \quad (4.28)$$

Аналогично определяется **полярный момент сопротивления**  $W_\rho$ :

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{\max}}. \quad (4.29)$$

Из определения следует, что *размерность* момента сопротивления -  $m^3$ , *значение* строго положительно.

Для простейших сечений моменты сопротивления относительно центральных осей рассчитываются следующим образом.

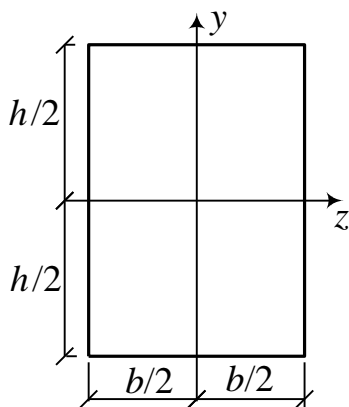


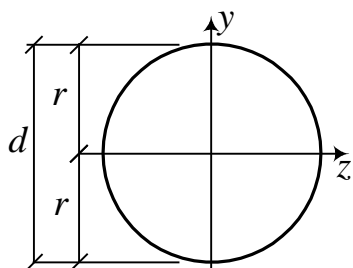
Рисунок 4.18

Осевые моменты сопротивления прямоугольника (рисунок 4.18) равны

$$W_{z,1} = W_{z,2} = W_z = \frac{J_z}{(h/2)} = \frac{bh^3}{12(h/2)} = \frac{bh^2}{6},$$

$$W_{y,1} = W_{y,2} = W_y = \frac{J_y}{(b/2)} = \frac{b^3h}{12(b/2)} = \frac{b^2h}{6},$$

где  $J_z, J_y$  определяются по формулам (4.21), (4.22).



Осевой и полярный моменты сопротивления круга (рисунок 4.19) равны

$$W_z = W_y = \frac{J_z}{r} = \frac{\pi r^4}{4r} = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32},$$

$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16},$$

где  $J_z$ ,  $J_p$  определяются по формулам (4.25), (4.26).

Полярный момент сопротивления кольца (рисунок 4.14) с учетом (4.27), (4.29) равен

$$W_p = \frac{J_p}{R} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^3}{2} (1 - \alpha^4), \quad \alpha = d/D. \quad (4.30)$$

При  $\alpha = 0$  по этой формуле получается полярный момент сопротивления сплошного круглого сечения.

В основные формулы при расчете элементов на *изгиб* входят моменты инерции и сопротивления относительно главных центральных осей. При расчетах на *кручение* стержней круглого сечения используются полярные моменты инерции и сопротивления.

Геометрические характеристики некоторых сечений приведены в приложении Г.

## 5 ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

В теме 1 (п.п. 1.7, 1.8) были введены понятие напряженного и деформированного состояния в точке и перечислены компоненты напряжений и деформаций, действующих по произвольным площадкам (рисунок 1.18, формулы (1.1), (1.8)). Если изменять положение элементарного кубика (поворачивать), то напряжения на его гранях будут непрерывно изменяться, и при некотором положении касательные напряжения на всех площадках обратятся в ноль.

Площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, называются *главными площадками*. Нормальные напряжения, действующие по главным площадкам, называются *главными напряжениями*. Главные напряжения обозначают не по названию осей, а цифрами, и располагают в порядке убывания с

учетом знака:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Как будет доказано, напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , аналогично главным моментам инерции, принимают экстремальные значения, то есть при любом повороте элемента значения нормальных напряжений содержатся между  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

## 5.1 Виды напряженного состояния

При различных внешних нагрузках некоторые главные напряжения могут быть нулевыми. В зависимости от количества ненулевых главных напряжений различают виды напряженного состояния.

1 Если отлично от нуля одно главное напряжение:  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , напряженное состояние называется линейным.

2 Если отличны от нуля два главных напряжения:  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_3 \neq 0$ ,  $\sigma_2 = 0$ , напряженное состояние называется плоским (двухосным).

3 Если отличны от нуля все главные напряжения, напряженное состояние называется объемным (трехосным).

## 5.2 Линейное напряженное состояние

Линейное напряженное состояние представляет собой деформацию растяжения-сжатия, изученную в теме 3. Приведем полученные там положения в общем контексте изучения напряженного состояния. Нами были получены выражения для напряжений (3.3) по наклонным площадкам (рисунок 5.1):

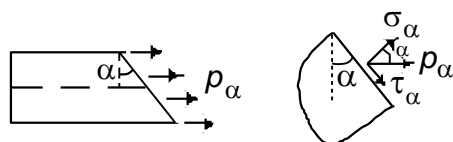


Рисунок 5.1

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

### 5.2.1 Положение главных площадок

Касательное напряжение  $\tau_\alpha = 0$  при  $\alpha = 0$ , т. е. главной является площадка, перпендикулярная оси бруса.



При  $\alpha = 90^\circ$  также  $\tau_\alpha = 0$ , но в этом сечении равно нулю также и нормальное напряжение.

### 5.2.2 Значения главных напряжений

При  $\alpha = 0$   $\sigma_1 = \sigma_{\max} = \sigma$  — главным является нормальное напряжение в поперечном сечении бруса.

### 5.2.3 Выражение напряжений по произвольным площадкам через главные напряжения

Согласно формуле (3.3),

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha.$$

### 5.2.4 Максимальные касательные напряжения

Максимальные касательные напряжения возникают на площадках  $\alpha = 45^\circ$  ( $\alpha = 135^\circ$ ) (рисунок 3.5) и равны  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$ .

## 5.3 Плоское напряженное состояние

В качестве примера можно привести напряжения, возникающие в цилиндрической части тонкостенного резервуара (котла), заполненного паром или водой под давлением  $q$  (рисунок 5.2). Боковые стенки и днища подвергаются равномерно

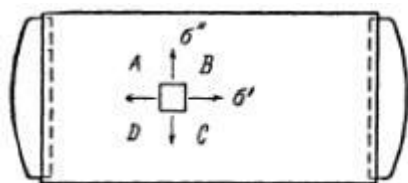


Рисунок 5.2



распределенному давлению  $q$ . Давление на днища стремится разорвать цилиндрическую часть по поперечному сечению, давление на боковые стенки

вызывает в них стремление разорваться по образующим цилиндра. Таким образом, каждый элемент испытывает растяжение в двух направлениях, как показано на рисунке 5.2. Это признак плоского напряженного состояния.

Получим формулы для определения напряжений по наклонным площадкам. Рассмотрим бесконечно малый элемент, на гранях которого известны напряжения, и разрежем его плоскостью под углом  $\alpha$ , получив призматический элемент (рисунок 5.3, а, б).

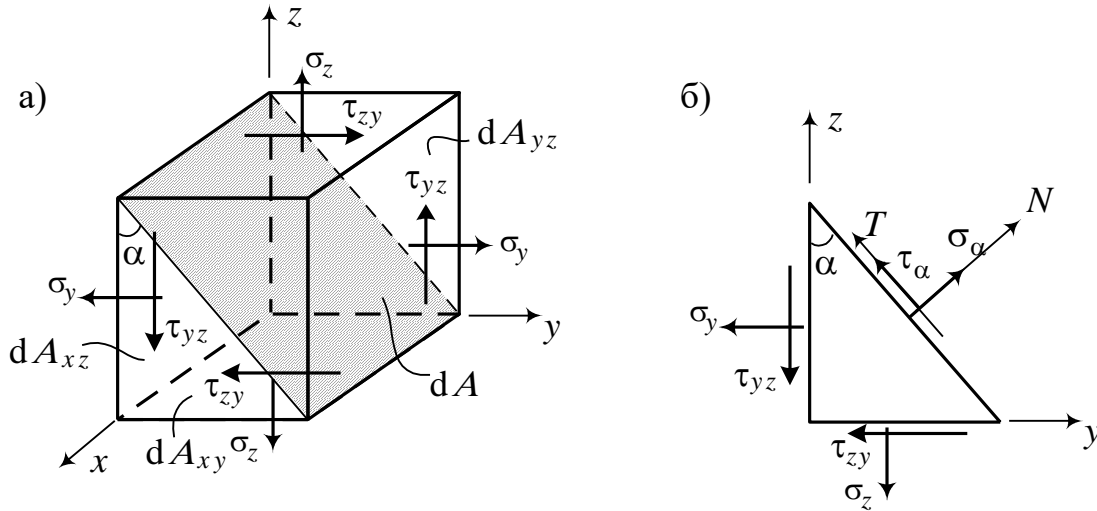


Рисунок 5.3 – Элементарный объем (а);  
отсеченный призматический элемент в плане (б)

На наклонной площадке введем взаимно перпендикулярные оси  $N$  и  $T$  (перпендикулярная и касательная к площадке). Вдоль этих осей действуют напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ . Для их определения составим уравнения равновесия:

$$\sum N = 0:$$

$$\sigma_\alpha dA - (\tau_{zy} dA_{xy}) \cos \alpha - (\sigma_z dA_{xy}) \sin \alpha - (\tau_{yz} dA_{xz}) \sin \alpha - (\sigma_y dA_{xz}) \cos \alpha = 0.$$

$$\sum T = 0:$$

$$\tau_\alpha dA + (\tau_{zy} dA_{xy}) \sin \alpha - (\sigma_z dA_{xy}) \cos \alpha - (\tau_{yz} dA_{xz}) \cos \alpha + (\sigma_y dA_{xz}) \sin \alpha = 0.$$

Подставим в эти уравнения выражения для площадей:  $dA_{xy} = dA \sin \alpha$ ;  $dA_{xz} = dA \cos \alpha$  и разделим обе части уравнений на  $dA$ . С учетом закона парности (п. 1.7.2) получим

$$\sigma_\alpha = \sigma_y \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha + \tau_{yz} \sin 2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = (\sigma_z - \sigma_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} + \tau_{yz} \cos 2\alpha. \quad (5.1)$$

*Следствие.* Сумма нормальных напряжений на взаимно перпендикулярных площадках не зависит от угла  $\alpha$  и, следовательно, для данной точки эта сумма постоянна. Действительно, согласно первому выражению (5.1) получаем

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha+90} = \sigma_z + \sigma_y.$$

### 5.3.1 Положение главных площадок

Приравняв нулю касательное напряжение (5.1), получим

$$(\sigma_z - \sigma_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} + \tau_{yz} \cos 2\alpha = 0, \quad (5.2)$$

откуда получаем тангенс искомого угла:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{yz}}{\sigma_y - \sigma_z}. \quad (5.3)$$

Выражение (5.3) дает два взаимно перпендикулярных направления с углами наклона  $\alpha$  и  $\alpha + 90^\circ$ , по которым действуют главные напряжения. В случае  $\sigma_y = \sigma_z$  любая площадка является главной.

Легко проверить, что при таких значениях угла нормальные напряжения принимают экстремальные значения, так как  $\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 0$ .

### 5.3.2 Значения главных напряжений

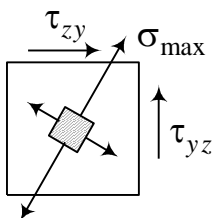
Исключив из первой формулы (5.1) и (5.3) угол  $\alpha$ , получим

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2}. \quad (5.4)$$

Вернемся к формуле (5.3). Она дает направления, но не указывает, в каком из них действует  $\sigma_1$  ( $\sigma_{\max}$ ), а в каком  $\sigma_3$  ( $\sigma_{\min}$ ). Из формулы  $\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 2\tau_{\alpha}$  вытекает, что при  $\tau_{\alpha} > 0$  имеем

$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} > 0$ . Следовательно,  $\sigma_{\alpha}$  возрастает с

увеличением  $\alpha$ . Можно получить такое правило:



направление  $\sigma_{\max}$  всегда проходит через те две координатные четверти, к которым сходятся стрелки касательных напряжений (это проиллюстрировано на рисунке 5.4).

нок 5.4

### ***5.3.3 Выражение напряжений по произвольным площадкам через главные напряжения***

Предположив, что  $z$  и  $y$  – главные площадки и  $z$  – максимальная ось, из формул (5.1) получим

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_3 \cos^2 \alpha ; \quad (5.5)$$

$$\tau_{\alpha} = (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sin 2\alpha}{2}. \quad (5.6)$$

### ***5.3.4 Максимальные касательные напряжения***

Из формулы (5.6) следует, что максимальные касательные напряжения возникают на площадках  $\alpha = 45^\circ$  с главными осями. Так как углы можно откладывать по разные стороны от главных осей, таких площадок четыре в каждой точке деформированной среды. Значение  $\tau_{\max}$  равно полуразности максимального и минимального главных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

## 5.4 Объемное напряженное состояние

Получим формулы для определения напряжений по наклонным площадкам. Рассмотрим бесконечно малый элемент, на гранях которого известны напряжения, и отсечем плоскостью элементарный четырехгранник – тетраэдр (рисунок 5.5, а, б).

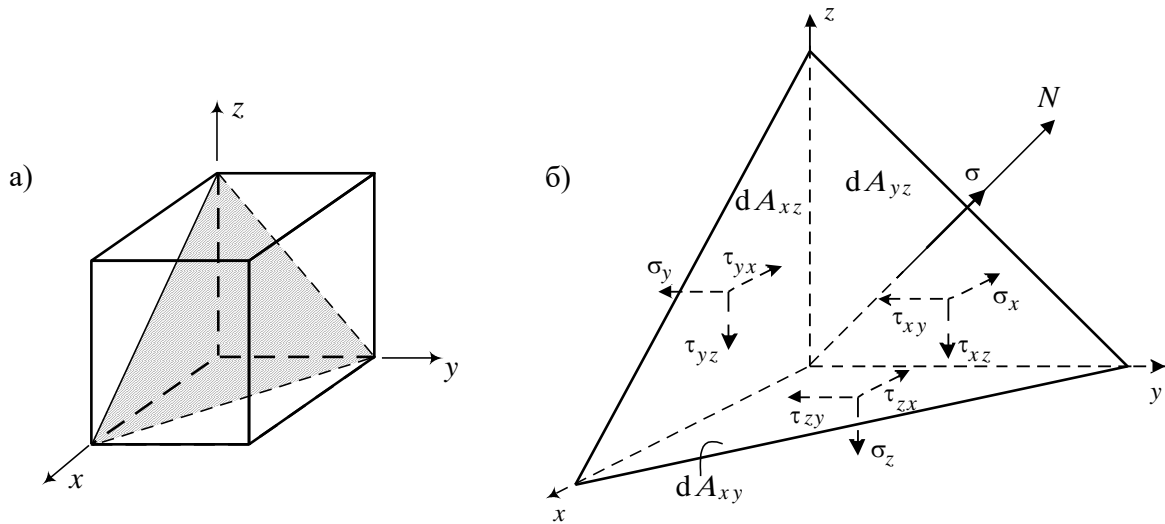


Рисунок 5.5 – Элементарный объем (а);  
отсеченный четырехгранник (б)

Предположим, что выбранная нами площадка является главной. Тогда на ней действует только нормальное напряжение  $\sigma$ , направленное вдоль нормали  $N$  к этой площадке.

Обозначим направляющие косинусы:  $\cos(N, x) = l$ ,  $\cos(N, y) = m$ ,  $\cos(N, z) = n$ . Тогда элементарные площади боковых и нижней граней тетраэдра выразятся через площадь наклонной площадки  $dA$ :  $dA_{xy} = dA \cdot n$ ;  $dA_{xz} = dA \cdot m$ ;  $dA_{yz} = dA \cdot l$ .

Запишем аналогично п. 5.3 уравнения равновесия элемента:

$$\sum_x = 0; \quad \sum_y = 0; \quad \sum_z = 0.$$

После преобразований с учетом введенных обозначений и закона парности касательных напряжений получим

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0; \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0; \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Полученные выражения можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно направляющих косинусов главной площадки  $l, m, n$ . Если определитель этой однородной системы равен нулю, то существует единственное решение системы:  $l = m = n = 0$ . Так как

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (5.8)$$

(это доказывается в курсе линейной алгебры), то все косинусы одновременно не могут быть равны нулю. Поэтому для существования решения системы уравнений (5.7) необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю.

Раскрыв этот определитель и произведя группировку членов, получим

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0, \quad (5.9)$$

где

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad (5.10)$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{zy}^2; \quad (5.11)$$

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{zy}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz}. \quad (5.12)$$

Выражение (5.9) используется как кубическое уравнение для определения значений трех главных напряжений. Оно имеет три корня  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Выразим коэффициенты в (5.10) – (5.12) через главные напряжения:

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \quad (5.13)$$

$$J_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3; \quad (5.14)$$

$$J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \quad (5.15)$$

Главные напряжения не зависят от выбора осей  $x, y, z$ . Следовательно, и коэффициенты  $J_1, J_2, J_3$  не меняются при повороте осей координат.

Поэтому величины  $J_1, J_2, J_3$  называются первым, вторым и третьим инвариантами напряженного состояния.

### 5.4.1 Положение главных площадок

Для отыскания  $l, m, n$ , соответствующих одному из трех главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , надо значение этого главного напряжения подставить в систему уравнений (5.7) вместо  $\sigma$  и решить полученную систему совместно с формулой (5.8). Таким образом, получим три набора направляющих косинусов, соответствующих трем главным площадкам:  $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3)$ .

### 5.4.2 Выражение напряжений по произвольным площадкам через главные напряжения

Как было ранее сказано, главные напряжения получаются решением кубического уравнения (5.9).

Приведем без вывода формулы для напряжений на произвольной площадке, заданной направляющими косинусами  $l, m, n$ :

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2; \quad (5.16)$$

$$\tau_\alpha^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2. \quad (5.17)$$

### 5.4.3 Максимальные касательные напряжения

Анализ выражения (5.16) показывает, что максимальные значения касательных напряжений получаются на площадках, определяемых направляющими косинусами:

$$\begin{aligned} m = 0, \quad l = n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ n = 0, \quad l = m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ l = 0, \quad n = m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, площадками действия экстремальных касательных напряжений являются площадки, проходящие через одну из главных осей и составляющие с двумя другими осями

углы  $45^\circ$ . Иными словами, эти площадки перпендикулярны одной из главных площадок и наклонены к двум другим под углом  $45^\circ$ . Так как углы можно откладывать по разные стороны от главных осей, таких площадок шесть в каждой точке деформированной среды.

Касательные напряжения на этих площадках равны

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (5.18)$$

#### 5.4.4 Обобщенный закон Гука

Рассмотрим элементарный прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными главным осям, по граням которого действуют главные напряжения (рисунок 5.6). Рассмотрим действие каждого из них отдельно.

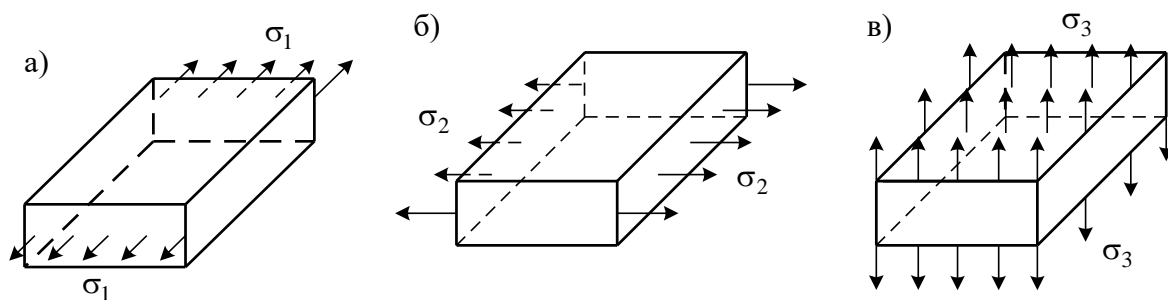


Рисунок 5.6 – К выводу обобщенного закона Гука

В направлении действия  $\sigma_1$  (рисунок 5.6, а) элемент получает относительное удлинение

$$\varepsilon_1' = \sigma_1/E$$

в соответствии с формулой (3.9) – законом Гука при растяжении.

Направление  $\sigma_1$  для направлений  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  является поперечным (рисунок 5.6, б, в). Поэтому эти напряжения вызывают укорочения в направлении  $\sigma_1$ , которые равны (п. 3.3.2)

$$\varepsilon_1'' = -\nu\sigma_2/E, \quad \varepsilon_1''' = -\nu\sigma_3/E.$$

Согласно принципу независимости действия сил, полная деформация в направлении действия  $\sigma_1$  равна



$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Записав аналогично выражения для деформаций  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ , получим *обобщенный закон Гука для изотропного тела*:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Относительные удлинения  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  по направлениям главных осей называются *главными деформациями*.

Если оси  $x, y, z$  не являются главными, то кроме относительных удлинений возникают и угловые деформации (п. 1.8.2). Но угловые деформации являются величиной более высокого порядка малости, чем линейные, так что ими можно пренебречь. Поэтому формулы (5.19) справедливы не только для главных деформаций, но и для относительных удлинений по любым трем взаимно перпендикулярным направлениям  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

#### 5.4.5 Объемная деформация

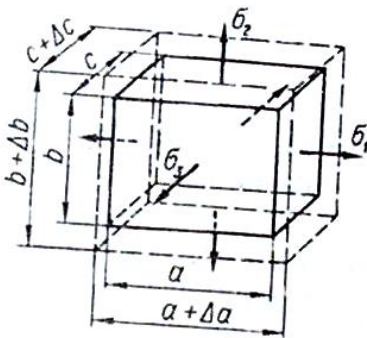


Рисунок 5.7

Рассмотрим изменение объема элемента под действием главных напряжений (рисунок 5.7). Объем элемента до деформации равен  $V_0 = abc$ . Запишем объем в деформированном состоянии, учитывая малость относительных деформаций и тем более их попарных произведений:

$$V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = abc\left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right)\left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right)\left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) = \\ = V_0(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \approx V_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Относительное изменение объема

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Выразим главные деформации через главные напряжения:

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (5.21)$$

В частности, при равномерном всестороннем обжатии, когда  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma$ , имеем

$$\varepsilon_V = -\frac{\sigma}{K},$$

где

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}.$$

Величина  $K$  называется *модулем объемной деформации*.

Окончательно из формулы (5.21) получаем

$$\varepsilon_V = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3K}. \quad (5.22)$$

#### **5.4.6 Потенциальная энергия деформации при объемном напряженном состоянии**

При простом растяжении или сжатии удельная потенциальная энергия деформации определяется формулой (3.19)

$$u = \frac{\sigma \varepsilon}{2}.$$

При объемном напряженном состоянии в случае малых деформаций удельная потенциальная энергия может быть найдена путем суммирования:

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}.$$

Подставив сюда  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  по закону Гука (5.19), получим

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]. \quad (5.23)$$

В общем случае деформирования происходит изменение объема и формы рассматриваемого элемента. В соответствии с этим удельную потенциальную энергию деформации можно представить как удельную энергию изменения объема  $u_{об}$  и удельную энергию изменения формы  $u_{\phi}$ .

Представим, что каждое из действующих главных напряжений состоит из двух слагаемых:

$$\sigma_1 = \sigma_{1,об} + \sigma_{1,\phi}; \quad \sigma_2 = \sigma_{2,об} + \sigma_{2,\phi}; \quad \sigma_3 = \sigma_{3,об} + \sigma_{3,\phi}.$$

Изменение объема при сохранении формы характеризуется условием равенства относительных линейных деформаций в направлении трех осей  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ . Соблюдение этого условия возможно лишь при всестороннем равномерном растяжении или сжатии.

Предположим, что напряжения, вызывающие изменение объема, равны среднему арифметическому  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ :

$$\sigma_{1,об} = \sigma_{2,об} = \sigma_{3,об} = \sigma_{ср} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (5.24)$$

Тогда напряжения, вызывающие изменение формы, будут равны

$$\sigma_{1,\phi} = \sigma_1 - \sigma_{ср}; \quad \sigma_{2,\phi} = \sigma_2 - \sigma_{ср}; \quad \sigma_{3,\phi} = \sigma_3 - \sigma_{ср}. \quad (5.25)$$

Энергию изменения объема получим, подставив в формулу (5.23) напряжения (5.24):

$$u_{об} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (5.26)$$

Энергию изменения формы найдем по формуле (5.23), подставив в нее выражения (5.25):

$$u_{\phi} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]. \quad (5.27)$$

Полученная формула (5.27) подтверждают, что при  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  происходит только изменение объема, так как энергия изменения формы в этом случае равна нулю.

## 6 ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Способность материалов сопротивляться растяжению-сжатию хорошо изучена экспериментально (тема 3). Для этой простой деформации дано понятие опасного состояния и сформулирован критерий прочности, основанный на опытных данных: должно выполняться условие  $N/A \leq [\sigma]$  (п.п. 3.7.1, 3.7.2).

Для сложных видов нагружения, при которых возникают различные сочетания главных напряжений, такие опыты отсутствуют. В связи с этим необходимо иметь какой-то критерий, по которому можно было бы на основании опытов при растяжении-сжатии судить о прочности материала в более сложных случаях нагружения. Такие положения, теоретически обоснованные и апробированные, называются *гипотезами или теориями прочности*.

### 6.1 Теория наибольших нормальных напряжений

Опасное состояние наступает тогда, когда наибольшие нормальные напряжения достигают некоторого предельного значения. При растяжении предельным напряжением является предел прочности на растяжение  $\sigma_0$ , при сжатии – предел прочности на сжатие  $\sigma'_0$ . В соответствии с формулировкой I *теории* опасное состояние определяется равенством

$$\sigma_1 = \sigma_0 \quad \text{или} \quad |\sigma_3| = \sigma'_0. \quad (6.1)$$

Таким образом, в соответствии с гипотезой наибольших нормальных напряжений предельное состояние не может быть определено одним равенством. Условие прочности получим из формулы (5.1) после замены  $\sigma_0$  и  $\sigma'_0$  допускаемыми напряжениями  $[\sigma]_p$  и  $[\sigma]_c$ :

$$\sigma_{\text{ЭКВ I}} = \sigma_1 \leq [\sigma]_p \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{ЭКВ I}} = |\sigma_3| \leq [\sigma]_c. \quad (6.2)$$

*Недостатки теории.* Сложное напряженное состояние в ней приравняется к линейному. Эта теория не подтверждается экспериментально. Так, при всестороннем равномерном сжатии материалы не разрушаются даже при напряжениях, превышающих предел прочности при сжатии  $|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\sigma_3| = \sigma'_0$ .

Несмотря на указанные недостатки, для проверки прочности элементов, напряженное состояние которых незначительно отклоняется от линейного (если абсолютные значения двух главных напряжений малы по сравнению с третьим), гипотеза наибольших нормальных напряжений применяется в инженерно-технических расчетах. Она дает экспериментально подтвержденные результаты для очень хрупких материалов (кирпич, керамика, инструментальная сталь).

## 6.2 Теория наибольших относительных удлинений

Опасное напряженное состояние наступает, когда наибольшее относительное удлинение достигает некоторого предельного значения  $\varepsilon_0$ , т. е. в опасном или предельном состоянии имеем

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_0.$$

Считая закон Гука (1.27) справедливым до момента разрушения и выражая  $\varepsilon_{\max}$  и  $\varepsilon_0$  через напряжения, получаем

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

$$\varepsilon_0 = \sigma_0 / E.$$

Условие предельного состояния приобретает вид

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_0. \quad (6.3)$$

При расчете по допускаемым напряжениям условие прочности по II теории записывается следующим образом:

$$\sigma_{\text{экв II}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_p. \quad (6.4)$$

*Недостатки теории.* При получении критерия (6.4) предполагалось выполнение закона Гука вплоть до разрушения, что соответствует только хрупкому разрушению материалов. Теория не подтверждается экспериментально: в опытах со всесторонним обжатием размеры образцов заметно

уменьшаются, то есть появляются большие деформации, но это не приводит к разрушению.

Эта теория дает экспериментально подтверждаемые результаты при проверке прочности конструкций и деталей из хрупких материалов.

Таким образом, *первые две теории прочности применимы при хрупком разрушении.*

### 6.3 Теория максимальных касательных напряжений

Разрушение пластичных материалов существенно отличается от разрушения хрупких. Оно сопровождается развитием остаточных деформаций, т. е. сдвигов в материале, и поэтому должно быть связано не с нормальными напряжениями и относительными удлинениями, а с касательными напряжениями. Опасное (пластическое) состояние материала начинается тогда, когда наибольшие касательные напряжения достигают некоторой предельной величины. Такой предельной величиной является предел текучести для касательных напряжений  $\tau_T$ , следовательно, условие пластичности может быть записано в виде

$$\tau_{\max} = \tau_T.$$

Так как  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  (5.18),  $\sigma_0 = \sigma_T$ ,  $\tau_T = \frac{\sigma_T}{2}$  (см. п. 3.2), то имеем

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T.$$

Условие прочности по III теории имеет следующий вид:

$$\sigma_{\text{ЭКВ III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_p, \quad (6.5)$$

Эксперименты с различными *пластичными материалами* подтверждают результаты прогноза согласно этой теории.

*Недостатком* является то, что не учитывается главное напряжение  $\sigma_2$ . Поэтому теория не всегда находит опытное подтверждение.

### 6.4 Энергетическая теория прочности

Количественной характеристикой начала пластических деформаций в этой теории принята удельная потенциальная энергия изменения формы  $u_\phi$  (5.27). Опасное (пластическое) состояние материала начинается тогда, когда  $u_\phi$  достигнет некоторой предельной величины:

$$u_\phi = u_0. \quad (6.6)$$

В качестве  $u_0$  в формуле (6.6) следует принять потенциальную энергию изменения формы при растяжении

$$u_0 = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_0^2.$$

После подстановки  $u_\phi$  и  $u_0$  в (6.6) и преобразований получаем следующее условие, определяющее начало текучести:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_0 = \sigma_T. \quad (6.7)$$

Отсюда следует такая форма условия прочности:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]_p. \quad (6.8)$$

Для плоского напряженного состояния, когда  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  $\sigma_z = \sigma$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{zy} = \tau$ , используя формулу (5.4), из (6.8) получаем такое условие прочности по *IV теории*:

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]_p. \quad (6.9)$$

*Недостатки.* В случае сдвига ( $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \sigma_2 = 0$ ) на основании равенства (6.7) имеем  $\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 \approx 0,57 \sigma_0$ , т. е. предел текучести для касательных напряжений  $\tau_T$  должен быть равен 0,57 предела текучести при растяжении  $\sigma_T$ . Согласно экспериментальным исследованиям пластичных материалов,  $\tau_T$  находится в пределах  $(0,55 - 0,60)\sigma_T$ . Кроме того, в случае равномерного трехстороннего сжатия или растяжения, а также в случае близких между собой по значениям сколь угодно больших по абсолютной величине главных напряжений, в соответствии с энергетическим условием опасного состояния, как и по условию наибольших касательных напряжений, переход материала в

пластическое состояние невозможен. Это не подтверждается практикой.

Несмотря на указанные несоответствия, энергетическое условие достаточно точно определяет начало пластических деформаций для широкого класса обычно встречающихся на практике напряженных состояний. Энергетическая гипотеза прочности с успехом применяется для проверки прочности конструкций и деталей машин из *пластичного материала*.

Третья и четвертая теории прочности являются *критериями пластичности*.



## 7 ПЛОСКИЙ ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

*Изгибом* называется деформация, которая вызывается силами, приложенными перпендикулярно оси элемента и вызывающими искривление его продольных волокон.

*Плоским поперечным изгибом* называется такой вид изгиба, при котором все действующие активные и реактивные силы лежат в одной плоскости, проходящей через ось балки, и в той же плоскости лежит изогнутая ось стержня. Такой изгиб имеет место, если плоскость действия сил является главной.

При этих условиях в поперечном сечении элемента возникают такие *внутренние усилия*: поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ .

Стержень, работающий на изгиб, называется *балкой*.

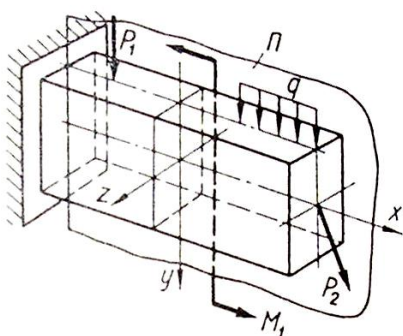


Рисунок 7.1

Будем рассматривать балки, имеющие плоскость симметрии и нагруженные в этой плоскости (рисунок 7.1). Поскольку плоскость симметрии является главной плоскостью, изгиб в этом случае является плоским.

### 7.1 Чистый изгиб

Изгиб на участке называется чистым, если поперечная сила на этом участке равна нулю ( $Q=0$ ). Изгибающий момент  $M$  на этом участке постоянный, так как  $dM/dx = Q = 0$ . Например, чистый изгиб возникает на участке вагонной оси  $CD$  между рельсами (рисунок 7.2, а) или между точками приложения силы в случае, приведенном на рисунке 7.2, б.

Под действием системы сил балка изгибается, ее ось (прямая до изгиба) после изгиба принимает изогнутую форму (рисунок 7.2, в). Верхние волокна балки сжимаются; при приближении волокон к нижней части сжатие переходит в растяжение. Между сжатыми и растянутыми волокнами есть слой, волокна которого при изгибе не меняют своей длины. Этот слой называется *нейтральным* (рисунок 7.2, г).

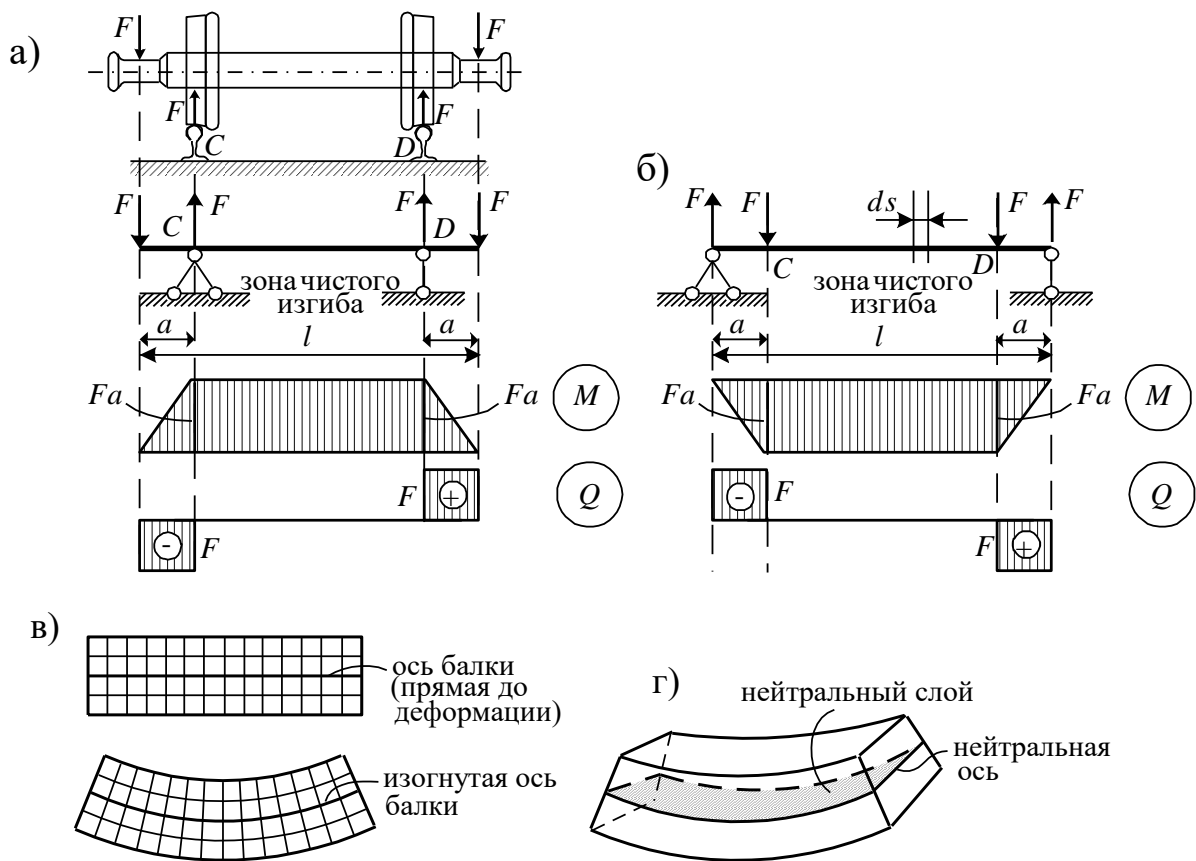


Рисунок 7.2 – Чистый изгиб: пример чистого изгиба (а);  
схема искривления горизонтальных и вертикальных линий  
в зоне чистого изгиба (б); нейтральный слой (в)

Линия пересечения нейтрального слоя и сечения балки называется *нейтральной осью* сечения.

Далее, на рисунке 7.2, в показано, что после деформации прямые линии, перпендикулярные продольным волокнам, остались прямыми и перпендикулярность не нарушена. Это иллюстрация *гипотезы плоских сечений* (п. 1.1).

### 7.1.1 Деформации при чистом изгибе

Двумя поперечными сечениями вырежем в среднем участке балки элемент длиной  $ds$  (рисунок 7.2, б) и представим его на рисунке 7.3. Ось  $z$  направим вдоль нейтральной оси.

До деформации сечения балки параллельны между собой. После деформации они несколько наклоняются, образуя угол  $d\varphi$  (рисунок 7.3, а). Пусть III – нейтральное волокно балки, его длина

равна исходной длине  $ds$ ,  $\rho$  – радиус его кривизны (размер элемента  $ds$  и его деформация малы, поэтому можно считать, что все волокна являются элементами окружностей), так что

$$ds = \rho d\varphi.$$

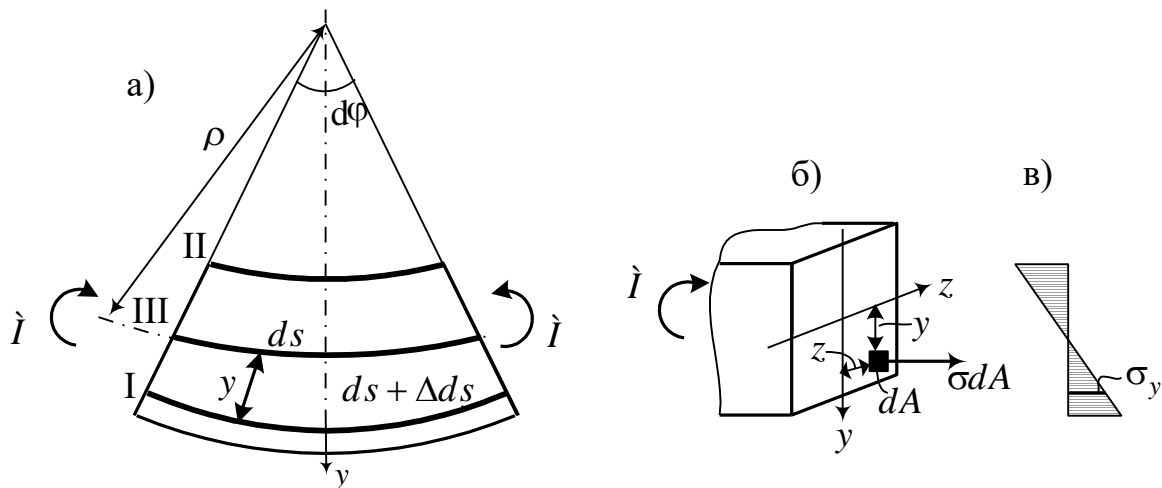


Рисунок 7.3 – Элемент балки

При изгибе нижние волокна растягиваются, и длина  $ds + \Delta ds$  некоторого волокна I из геометрии равна

$$ds + \Delta ds = (\rho + y)d\varphi.$$

Получаем относительное удлинение этого волокна:

$$\varepsilon = \frac{(ds + \Delta ds) - ds}{ds} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (7.1)$$

Для каждого сечения радиус кривизны изогнутой оси балки  $\rho$  есть величина постоянная, и поэтому относительное удлинение волокна прямо пропорционально расстоянию этого волокна до нейтральной оси балки.

### 7.1.2 Напряжения при чистом изгибе

Примем, что при изгибе продольные волокна не нажимают друг на друга и не стремятся оторваться одно от другого. При таком предположении каждое волокно деформируется изолированно, испытывая простое одноосное сжатие или растяжение, для которого можно использовать закон Гука в виде (3.10), т. е.  $\sigma = E \varepsilon$ . С учетом (7.1) получим

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}. \quad (7.2)$$

Эти напряжения нормальны к плоскости поперечного сечения балки и изменяются по линейному закону (рисунок 7.3, в).

Рассечем балку и запишем условия равновесия ее левой части (рисунок 7.3, б).

$$1) \sum X = 0: \int_A \sigma dA = \int_A E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

$$\text{Так как } E \neq 0, \quad \rho \neq 0, \text{ то } \int_A y dA = S_z = 0.$$

Равенство  $S_z = 0$  возможно лишь в том случае, если ось  $z$  является *центральной осью* сечения балки (п. 4.2). Итак, *нейтральная ось является центральной, нейтральный слой в балке проходит через центры тяжести поперечных сечений;*

$$2) \sum M_y = 0: \int_A (\sigma dA) z = \frac{E}{\rho} \int_A z y dA = \frac{E}{\rho} J_{zy} = 0.$$

Отсюда следует, что центробежный момент относительно пары осей  $z, y$  равен нулю. Это означает, что *нейтральная ось является главной осью;*

$$3) \sum M_z = 0: \int_A (\sigma dA) y = M,$$

откуда получим  $\frac{E}{\rho} J_z = M$ , или

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z}}, \quad (7.3)$$

где  $\frac{1}{\rho}$  – *кривизна изогнутой оси* балки;

$EJ_z$  – *жесткость балки при изгибе.*

Зависимость (7.3) называется *законом Гука при изгибе.*

В формулу (7.2) подставим (7.3). В результате найдем выражение для нормальных напряжений при изгибе в волокне с на расстоянии  $y$  от нейтральной оси с учетом знака (рисунок 7.3, в):

$$\sigma = \frac{M y}{J_z}. \quad (7.4)$$

### 7.1.3 Условие прочности

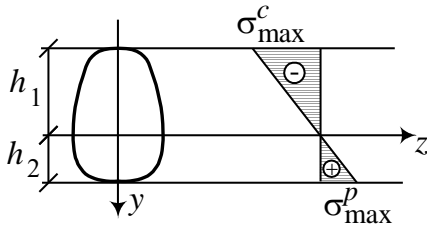


Рисунок 7.4 – Эпюра нормальных напряжений

Из формулы (7.4) видно, что максимальные по абсолютной величине нормальные напряжения возникают в крайних волокнах, в которых и нужно проверять условия прочности (рисунок 7.4):

$$\sigma_{\max}^p = \frac{M h_1}{J_z} = \frac{M}{J_z / h_1} = \frac{M}{W_{z1}} \leq [\sigma]_p,$$

$$|\sigma_{\max}^c| = \frac{M h_2}{J_z} = \frac{M}{J_z / h_2} = \frac{M}{W_{z2}} \leq [\sigma]_c.$$

Здесь  $W_{z1}$ ,  $W_{z2}$  – моменты сопротивления сечения (п. 4.9).

Для материалов, которые одинаково хорошо работают на растяжение и сжатие (например, сталь) наиболее употребительны сечения, симметричные относительно нейтральной оси (прямоугольники, двутавры, швеллеры). Для них  $W_{z1} = W_{z2} = W_z$ , и условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (7.5)$$

### 7.1.4 Рациональная форма сечений

Рациональной является наиболее экономная форма сечения (т. е. имеющая наименьшую площадь), обеспечивающая при этом его прочность.

Если материал элемента *одинаково хорошо работает на растяжение и сжатие*, то сечение рационально выбирать симметричным относительно оси  $z$ . Такие сечения имеют одинаковый запас прочности растянутых и сжатых волокон, т. к. относительно оси симметрии  $W_{z1} = W_{z2}$ .

Если материал *плохо сопротивляется растяжению* (бетон, чугун), то рационально сечение, несимметричное относительно

нейтральной оси, причем  $h_1/h_2 = [\sigma]_c/[\sigma]_p$  ( $h_1$  и  $h_2$  – расстояния от нейтральной оси до крайнего сжатого и растянутого волокон). Этим достигается совпадение моментов сопротивления  $W_{z1} = W_{z2}$  и, следовательно, одинаковый запас прочности для растянутых и сжатых волокон.

Рассмотрим теперь *различные симметричные сечения одинаковой высоты*, приведенные на рисунке 7.5. Из эпюры нормальных напряжений видно, что наибольшая нагрузка приходится на крайние и близкие к ним волокна. Поэтому сечение тем рациональнее при изгибе, чем оно ближе к форме двутавра, т. е. чем бóльшая часть сечения удаленнее от нейтральной оси и находится в области действия больших напряжений  $\sigma$ .

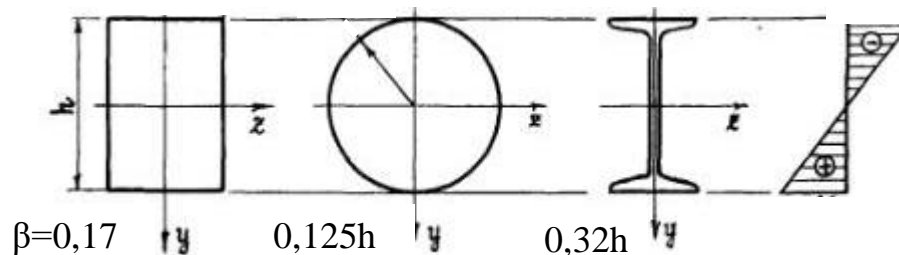


Рисунок 7.5

Это можно показать и численно. В зависимости от формы сечения изменяются его площадь  $A$  (которую нужно выбрать из экономии по возможности меньше) и момент сопротивления  $W_z$  (который должен быть максимально большим, чтобы уменьшить напряжение). Поэтому рациональность можно оценивать коэффициентом  $\beta = W_z/A \rightarrow \max$ . Значения  $\beta$  для приведенных сечений даны на рисунке 7.5. Для двутавра его значение максимально.

## 7.2 Поперечный изгиб

При поперечном изгибе в поперечном сечении стержня возникает поперечная сила  $Q$ , при этом изгибающий момент уже не является постоянным. Однако исследованиями установлено, что влияние поперечной силы на величину нормальных напряжений незначительно. Оно зависит от отношения высоты

балки к ее пролету. При небольшой высоте сечения  $h = (0,1 \div 0,05)l$  гипотеза плоских сечений и предположение о ненадавливании волокон (п. 7.1) выполняются с большой точностью, поэтому нормальные напряжения при поперечном изгибе можно определять по формулам (7.4), (7.5), выведенным в предположении чистого изгиба.

### 7.2.1 Касательные напряжения при поперечном изгибе (формула Журавского)

При поперечном изгибе напряжения в сечении должны уравнивать не только изгибающий момент, но и поперечную силу. Таким образом, в сечении должны действовать касательные напряжения.

Предположим, что: 1) касательные напряжения параллельны поперечной силе  $Q$ ; 2) на площадках, равноудаленных от нейтральной оси, касательные напряжения  $\tau$  одинаковы.

Вырежем на участке балки двумя поперечными сечениями элемент  $dx$  (рисунок 7.6, а). Выделим из него тонкий слой толщиной  $dy$  на расстоянии  $y$  от нейтральной оси (рисунок 7.6, б). Покажем выделенный слой отдельно (рисунок 7.6, в). По закону парности (п. 1.7.2), на верхней грани элемента должны действовать такие же по величине напряжения  $\tau$ .

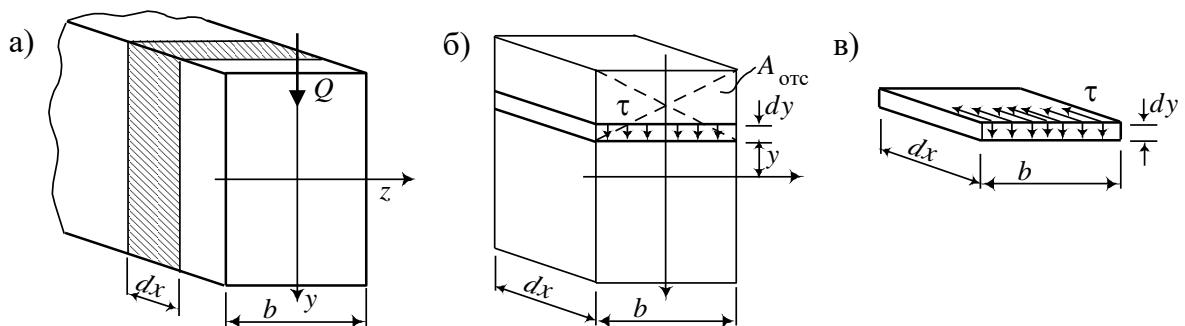


Рисунок 7.6 – К выводу формулы Журавского

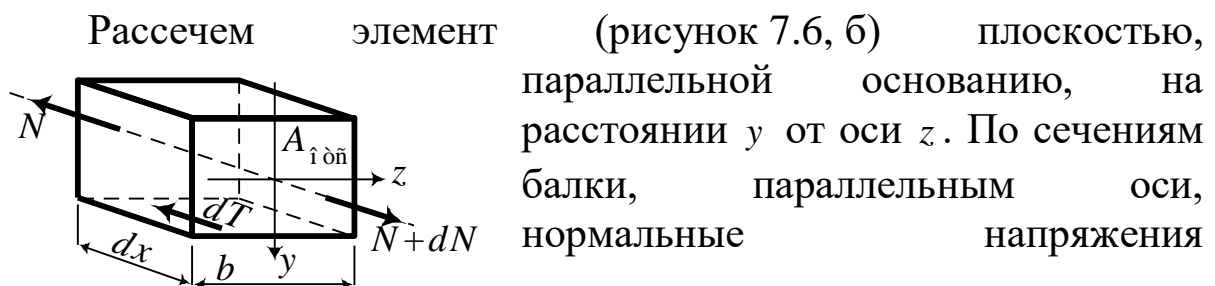


Рисунок 7.7 – К условию равновесия отсеченного элемента

отсутствуют (согласно п. 7.1.2 продольные волокна не надавливают друг на друга). Таким образом, на отсеченную часть действуют силы, показанные на рисунке 7.7.

Запишем условие равновесия элемента:

$$\Sigma_x = (N + dN) - N - dT = 0,$$

откуда

$$dT = dN. \quad (7.6)$$

Согласно формулам (1.2), (7.4) получаем

$$dN = \int_{A_{отс}} d\sigma dA = \frac{dM}{J_z} \int_{A_{отс}} y dA = \frac{dM \cdot S_z^{отс}}{J_z}.$$

Равнодействующая касательных напряжений равна

$$dT = b dx \tau.$$

Подставим полученные выражения в (7.6):

$$\frac{dM S_z^{отс}}{J_z} = b dx \tau, \quad \tau = \frac{dM S_z^{отс}}{dx b J_z}.$$

Отсюда с учетом  $\frac{dM}{dx} = Q$  окончательно получаем

$$\tau = \frac{QS_z^{отс}}{bJ_z}, \quad (7.7)$$

где  $b$  – ширина сечения на уровне той площадки, на которой определяется касательное напряжение;  $S_z^{отс}$  – статический момент площади той части поперечного сечения, которая лежит выше рассматриваемой площадки, относительно нейтральной оси.

Формула (7.7) называется **формулой Журавского**.

### 7.2.2 Касательные напряжения в прямоугольном сечении

Рассмотрим прямоугольное сечение (рисунок 7.8) и определим касательное напряжение для волокна  $y$ .



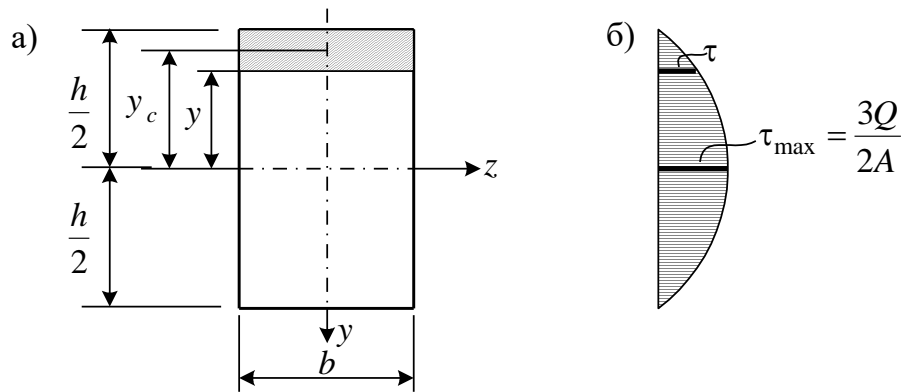


Рисунок 7.8 – Касательные напряжения в прямоугольном сечении  
Статический момент заштрихованной площади  
относительно оси  $z$  равен:

$$S_z^{\text{отс}} = y_c A_{\text{отс}} = \left[ y + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right] \left[ \left( \frac{h}{2} - y \right) b \right] = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Подставив полученное выражение в формулу (7.7), найдем:

$$\tau = \frac{Q}{2J_z} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad (7.8)$$

где момент инерции прямоугольника  $J_z = \frac{bh^3}{12}$  (4.21). Из формулы (7.8) видно, что касательные напряжения по высоте сечения изменяются по параболическому закону. Эти напряжения равны нулю при  $y = \pm \frac{h}{2}$  и достигают максимума на уровне нейтральной оси ( $y = 0$ ), где они равны

$$\tau_{\max} = Q \frac{12}{bh^3} \frac{h^2}{8} = \frac{3Q}{2A}. \quad (7.9)$$

Здесь  $A$  – площадь поперечного сечения,  $A = bh$ .

### 7.2.3 Касательные напряжения для двутаврового сечения

Формулы для касательных напряжений в двутавровом сечении (рисунок 7.9) получаются аналогично формуле (7.8).

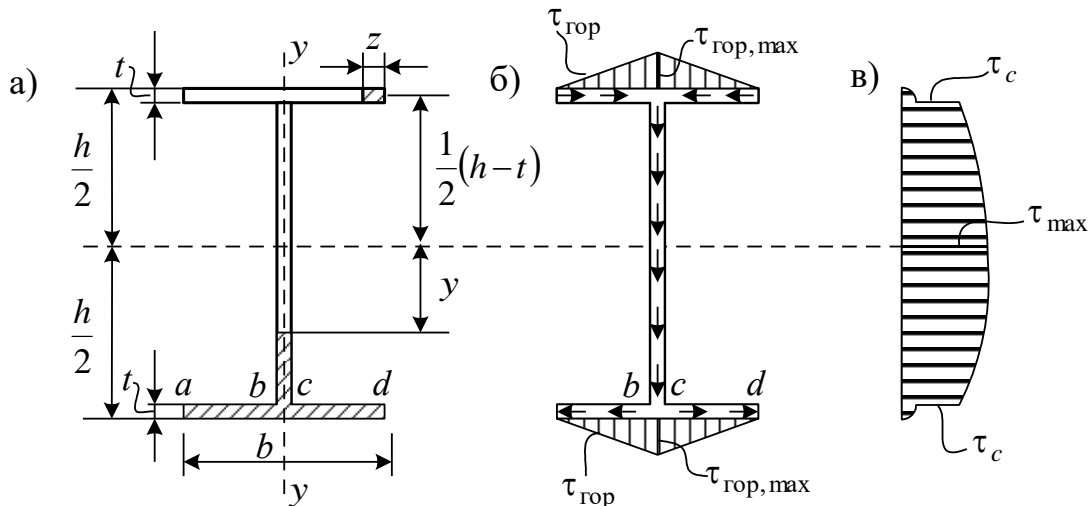


Рисунок 7.9 – Касательные напряжения в балке двутаврового поперечного сечения

При  $y = 0$  (на уровне нейтральной оси) касательные напряжения достигают максимального значения

$$\tau_{\max} = \frac{Q \left[ d \left( \frac{h}{2} - t \right)^2 + b t (h - t) \right]}{2 J_z d}. \quad (7.10)$$

При  $y = h/2 - t$ , т. е. в месте перехода от стенки к полке, касательные напряжения равны

$$\tau_c = \frac{Q b t (h - t)}{2 J_z d}. \quad (7.11)$$

Обычно толщина стенки  $d$  очень мала по сравнению с шириной полки  $b$ , поэтому различие  $\tau_{\max}$  и  $\tau_c$  невелико. В местах перехода от широкой части сечения к более узкой имеет место концентрация напряжений. Для ее уменьшения углы в месте перехода стенки к полке округляются. В полках напряжения очень малы, так как большую часть поперечной силы воспринимает вертикальная стенка (п. 7.1.4 и рисунок 7.9, в).

В полках двутавровой балки возникают также горизонтальные напряжения (рисунок 7.9, б). Их величины

$$\tau_{\text{гор}} = Qz(h-t)/2J_z, \quad \tau_{\text{гор, макс}} = Qb(h-t)/4J_z. \quad (7.12)$$

### 7.3 Вид напряженного состояния и теории прочности

При изгибе, как видно из рисунка 7.10, имеет место плоское напряженное состояние (п. 5.3).

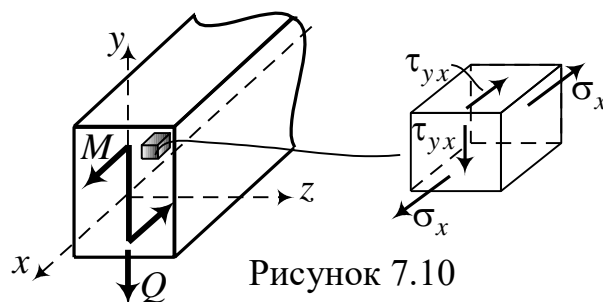


Рисунок 7.10

Пользуясь формулами (5.4) для случая  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\tau_{yx} = \tau$ , получаем значения главных напряжений:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}. \quad (7.13)$$

Проверку прочности в точках поперечного сечения проводят по одной из теорий прочности (тема б):

I Теория наибольших нормальных напряжений:

$$\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]_p; \quad \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right| \leq [\sigma]_c. \quad (7.14)$$

II Теория наибольших относительных удлинений:

$$\frac{1-\nu}{2} \sigma + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7.15)$$

III Теория наибольших касательных напряжений:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7.16)$$

IV Энергетическая теория прочности:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7.17)$$

## 7.4 Порядок подбора сечения и проверки прочности при изгибе

1 Строятся эпюры  $M$  и  $Q$ .

2 По эпюре  $M$  определяется значение максимального по абсолютной величине момента  $M_{\max}$ .

3 (а) Если производится проверка прочности сечения, проверяется выполнение условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

3 (б) Если выполняется подбор сечения, то из условия прочности определяется значение  $W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$ .

При подборе прокатного профиля его номер определяется по сортаменту (выбирается номер профиля, у которого момент сопротивления  $W_z$  имеет значение *ближайшее большее*, чем рассчитанное).

При подборе не прокатного профиля его момент сопротивления выражается через размеры сечения (п. 4.9). Полученное выражение используется как уравнение для определения размеров сечения.

В п. 3 обеспечивается прочность крайних волокон сечения.

4 По эпюре  $Q$  определяется значение максимальной по абсолютной величине поперечной силы  $Q_{\max}$ . В этом сечении выполняется проверка прочности заданного или полученного в п. 3(б) сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z}{J_z b} \leq [\tau].$$

Если это условие не выполняется, увеличиваются размеры сечения (номер профиля). Если условие выполняется, производится дальнейшая проверка.

В п. 4 обеспечивается прочность нейтрального волокна.

5 Определяется положение опасного сечения (одного или нескольких), в котором  $M$  и  $Q$ , хотя и не принимают наибольших значений, но в своей комбинации создают наиболее невыгодное сочетание, т. е. главные напряжения будут наибольшими.

6 В опасных сечениях строятся эпюры  $\sigma$  и  $\tau$  по высоте сечения и определяются опасные точки на этих эпюрах (например, для двутавра это волокно на стыке стенки и полки, рисунок 7.9).

7 В опасных точках производится проверка прочности по одной из теорий прочности для плоского напряженного состояния (7.14) – (7.17).

Основные формулы для расчетов на изгиб приведены в приложении Б.

### Пример расчета на подбор сечения и проверку прочности

Подобрать двутавровое сечение для стальной балки, показанной на рисунке 7.11;  $[\sigma]=160\text{ МПа}$ ,  $[\tau]=100\text{ МПа}$ .

Построив эпюры внутренних сил (рисунок 7.11), определяем значение  $M_{\max} = 26,25\text{ кНм}$  в сечении С. Из условия прочности по нормальным напряжениям вычисляем

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{26,25\text{ кНм}}{160 \cdot 10^3\text{ кН/м}^2} = 164 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3 = 164\text{ см}^3.$$

На основании сортамента (приложение В) выбираем двутавр № 20 с  $W_z = 184\text{ см}^3$  (ближайший больший, чем  $164\text{ см}^3$ ). Для этого двутавра  $h = 20\text{ см}$ ,  $b = 20\text{ см}$ ,  $t = 8,4\text{ мм}$ ,  $d = 5,2\text{ мм}$ ,  $J_z = 1840\text{ см}^4$ , статический момент полусечения  $S_z = 104\text{ см}^3$ .

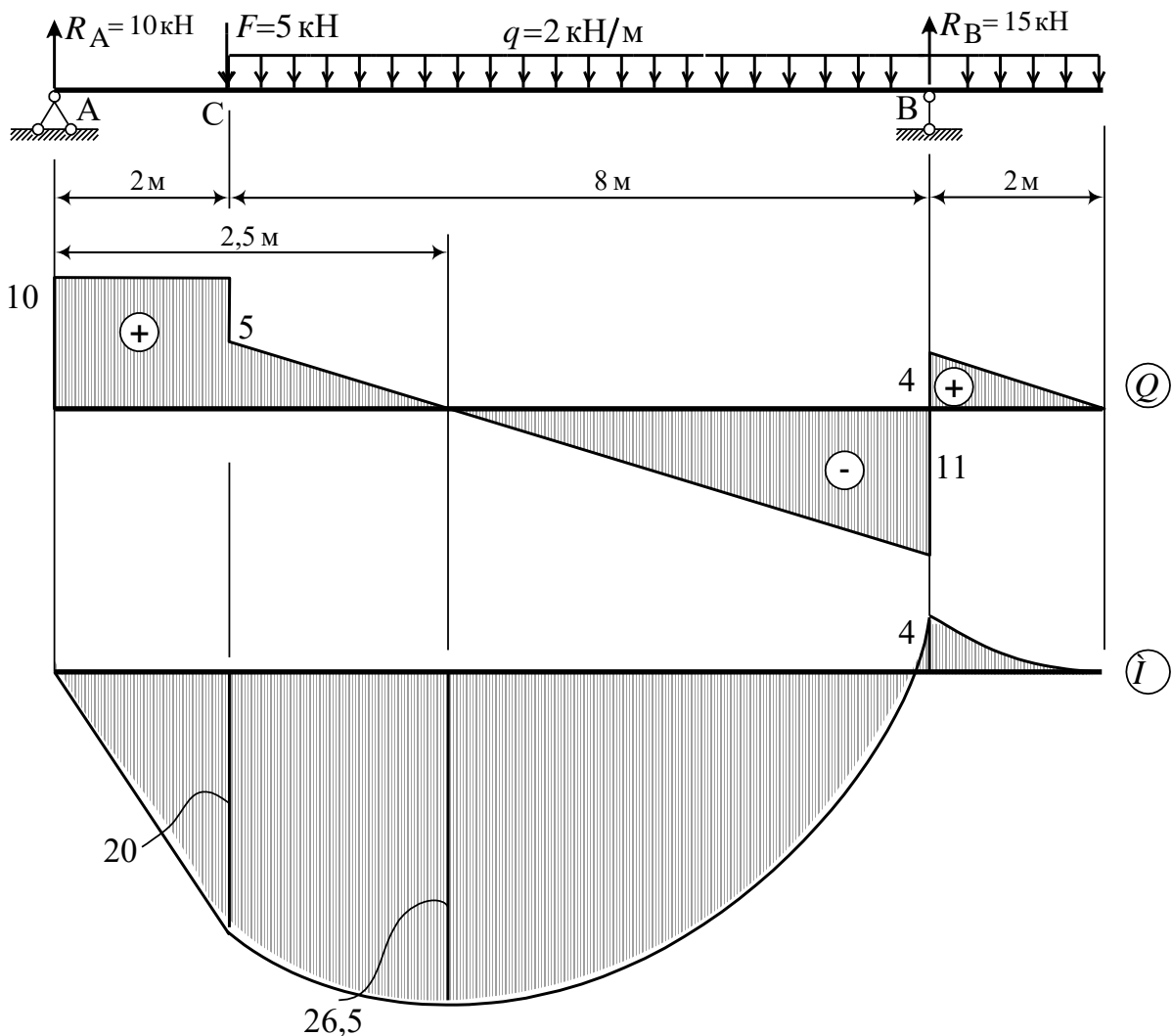


Рисунок 7.11 – Расчетная схема балки и эпюры внутренних сил

Проверим прочность балки по *касательным напряжениям*. Эта проверка производится в сечении с максимальной по модулю поперечной силой  $Q_{\max} = 11$  кН (это сечение слева от опоры В):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z}{dJ_z} = \frac{11 \text{ кН} \cdot 104 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{5,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 12 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} = 12 \text{ МПа} < [\tau].$$

*Опасным сечением* является сечение слева от т. С:  $Q = 10$  кН,  $M = 20$  кНм.

Для проверки прочности по высоте сечения строим в сечении С эпюры  $\sigma$  и  $\tau$ . Рассчитываем  $\tau_c$ ,  $\tau_{\max}$ ,  $\sigma_c$ ,  $\sigma_{\max}$  по формулам (7.10), (7.11), (7.4). Получаем значения, приведенные на рисунке 7.12.

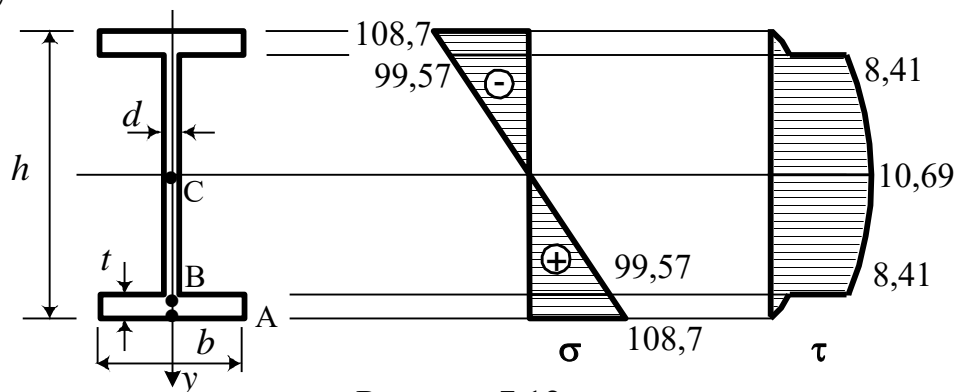


Рисунок 7.12

Проверяем прочность в опасной т. 2, в которой имеет место плоское напряженное состояние, по IV теории прочности (6.9):

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma_c^2 + 3\tau_c^2} = 100,6 \text{ МПа} < [\sigma].$$

## 7.5 Изогнутая ось балки

При практических расчетах изгибаемых элементов, кроме проверки на прочность проводят и проверки на жесткость – проверяют, не превышают ли перемещения допускаемые значения.

В качестве перемещений при изгибе рассматриваются прогиб и угол поворота сечения. *Прогиб* – это перемещение центра тяжести сечения в направлении, перпендикулярном оси. *Угол поворота сечения* – это угол, на который сечение

поворачивается относительно начального положения. Этот угол совпадает с углом между касательной к изогнутой оси в сечении и начальным положением оси.

Зная эти величины для каждого сечения, можно построить изогнутую ось балки. *Изогнутой осью балки*, или ее *упругой линией*, называется та кривая, в которую переходит прямолинейная до деформации ось балки после приложения к ней нагрузки.

Рассмотрим балку (рисунок 7.13). Поместим начало координат на левом конце балки, ось  $y$  направим вниз.

Обозначим через  $y$  прогиб балки в сечении  $x$ , через  $\varphi$  – угол поворота. Из геометрии видно, что эти величины связаны: для малых деформаций

$$y' = \operatorname{tg}\varphi \approx \varphi.$$

Угол  $\varphi$  будем считать положительным, если он образован вращением касательной по часовой стрелке.

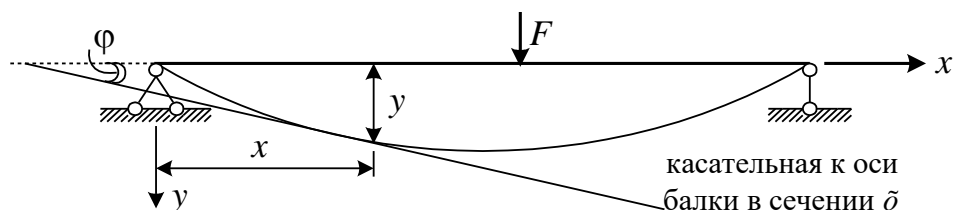


Рисунок 7.13 – Деформации при изгибе

### 7.5.1 Дифференциальное уравнение изогнутой оси

Воспользуемся законом Гука при изгибе (7.3):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ},$$

где  $J = J_z$  – момент инерции поперечного сечения относительно главной центральной оси  $z$ .

В курсе высшей математики приводится следующее выражение для определения кривизны:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \left[ \frac{y''}{1 + (y')^2} \right]^{3/2}. \quad (7.18)$$

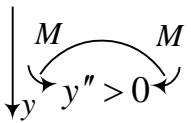
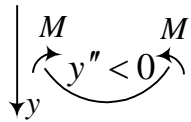


Рисунок 7.14

Вторая производная функции  $y''$  положительна, если вершина кривой обращена в сторону, противоположную положительной оси  $y$ .

При положительном направлении момента это правило имеет вид, показанный на рисунке 7.14. Таким образом, в формуле (7.18) нужно взять знак

минус.

Из формул (7.3), (7.18) получаем нелинейное дифференциальное уравнение относительно прогиба

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = -\frac{M}{EJ}. \quad (7.19)$$

В большинстве применяемых в строительстве балок прогибы представляют собой величины очень малые по сравнению с их длиной (это отражено в гипотезах п. 1.1). Для большинства балок максимальные прогибы не превышают  $\left(\frac{1}{200} \div \frac{1}{600}\right)l$ , а углы наклона не превышают  $1^\circ$ , значит,  $y' = \operatorname{tg}\varphi < 0,017$ ,  $(y')^2 < 2,89 \cdot 10^{-4}$ . Этой величиной можно пренебречь, и (7.19) приобретает вид

$$y'' = \pm \frac{M}{EJ}. \quad (7.20)$$

Учитывая, что кривизна при выбранном направлении осей отрицательна и считая момент положительным, выбираем в формуле (7.20) знак минус. Таким образом, получаем *приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки*:

$$\boxed{y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}}. \quad (7.21)$$

Решая это уравнение, можно получить прогиб в любом сечении балки. Для его решения используют различные методы: метод непосредственного интегрирования, метод начальных параметров, метод фиктивных нагрузок, численный (приближенный) метод для решения на компьютере.



### 7.5.2 Метод непосредственного интегрирования

Рассмотрим этот метод на примере балки, показанной на рисунке 7.15.

Составим выражение изгибающего момента на участках, откладывая  $x$  от точки А и отбрасывая правую часть балки. После этого составим на каждом участке уравнение (7.21) и дважды его проинтегрируем, как показано ниже.

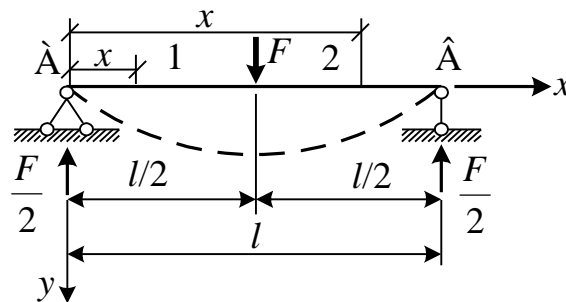


Рисунок 7.15 – Расчетная схема балки

Участок 1, $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$	Участок 2, $\frac{l}{2} \leq x \leq l$
$M_1 = \frac{F}{2} x$	$M_2 = \frac{F}{2} x - F \left( x - \frac{l}{2} \right)$
$E J y_1'' = -\frac{F}{2} x$	$E J y_2'' = -\frac{F}{2} x + F \left( x - \frac{l}{2} \right)$
$E J y_1' = -\frac{F x^2}{4} + C_1$	$E J y_2' = -\frac{F x^2}{4} + \frac{F}{2} \left( x - \frac{l}{2} \right)^2 + D_1$
$E J y_1 = -\frac{F x^3}{12} + C_1 x + C_2$	$E J y_2 = -\frac{F x^3}{12} + \frac{F}{6} \left( x - \frac{l}{2} \right)^3 + D_1 x + D_2$

Здесь  $C_1, C_2, D_1, D_2$  – константы интегрирования, которые определяются из граничных условий:

при  $x = 0$   $y_1 = 0$ ;

при  $x = l$   $y_2 = 0$ ;

при  $x = \frac{l}{2}$   $\varphi_1 = \varphi_2$ ,  $y_1 = y_2$ .

Используя эти условия, получаем систему линейных уравнений для определения констант:

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ -\frac{Fl^3}{12} + \frac{Fl^3}{48} + D_1l + D_2 = 0 \\ C_1 = D_1 \\ C_2 = D_2 \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем выражения для прогибов:

$$y_1 = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{Fx^3}{12} + \frac{Fl^2}{16}x \right],$$

$$y_2 = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{Fx^3}{12} + \frac{F}{6} \left( x - \frac{l}{2} \right)^3 + \frac{Fl^2}{16}x \right].$$

Подставляя в первое выражение  $x = \frac{l}{2}$ , получим

максимальный прогиб в середине пролета:  $y_{\max} = \frac{Fl^3}{48EJ}$ .

Очевидно, метод непосредственного интегрирования целесообразно использовать при наличии всего лишь одного участка (иногда – двух), так как при большом их количестве он становится громоздким из-за большого количества произвольных постоянных. Если балка состоит из  $n$  участков, то в выражения для прогибов входят  $2n$  констант интегрирования, для определения которых нужно составить и решить систему  $2n$  уравнений с  $2n$  неизвестными.

### 7.5.3 Метод начальных параметров

При интегрировании уравнения (7.21) этим методом придерживаются ряда правил, которые позволяют избежать большого количества констант интегрирования и дают возможность выразить прогиб в общем виде для произвольной расчетной схемы.

Эти правила называются условиями Клебша и формулируются следующим образом (рисунок 7.16):

1 Начало координат всегда совмещается с началом балки.

2 При составлении выражения для изгибающего момента  $M(x)$  всегда отбрасывается правая часть балки.

3 Если в выражение для  $M(x)$  входит внешний момент  $M$ , то он записывается как  $M \cdot (x - a)^0$ , где  $a$  – координата точки приложения момента.

4 Если участок с распределенной нагрузкой  $q$  не доходит до конца балки, то его продлевают до конца и прикладывают компенсирующую нагрузку  $-q$ .

5 При интегрировании уравнения (7.21)  $y''(x) = -M(x)/EJ$  не раскрывают скобки.

Рассмотрим произвольным образом нагруженную балку, действие опор заменим их реакциями (рисунок 7.16).

В сечении  $x$  на *участке 5* запишем выражение для  $M(x)$ , отбросив правую часть балки:

$$M(x) = M_0 + Q_0 x \Big|_1 + M(x - a)^0 \Big|_2 - F(x - b) \Big|_3 - \frac{q(x - c)^2}{2} \Big|_4 + \frac{q(x - d)^2}{2} \Big|_5.$$

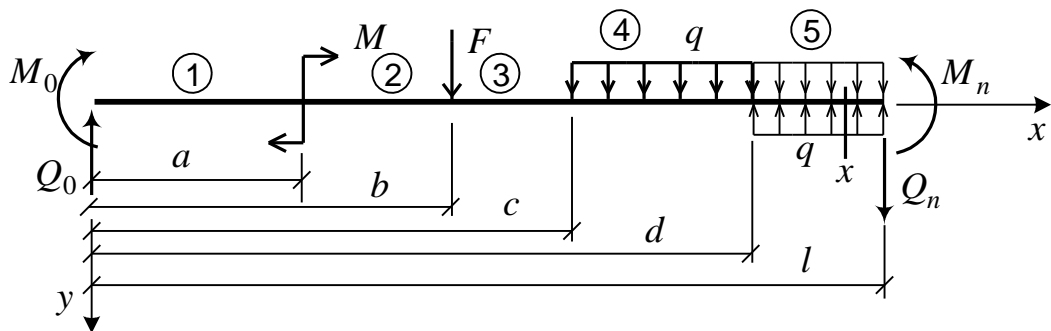


Рисунок 7.16 – К выводу уравнений метода начальных параметров

Подставим выражение для  $M(x)$  в уравнение изгиба (7.21):

$$y'' = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 + Q_0 x \Big|_1 + M(x - a)^0 \Big|_2 - F(x - b) \Big|_3 - \frac{q(x - c)^2}{2} \Big|_4 + \frac{q(x - d)^2}{2} \Big|_5 \right].$$

Дважды интегрируем это уравнение, получаем (используя понятие факториала:  $2! = 1 \cdot 2$ ;  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ ;  $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ ):

$$y' = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} \Big|_1 + M(x-a) \Big|_2 - F \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_3 - \right. \\ \left. - \frac{q(x-c)^3}{3!} \Big|_4 + \frac{q(x-d)^3}{3!} \Big|_5 \right] + C_5; \quad (7.23)$$

$$y = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{3!} \Big|_1 + M \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_2 - F \frac{(x-b)^3}{3!} \Big|_3 - \right. \\ \left. - \frac{q(x-c)^4}{4!} \Big|_4 + \frac{q(x-d)^4}{4!} \Big|_5 \right] + C_5 x + D_5. \quad (7.24)$$

Аналогично для участка 4:

$$y' = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} \Big|_1 + M(x-a) \Big|_2 - F \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_3 - \frac{q(x-c)^3}{3!} \Big|_4 \right] + C_4 \quad (7.25)$$

$$y = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{3!} \Big|_1 + M \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_2 - F \frac{(x-b)^3}{3!} \Big|_3 - \right. \\ \left. - \frac{q(x-c)^4}{4!} \Big|_4 \right] + C_4 x + D_4. \quad (7.26)$$

Точно так же для участков 1, 2 и 3 получим выражения, в которые входят константы  $C_1, D_1, C_2, D_2, C_3, D_3$ .

На границе между участками 4 и 5 прогибы  $y$  должны совпадать при расчетах по формулам (7.23) и (7.25) при  $x = d$ . То же касается и углов поворота  $y'$  при расчетах по формулам (7.24) и (7.26). Записав это, получим

$$C_4 = C_5; \quad D_4 = D_5.$$

Сформулировав аналогичные условия неразрывности на границах участков 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, придем к выводу, что

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C; \quad D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = D. \quad (7.27)$$

Таким образом, для любого количества участков достаточно определить 2 константы.

Для этого найдем прогиб и угол поворота на 1-м участке с учетом (7.27):

$$y'' = -\frac{1}{EJ} [M_0 + Q_0 x];$$

$$y' = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} \right] + C; \quad (7.28)$$

$$y = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{3!} \right] + Cx + D. \quad (7.29)$$

Подставим в выражения (7.28), (7.29)  $x = 0$ , получим

$$y'(0) = C; \quad y(0) = y_0 = D,$$

то есть для определения перемещений методом начальных параметров достаточно знать прогиб  $y(0) = y_0$  и угол поворота  $y'(0) = y'_0 = \varphi_0$  в начале балки.

Подставив полученные значения констант в формулы (7.23) и (7.24), записываем выражения для *определения перемещений произвольного сечения методом начальных параметров*:

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{EJ} \left[ M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} \Big|_1 + M(x-a) \Big|_2 - F \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_3 - \frac{q(x-c)^3}{3!} \Big|_4 + \frac{q(x-d)^3}{3!} \Big|_5 \right]; \quad (7.30)$$

$$y = y_0 + \varphi_0 x - \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{3!} \Big|_1 + M \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_2 - F \frac{(x-b)^3}{3!} \Big|_3 - \frac{q(x-c)^4}{4!} \Big|_4 + \frac{q(x-d)^4}{4!} \Big|_5 \right]. \quad (7.31)$$

Входящие в формулы (7.30), (7.31) величины  $y_0, \varphi_0, M_0, Q_0$  называются *начальными параметрами*.

Прогиб  $y_0$  и угол поворота  $\varphi_0$  в начале балки – *геометрические начальные параметры*; изгибающий момент  $M_0$

и поперечная сила  $Q_0$  в начале балки – *статические начальные параметры*.

Параметры  $M_0$  и  $Q_0$  определяются из условий загрузки балки. Параметры  $y_0$  и  $\varphi_0$  определяются из условий закрепления.

При использовании формул (7.30), (7.31) нужно соблюдать следующие правила:

1 Знаки в формулах соответствуют направлению силовых факторов ( $M_0, Q_0, M, F, q$ ) на рисунке 7.11. При изменении направления силового фактора изменяется знак перед соответствующим слагаемым в формуле.

2 При определении перемещений в сечении  $x$  в формулы входят только те слагаемые, в которых силовые факторы расположены строго левее сечения  $x$ .

3 Положительное направление прогиба  $y$  (в частности,  $y_0$ ) – вниз, положительное направление угла поворота  $\varphi$  (в частности,  $\varphi_0$ ) – по часовой стрелке от оси балки.

### ***Примеры применения метода начальных параметров***

1 *Найти прогиб в точке приложения силы для балки из п. 7.4.2 (рисунок 7.17).*

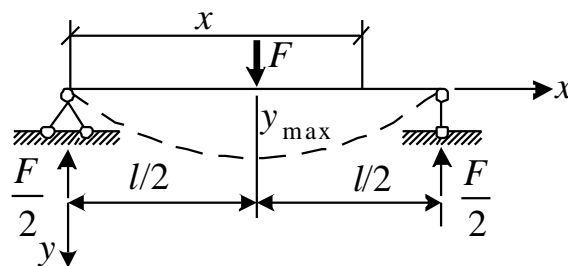


Рисунок 7.17 – Расчетная схема шарнирной балки

Начальные параметры:

на левой шарнирной опоре  $y_0 = 0$ ,  $M_0 = 0$ ,  $Q_0 = F/2$ .

Угол поворота  $\varphi_0 \neq 0$ , его значение неизвестно. Определяем его из условия закрепления на второй опоре:

$$\text{при } x = l \quad y(l) = 0.$$

Запишем сначала по формуле (7.31) прогиб в произвольном сечении:

$$y(x) = \varphi_0 x - \frac{1}{EJ} \left[ Q_0 \frac{x^3}{3!} - F \frac{(x - l/2)^3}{3!} \right].$$

Отсюда

$$y(l) = \varphi_0 l - \frac{1}{EJ} \left[ \frac{F l^3}{2 \cdot 3!} - F \frac{(l - l/2)^3}{3!} \right] = 0.$$

Это выражение используем как уравнение для определения  $\varphi_0$ :

$$\varphi_0 = \frac{Fl^2}{16EJ}.$$

Все начальные параметры определены. Вычислим теперь  $y(x)$  при  $x = l/2$ :

$$y(l/2) = \frac{Fl^2}{16EJ} \frac{l}{2} - \frac{1}{EJ} \left[ \frac{F (l/2)^3}{2 \cdot 3!} \right],$$

откуда

$$\boxed{y_{\max} = \frac{Fl^3}{48EJ}}. \quad (7.32)$$

Этот результат совпадает с полученным методом непосредственного интегрирования.

2 Найти прогиб точки приложения силы – на конце консольной балки (рисунок 7.18).

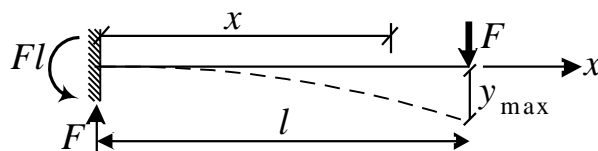


Рисунок 7.18 – Расчетная схема консольной балки

Начальные параметры:  $M_0$  и  $Q_0$  совпадают с реакциями на левом конце балки:

$$M_0 = -Fl$$

(направление противоположно указанному на рисунке 7.16,

поэтому взят знак минус);

$$Q_0 = F.$$

Начальные параметры  $y_0$  и  $\varphi_0$  равны нулю, так как левый конец балки защемлен:

$$\varphi_0 = y_0 = 0.$$

Для данной схемы выражение (7.31) при произвольном  $x$  имеет вид

$$y(x) = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{3!} \right].$$

При  $x = l$

$$\boxed{y(l) = y_{\max} = F \frac{l^3}{3EJ}.} \quad (7.33)$$

Формулы (7.32) и (7.33) можно использовать как табличные.



## 8 СДВИГ

*Сдвиг (срез)* вызывается действием двух равных противоположно направленных сил, действующих перпендикулярно оси элемента и расположенных весьма близко друг к другу (рисунок 8.1, а).

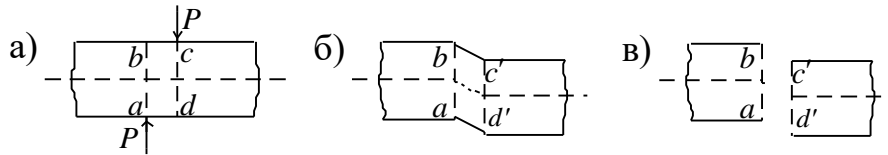


Рисунок 8.1 – Схема сдвига

Для уравнивания внешних сил в поперечных сечениях возникает поперечная сила  $Q$ .

Например, сдвиг возникает при разрезании ножницами прута, при срезе головки болта. При этом происходит сначала смятие, а потом срез (рисунок 8.1, б, в). Сдвиг редко наблюдается в чистом виде, чаще всего он сопровождается изгибом, как на рисунке 8.1, б. В свою очередь, при изгибе возникают поперечные силы, то есть изгиб сопровождается сдвигом.

### 8.1 Касательные напряжения при сдвиге

Поперечные силы распределяются по плоскости сечения  $A$ , их интенсивность – касательное напряжение  $\tau$  (рисунок 8.2):

$$Q = \int_A \tau dA .$$

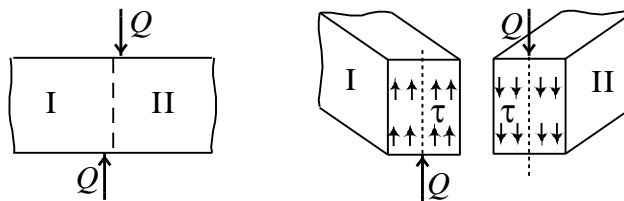


Рисунок 8.2 – Касательные напряжения в сечении

Считая, что напряжения распределены равномерно по сечению, получим  $Q = \tau A$ , откуда

$$\tau = \frac{Q}{A}. \quad (8.1)$$

Допущение о равномерности распределения  $\tau$  принимается при практических расчетах болтовых, заклепочных и сварных соединений и других деталей. В общем случае (при неравномерном распределении  $\tau$ ) формула (8.1) дает среднее значение напряжения.

## 8.2 Чистый сдвиг

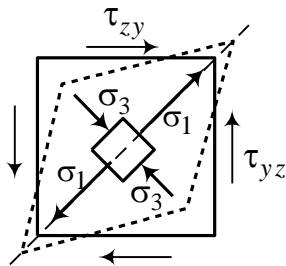


Рисунок 8.3

Если на гранях выделенного из сечения элемента возникают только касательные напряжения (рисунок 8.3), сдвиг называют *чистым сдвигом*. При таком напряженном состоянии отличны от нуля только напряжения  $\tau_{zy} = \tau$ .

Как видим, при чистом сдвиге имеет место плоское напряженное состояние. Согласно (5.2), получаем, что  $\cos 2\alpha = 0$ , значит, угол наклона главных площадок  $\alpha = 45^\circ$ ; согласно (5.4), главные напряжения  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$ . При деформации элемента диагональ, совпадающая с линией действия  $\sigma_1$ , удлиняется, а вторая диагональ укорачивается, при этом квадрат превращается в ромб – *прямые углы деформируются*.

### 8.2.1 Деформации при чистом сдвиге

Закрепим для наглядности одну из граней элемента. Его деформация будет выглядеть, как показано на рисунке 8.4, а.

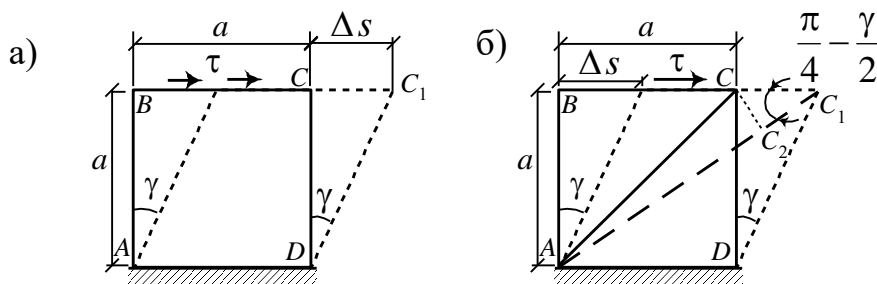


Рисунок 8.4 – Деформация элемента при сдвиге

Смещение грани  $\Delta s$  называется *абсолютным сдвигом*. Угол  $\gamma$  называется *углом сдвига*, или *относительным сдвигом*. Очевидно,  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{a}$ , а ввиду малости деформаций  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ , так что

$$\gamma = \frac{\Delta s}{a}. \quad (8.2)$$

### 8.2.2 Закон Гука при чистом сдвиге. Связь между $G$ и $E$

Как и при растяжении, опытным путем можно показать, что при сдвиге в пределах упругости имеет место пропорциональная зависимость деформации и напряжения, которая называется *законом Гука при сдвиге*:

$$\tau = G \gamma. \quad (8.3)$$

Здесь  $G$  – *модуль сдвига или модуль упругости II рода*.

Для изотропных материалов между модулем сдвига  $G$  и модулем упругости при растяжении  $E$  существует зависимость. Чтобы получить эту зависимость, рассмотрим рисунок 8.4, б. Определим сначала удлинение  $\Delta l$  диагонали  $AC$ , исходная длина которой  $l = CC_1 = a\sqrt{2}$ :

$$\Delta l = C_1 C_2 = CC_1 \cos(\pi/4 - \gamma/2) \approx CC_1 \cos(\pi/4) = \Delta s / \sqrt{2}.$$

Тогда относительное удлинение диагонали с учетом  $\gamma = \tau/G$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} \frac{\Delta s}{a} = \frac{1}{2} \gamma = \frac{\tau}{2G}.$$

Согласно обобщенному закону Гука (5.20), удлинение  $\varepsilon = \varepsilon_1$  в направлении  $\sigma_1$  для полученных  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$  равно

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) = \frac{1+\nu}{E} \tau.$$

Приравнивая два выражения для  $\varepsilon$ , имеем

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (8.4)$$

### 8.2.3 Проверка прочности при сдвиге

Поскольку при сдвиге имеет место плоское напряженное состояние, прочность элемента нужно проверять по одной из теорий прочности. Анализ условий, полученных по этим теориям, говорит о том, что их можно объединить одним выражением:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau] = \begin{cases} (0,7 - 1)[\sigma] & \text{для хрупких материалов;} \\ (0,5 - 0,6)[\sigma] & \text{для пластичных материалов.} \end{cases}$$

Основные формулы для расчетов на сдвиг приведены в приложении Б.

### 8.2.4 Расчеты соединений, работающих на сдвиг

**Заклепочные и болтовые односрезные соединения** (рисунок 8.5)

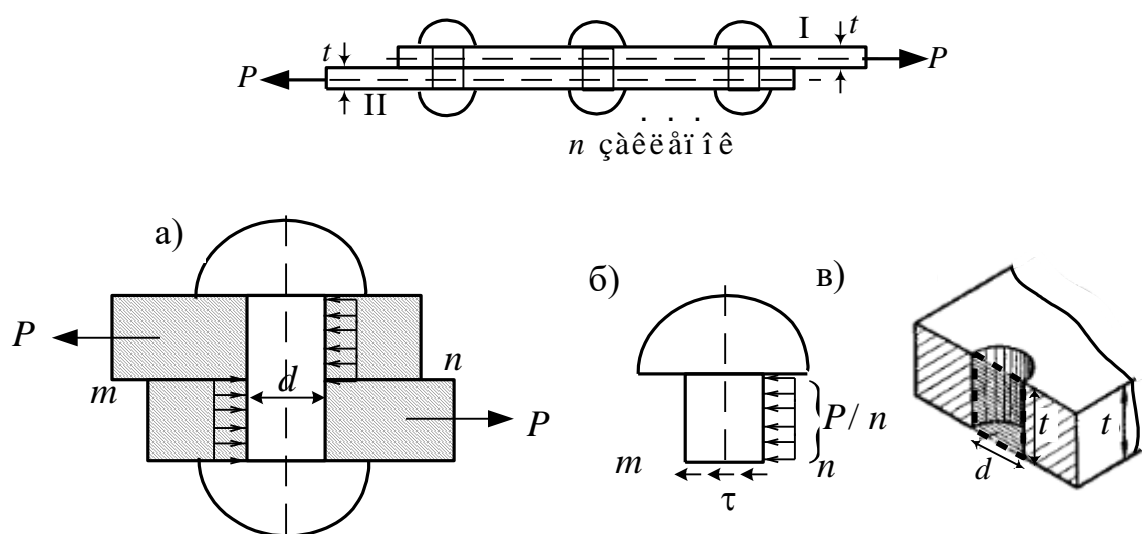


Рисунок 8.5 – Расчет заклепки и болта на срез и смятие

Одним из видов разрушения является срез заклепки (болта) по сечению  $mn$  (рисунок 8.5, а). Силы  $P$  стремятся сдвинуть листы относительно друг друга и срезать каждую заклепку по плоскости  $mn$  площадью  $A = \frac{\pi d^2}{4}$  (рисунок 8.5, б). Считая, что

касательные напряжения распределены равномерно по сечению, а количество заклепок равно  $n$ , получаем условие прочности для *односрезных* заклепок (болтов):

$$\tau = \frac{Q}{A_{\text{ср}}} = \frac{Q}{nA} = \frac{P}{n(\pi d^2/4)} \leq [\tau]. \quad (8.5)$$

Значения допускаемых напряжений  $[\tau] = [\tau]_3$  некоторых материалов на срез для заклепочных и сварных соединений приведены в приложении А.

Условие (8.5) может быть использовано для расчета диаметра заклепки:

$$d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi n [\tau]}}. \quad (8.6)$$

При расчете болтовых и заклепочных соединений нужно также учитывать, что кроме среза заклепки может произойти ее смятие по контакту с листом (рисунок 8.5, б, в). Напряжение смятия направлено перпендикулярно поверхности контакта, то есть является нормальным. Площадь поверхности смятия принимают равной  $A_{\text{см}} = t d$ , т. е. равной площади показанного пунктиром на рисунке 8.5, в прямоугольника. Условие прочности на смятие имеет, таким образом, вид

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{P}{n t d} \leq [\sigma]_{\text{см}}. \quad (8.7)$$

Допускаемое напряжение на смятие  $[\sigma]_{\text{см}} \approx (2 - 2,5)[\sigma]$ .

Из формулы (8.6) диаметр болта

$$d \geq \frac{P}{n t [\sigma]_{\text{см}}}. \quad (8.8)$$

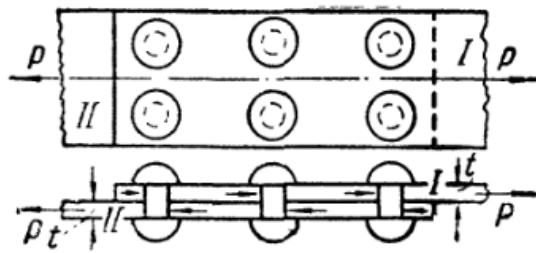
Если условия прочности используются для подбора диаметра заклепки, берется больший из диаметров, полученных согласно формулам (8.6) и (8.8).

На практике диаметр обычно выбирается согласно нормам:  $d \approx 2t$ , поэтому условие (8.5) чаще применяется для определения необходимого числа заклепок (болтов):

$$n \geq \frac{P}{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) [\tau]}, \quad (8.9)$$

а после этого проверяется выполнение условия (8.7).

### Задача



Определить число односрезных необходимых для соединения, показанного на рисунке 8.6;  $P = 72000$  кг,  $d = 2$  см,  $\delta = 1$  см,  $[\tau]_3 = 1000$  кг/см<sup>2</sup>,  $[\sigma]_{см} = 2400$  кг/см<sup>2</sup>.

Рисунок 8.6

Из условия прочности согласно формуле (8.9) получаем

$$n \geq \frac{P}{(\pi d^2/4)[\tau]_3} = \frac{72000 \text{ кг}}{(3,14 \cdot 4 \text{ см}^2/4)1000 \text{ кг/см}^2} \approx 24.$$

Из условия прочности на смятие (8.7)

$$n \geq \frac{P}{d \delta [\sigma]_{см}} = \frac{72000 \text{ кг}}{2 \text{ см} \cdot 1 \text{ см} \cdot 2400 \text{ кг/см}^2} = 15.$$

Очевидно, необходимо поставить 24 заклепки. *Работа заклепок на срез оказывается опаснее их работы на смятие.* Это обычно бывает в соединениях с односрезными заклепками.

### Заклепочные и болтовые двусрезные соединения

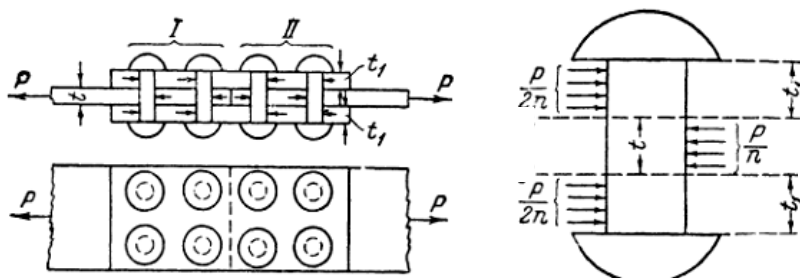


Рисунок 8.7

Рассмотрим случай, в котором стык листов осуществлен при помощи двух накладок (рисунок 8.7).

В этом случае заклепки срезаются по двум плоскостям, и в условии прочности нужно учитывать двойную площадь среза:

$$\tau = \frac{P}{2(\pi d^2/4)n} \leq [\tau]_3, \quad (8.10)$$

откуда

$$n \geq \frac{P}{2(\pi d^2/4)[\tau]_3}, \quad (8.11)$$

что в два раза меньше, чем для односрезных заклепок.

Выполним проверку на смятие. Толщина склепываемых листов  $t$ ; толщина накладок не должна быть меньше  $0,5t$ , так как две накладки должны воспринять силу  $P$ . Поэтому  $0,5t < t_1 \leq t$ .

Сила  $P/n$  сминает верхнюю, нижнюю и среднюю части заклепки. Так как толщина среднего листа не превышает сумму толщин обеих накладок, то в худших условиях по смятию находится средняя часть, и условие прочности остается таким же, как для односрезных заклепок (8.7).

Пусть  $t_1 = 0,8\text{мм}$ , а остальные данные такие же, как в предыдущем примере. Тогда из условия прочности на срез (8.11) получаем  $n \approx 12$ , а условие прочности на смятие дает такое же количество, как для односрезных заклепок  $n = 15$ . Таким образом, в данном случае при двусрезных заклепках условия работы на смятие тяжелее, чем на срез, и следует принять  $n = 15$ .

### **Проверка прочности листов при заклепочных и болтовых соединениях**

Наличие заклепок или болтов вносит некоторые изменения и в проверку прочности на растяжение и сжатие самих соединенных листов.

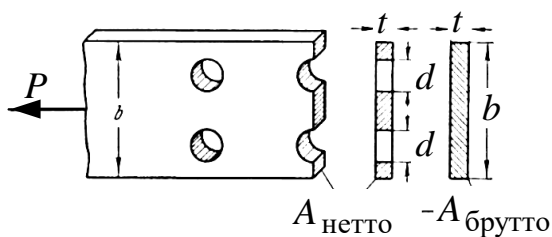


Рисунок 8.8

Опасным сечением каждого листа является теперь сечение, проходящее через заклепочные (болтовые) отверстия – это сечение ослаблено (рисунок 8.8), здесь рабочая ширина листа наименьшая.

Условие прочности в ослабленном сечении принимает вид

$$\frac{P}{A_{\text{нетто}}} = \frac{P}{t(b - md)} \leq [\sigma],$$

где  $m$  – число отверстий, попадающих в сечение (в случае, показанном на рисунке 8.8,  $m = 2$ ).

Отсюда можно найти размер  $b$ , задавшись толщиной листа  $t$ . Площадь ослабленного сечения называется площадью нетто  $A_{\text{нетто}} = t(b - md)$ , площадь полного сечения – площадь брутто  $A_{\text{брутто}} = bt$ .

### Сварные соединения

Сварные соединения не дают ослабления элементов, менее трудоемки, чем другие виды соединений, и потому более экономичны.

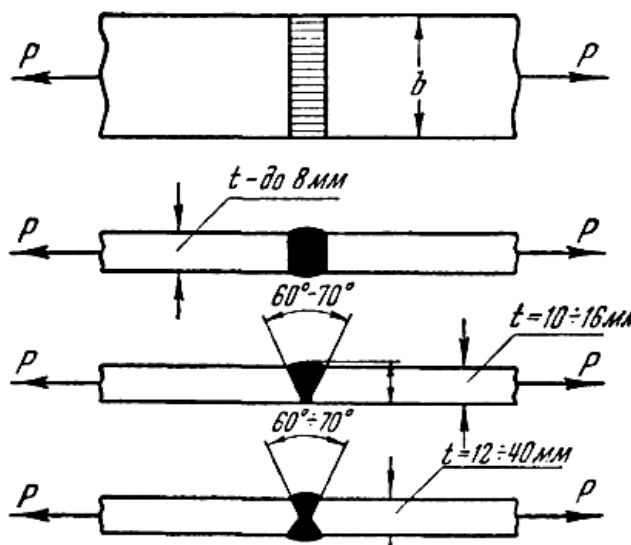


Рисунок 8.9

Наиболее простым и надежным видом сварочного соединения является соединение *встык*, образуемое путем заполнения зазора между торцами соединяемых элемента наплавленным металлом. Соединение осуществляется в зависимости от толщины соединяемых элементов по одному из типов, показанных на рисунке. Проверка прочности производится на растяжение или сжатие по формуле

$$\sigma_s = \frac{P}{lt} \leq [\sigma_s],$$

где  $lt$  – условная рабочая площадь сечения шва,  $l = b - 10$  мм – расчетная длина шва.

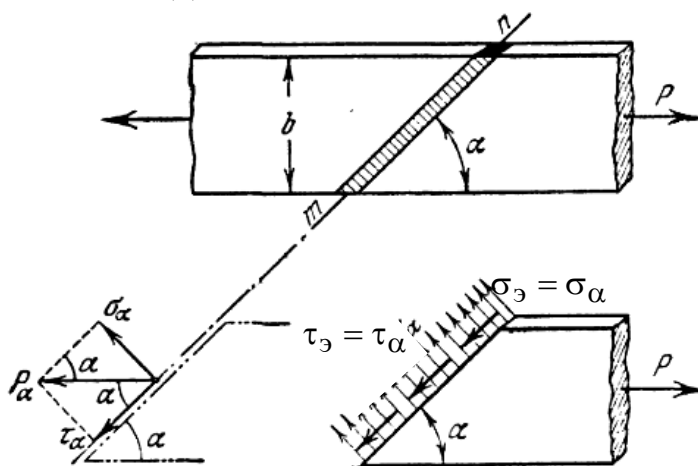


Рисунок 8.10

Поскольку допускаемое напряжение для сварного шва ниже, чем для основного металла, стремятся к увеличению длины шва. С этой целью применяют



соединение встык с косым швом. Проверка прочности косых швов производится по нормальным и по касательным напряжениям:

$$\sigma_{\perp} = \frac{P}{lt} \sin \alpha \leq [\sigma_{\perp}], \quad \tau_{\parallel} = \frac{P}{lt} \sin \alpha \leq [\tau_{\parallel}].$$

Расчетная длина шва принимается равной  $l = b/\sin \alpha - 10 \text{ мм}$ .

Как показал опыт, наиболее рациональным углом является угол наклона  $\alpha = 45 - 50^\circ$ . Способ сварки косым швом из-за неудобства центрировки стыкуемых элементов применяют редко.

Другим способом сварочного соединения является *соединение внахлестку*. Рассмотрим сварное соединение двух листов, например, угловыми швами (рисунок 8.11, а). Разрушение швов в рассматриваемом соединении происходит от среза по наименьшей возможной площади среза, расположенной в биссекторной плоскости угла, где наплавляется шов (рисунок 8.11, б).

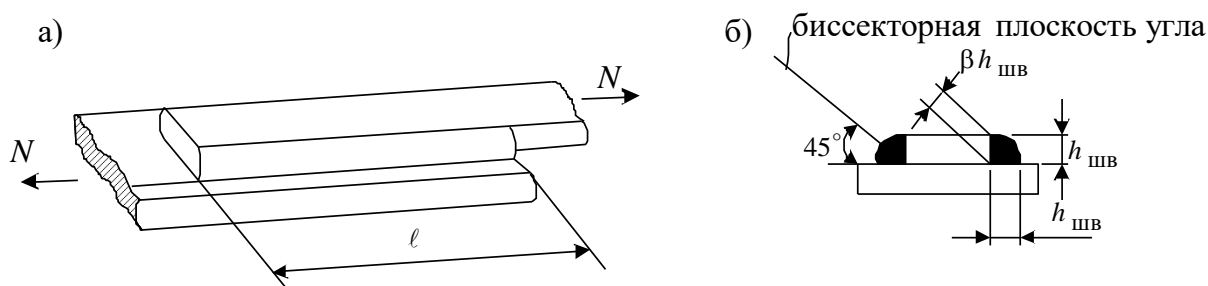


Рисунок 8.11 – Сварное соединение угловыми швами

При этом площадь среза на два шва равна  $A_{ср} = 2\ell_{ш}h_{шв}\beta$ , где  $h_{ш}$  – высота катета углового шва;  $\ell_{ш} = l - 10 \text{ мм}$  – расчетная длина шва, учитывающая возможное ухудшение качества сварки по концам шва;  $\beta$  – коэффициент формы углового шва. Он зависит от вида сварки: для однопроходной автоматической  $\beta = 1$ ; однопроходной полуавтоматической и ручной  $\beta = 0,8$ ; многопроходной авто- и полуавтоматической  $\beta = 0,7$ .

Предполагая равномерное распределение касательных напряжений по площади среза шва, условие прочности запишем в виде

$$\tau = \frac{N}{A_{\text{ср}}} = \frac{N}{2\ell_{\text{ш}}h_{\text{ш}}\beta} \leq [\tau]_{\text{ср}},$$

где  $[\tau]_{\text{ср}}$  – допускаемое касательное напряжение материала углового сварного шва на срез.

Чтобы не допускать чрезмерной неравномерности распределения напряжений по длине шва, ставится ограничение на его длину:  $\ell \leq 60 h_{\text{ш}}$ . Из условия прочности, задавшись каким-либо одним размером шва, например  $h_{\text{ш}}$ , можно найти другой размер – длину шва  $\ell$ .

## 9 КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ С КРУГЛЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Кручение – это деформация, которая вызывается парами сил (моментами), действующими в сечениях, перпендикулярных оси элемента, как показано на рисунке 9.1.

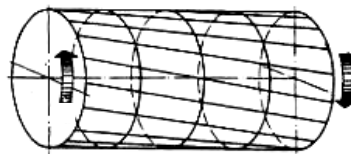


Рисунок 9.1

На практике на кручение работают трансмиссионные валы, пружины, оси подвижного состава, элементы пространственных конструкций и т. д.

Валы предназначены для передачи крутящего момента от одной вращающейся детали к другой, а также для восприятия изгибающего момента от масс деталей механизма, расположенных на этом валу. Поэтому они работают одновременно на изгиб и кручение. В данной теме рассматривается *только* кручение стержня; *совместное* действие кручения и изгиба будет рассмотрено при изучении сложных деформаций.

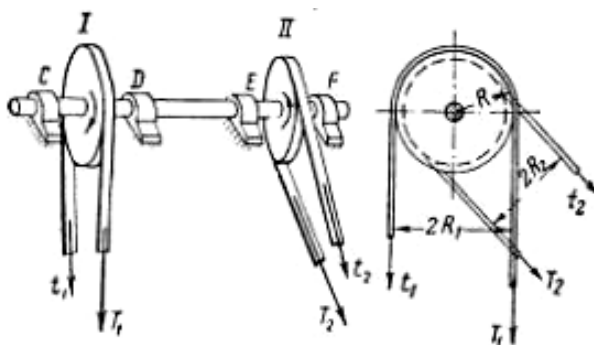


Рисунок 9.2

Например, на рисунке 9.2 показан вал CF, на который насажены шкивы I и II. Вал поддерживается подшипниками C, D, E, F. Расположение подшипников позволяет пренебречь

деформацией изгиба.

Шкив I передает валу вращение при помощи ременной передачи от электромотора, шкив II передает это вращение станку также при помощи ремня.

При кручении в сечениях вала возникает 1 *внутреннее усилие – крутящий момент*  $M_K$  (п. 1.6). Правило знаков для  $M_K$  сформулировано в п. 2.3.

*При изучении кручения круглого стержня принимаются гипотезы*

- 1 Плоские сечения остаются плоскими.
- 2 Радиусы сечений остаются прямыми.
- 3 Расстояния между сечениями не изменяются.

Первая гипотеза (плоских сечений) сформулирована в начале курса и касается всех деформаций, остальные две относятся к кручению и установлены экспериментально. Они означают, что одни сечения вала поворачиваются относительно других как жесткое целое, а длина вала остается неизменной.

### 9.1 Вычисление моментов, передаваемых на вал

Для вычисления крутящих моментов необходимо знать моменты, передаваемые на вал каждым шкивом. Для этого нужно знать число оборотов вала в единицу времени и мощность, передаваемую шкивом.

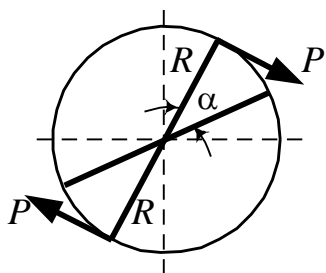


Рисунок 9.3

Пусть на шкив радиуса  $R$  действует пара сил  $P$ , тогда крутящий момент  $M_K = 2PR$  (рисунок 9.3). При вращении пара  $M_K$  производит работу. При повороте шкива на угол  $\alpha$  каждая сила пары пройдет путь  $R\alpha$ , так что вся пара произведет работу

$$A = 2PR\alpha = M_K\alpha.$$

Если вал совершает  $n$  оборотов в единицу времени, то работа в единицу времени, то есть мощность  $W$ , равна

$$W = M_K \cdot 2\pi n.$$

Таким образом, крутящий момент можно выразить через передаваемую шкивом мощность и число оборотов вала в единицу времени:

$$M_K = \frac{W}{2\pi n} . \quad (9.1)$$

## 9.2 Напряжения и деформации в поперечном сечении

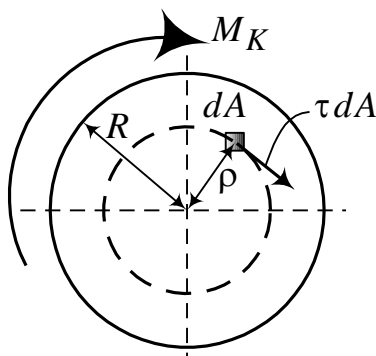


Рисунок 9.4

Крутящий момент, действующий в плоскости сечения, уравнивается действием *касательных напряжений* в каждой точке сечения на расстоянии  $\rho$  от центра сечения (рисунок 9.4). Элементарный момент  $dM_K$  равен произведению элементарной силы  $\tau dA$  на плечо  $\rho$ . Суммарный момент  $M_K$  равен

$$M_K = \int_A (\tau dA) \rho . \quad (9.2)$$

Это выражение можно рассматривать как уравнение относительно касательного напряжения  $\tau$  в точке. Поскольку напряжения в общем случае в каждой точке различны, одного этого уравнения недостаточно для определения напряжений, то есть задача является статически неопределимой. Для решения таких задач изучаются деформации элемента.

### 9.2.1 Деформации

Можно условно считать, что при кручении одно сечение, например левое, неподвижно, а остальные поворачиваются относительно левого на углы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и т. д. в результате действия

момента  $M$  (это показано на рисунке 9.5). Угол поворота радиуса сечения  $\varphi$  называется *углом закручивания сечения*.

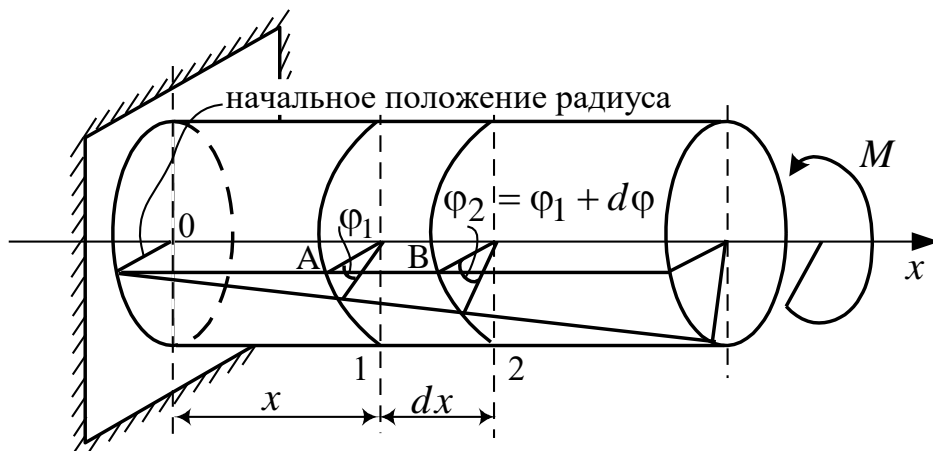
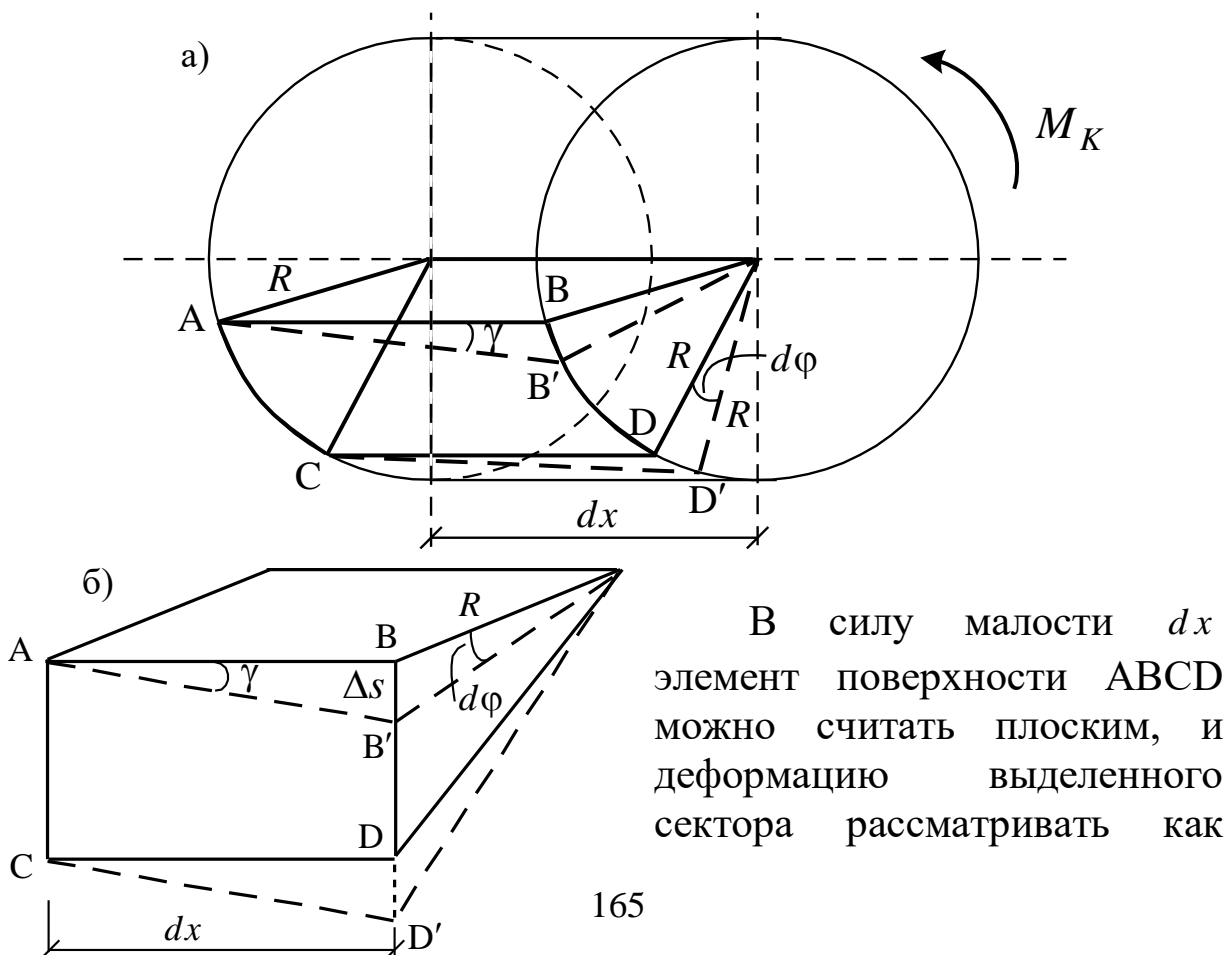


Рисунок 9.5 – Деформации при кручении

Вырежем из вала двумя сечениями элемент длиной  $dx$  и рассмотрим взаимный угол поворота сечений 1 и 2, равный  $d\varphi$ , как показано на рисунке 9.6, а. При этом радиус сечения  $R$  поворачивается на угол  $d\varphi$ , образуя  $AB$  наклоняется на угол  $\gamma$ , а расстояние между сечениями  $dx$  не изменяется.



В силу малости  $dx$  элемент поверхности  $ABCD$  можно считать плоским, и деформацию выделенного сектора рассматривать как

деформацию сдвига (тема 8), как показано на рисунке 9.6, б.

Тогда для т. В получаем

$$\gamma = \frac{\Delta s}{dx} = \frac{R d\varphi}{dx},$$

аналогично для произвольной точки сечения на расстоянии  $\rho$  от центра

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (9.3)$$

Согласно закону Гука при сдвиге (п. 8.2.2),

$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (9.4)$$

Подставив это выражение в формулу (9.2), получаем

$$M_K = \int_A \tau \rho dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dx} J_\rho,$$

откуда получаем *закон Гука при кручении*:

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_K}{GJ_\rho}}, \quad (9.5)$$

где  $\varphi$  – угол закручивания;  $\frac{d\varphi}{dx}$  – угол закручивания на единицу длины (погонный угол закручивания);  $J_\rho$  – полярный момент инерции (п. 4.4); произведение  $GJ_\rho$  называется *жесткостью при кручении*.

### 9.2.2 Напряжения

Вернувшись к выражению (9.4) и подставив в него выражение (9.5), получаем выражение для касательных напряжений при кручении в произвольной точке поперечного сечения круглого стержня на расстоянии  $\rho$  от центра:

$$\boxed{\tau = \frac{M_K \rho}{J_\rho}}. \quad (9.6)$$

Согласно выражению (9.6) при  $\rho=0$   $\tau=0$ ; при  $\rho=R$  напряжение  $\tau$  достигает максимального значения и равно

$$\tau_{\max} = \frac{M_K R}{J_\rho}.$$

Согласно п. 4.9,  $\frac{J_\rho}{R} = W_\rho$  – это полярный момент сопротивления сечения.

С учетом этого максимальное напряжение в сечении возникает на границе сечения и равно

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho}. \quad (9.7)$$

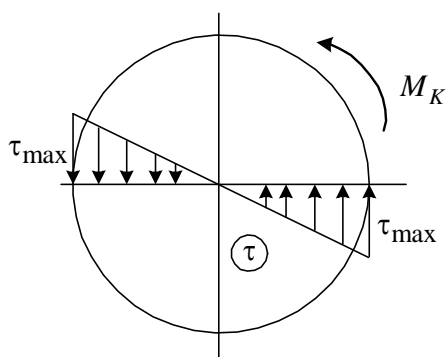


Рисунок 9.7

Эпюра касательных напряжений, построенная на произвольном диаметре имеет вид прямой, проходящей через начало координат и имеющей максимальную ординату при  $\rho=R$ , как показано на рисунке 9.7.

### 9.3 Условие прочности

Условие прочности при кручении элементов конструкций круглого сечения по методу допускаемых напряжений имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} \leq [\tau], \quad (9.8)$$

где  $[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение материала.

Это условие можно использовать для подбора размеров сплошного и кольцевого сечений (у кольцевого сечения  $d$  и  $D$  – соответственно внутренний и внешний диаметры), применив выражение (4.30):

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} = \frac{M_K \cdot 16}{\pi D^3 (1 - \alpha^4)} \leq [\tau], \quad \alpha = \frac{d}{D},$$

откуда

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_K \cdot 16}{\pi (1 - \alpha^4) [\tau]}}. \quad (9.9)$$



Для сплошного сечения  $\alpha = 0$ .

#### 9.4 Анализ напряженного состояния и разрушения при кручении

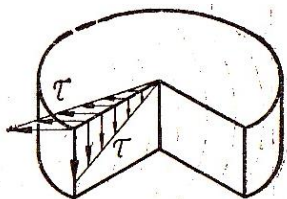


Рисунок 9.8

Анализ формулы (9.6) для касательных напряжений  $\tau$  показал, что напряжения в плоскости сечения вала распределены неравномерно и изменяются от 0 в центре сечения до максимума на границе (рисунок 9.8). В силу закона парности касательных напряжений, в осевых сечениях стержня возникают такие же по величине, но обратные по знаку касательные напряжения, как показано на рисунке 9.8.

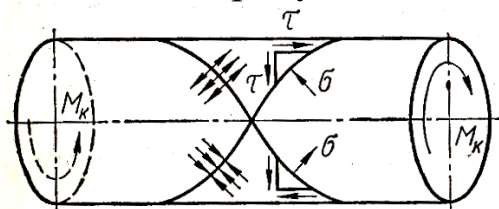


Рисунок 9.9

В выделенном элементе вала по граням действуют только касательные напряжения (рисунок 9.9). В сечениях, наклоненных к оси, возникают также нормальные напряжения, как при чистом сдвиге (п. 8.2), то есть имеет место *плоское напряженное состояние*. *Наибольшие нормальные напряжения действуют на главных площадках, наклоненных под углом  $45^\circ$  к оси вала.*

Таким образом, при кручении круглых валов опасными могут стать как касательные напряжения, возникающие в поперечных и продольных сечениях вала, так и нормальные напряжения, возникающие на площадках под углом  $45^\circ$  к продольным площадкам. В связи с этим характер разрушения вала зависит от способности материала сопротивляться действию нормальных и касательных напряжений.

Так, если материал плохо сопротивляется касательным напряжениям (действию сдвига), то первые трещины возникнут по образующим в местах действия наибольших касательных напряжений. Например, в случае кручения деревянных валов с продольным расположением волокон трещины ориентированы вдоль образующей (параллельны оси), так как древесина плохо сопротивляется действию касательных напряжений вдоль волокон.

Если материал плохо сопротивляется растягивающим напряжениям, например, чугун, то трещины пройдут по линиям, нормальным к действию главных растягивающих напряжений

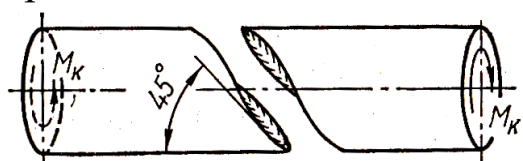


Рисунок 9.10

(рисунок 9.10), то есть по винтовым линиям, касательные к которым образуют угол  $45^\circ$  с осью стержня.

Стальные валы на практике разрушаются по поперечному сечению, перпендикулярному оси вала. Этот вид разрушения обусловлен действием в поперечном сечении касательных напряжений.

### 9.5 Определение углов закручивания

Для определения углов закручивания воспользуемся уравнением (9.5). Проинтегрировав обе части равенства, найдем в произвольном сечении на расстоянии  $x$  от начала координат:

$$\int_0^x \frac{d\varphi}{dx} dx = \varphi = \int_0^x \frac{M_K}{GJ_\rho} dx + \varphi_0, \quad (9.10)$$

где  $\varphi_0$  – угол поворота, определяемый из граничных условий.

В частном случае при  $M_K = \text{const}$ ,  $GJ_\rho = \text{const}$  получаем

$$\varphi = \frac{M_K x}{GJ_\rho} + \varphi_0. \quad (9.11)$$

Если в начале координат вал жестко закреплен (как на рисунке 9.5), то при  $x = 0$   $\varphi_0 = \varphi(0) = 0$ , и для угла закручивания сечения  $x$  получается выражение

$$\varphi(x) = \frac{M_K x}{GJ_\rho}, \quad (9.12)$$

где  $M_K$  – крутящий момент в сечении.

### 9.6 Условие жесткости

При расчетах на кручение, кроме условия прочности, нужно выполнять условия, ограничивающие угол закручивания на

некотором расстоянии  $l$  от неподвижного сечения либо погонный угол закручивания. Соответствующие условия жесткости формулируются следующим образом:

$$\frac{M_{\text{К}} l}{GJ_{\rho}} \leq [\varphi], \quad (9.13)$$

$$\frac{M_{\text{К}}}{GJ_{\rho}} \leq \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right] = [\theta], \quad (9.14)$$

где  $[\varphi]$  – допускаемый угол закручивания;

$[\theta]$  – допускаемый погонный угол закручивания;

$[\varphi]$ ,  $[\theta]$  задаются техническими условиями.

Из условий жесткости получаем выражения для определения диаметра вала, применяя (4.27):

$$\frac{M_{\text{К}} l}{GJ_{\rho}} = \frac{32 M_{\text{К}} l}{G \pi D^4 (1 - \alpha^4)} \leq [\varphi] \quad \text{либо} \quad \frac{M_{\text{К}}}{GJ_{\rho}} = \frac{32 M_{\text{К}}}{G \pi D^4 (1 - \alpha^4)} \leq [\theta],$$

откуда

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{\text{К}} l}{G \pi (1 - \alpha^4) [\varphi]}} \quad \text{либо} \quad D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{\text{К}}}{G \pi (1 - \alpha^4) [\theta]}}. \quad (9.15)$$

Для сплошного сечения в формулах (9.15)  $\alpha = 0$ .

Из двух диаметров вала, полученных из условия прочности (9.8) или условий жесткости (9.13), (9.14), принимается большее значение.

## 9.7 Решение задач на расчет вала

*Задача 1.* Найти диаметр стального вала, передающего мощность  $N = 150$  л.с. при  $n = 70$  об/мин. Допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 400$  кг/см<sup>2</sup>, допускаемый погонный угол закручивания  $[\theta] = 0,3$  град/м.

*Решение.*

Используя соотношение 1 л.с. = 75 кгм/с и формулу (9.1), найдем крутящий момент

$$M_{\text{К}} = \frac{W}{2\pi n} = \frac{150 \cdot 75 \text{ кгм/с}}{2\pi \cdot 70 \text{ об/60с}} = 1535 \text{ кгм} = 153500 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Из условия прочности (9.8) получаем согласно (9.9)

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_K \cdot 16}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{153500 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot 16}{\pi 400 \text{ кг/см}^2}} \approx 12,5 \text{ см}.$$

Согласно условию жесткости (9.14) получаем диаметр по (9.15):

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{M_K 32}{G \pi[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{153500 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot 32}{8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2 \pi(0,3 \cdot 0,017) \text{ рад/100 см}}} \approx 14,0 \text{ см}.$$

Диаметр, полученный из условия жесткости, больше полученного из условия прочности на  $(14 - 12,5)/12,5 \approx 12\%$ .

*Таким образом, условие жесткости во многих случаях предъявляет более жесткие требования к размеру сечения, чем условие прочности.*

**Задача 2.** Заменить сплошной вал диаметра  $D = 300$  мм полым (пустотелым) равнопрочным валом с наружным диаметром  $D_H = 350$  мм. Найти внутренний диаметр полого вала  $D_B$  и сравнить веса этих валов.

*Решение.* Условие равнопрочности означает, что максимальные касательные напряжения в обоих валах должны быть одинаковыми при одинаковом крутящем моменте:

$$\tau_{\max}^{\text{сплошной}} = \tau_{\max}^{\text{полый}}, \text{ т. е. } \frac{M_K}{W_{\rho}^{\text{сплошной}}} = \frac{M_K}{W_{\rho}^{\text{полый}}},$$

откуда

$$W_{\rho}^{\text{сплошной}} = W_{\rho}^{\text{полый}}.$$

Из последнего равенства с учетом (4.30) следует

$$\frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi D_3^3}{16} (1 - \alpha^4), \text{ где } \alpha = \frac{D_B}{D_3}.$$

Отсюда находим

$$\alpha = \sqrt[4]{1 - \left(\frac{D}{D_3}\right)^3} = 0,78.$$

Внутренний диаметр полого вала находим, зная внешний диаметр:

$$D_B = \alpha D_H = 0,78 \cdot 350 = 273 \text{ мм}.$$

Отношение веса полого вала к весу сплошного при одинаковой длине равно отношению площадей поперечных сечений:

$$\frac{\pi(D_3^2 - D_B^2)}{4} \cdot \frac{4}{\pi D^2} = 0,534.$$

*Задача 3.* В сплошном валу диаметром  $D$  вырезали отверстие диаметром  $d$ , причем  $d=0,4D$ . Показать самостоятельно, что в полученном полом валу по сравнению со сплошным максимальное напряжение увеличилось на 2,6 %; вес уменьшился на 16 %.

*Выводы из задач 2 и 3.* Изготовление пустотелых валов, т. е. валов, из которых удаляется малонагруженная внутренняя часть, является эффективным средством снижения затрат материала и облегчения валов. При этом максимальные напряжения в пустотелом валу мало отличаются от максимальных напряжений в валу сплошного сечения при том же наружном диаметре. Такие валы широко применяются в машиностроении, в частности, в моторостроении.

*Задача 4.* Построить эпюру углов закручивания для вала, показанного на рисунке 9.11, а.

*Решение.*

Предварительно построим эпюру крутящих моментов (рисунок 9.11, б).

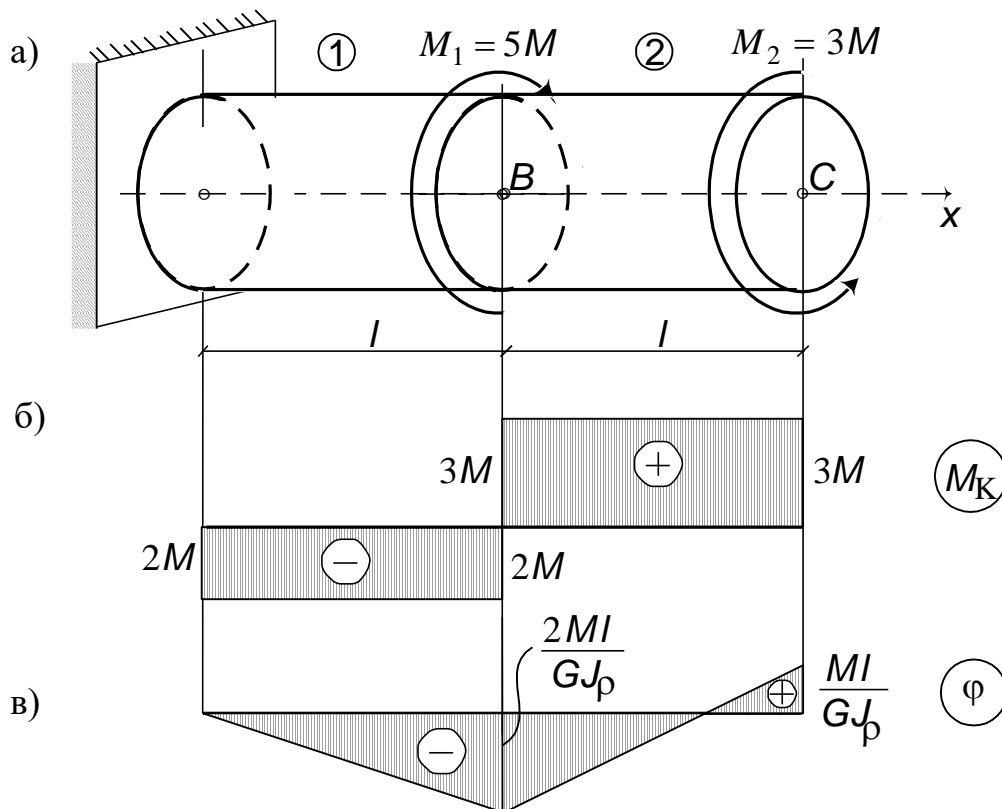


Рисунок 9.11

На участке 1  $\varphi_0 = 0$  (защемление), поэтому согласно (9.11) при  $x = l$  и  $M_K = -2M$  имеем

$$\varphi_B = -\frac{2Ml}{GJ_\rho}.$$

На участке 2  $\varphi_0 = \varphi_B$ , поэтому  $\varphi = -\frac{2Ml}{GJ_\rho} + \frac{2M_K x}{GJ_\rho}$ ,  $0 \leq x \leq l$ .

В т. С при  $x = l$  и  $M_K = 3M$  получаем

$$\varphi_C = -\frac{2Ml}{GJ_\rho} + \frac{3Ml}{GJ_\rho} = \frac{Ml}{GJ_\rho}.$$

Эпюра углов закручивания показана на рисунке 9.11, в.

## 9.8 Напряжения и деформации в винтовых цилиндрических пружинах

В рессорах вагонов, в клапанах и в других деталях механизмов применяются винтовые цилиндрические пружины, подвергающиеся действию растягивающих или сжимающих сил. При проектировании таких пружин для проверки прочности необходимо уметь вычислять наибольшее напряжение. Кроме того, на практике регулируют нагрузки, приходящиеся на пружину, вызывая бóльшие или мёньшие деформации растяжения или сжатия, поэтому нужно уметь вычислять ее удлинение или осадку.

### 9.8.1 Напряжения

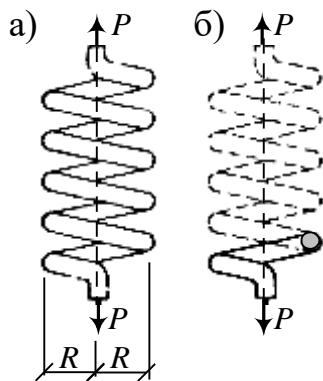


Рисунок 9.12

Рассмотрим цилиндрическую пружину с малым шагом витка под действием растягивающей силы  $P$  (рисунок 9.12, а). Малость шага означает, что углом наклона витков можно пренебречь. Радиус пружины равен  $R$ , радиус поперечного сечения прутка пружины  $r$ , количество витков пружины равно  $n$ .

Для вычисления напряжений рассечем пружину, как показано на рисунке 9.12, б. Отбросим верхнюю часть и рассмотрим равновесие нижней части.

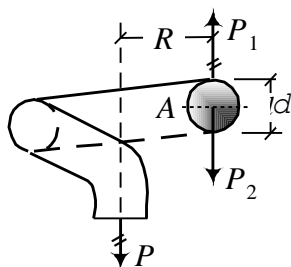


Рисунок 9.13

На нижнюю часть действует внешняя сила  $P$  (рисунок 9.13). Чтобы определить внутренние усилия в поперечном сечении, приложим к его центру две одинаковые противоположно направленные силы, равные  $P_1 = P_2 = P$ . Сила  $P_2$  – это поперечная сила в сечении:  $Q = P$ . Силы  $P_1$  и  $P$  создают в сечении крутящий момент с плечом  $R$ :  $M_K = PR$ .

Распределение этих усилий по сечению – касательные напряжения, как показано на рисунке 9.14: при сдвиге согласно формуле (8.1) возникает  $\tau_c = \frac{Q}{A} = \frac{P}{\pi r^2}$  от поперечной силы  $Q$ ; при

кручении согласно (9.6) возникает  $\tau_K = \frac{M_K \rho}{J_\rho}$  от крутящего

момента  $M_K$ , причем согласно формуле (9.7)  $\tau_K^{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} = \frac{PR}{\pi r^3/2}$ .

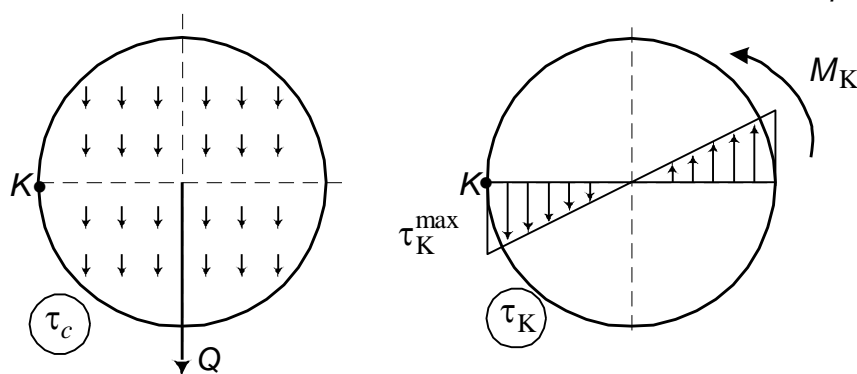


Рисунок 9.14 – Напряжения в сечении цилиндрической пружины

*Наибольшие суммарные напряжения возникают на внутренней стороне навивки (во внутренних точках  $K$  витков), где напряжения  $\tau_c$  и  $\tau_K$  имеют один знак:*

$$\tau_{\max} = \tau_K^{\max} + \tau_c = \frac{PR \cdot 2}{\pi r^3} + \frac{P}{\pi r^2} = \frac{2PR}{\pi r^3} (1 + \beta), \quad \beta = \frac{2r}{R}. \quad (9.16)$$

Если радиус прутка мал по сравнению с радиусом пружины, то величина  $\beta$  очень мала (например, при  $R = 10r$   $\beta = 0,05$ ). Для

таких пружин основную роль в деформации прутка играет деформация кручения, и второе слагаемое в формуле (9.16) можно не учитывать.

Однако при расчете мощных винтовых рессор с большим соотношением  $r/R$  следует пользоваться полной формулой (9.16), поскольку напряжения от среза в этом случае дают существенный вклад. Такие пружины применяются, например, на железнодорожном транспорте.

### 9.8.2 Деформации

Деформация пружины  $\lambda$  – это удлинение при растяжении силами  $P$  или осадка при сжатии силами  $P$ .

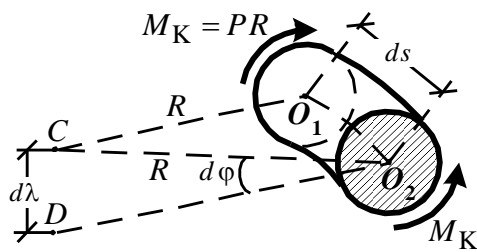


Рисунок 9.15

Вырежем из пружины элемент  $ds$  двумя смежными сечениями –  $CO_1$  и  $CO_2$  (рисунок 9.15).

Так как эти сечения расположены близко, то можно считать, что до деформации радиусы  $R$ , идущие от оси пружины к центрам проведенных сечений, лежат в одной плоскости и образуют треугольник  $O_1CO_2$ .

После деформации второе сечение вследствие скручивания участка прутка  $ds$  повернется относительно первого согласно (9.12) на угол  $d\varphi = \frac{M_K ds}{GJ_\rho}$ . Радиус  $CO_2$  повернется относительно радиуса  $CO_1$  на тот же угол, и т.  $C$  переместится в положение  $D$ , вследствие этого конец пружины опустится на величину

$$d\lambda = R d\varphi = R \frac{M_K}{GJ_\rho} ds = R \frac{PR \cdot 2}{G\pi r^4} ds = \frac{2PR^2}{G\pi r^4} ds.$$

Если все элементы  $ds$  деформируются таким же образом, то полное удлинение пружины равно интегральной сумме удлинений  $d\lambda$  по всей длине пружины  $l = 2\pi Rn$  :

$$\lambda = \int_0^l d\lambda = \int_0^l \frac{2PR^2}{G\pi r^4} ds = \frac{2PR^2}{G\pi r^4} 2\pi Rn.$$



После преобразований

$$\lambda = \frac{4PR^3}{Gr^4}n. \quad (9.17)$$

*Жесткость пружины*  $C$  – сила  $P$ , которая вызывает удлинение пружины на  $\lambda=1$ . Полагая в (9.17)  $\lambda=1$ , получим

$$C = \frac{Gr^4}{4R^3n}.$$

### 9.8.3 Потенциальная энергия пружины

При расчете пружин иногда заданной бывает не сила, сжимающая или растягивающая пружину, а энергия  $U$ , которая должна быть ею поглощена. Потенциальная энергия деформация равна работе внешних сил, то есть работе сил  $P$  на перемещении  $\lambda$  (3.17):

$$U = \frac{1}{2}P\lambda = \frac{2R^3P^2}{Gr^4}n.$$

### 9.8.4 Практические выводы

*Формулы (9.16) и (9.17) дают возможность проверить прочность и определить деформацию пружины.*

Чем больше допускаемое напряжение  $[\tau]$ , тем меньше может быть поперечное сечение прутка, и значит тем больше будет осадка при равных грузах  $P$ . Так как рессоры должны быть достаточно гибкими, то для них берется закаленная сталь с очень высоким пределом упругости; допускаемое касательное напряжение для нее достигает 400 – 800 МПа.

Эти напряжения могут быть допущены при спокойной нагрузке. Для изменяющейся нагрузки они понижаются примерно на 1/3, а для непрерывно работающих пружин (пружины клапанов) примерно на 2/3. В этих случаях большую роль играет возможность развития трещин усталости (см. п. 11.6). Кроме того, пружины клапанов часто работают при высоких температурах, что также требует снижения основных допускаемых напряжений.

На практике при расчете пружин вместо формулы (9.16), учитывающей только дополнительное влияние сдвига, расчет производят по формуле

$$\tau_{\max} = k \frac{2PR}{\pi r^3},$$

где  $k$  – поправочный коэффициент, учитывающий как влияние сдвига, так и ряд других факторов (изгиб прутка, продольные деформации и т. д.). Величина этого коэффициента увеличивается с увеличением соотношения  $r/R$ , т. е. с увеличением жесткости пружины. Значения коэффициента  $k$  приведены в таблице 9.1.

$R/r$	3	4	5	6	7	8	9	10
$k$	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

### 9.8.5 Задачи на расчет цилиндрической пружины

#### Задача 1

Винтовая пружина сделана из проволоки радиусом  $r = 2$  мм. Радиус витка пружины  $R = 50$  мм. В ненапряженном состоянии зазор в свету между витками равен  $t = 1$  мм; модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>. Какой силой надо сжать пружину, чтобы зазор исчез?

#### Решение

Чтобы зазор закрылся, нужно, чтобы осадка каждого витка равнялась зазору. Тогда

$$\lambda = t = \frac{4PR^3}{Gr^4},$$

откуда

$$P = \frac{Gr^4 t}{4R^3} = \frac{8 \cdot 10^3 \text{ кг/мм}^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ мм}^4 \cdot 1 \text{ мм}}{4 \cdot 25^3 \text{ мм}^3} = 2,05 \text{ кг}.$$

Напряжения при этой нагрузке невелики:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} = \frac{PR}{\pi r^3/2} = \frac{2,05 \text{ кг} \cdot 25 \text{ мм}}{3,14 \cdot 2^3 \text{ мм}^3/2} = 4,1 \text{ кг/мм}^2 = 410 \text{ кг/см}^2 = 41 \text{ МПа}$$

(для сравнения допускаемое напряжение пружинной стали имеет порядок 600 – 1000 МПа).

### Задача 2

Предохранительный клапан диаметром  $D = 75 \text{ мм}$  должен открываться при давлении  $q = 6 \text{ атм}$ . Пружина клапана – стальная диаметром  $d = 12 \text{ мм}$ ; диаметр витка пружины  $2R = 60 \text{ мм}$ . При отсутствии нагрузки расстояние между осями смежных витков по вертикали (шаг пружины) равно  $t = 17 \text{ мм}$ . Найти необходимое число витков пружины  $n$ , предполагая, что при максимальном поднятии клапана должно оставаться не менее  $\lambda_2 = 35 \text{ мм}$  в запас на дальнейшее сжатие пружины (до соприкасания витков), а также определить начальное сжатие пружины  $\lambda_1$ . Модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ .

### Решение

Сила, поднимающая клапан, равна

$$P = q \frac{\pi D^2}{4} = 6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \frac{3,14 \cdot 7,5^2 \text{ см}^2}{4} = 265 \text{ кг}.$$

Для того чтобы при этой силе пружина начала сжиматься, надо ей дать первоначальную осадку:

$$\lambda = \frac{4PR^3}{Gr^4} n = \frac{4 \cdot 265 \text{ кг} \cdot 3^3 \text{ см}^3}{8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2 \cdot 0,6^4 \text{ см}^4} n = 0,276 \text{ см} \cdot n.$$

Полная длина пружины в ненагруженном состоянии (считая ее по вертикальной оси) складывается из  $\lambda_1$  и запаса  $\lambda_2$ . Эта сумма должна равняться предельному сжатию пружины  $\lambda_0 = (t - d)n$ :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (t - d)n, \quad \text{или} \quad 0,276n + 3,5 = (1,7 - 1,2)n,$$

откуда число витков

$$n = \frac{3,5}{0,224} = 16 \text{ витков}.$$

Начальная осадка пружины равна

$$\lambda_1 = 0,276 \cdot 16 = 4,4 \text{ см.}$$

Основные формулы для расчетов на кручение приведены в приложении Б.

# 10 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

## 10.1 Понятие об устойчивости

Для надежной работы конструкции под нагрузкой недостаточно сделать ее элементы прочными, необходимо еще обеспечить сохранение первоначальной формы равновесия как самих элементов, так и всей конструкции в целом. Способность конструкции и ее элементов сохранять заданную форму равновесия называется *устойчивостью*. Потеря устойчивости при определенных видах нагружения характерна для различных гибких элементов: стержней (рисунок 10.1, а), пластинок и оболочек (выпучивание, рисунок 10.1, б).

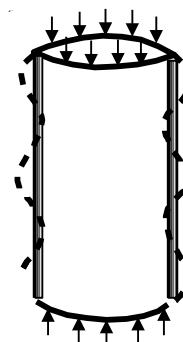
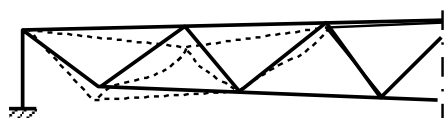
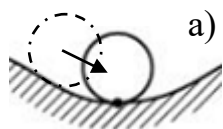


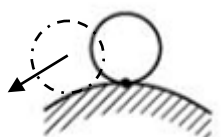
Рисунок 10.1 – Потеря устойчивости (пунктир): фрагмент деформированной фермы (а); выпучивание стальной оболочки колонны (б)

## 10.2 Формы равновесия

Выделяют *устойчивую*, *неустойчивую* и *безразличную* формы равновесия. Проиллюстрировать их можно на примере устойчивости твердого тела.

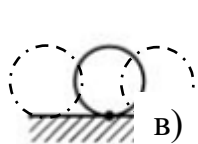


б) .



Если при *малом* отклонении от положения равновесия система возвращается в начальное положение после устранения причины отклонения, *равновесие называется устойчивым* (рисунок 10.2,

Если удаление от равновесия после *малого* отклонения не исчезает, а продолжает расти, *равновесие называется неустойчивым* (рисунок



10.2, б).

в) Равновесие называется *безразличным*, если сколь угодно близко с ним существует бесконечно много других положений равновесия (рисунок 10.2, в).

Рисунок 10.2

Все введенные понятия относятся и к упругим телам и их системам, как было проиллюстрировано в п. 10.1.

### 10.3 Продольный изгиб. Критическая сила

В случае упругих систем характер равновесия зависит от величины приложенной нагрузки.

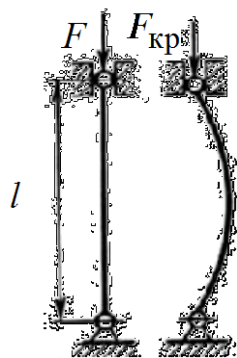


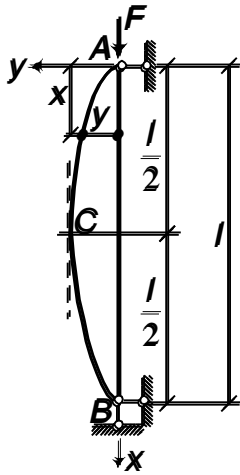
Рисунок 10.3

Например, если показанный на рисунке 10.3 стержень сжать относительно небольшой силой  $F$  ( $F < F_{кр}$ ), то после снятия силы он восстановит исходную прямолинейную форму равновесия. При увеличении силы до некоторого значения исходная форма перестанет восстанавливаться.

Нагрузка, при которой устойчивое равновесие переходит в неустойчивое, называется *критической силой*, а состояние системы – *критическим состоянием*. Переход из устойчивой формы равновесия в неустойчивую называется *потерей устойчивости*.

Итак, *критической силой* называется максимальное значение силы, при которой стержень сохраняет прямолинейную форму равновесия. Равносильное определение: *критической силой* называется минимальное значение силы, при которой стержень теряет прямолинейную форму равновесия.

Потеря прямолинейной формы равновесия, то есть изгиб стержня под действием продольной силы называется *продольным изгибом*.



## 10.4 Формула Эйлера определения критической силы для шарнирно закрепленного стержня

Рассмотрим стержень  $AB$ , шарнирно опертый по концам (рисунок 10.4).

Предположим, что стержень под действием сжимающей силы немного изогнулся. Рассматриваем малые отклонения стойки от первоначального положения, так что опусканием точки  $A$  можно пренебречь.

Изгибающий момент в сечении  $x$

$$M_x = Fy. \quad (10.1)$$

Дифференциальное уравнение изогнутой

рисунок 10.4

оси стержня (7.21) с учетом (10.1) имеет вид

$$EJ y'' = -M_x = -Fy. \quad (10.2)$$

В качестве жесткости здесь нужно брать  $EJ = EJ_{\min}$ , поскольку изгиб произойдет в сторону наименьшей жесткости.

Если ввести обозначение  $\kappa^2 = \frac{F}{EJ}$ , то уравнение (10.2) примет вид

$$y'' + \kappa^2 y = 0. \quad (10.3)$$

Общим решением этого уравнения является функция

$$y = C_1 \cos \kappa x + C_2 \sin \kappa x, \quad (10.4)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – константы, подлежащие определению из граничных условий. В данном случае это условия отсутствия перемещений концов стержня вдоль оси  $y$ :

при  $x = 0$   $y = 0$ , откуда  $C_1 = 0$ ;

при  $x = l$   $y = 0$ . С учетом  $C_1 = 0$  и (10.4) это условие дает

$$y = C_2 \sin \kappa l = 0. \quad (10.5)$$

Поскольку  $C_2 \neq 0$  (в этом случае отклонение  $y$  было бы нулевым), необходимо, чтобы  $\sin \kappa l = 0$ . Это выполняется в одном из случаев

$$\kappa l = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi.$$

Равенство  $\kappa l = 0$  не выполняется, так как  $l \neq 0$  и  $\kappa^2 = \frac{F}{EJ} \neq 0$ .

Возьмем  $\kappa l = \pi$ . Возведем это выражение в квадрат и подставим значение  $\kappa$ :

$$\frac{F}{EJ} l^2 = \pi^2.$$

Отсюда с учетом  $EJ = EJ_{\min}$  имеем

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}. \quad (10.6)$$

По этой формуле получается минимальное значение силы, при которой выполняется (10.5), то есть *критическая сила*  $F_{\text{кр}}$ . Эта формула называется формулой Эйлера, поскольку она была получена в 1744 г. великим математиком Леонардом Эйлером. При  $F < F_{\text{кр}}$  стержень имеет только одну – прямолинейную – форму равновесия, и эта форма равновесия устойчива.

Поскольку  $\kappa l = \pi$ , из (10.5) получаем

$$y = C_2 \sin \frac{\pi X}{l},$$

значит, при потере устойчивости ось шарнирно закрепленного стержня искривляется по полуволне синусоиды.

Рассмотрим другие случаи решений уравнения (10.5), а именно  $\kappa l = 2\pi, 3\pi, \dots$ . В этом случае  $F > F_{\text{кр}}$ , и наряду с прямолинейной имеет место другая – криволинейная – форма равновесия. В этом случае прямолинейная форма равновесия является неустойчивой, а искривленная – устойчивой. Поэтому практическое значение имеет только первая сила  $F_{\text{кр}}$ , при которой сохраняется прямолинейная форма равновесия.



## 10.5 Формула Эйлера при различных условиях закрепления концов стержня

Формула Эйлера (10.6) получена в предположении шарнирного опирания стержня по концам. Определяя константы  $C_1$  и  $C_2$  в (10.4) при других условиях закрепления концов стержня, можно получить *формулу Эйлера* для критической силы при произвольных условиях опирания:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{l_{\text{пр}}^2}. \quad (10.7)$$

Здесь  $l_{\text{пр}}$  – *приведенная длина* стержня, которую можно интерпретировать как длину условного шарнирно опертого по концам стержня, для которого критическая сила определяется согласно (10.6). На этой части длины стержень изгибается по полуволне синусоиды. Определить  $l_{\text{пр}}$  можно по формуле

$$l_{\text{пр}} = l \cdot \mu, \quad (10.8)$$

где  $\mu$  – *коэффициент приведенной длины*, определяемый согласно рисунку 10.5.

Коэффициент  $\mu$  зависит только от условий закрепления стержня.

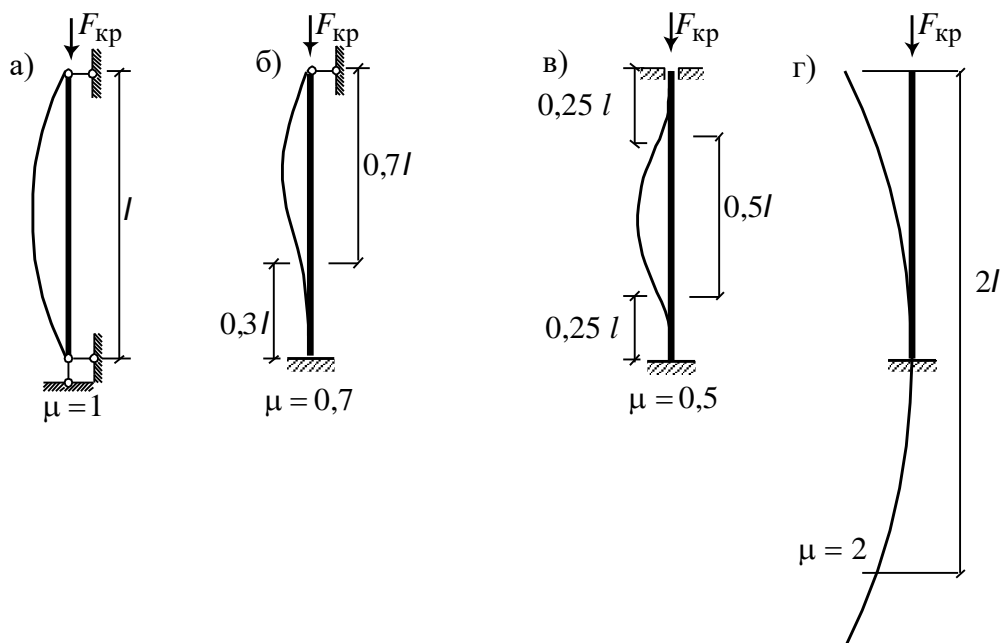


Рисунок 10.5 – Значение коэффициента приведенной длины  $\mu$  для сжатых стержней при различных способах закрепления концов

## 10.6 Пределы применимости формулы Эйлера. Формула Ясинского

Формула Эйлера (10.6), а значит, и формула (10.7), была выведена в предположении, что деформирование материала подчиняется закону Гука (на основании закона Гука получено уравнение изогнутой оси стержня (7.21), п. 7.4.1). Значит напряжение  $\sigma$ , возникающее при критической нагрузке, не должно превышать предела пропорциональности:  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$ .

Так как при действии критической нагрузки стержень все еще сохраняет первоначальную прямолинейную форму равновесия, то критические напряжения в нем можно найти как при простом сжатии, т. е.

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l_{пр}^2 A} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{l_{пр}^2},$$

где  $i^2$  – квадрат радиуса инерции (п. 4.6).

Введем величину, которая называется *гибкостью* стержня:

$$\lambda = \frac{l_{пр}}{i_{\min}}. \quad (10.8)$$

Очевидно, гибкость – *безразмерная* величина, которая *зависит* от соотношения размеров сечения и приведенной длины стержня. Она *не зависит* от механических характеристик материала стержня.

Окончательно формула для критических напряжений примет вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц},$$

откуда получаем *предел применимости формулы Эйлера*:

$$\lambda \geq \lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}. \quad (10.9)$$

Здесь  $\lambda_{\text{пред}}$  – предельная гибкость, которая, как видно из (10.9), *зависит* только от физико-механических свойств материалов стержня – его модуля упругости и предела пропорциональности. Значения предельных гибкостей для стержней, выполненных из некоторых наиболее часто встречающихся материалов, приведены в приложении Д.

### **Формула Ясинского**

При значениях гибкости, меньших предельной, критические силы и критические напряжения значительно меньше величин, определяемых по формуле Эйлера (10.9). Для таких стержней критические напряжения определяются по эмпирическим формулам (т. е. обоснованным опытным путем). Так, критические напряжения для стальных, дюралюминиевых и деревянных стержней определяются по линейной эмпирической зависимости

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda, \quad (10.10)$$

которую называют *формулой Ясинского* (она предложена русским инженером и механиком Ф.С. Ясинским). Коэффициенты  $a$  и  $b$ , имеющие размерность напряжения, определяются экспериментально. Их значения для некоторых материалов приведены в приложении Д.

Критическая сила

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A .$$

## **10.7 Классификация стержней**

Сжатые стержни по методике их расчета делят на три группы:

1 Стержни большой гибкости ( $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$ ), для которых критическую силу определяют по формуле Эйлера (10.9):

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{мин}}}{l_{\text{пр}}^2}; \text{ критическое напряжение равно } \sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} .$$

2 Стержни средней гибкости ( $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{пред}}$ ), для них критическое напряжение определяют по эмпирической формуле

Ясинского (10.10):  $\sigma_{кр} = a - b\lambda$ ; критическая сила равна  $F_{кр} = \sigma_{кр}A = (a - b\lambda)A$ .

3 Стержни малой гибкости ( $\lambda < \lambda_0$ ), которые рассчитывают не на устойчивость, а на прочность.

Значения  $\lambda_0$  для некоторых материалов даны в приложении Д.

Для сжатых стержней большой гибкости применение стали с лучшими механическими характеристиками не оправдано, так как величина модуля упругости  $E$  почти одинакова для сталей разных марок и, следовательно, применение стали более высокого качества не приводит к повышению  $\sigma_{кр}$ .

### 10.8 Условие устойчивости

Критические напряжения  $\sigma_{кр}$  являются опасными для сжатого стержня. Поэтому чтобы обеспечить устойчивость прямолинейной формы равновесия, необходимо кроме условия прочности

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{нетто}}} \leq [\sigma]$$

обеспечить выполнение условия устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{брутто}}} \leq [\sigma]_y, \quad [\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{k_y},$$

где  $[\sigma]_y$  – допускаемое напряжение на устойчивость;

$k_y$  – коэффициент запаса на устойчивость.

При расчетах на прочность площадь поперечного сечения  $A_{\text{нетто}}$  берется с учетом ослаблений (отверстия под болты и т. п.); при расчетах на устойчивость эти ослабления не учитываются, поэтому в формулы входит  $A_{\text{брутто}}$ .

Коэффициент запаса на устойчивость  $k_y$  больше коэффициента запаса на прочность  $k$ . Это объясняется необходимостью учесть при сжатии возможность начальной кривизны; небольшого эксцентриситета, т. е. смещением линии действия силы от оси; неоднородности материала и т. д.

Установим связь между  $[\sigma]_y$  и  $[\sigma]$ . Для этого рассмотрим их соотношение

$$\frac{[\sigma]_{ст}}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{кр}}{k_{ст}} \cdot \frac{k}{\sigma_{неб}}, \text{ откуда } [\sigma]_{ст} = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{неб}} \frac{k}{k_{ст}} [\sigma],$$

где  $\sigma_{оп}$  – опасное напряжение при расчетах на прочность (равное пределу текучести  $\sigma_T$  для пластичных материалов и пределу прочности  $\sigma_B$  для хрупких).

Обозначив

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{оп}} \frac{k}{k_y},$$

получим

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma],$$

где  $\varphi$  – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения при продольном изгибе.

Коэффициент  $\varphi$  зависит от материала и гибкости стержня  $\lambda$ . Значения коэффициента  $\varphi$  в зависимости от  $\lambda$  для различных материалов приведены в приложении Д.

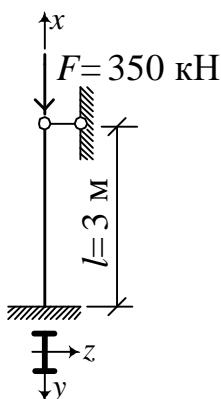
Окончательно условие устойчивости получаем в виде

$$\sigma = \frac{F}{A_{брутто}} \leq \varphi [\sigma]. \quad (10.11)$$

## 10.9 Решение задач на устойчивость

При расчете сжатых стержней на устойчивость, как и при расчете на прочность, решаются три задачи: проверка устойчивости; подбор сечения; определение несущей способности (допускаемой нагрузки из условия устойчивости или критической силы).

**Задача 1.** Проверить устойчивость стальной (Ст3) колонны двутаврового сечения I №22 (рисунок 10.6);  $[\sigma]=160$  МПа. Определить критическую силу  $F_{кр}$ .



Для проверки условия устойчивости (10.11) и определения критической силы нужно знать

гибкость стержня (10.8) (для определения коэффициента  $\varphi$  и для выбора формулы расчета  $F_{кр}$ ).

Рисунок 10.6

Стержень будет терять устойчивость в плоскости наименьшей жесткости  $xOz$ . Выписываем из сортамента (таблица В.1) соответствующие геометрические характеристики:  $J_{\min} = J_y = 157 \text{ см}^4$ ;  $i_{\min} = i_y = 2,27 \text{ см}$ ;  $A = 30,6 \text{ см}^2$ . Приведенная длина стержня при заданных опорных закреплениях равна  $l_{пр} = l \cdot \mu = 3 \cdot 0,7 = 2,1 \text{ м} = 210 \text{ см}$ . Определяем гибкость (10.8) и соответствующее приближенное значение  $\varphi$  (таблица Д.2):

$$\lambda = \frac{l_{пр}}{i_{\min}} = \frac{210}{2,27} = 93; \quad \varphi = 0,66.$$

Для определения  $\varphi$  было записано уравнение прямой, проходящей через 2 точки:  $\lambda_1 = 90$ ,  $\varphi_1 = 0,69$  и  $\lambda_2 = 100$ ,  $\varphi_2 = 0,60$  (таблица Д.2). Для любой точки  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$  соответствующее  $\varphi$  равно

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (10.12)$$

Для  $\lambda = 93$  получаем  $\varphi = 0,69 + \frac{93 - 90}{100 - 90} (0,60 - 0,69) \approx 0,66$ .

Проверяем выполнение условия устойчивости (10.11):

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{350 \text{ кН}}{30,6 \text{ см}^2} = \frac{350 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{30,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 11,4 \text{ МПа} < \varphi[\sigma] = 0,66 \cdot 160 = 106 \text{ МПа}.$$

Для Ст3 предельная гибкость  $\lambda_{пред} = 100$  (таблица Д.1), значит рассматриваемый стержень является стержнем средней гибкости ( $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{пред}$ ), и критическую силу для него нужно вычислять, пользуясь формулой Ясинского (10.10), в которой коэффициенты  $a, b$  берутся из таблицы Д.1:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda = 310 \text{ МПа} - 1,19 \text{ МПа} \cdot 93 = 199 \text{ МПа},$$

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A = 199 \text{ МПа} \cdot 30,6 \text{ см}^2 = 199 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \cdot 30,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 610 \text{ кН}.$$

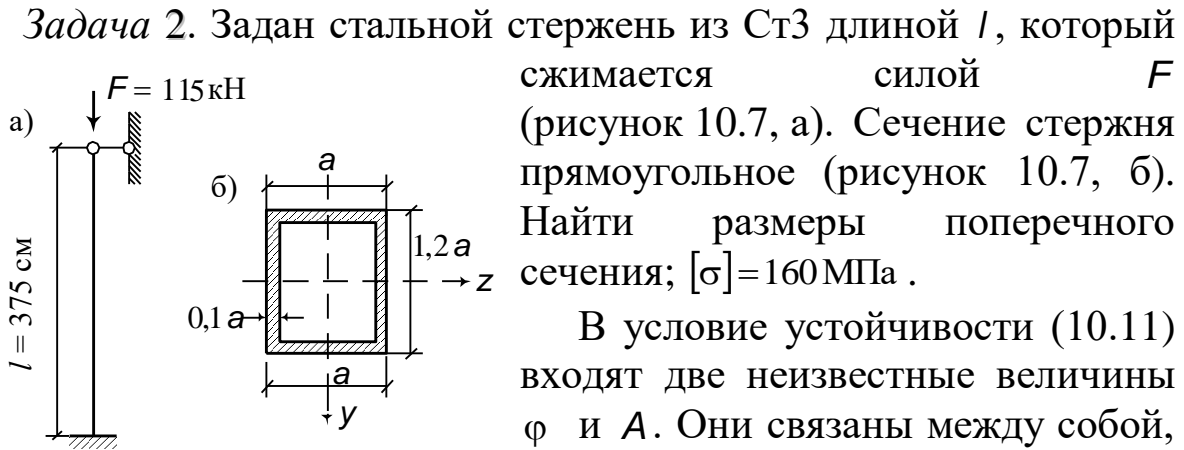


Рисунок 10.7

В условие устойчивости (10.11) входят две неизвестные величины  $\varphi$  и  $A$ . Они связаны между собой, однако зависимость между ними не выражается простой формулой, так что исключить одну из этих величин и выразить ее через другую невозможно. Поэтому если необходимо подобрать сечение, то приходится применять метод последовательных приближений. Проиллюстрируем его на примере данной задачи.

Найдем геометрические характеристики сечения:

$$- \text{площадь } A = a \cdot 1,2a - 0,8a \cdot a = 0,4a^2; \quad (10.13)$$

$$- \text{минимальный момент инерции } J_{\min} = J_y = 0,0573 a^4; \quad (10.14)$$

$$- \text{минимальный радиус инерции } i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = 0,379 a. \quad (10.15)$$

$$\text{Гибкость стержня } \lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 375}{0,379 a} = \frac{693}{a}. \quad (10.16)$$

Из формулы (10.11) найдем

$$A = 0,4a^2 = \frac{F}{\varphi[\sigma]}; \quad a = \sqrt{\frac{F}{0,4\varphi[\sigma]}}. \quad (10.17)$$

Здесь, как и отмечалось ранее, неизвестными являются  $\varphi$  и  $a$ . Зададим произвольным образом начальное значение  $\varphi$ , например,  $\varphi_0 = 0,19$  (или любое другое значение).

0 приближение.  $\varphi_0 = 0,19$ .

$$\text{Из (10.17) } a = \sqrt{\frac{115}{0,4 \cdot 0,19 \cdot 160 \cdot 10^3}} = 0,0972 \text{ м} = 9,72 \text{ см}.$$

$$\text{Из (10.16) } \lambda = \frac{693}{9,72} = 71.$$

По таблице Д.2 находим коэффициент  $\varphi = 0,81$  (так же, как в задаче 1).

Найденное значение  $\varphi$  не равно  $\varphi_0$  с большой погрешностью:  $\Delta = \frac{|\varphi - \varphi_0|}{\varphi_0} 100 \approx 43\%$ .

1 *приближение*. Принимаем  $\varphi_1 = \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} = \frac{0,19 + 0,81}{2} = 0,5$ .

Повторяем расчет:  $a = 5,99$  см;  $\lambda = 115,6$ ;  $\varphi = 0,485$ ;  $\Delta \approx 3\%$ .

2 *приближение*. Принимаем  $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi}{2} = \frac{0,5 + 0,485}{2} = 0,49$ .

Повторяем расчет:  $a = 6,06$  см;  $\lambda = 114$ ;  $\varphi = 0,485$ ;  $\Delta \approx 1\%$ .

Погрешность  $\Delta \approx 1\%$  считается удовлетворительной. На этом расчет заканчивается, размер сечения  $a = 6,06$  см.

## 11 ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗКИ

*Динамическая нагрузка* – это нагрузка, которая во время действия сообщает массам системы ускорения, вызывая появление инерционных сил.

К динамическим нагрузкам относятся *удар* (скорость ударяемого тела изменяется в очень короткий промежуток времени); *импульс* (характерен почти мгновенным действием); *сейсмическая нагрузка* (беспорядочное движение почвы, толчки, удары и колебания при землетрясении); *подвижная нагрузка* (изменяет свое положение на сооружении, по величине может быть постоянной или переменной); *периодическая (вибрационная) нагрузка* (диаграмма ее изменения многократно повторяется через равные промежутки времени) и др.

При динамическом действии нагрузки в элементах возникают переменные во времени напряжения, деформации и перемещения. Расчет на динамическую нагрузку заключается в определении этих величин и проверке на резонанс в случае вибрационной нагрузки.

### 11.1 Упругие колебания



С упругими колебаниями приходится иметь дело в машиностроении и строительстве. Изучение этих колебаний важно при расчетах на прочность при переменных напряжениях.

### 11.1.1 Свободные и вынужденные колебания

*Свободными* называются колебания, возникающие в изолированной системе вследствие однократного внешнего возбуждения (например, толчка) и продолжающиеся затем благодаря наличию внутренних упругих сил, стремящихся восстановить равновесие.

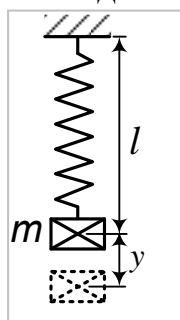
*Вынужденными* называются колебания упругой системы, происходящие при действии на систему внешних периодически изменяющихся сил на протяжении всего времени колебаний.

### 11.1.2 Степень свободы динамической системы

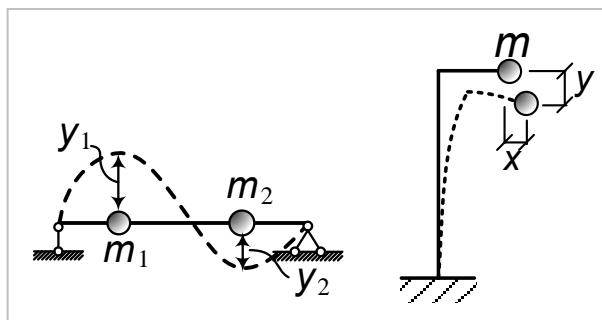
*Степенью свободы* динамической системы называется количество независимых геометрических параметров, которые задают положение всех масс системы в каждый момент времени.

Примеры систем с разными степенями свободы приведены на рисунке 11.1.

1 степень свободы



2 степени свободы



Бесконечное число степеней свободы

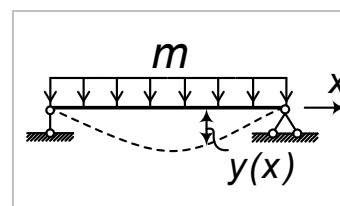


Рисунок 11.1

### 11.1.3 Свободные колебания системы с одной степенью свободы

*Свободные колебания без учета сил сопротивления*

Рассмотрим невесомую пружину с сосредоточенным на ней грузом массой  $m$ . Выведем эту систему из состояния равновесия (например, толчком или оттянем и отпустим груз). При этом возникают свободные колебания, причем положение массы в каждый момент времени задается одной координатой  $y$  (рисунок 11.2, а).

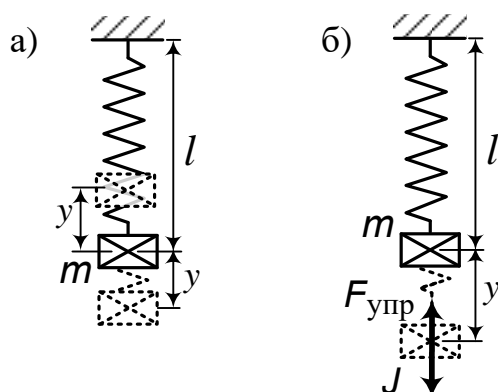


Рисунок 11.2 – Свободные колебания системы с одной степенью свободы

Для записи условия равновесия системы используем принцип Даламбера: динамическая система находится в равновесии, если векторная сумма активных, реактивных сил и сил инерции равна нулю, т.е. сила инерции рассматривается как внешняя сила.

Рассмотрим одно из возможных положений массы, как показано на рисунке 11.2, б. В этом положении на массу действуют сила упругости  $F_{упр}$ , пропорциональная жесткости пружины  $c$ , и сила инерции  $J$ :

$$F_{упр} = cy, \quad J = -m \ddot{y}. \quad (11.1)$$

Жесткость  $c$  численно равна  $c = 1/\delta_{11}$ , где  $\delta_{11}$  – перемещение груза, возникающее под действием единичной силы  $F = 1$ ; через  $\ddot{y}$  обозначается вторая производная от  $y$  по времени, то есть ускорение.

Таким образом, получаем условие равновесия:

$$F_{упр} - J = 0.$$

С учетом (11.1) оно принимает вид

$$cy + m \ddot{y} = 0,$$

или

$$\boxed{\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0}, \quad (11.2)$$

где введено обозначение  $\omega^2 = c/m$ .

Уравнение (11.2) называется *дифференциальным уравнением свободных колебаний*.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t), \quad (11.3)$$

где  $A_1, A_2$  – константы интегрирования, которые определяются из начальных условий

$$t = 0: \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = v_0,$$

где  $\dot{y}$  – это первая производная от  $y$  по времени, то есть скорость перемещения массы  $v$ .

Из этих условий получаем, используя (11.3):

$$\begin{aligned} y(0) &= A_1 = y_0; \\ \dot{y}(t) &= -\omega A_1 \sin(\omega t) + \omega A_2 \cos(\omega t), \\ \dot{y}(0) &= \omega A_2 = \dot{y}_0 = v_0, \quad A_2 = v_0/\omega. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A_1 = y_0, \quad A_2 = v_0/\omega. \quad (11.4)$$

Решение (11.3) можно привести к более удобному для анализа виду, вводя новые константы  $A$  и  $\lambda$  следующим образом:

$$A_1 = A \sin \lambda; \quad A_2 = A \cos \lambda. \quad (11.5)$$

Найдем эти константы, и тем самым покажем, что такая замена правомерна. Из (11.4) получаем

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2; \quad A_1/A_2 = \operatorname{tg} \lambda,$$

откуда

$$A = \sqrt{y_0^2 + (v_0/\omega)^2}; \quad \operatorname{tg} \lambda = y_0 \omega / v_0. \quad (11.6)$$

Подставим в (11.3) выражения (11.5):

$$\begin{aligned} y(t) &= A \sin \lambda \cos(\omega t) + A \cos \lambda \sin(\omega t) = \\ &= A (\sin \lambda \cos(\omega t) + \cos \lambda \sin(\omega t)). \end{aligned}$$

Свернув выражение в скобках, получаем решение уравнения (11.3)

$$\boxed{y(t) = A \sin(\lambda + \omega t)}, \quad (11.7)$$

где  $y(t)$  – отклонение массы от состояния статического равновесия в момент времени  $t$ .

Смысл параметров  $A$ ,  $\lambda$  и  $\omega$ , входящих в решение (11.7), выясним, построив график функции  $y(t)$  (рисунок 11.3).

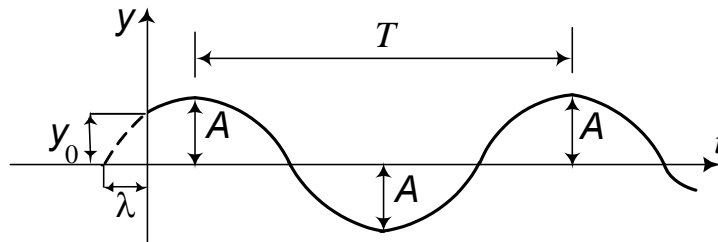


Рисунок 11.3 – График функции  $y(t)$  при свободных колебаниях

Очевидно, графиком  $y(t)$  является синусоида с *амплитудой*  $A$  и *начальной фазой колебаний*  $\lambda$ . *Период* функции обозначен буквой  $T$ .

Выясним смысл переменной  $\omega$ . Для этого запишем условие периодичности  $y(t)$ :

$$y(t) = y(t + T), \text{ т. е.}$$

$$\sin(\lambda + \omega t) = \sin[\lambda + \omega(t + T)] = \sin[(\lambda + \omega t) + \omega T].$$

Поскольку период синуса равен  $2\pi$ , отсюда следует  $\omega T = 2\pi$  и

$$\omega = 2\pi/T.$$

Таким образом,  $\omega$  – это *круговая частота свободных колебаний*, равная числу полных колебаний за  $2\pi$  секунд.

### **Вычисление частоты свободных колебаний $\omega$**

Значение  $\omega$  было введено как  $\omega^2 = c/m$ . Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{G \delta_{11}}},$$

где  $G$  – вес груза массой  $m$ ,  $G = mg$ ;

$g$  – ускорение свободного падения.

Воспользуемся принципом независимости действия сил: перемещение груза от единичной силы (в данном случае – это

растяжение пружины) равно  $\delta_{11}$  (рисунок 11.4, а), значит перемещение от силы  $G \cdot 1 = G$  равно  $G \delta_{11}$  (рисунок 11.4, б).

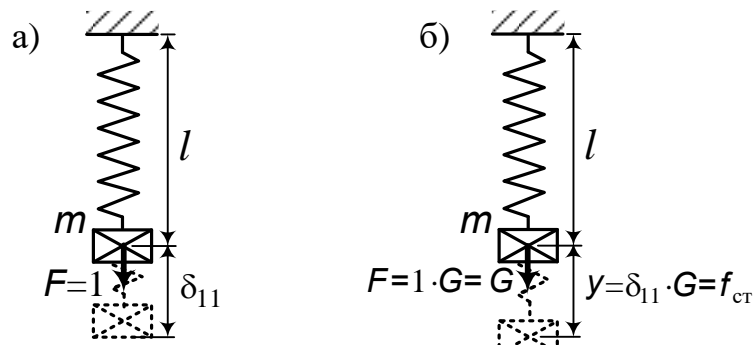


Рисунок 11.4

Таким образом,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{f_{ct}}}, \quad (11.8)$$

где  $f_{ct}$  – это перемещение точки приложения массы  $m$  под действием статически приложенной силы, равной весу  $G = mg$ .

*Задача 1.* Определить частоту свободных колебаний шарнирно опертой невесомой балки с грузом, приложенным посередине пролета (рисунок 11.5, а).

В этом случае прогиб  $f_{ct}$  (рисунок 11.5, б) равен  $f_{ct} = Gl^3/48EJ$  (см., например, метод начальных параметров, формула (7.32)). Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot 48EJ}{Gl^3}} = \sqrt{\frac{48EJ}{ml^3}}.$$

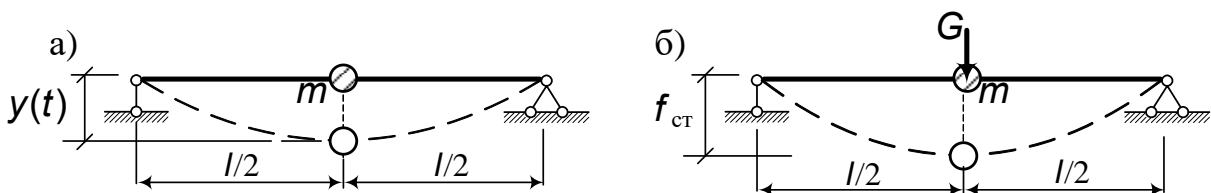


Рисунок 11.5

*Задача 2.* В задаче 1 заменим шарнирные опоры жесткими, то есть увеличим число связей (рисунок 11.6, а).

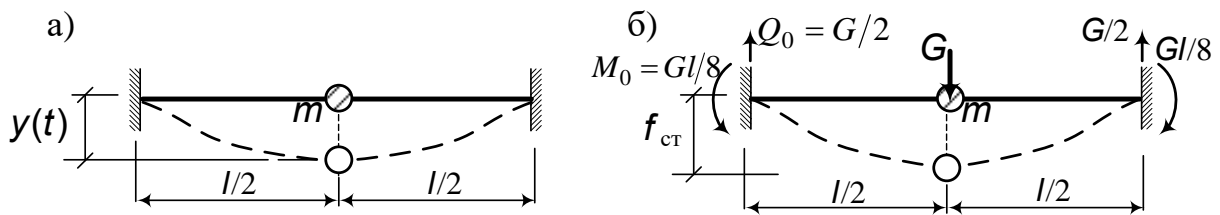


Рисунок 11.6

Тогда  $f_{ст} = Gl^3/192EJ$  (рисунок 11.6, б и п. 7.4.3), частота

$$\omega = \sqrt{\frac{192EJ}{ml^3}} = 2\sqrt{\frac{48EJ}{ml^3}},$$

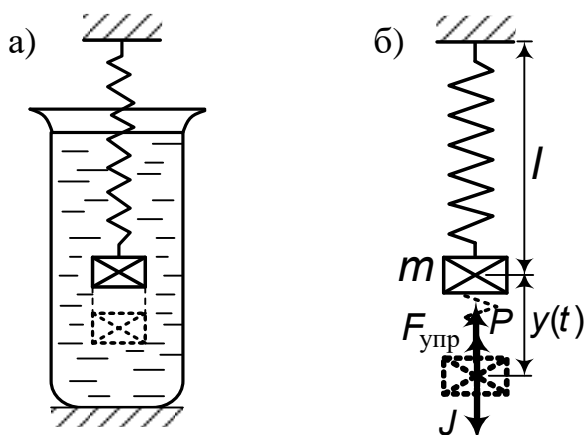
т. е. в данном случае  $\omega$  вдвое больше той, что получена в задаче 1 при шарнирном опирании балки.

### Выводы

1 Частота  $\omega$  обратно пропорциональна  $\sqrt{m}$ ,  $\sqrt{l^3}$  – чем больше масса или размер системы, тем меньше частота свободных колебаний;  $\omega$  прямо пропорциональна  $\sqrt{EJ}$  – чем меньше жесткость, тем меньше частота свободных колебаний.

2 Частота свободных колебаний увеличивается с увеличением количества связей в системе.

## Свободные колебания с учетом сил сопротивления



Учтем силы сопротивления колебаниям, например, силы трения, вязкость среды, (рисунок 11.7, а). В этом случае к силам на рисунке 11.2 добавится сила  $P$  (рисунок 11.7, б). Сила сопротивления, согласно гипотезе Фойгта имеет вид  $P = 2\alpha m \dot{y}$ ,  $\alpha$  – коэффициент

Рисунок 11.7 – Свободные затухающие колебания ( $1/c$ ).

Дифференциальное уравнение колебаний примет вид

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y(t) = 0,$$

а его решение

$$y(t) = C_1 e^{-\alpha t} \sin(\lambda_1 + \omega_1 t), \quad (11.9)$$

где  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ ;

$C_1, \lambda_1$  определяются из начальных условий и равны

$$C_1 = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0 + \alpha y_0}{\omega_1}\right)^2}; \quad \text{tg } \lambda_1 = \frac{y_0 \omega_1}{v_0 + \alpha y_0}.$$

Очевидно, функция  $y(t)$  (11.9) стремится к нулю при возрастании  $t$ , т. е. колебания с учетом сил сопротивления являются *затухающими*. Их график имеет вид, показанный на рисунке 11.8 (амплитуда  $C_1 e^{-\alpha t}$  стремится к нулю).

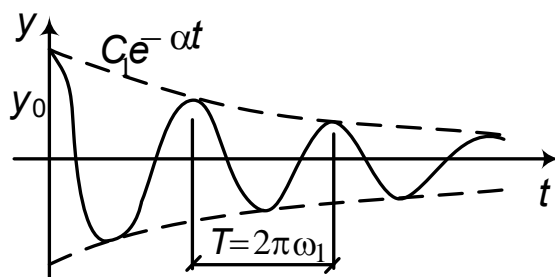


Рисунок 11.8 – График функции  $y(t)$  при затухающих колебаниях

### 11.1.4 Вынужденные периодические колебания системы с одной степенью свободы

Такая динамическая схема встречается, например, при расчете фундаментных балок и стержней, крепящих тяжелые агрегаты (дизели, турбины и т. п.). В этих случаях внешняя переменная сила действует на систему на протяжении всего периода колебаний.

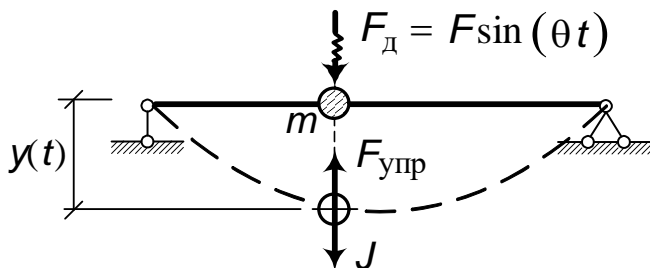


Рисунок 11.9

Рассмотрим, например, колебания груза массой  $m$  на невесомой балке под действием внешней периодической возмущающей силы  $F_d = F \sin(\theta t)$ , т. е. вибрационной нагрузки

(рисунок 11.9).

Такие колебания называются *гармоническими*.

Величина  $F$  – это *амплитуда возмущающей силы*;  $\theta$  – *частота вынужденных колебаний*.

Уравнение равновесия системы имеет вид

$$F_{\text{упр}} - J - F_d = 0,$$

откуда после подстановки выражений  $F_{\text{упр}}$  и  $J$  получаем *дифференциальное уравнение вынужденных колебаний*:

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{F}{m} \sin \theta t. \quad (11.10)$$

Общее решение этого уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$y(t) = y_{\text{общ. одн.}} + y_{\text{частн. неодн.}}$$

Частное решение найдем в виде  $y_{\text{частн. неодн.}} = B \sin \theta t$ . Подставив это решение в уравнение (11.10), получим



$$B = \frac{F}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{F}{c\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} = \frac{F\delta_{11}}{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} = \frac{y_{ст}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}, \quad (11.11)$$

где  $y_{ст}$  – это перемещение точки приложения массы под действием статически приложенной силы, равной  $F$ .

Общее решение однородного уравнения  $y_{общ. одн.}$  (решение уравнения свободных колебаний) является затухающим, поэтому при достаточно большом  $t$  имеем  $y_{max}(t) = y_{max частн. неодн.} = B$ . Обозначим

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}, \quad (11.12)$$

тогда в соответствии с выражением (11.11)

$$y_{max дин} = y_{max}(t) = \mu y_{ст}.$$

Коэффициент  $\mu$  называется *динамическим коэффициентом*. Он задает отношение динамического фактора (перемещения, напряжения) к статическому значению того же фактора.

Явление совпадения частот вынужденных и свободных колебаний называется **резонансом**.

Если частоты вынужденных и свободных колебаний совпадают или близки по величине, то значение  $\mu$  (11.12) резко увеличивается и, следовательно, амплитуда вынужденных колебаний  $y_{max дин}$  и напряжение резко возрастают, что создает опасность возникновения чрезмерных деформаций и разрушения системы. Опасность этого явления обуславливает необходимость проверки системы на резонанс при вынужденных периодических колебаниях.

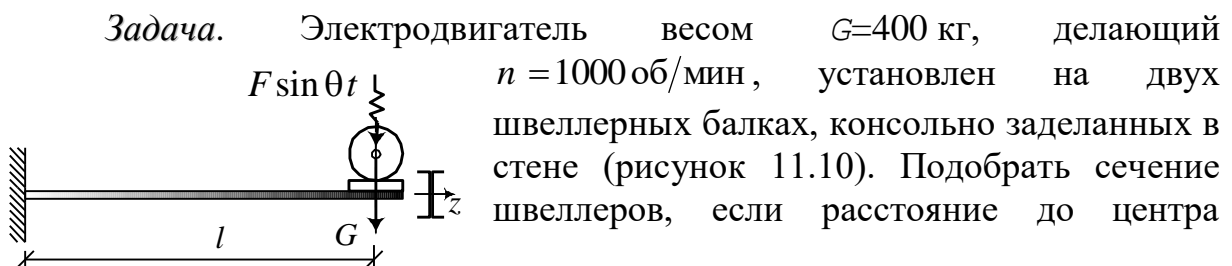


Рисунок 11.10

составляющая центробежной силы, возникающая от неуравновешенности вращающихся частей двигателя, равна  $F \sin \theta t$ , где амплитуда центробежной силы  $F$  составляет 25% от веса двигателя. Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2$ , модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ .

Учесть условие нормативов: частота свободных колебаний  $\omega$  должна быть примерно на 30% больше частоты вынужденных колебаний  $\theta$ .

*Решение.* Подберем сечение из условия нормативов:  $\omega = 1,3\theta$ .  
Круговая частота вынужденных колебаний равна

$$\theta = 2\pi n / 60 = 2 \cdot 3,14 \cdot 1000 / 60 = 104,7 \text{ с}^{-1},$$

откуда  $\omega = 1,3 \cdot 104,7 = 136 \text{ с}^{-1}$ .

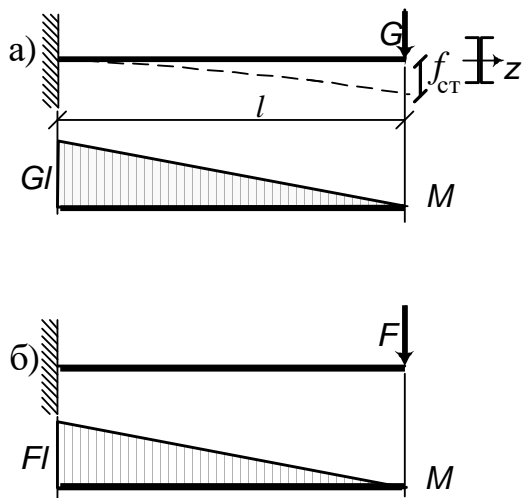


Рисунок 11.11

Согласно сортаменту (приложение В), ближайший подходящий швеллер с бóльшим моментом инерции – это № 16 с  $J_z = 747 \text{ см}^4$ ,  $W_z = 93,4 \text{ см}^3$ .

Проверим напряжения, возникающие в сечениях, с учетом вибрационной нагрузки.

Частота свободных колебаний для выбранного швеллера равна

$$\omega = \sqrt{g/f_{\text{ст}}} = \sqrt{\frac{981 \text{ см/с}^2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 \cdot 747 \text{ см}^3}{400 \text{ кг} \cdot 100^3 \text{ см}^3}} = 148,3 \text{ с}^{-1}.$$

Динамический коэффициент

$$\mu = \frac{1}{1 - \theta^2/\omega^2} = \frac{1}{1 - 104,7^2/148,3^2} = 1,99.$$

Статическое напряжение под действием веса мотора (рисунок 11.11, а)

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{2W_z} = \frac{Gl}{2W_z} = \frac{400 \cdot 100}{2 \cdot 93,4} = 216 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

С другой стороны, согласно (11.8),  $\omega = \sqrt{g/f_{\text{ст}}}$ , где  $f_{\text{ст}}$  – прогиб балки в точке статически приложенной силы  $G$  (рисунок 11.11, а). Согласно методу начальных параметров (7.33), в данном случае  $f_{\text{ст}} = Gl^3 / (3E \cdot 2J_z)$ , где  $J_z$  – момент инерции одного швеллера. Таким образом, получаем

$$136 \text{ с}^{-1} = \sqrt{\frac{981 \text{ см/с}^2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 \cdot J_z}{400 \text{ кг} \cdot 100^3 \text{ см}^3}},$$

откуда  $J_z = 629 \text{ см}^4$ .

Динамическое напряжение от вибрационной нагрузки равно статическому напряжению от силы  $F$  (рисунок 11.11, б), умноженному на  $\mu$ :

$$\sigma_{\text{д}} = \frac{M_{\text{max}}}{2W_z} \mu = \frac{Fl}{2W_z} \mu = \frac{(0,25G)l}{2W_z} \mu = \frac{100 \cdot 100}{2 \cdot 93,4} 1,99 = 107 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Максимальное напряжение в швеллере

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{д}} + \sigma_{\text{ст}} = 216 + 107 = 323 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} < [\sigma].$$

## 11.2 Понятие о критической частоте вращения

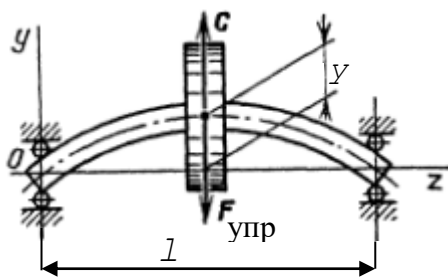


Рисунок 11.12

Рассмотрим вращение двухопорного вала длиной  $l$  с диском посередине (рисунок 11.12). Чтобы выяснить, является ли вращение устойчивым, придадим валу некоторое отклонение  $y$ . Центр тяжести будет двигаться по окружности радиусом  $y$ ,

при этом возникнет центробежная сила  $C = \theta^2 m y$ , где  $\theta$  – частота вращения ( $1/c$ ),  $m$  – масса диска.

Отклонение вала приведет к появлению силы упругости, стремящейся вернуть вал в недеформированное состояние:

$$F_{\text{упр}} = \frac{1}{\delta_{11}} y,$$

где  $\delta_{11}$  – прогиб сечения вала от единичной статически приложенной силы. Для вала постоянного сечения согласно (7.32)

$$\delta_{11} = \frac{1 \cdot l^3}{48EJ}.$$

Пренебрегая весом диска, можно сказать, что при  $C < F_{\text{упр}}$  вращение вала будет устойчивым, т. к. после отклонения вал вернется в исходное положение. В момент равновесия, когда  $C = F_{\text{упр}}$ , прогибы вала могут неограниченно возрастать: в любом отклоненном положении центробежные и восстанавливающие силы упругости равны. Частота вращения

вала, при которой наступает равенство центробежных сил и сил упругости, называется *критической*.

Приравнивая значения  $C$  и  $F_{\text{упр}}$ , находим

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\delta_{11}m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{11}G}} = \sqrt{\frac{g}{f_{\text{ст}}}} = \omega,$$

где  $G$  – вес вала.

Таким образом, получаем, что критическая частота вращения вала равна круговой частоте собственных изгибных колебаний  $\omega$  (11.8).

### 11.3 Расчет равномерно вращающегося кольца (маховика)

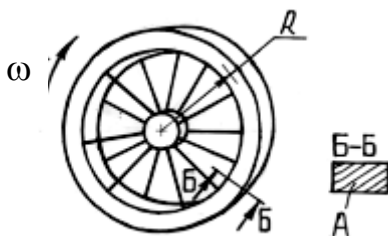
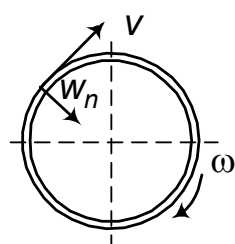


Рисунок 11.13

Рассмотрим задачу об определении напряжений в быстро равномерно вращающемся кольце (в таких условиях находятся обод маховика, колеса и т. д.). Примем обозначения:  $A$  – площадь поперечного сечения кольца;  $\gamma$  – объемный вес материала кольца;  $R$  – средний радиус кольца (толщиной кольца пренебрегаем);  $\omega = \text{const}$  – угловая скорость вращения (угловое ускорение  $\varepsilon = 0$ );  $v$  – линейная скорость точек оси (рисунок 11.13).

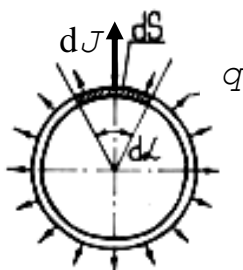


В каждой точке кольца, вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ , возникает только центростремительное ускорение  $w_n = \frac{\omega^2 D}{2}$ , направленное к центру кольца

Рисунок 11.14 (рисунок 11.14), а касательное ускорение

$w_\tau = \frac{\omega \varepsilon}{2} = 0$ . Поэтому в точках кольца действует только

радиальная сила инерции  $J$ , направленная наружу.



Выделим элемент кольца  $ds$ , соответствующий центральному углу  $d\alpha$  (рисунок 11.15). Сила инерции  $dJ$ , приложенная к этому элементу, равна

к 11.15

$$dJ = w_n dm = \frac{\omega^2 D A ds \gamma}{2g} = \frac{\omega^2 D A \gamma}{2g} ds = q ds.$$

Таким образом, в кольце возникают такие же напряжения, как при загрузении распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ , где

$$q = \frac{\omega^2 D A \gamma}{2g}. \quad (11.13)$$

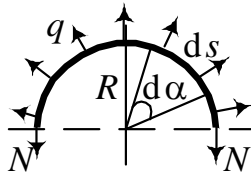


Рисунок 11.16  
условие равновесия:

Рассекая кольцо любой диаметральной плоскостью на две части (рисунок 11.16), приложим в сечениях осевые силы и запишем

$$2N = \int_s q \sin \alpha ds = \int_0^\pi q \sin \alpha R d\alpha = qD,$$

откуда

$$N = qD/2.$$

Напряжение в сечении с учетом (11.13) равно

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{qD}{2A} = \frac{\omega^2 D A \gamma}{2g} \frac{D}{2A} = \left( \frac{\omega D}{2} \right)^2 \frac{\gamma}{g} = \frac{\gamma v^2}{g};$$

$$\boxed{\sigma = \frac{\gamma v^2}{g}}. \quad (11.14)$$

Из условия прочности

$$\sigma \leq [\sigma]$$

можно найти предельную скорость вращения маховика:

$$\boxed{v \leq \sqrt{\frac{g[\sigma]}{\gamma}}}. \quad (11.15)$$

**Задача.** Найти напряжение в сечении маховика диаметром  $D = 4$  м, вращающегося с частотой  $n = 360$  об/мин; объемный вес материала маховика  $\gamma = 7,5$  г/см<sup>3</sup>.

**Решение.** Для данного маховика угловая частота равна

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 12\pi \frac{1}{c};$$

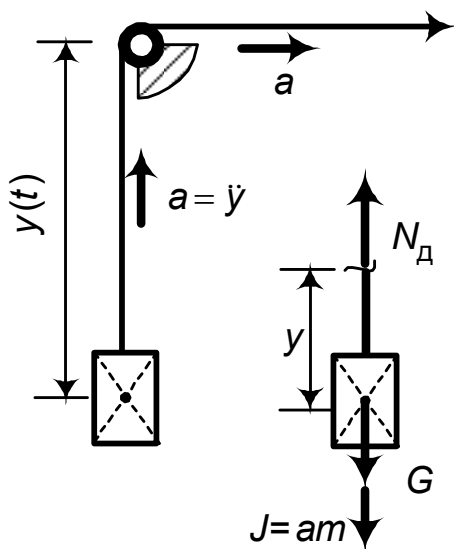
линейная скорость

$$v = \frac{\omega D}{2} = \frac{12\pi \frac{1}{c} \cdot 400 \text{ см}}{2} = 7536 \frac{\text{см}}{c}.$$

Согласно формуле (11.14) получаем

$$\sigma = \frac{\gamma v^2}{g} = \frac{7,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{см}^3} \cdot \left(7536 \frac{\text{см}}{c}\right)^2}{981 \frac{\text{см}}{c^2}} = 434 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

### 11.4 Равноускоренное движение (подъем груза)



Рассмотрим задачу о подъеме груза весом  $G_{\text{груза}}$  с постоянным ускорением  $a$ . Объемный вес материала троса равен  $\gamma$  (рисунок 11.17).

Определим динамический коэффициент  $\mu$  как отношение  $\sigma_{\text{д}}/\sigma_{\text{ст}}$ :

$$\sigma_{\text{д}} = \frac{N_{\text{д}}}{A} = \frac{\mu N_{\text{ст}}}{A} = \mu \sigma_{\text{ст}}.$$

Статическая продольная сила (т. е. сила состояния покоя) в сечении  $x$  равна

$$N_{\text{ст}} = G = G_{\text{груза}} + G_{\text{троса}} = G_{\text{груза}} + Ax \gamma,$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения

троса.

Чтобы получить динамическую продольную силу, нужно к  $N_{\text{ст}}$  прибавить силу инерции, равную

$$J = m_{\text{груза}} a + m_{\text{троса}} a = \frac{G_{\text{груза}}}{g} a + \frac{Ax \gamma}{g} a = \frac{a}{g} (G_{\text{груза}} + Ax \gamma).$$

Получаем

$$N_{\text{д}} = N_{\text{ст}} + J = \left(1 + \frac{a}{g}\right) N_{\text{ст}} = \mu N_{\text{ст}}, \quad \sigma_{\text{д}} = \frac{N_{\text{д}}}{A} = \frac{\mu N_{\text{ст}}}{A} = \mu \sigma_{\text{ст}}.$$

Таким образом, при равноускоренном движении динамический коэффициент равен

$$\boxed{\mu = 1 + \frac{a}{g}} \quad (11.15)$$

*Задача.* Определить диаметр троса  $D$  длиной  $h = 60$  м, поднимающего равноускоренно груз,  $G_{\text{груза}} = 5$  т. За первые  $t = 3$  с груз подняли на высоту  $y = 9$  м. Начальная скорость  $v_0 = 0$ . Объемный вес материала троса  $\gamma = 7 \cdot 10^{-3}$  кг/см<sup>3</sup>;  $[\sigma] = 600$  кг/см<sup>2</sup>.

*Решение.* Площадь сечения троса определяем из условия прочности

$$\sigma_{\text{д}} = N_{\text{д}}/A_{\text{троса}} \leq [\sigma],$$

где  $\sigma_{\text{д}}$  – напряжение в круглом сечении троса с учетом динамики,

$$\sigma_{\text{д}} = \mu \sigma_{\text{ст}} = \mu N_{\text{ст}}/A_{\text{троса}};$$

$N_{\text{ст}}$  – статическая продольная сила в сечении троса,

$$N_{\text{ст}} = G_{\text{груза}} + G_{\text{троса}} = G_{\text{груза}} + \gamma h A_{\text{троса}}, \quad A_{\text{троса}} = \pi D^2/4.$$

Условие прочности принимает вид

$$\sigma_{\text{д}} = \mu \left( \frac{G_{\text{груза}}}{A_{\text{троса}}} + \frac{\gamma h A_{\text{троса}}}{A_{\text{троса}}} \right) = \mu \left( \frac{4G_{\text{груза}}}{\pi D^2} + \gamma h \right) \leq [\sigma],$$

откуда

$$D \geq \sqrt{\frac{4G_{\text{груза}}}{\pi \left( \frac{[\sigma]}{\mu} - \gamma h \right)}}.$$

Динамический коэффициент при равноускоренном движении согласно (11.16) равен  $\mu = 1 + a/g$ ,  $g \approx 10$  м/с<sup>2</sup>. Ускорение  $a$  найдем, подставив данные задачи в уравнение движения  $y = v_0 t + at^2/2$ . Получим  $9 = a \cdot 3^2/2$ , откуда  $a = 2$  м/с<sup>2</sup>,  $\mu = 1 + 2/10 = 1,2$ .

Значение диаметра троса

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot 5000 \text{ кг}}{3,14 \cdot \left( \frac{600 \text{ кг/см}^2}{1,2} - 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3 \cdot 6000 \text{ см} \right)}} = 3,58 \text{ см.}$$

## 11.5 Ударное действие нагрузки

Задача о расчете конструкций на ударную нагрузку (рисунок 11.18) содержит много трудностей, которые не всегда могут быть преодолены простейшими средствами. Сюда относится, в первую очередь, анализ напряженного состояния в зоне контакта соударяющихся тел и процесса изменения контактных сил во времени. Однако можно получить формулу для динамического коэффициента, которая не дает высокой точности, но в то же время позволяет правильно оценить порядок перемещений, напряжений и деформаций при ударе. Это выражение для  $\mu$  имеет вид

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{ст}} \cdot \frac{M}{M + m}}, \quad (11.17)$$

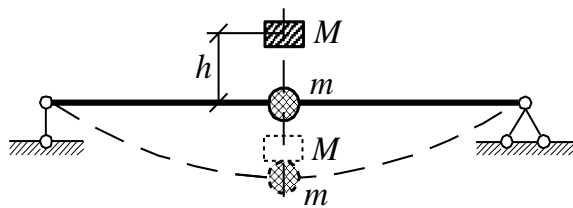


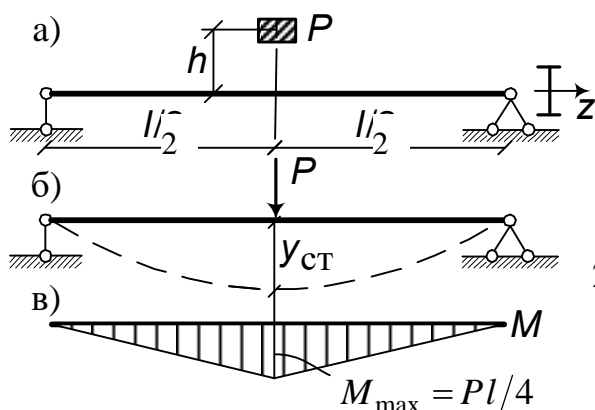
Рисунок 11.18

где  $M$  – масса падающего тела;  $m$  – ударяемая масса;  $h$  – высота, с которой происходит падение;  $y_{ст}$  – перемещение точки удара под действием статически приложенной силы, равной весу падающего тела  $G = Mg$ .

Если ударяемая конструкция не имеет в точке удара сосредоточенной массы  $m$ , то ее роль выполняет распределенная масса конструкции. Ее иногда не учитывают ( $m = 0$ ), что увеличивает запас прочности. При этом  $M/(M + m) = 1$ , и формула (11.14) принимает вид

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{ст}}}. \quad (11.18)$$

**Задача.** На середину стальной балки длиной  $l = 2$  м двутаврового сечения (№ 22) с высоты  $h = 10$  см падает груз  $P = 1$  кН (рисунок 11.19, а);  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Характеристики





двутавра:  $J_z = 2550 \text{ см}^4$ ,  $W_z = 232 \text{ см}^3$  (приложение В).

Определить прогиб под грузом и наибольшее нормальное напряжение в сечении балки при ударе. Вес балки не учитывать.

*Решение.* Определим статические значения прогиба  $y_{\text{ст}}$  (рисунок 11.19, б) и максимального напряжения (рисунок 11.19, в). Согласно (7.22) и (7.5) имеем

$$y_{\text{ст}} = \frac{Pl^3}{48EJ_z} = \frac{1 \text{ кН} \cdot 2^3 \text{ м}^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2 \cdot 2550 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 0,33 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_z} = \frac{Pl}{4W_z} = \frac{1 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м}}{4 \cdot 232 \text{ м}^3} = 2,16 \text{ МПа}.$$

Динамический коэффициент (11.18)

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + 2h/y_{\text{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + 0,2/(0,33 \cdot 10^{-4})} \approx 78.$$

Динамические значения искомых величин

$$y_{\text{д}} = \mu y_{\text{ст}} = 0,26 \cdot 10^{-2} \text{ см};$$

$$\sigma_{\text{д}} = \mu \sigma_{\text{ст}} = \mu \cdot 2,16 \text{ МПа} = 168,5 \text{ МПа}.$$

## 11.6 Прочность материалов при повторно-переменном напряжении

### 11.6.1 Понятие об усталости материалов

Сопротивление материалов действию нагрузок, циклически меняющихся во времени по величине или по величине и по знаку (т. е. повторно-переменных нагрузок), существенно отличается от сопротивления действию статических нагрузок. При этом под действием переменных нагрузок элементы конструкций разрушаются при значительно меньших напряжениях, чем под действием статических нагрузок.

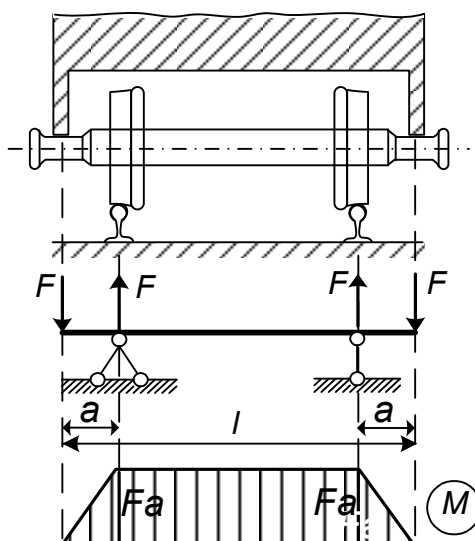


Рисунок 11.20

Типичным примером детали, испытывающей переменные нагрузки, является шток поршневой машины, в котором знак напряжений меняется в соответствии с изменением направления движения поршня.

В качестве другого примера можно привести вагонную ось, показанную на рисунке 11.20: при ее вращении каждая точка поверхности

оказывается попеременно то сверху (в зоне растяжения), то снизу (в зоне сжатия).

Если уровень напряжений, вызванных переменными нагрузками, превышает определенный предел, то в материале начинают происходить необратимые процессы накопления повреждений, которые приводят к образованию трещины. В свою очередь, концентрация напряжений на краю трещины способствует дальнейшему ее развитию.

**Усталостью** материала называется явление разрушения в результате постепенного накопления в нем повреждений, приводящих к появлению трещин при многократном повторении нагружений.

**Выносливостью** материала называется способность сопротивляться разрушению при многократном повторении нагружений.

Совокупность значений напряжений за один период их изменения называют *циклом напряжений*.

**Пределом выносливости** или **пределом усталости** называется максимальное напряжение цикла, при котором материал способен сопротивляться, не разрушаясь, любому произвольно большому числу циклов напряжений.

### 11.6.2 Характеристики циклов напряжений

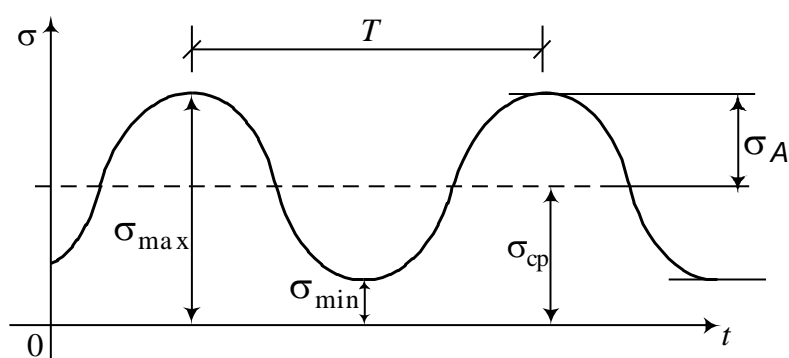


Рисунок 11.21

Цикл переменных напряжений характеризуется величинами (рисунок 11.21):

$\sigma_{\max}$  — максимальное напряжение;

$\sigma_{\min}$  — минимальное напряжение;

$T$  — период цикла (или  $\nu$  — частота цикла,  $\nu = 1/T$ ).

Через эти величины выражаются:

$\sigma_A$  — амплитуда цикла,  $\sigma_A = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$ ;

$\sigma_{cp}$  – среднее напряжение,  $\sigma_{cp} = (\sigma_{max} + \sigma_{min}) / 2$ ;

$r$  – коэффициент асимметрии цикла,  $r = \sigma_{min} / \sigma_{max}$  .

Основные виды циклов напряжений показаны на рисунке 11.22..

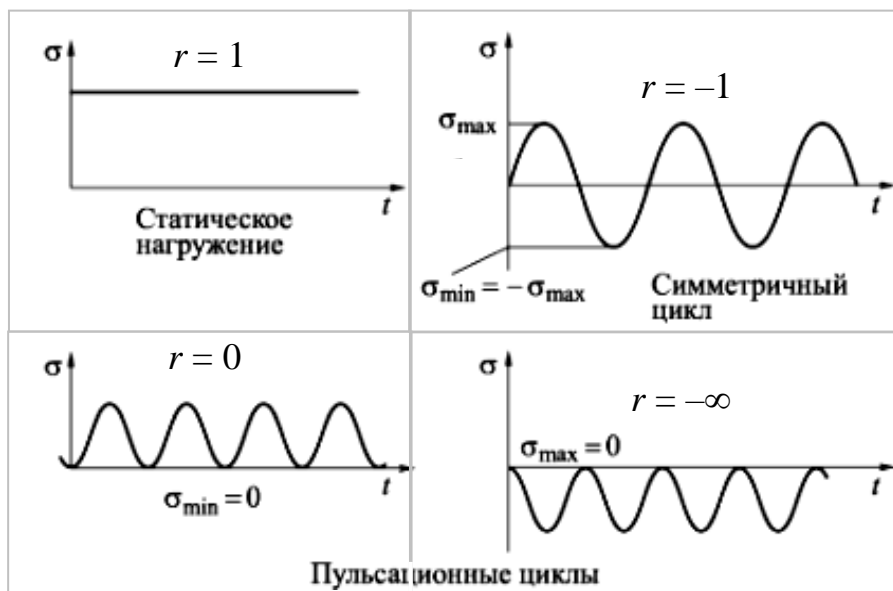


Рисунок 11.22

### 11.6.3 Опытное определение предела выносливости

Основной характеристикой выносливости материала является получаемая экспериментальным путем кривая усталости (кривая Вёлера). Ординаты кривой усталости – значения максимальных напряжений цикла, при которых происходит разрушение образца, абсцисса – число циклов  $N$ , которое выдержал образец до разрушения.

Наиболее простым и распространенным является испытание образцов при симметричном цикле напряжений. Одинаковые образцы при одинаковых условиях подвергаются периодическому знакопеременному симметричному растяжению-сжатию таким образом, что амплитуда напряжений  $\sigma_A = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$ , оставаясь постоянной для каждого образца, меняется от одного образца к другому. Каждый образец до разрушения выдерживает  $N$  циклов при некотором наибольшем напряжении  $\sigma$ . Вид соответствующей кривой показан на рисунке 11.23.

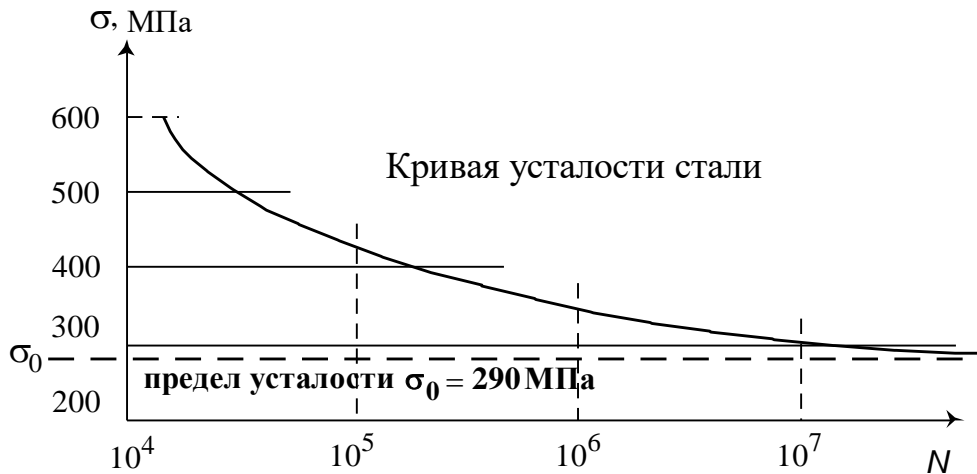


Рисунок 11.23

Анализ кривой показывает, что при симметричном цикле нагружения с наибольшим напряжением  $\sigma < \sigma_0$  он может выдержать без разрушения неограниченное число циклов. Если же наибольшее напряжение в образце  $\sigma > \sigma_0$ , то он разрушится при конечном числе циклов  $N$ . Таким образом, полученное напряжение  $\sigma_0$  является *пределом усталости (выносливости)* (п. 11.6.1).

На предел выносливости материала оказывают влияние многие факторы, в том числе концентрация напряжений, внешняя среда (например, коррозия металлов вызывает снижение предела выносливости), масштабный фактор (с увеличением размеров детали, главным образом поперечного сечения, усталостная прочность снижается), качество обработки поверхности и др.

Так как неограниченное число циклов осуществить нельзя, то для установления значения предела усталости задаются определенным достаточно большим числом циклов и определяют наибольшее напряжение, при котором образец выдерживает все число циклов, не разрушаясь. Для сталей такое число циклов, или базу испытаний, принимают в пределах  $10^6 - 10^7$  циклов. Для цветных металлов –  $(5 - 10) \cdot 10^7$  циклов.

Пределы выносливости удобно выражать в долях от временного сопротивления  $\sigma_B$ . Для металлов минимум  $\sigma_0/\sigma_B$  соответствует кручению, максимум – изгибу. Отношение  $\sigma_0/\sigma_B$  для стали составляет при кручении 0,27, при растяжении-сжатии – 0,37, при изгибе – 0,51.

#### 11.6.4 Расчет на выносливость

Расчет элементов строительных конструкций на выносливость сводится к проверке *условия выносливости* вида

$$\sigma_{\max} \leq \alpha \gamma_v R_v, \quad (11.19)$$

где  $\sigma_{\max}$  – максимальное нормальное напряжение;  $R_v$  – расчетное сопротивление усталости, зависящее от временного сопротивления материала  $\sigma_B$ ;  $\alpha$  – коэффициент, учитывающий число циклов нагружений;  $\gamma_v$  – коэффициент, зависящий от вида напряженного состояния и коэффициента асимметрии цикла.

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\gamma_v$  выбираются согласно СНиП.

Например, для стальных конструкций коэффициент  $\gamma_v$  определяется по таблице 11.1.

Таблица 11.1

$\sigma_{\max}$	$r$	$\gamma_v$
Растяжение	$-1 \leq r < 0$	$2,5/(1,5 - r)$

	$0 < r \leq 0,8$	$2,0/(1,2 - r)$
	$0,8 < r < 1$	$1,0/(1 - r)$
Сжатие	$-1 \leq r < 1$	$2,0/(1 - r)$

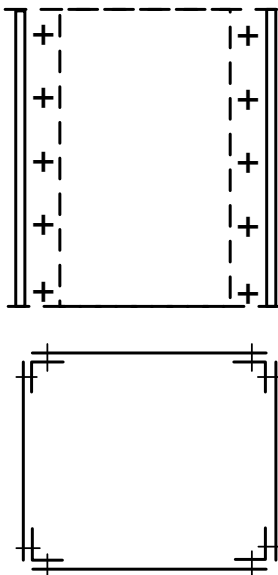
Для частных видов конструкций соотношение (11.19) может принимать несколько отличную форму. Так, при расчете стальных конструкций мостов используется следующее неравенство:

$$\sigma_{\max} \leq \gamma_v m R, \quad (11.20)$$

где  $R$  – расчетное сопротивление при растяжении, сжатии и изгибе по пределу текучести материала;  $m$  – коэффициент условий работы;

$$\gamma_v = \frac{1}{(\alpha\beta + \delta) - (\alpha\beta - \delta)r}, \quad (11.21)$$

где  $\alpha, \delta$  – коэффициенты, учитывающие марку стали и нестационарность нагружения;  $r$  – коэффициент асимметрии цикла переменных напряжений;  $\beta$  – эффективный коэффициент концентрации напряжений. Все коэффициенты выбираются согласно СНиП.



*Задача.* Раскос сквозного стального пролетного строения железнодорожного моста при прохождении поезда испытывает воздействие переменного осевого усилия. Наибольшее растягивающее усилие равно  $N_{\max} = 1200$  кН. Наименьшее сжимающее усилие  $N_{\min} = 200$  кН. Расчетное сопротивление  $R$  низколегированной стали марки 15ХСНД равно 295 МПа. Коэффициент условий работы  $m = 0,9$ . Поперечное сечение – составное, его площадь равна  $A = 75$  см<sup>2</sup>.

*Решение.* Коэффициент асимметрии цикла

$$r = -\frac{|N_{\min}|}{N_{\max}} = -\frac{1}{6}.$$

В соответствии со СНиП 2.05.03-84 коэффициент  $\beta$  принимается равным 1,5; параметры  $\alpha = 0,72$ ,  $\delta = 0,24$ .

Согласно (11.21) вычисляем  $\gamma_v = 0,85$ .

Максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{1200 \cdot 10^3}{75 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ МПа} .$$

Правая часть неравенства (11.20) равна

$$\gamma_{\nu, m} R = 0,85 \cdot 0,9 \cdot 295 = 226,4 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа} .$$

Следовательно, условие выносливости (11.19) выполняется.

Размерности основных используемых величин и их соотношения приведены в приложении Е.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов [Текст] / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка и др.; под ред. Г.С. Писаренко. – К.: Вища школа, 1974. – 672 с.
- 2 Писаренко, Г.С. Опір матеріалів [Текст] / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Є.С. Уманський; за ред. Г.С. Писаренка. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.
- 3 Горшков, А.Г. Сопротивление материалов [Текст] / А.Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашвили. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.
- 4 Варданян, Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности [Текст] / В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков. – М.: МГСУ, 1995. – 572 с.
- 5 Чихладзе, Э.Д. Сопротивление материалов [Текст] / Э.Д. Чихладзе. – Харьков: УкрГАЗТ, 2011. – 366 с.
- 6 Чихладзе, Е.Д. Опір матеріалів [Текст] / Е.Д. Чихладзе. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – 366 с.
- 7 Биргер, И.А. Сопротивление материалов [Текст] / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. – М.: Наука, 1986. – 580 с.
- 8 Беляев, Н.М. Сопротивление материалов [Текст] / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1965. – 856 с.
- 9 Работнов, Ю.Н. Сопротивление материалов [Текст] / Ю.Н. Работнов. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962. – 456 с.
- 10 Тимошенко, С.П. История науки о сопротивлении материалов [Текст] / С.П. Тимошенко. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1957. – 536 с.
- 11 Александров, А.В. Сопротивление материалов [Текст] / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; под ред. А.В. Александрова. – М.: Высшая школа, 2000. – 560 с.
- 12 Тимошенко, С.П. Сопротивление материалов [Текст] / С.П. Тимошенко. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1945. – Т.1. – 315 с.
- 13 Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов [Текст] / В.И. Феодосьев. – М.: Изд. МГТУ, 1999. – 591 с.



## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

Таблица А.1 – Значения модуля упругости  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$  некоторых материалов

Материал	$E$ , МПа	$\nu$
Сталь прокатная	$(2 - 2,1) \cdot 10^5$	0,3
Чугун серый (белый)	$(1,15 - 1,6) \cdot 10^5$	0,3
Алюминиевые сплавы	$0,7 \cdot 10^5$	0,31 – 0,35
Медь, латунь, бронза	$(1,0 - 1,3) \cdot 10^5$	0,18
Бетон	$(0,04 - 0,4) \cdot 10^5$	0,16 – 0,2
Кирпичная кладка	$(0,001 - 0,078) \cdot 10^5$	0,25
Древесина при растяжении (сжатии) вдоль волокон	$(0,1 - 0,12) \cdot 10^5$	0,5
поперек волокон	$(0,004 - 0,01) \cdot 10^5$	0,02
Резина	$(0,00007 - 7) \cdot 10^5$	0,47 – 0,5
Пробка	–	0
Парафин	–	0,5

Таблица А.2 – Значения предела прочности  $\sigma_B$ , предела текучести  $\sigma_T$ , относительного удлинения  $\delta$  и относительного сужения шейки  $\psi$  при разрыве для некоторых материалов

Материал	$\sigma_B$ , МПа		$\sigma_T$ , МПа	$\delta$ , %	$\psi$ , %
	При растяжении	При сжатии			
Ст3	370 – 470	–	220 – 250	23 – 27	60 – 70
О9Г2, 17ГС, 14Г2	450 – 520	–	310 – 350	21 – 23	–
Чугун серый С4	120 – 380	500 – 1200	–	1 – 1,4	–
Дюралюминий Д16	230 – 465	–	100 – 350	8 – 13	30 – 15
Бетон	0,14 – 2,5	0,95 – 0,43	–	–	–
Кирпич	0,7 – 3	7,5 – 100	–	–	–
Древесина вдоль волокон	25 – 34	20 – 33	–	–	–

Таблица А.3 – Значения допускаемых напряжений некоторых материалов

Материал	Допускаемое напряжение, МПа	
	Растяжение	Сжатие
Сталь: углеродистая легированная	160 100 – 400	160 100 – 400
Чугун серый	28 – 80	120 – 150
Медь	30 – 120	30 – 120
Латунь	70 – 140	70 – 140
Бронза	60 – 120	60 – 120
Алюминий	30 – 80	30 – 80
Дюралюминий	80 – 150	80 – 150
Текстолит	30 – 40	30 – 40
Гетинакс	50 – 70	50 – 70
Сосна: вдоль волокон поперек волокон	7 – 10 –	10 – 12 1,5 – 2
Дуб: вдоль волокон поперек волокон	9,6 – 13 –	13 – 15 2 – 3,5
Бетон	0,1 – 0,7	1 – 9
Камень (кладка)	0,1 – 0,3	0,4 – 4
Кирпич (кладка)	0,1 – 0,2	0,6 – 2,5

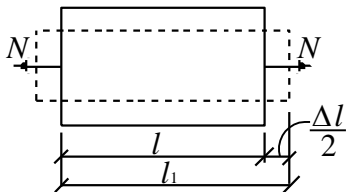
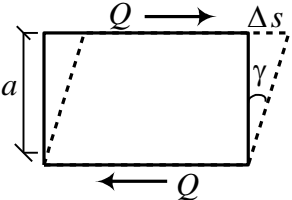
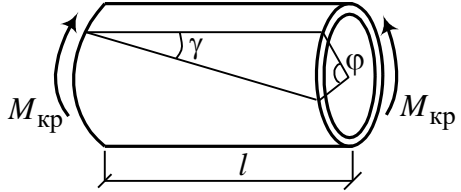
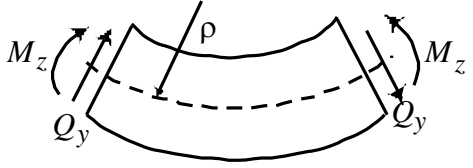
Таблица А.4 – Допускаемые напряжения на срез для заклепочных и сварных соединений для некоторых материалов

Тип соединения	Допускаемое напряжение на срез, МПа
Заклепочное: основные элементы из стали 20 заклепка в рассверленных отверстиях (класс В) заклепка в продавленных отверстиях (класс С)	100 140 100
Сварное: сварка ручная, электроды с тонкой обмазкой сварка ручная, электроды с толстой обмазкой сварка автоматическая	80 110 110

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОСТЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Таблица Б.1

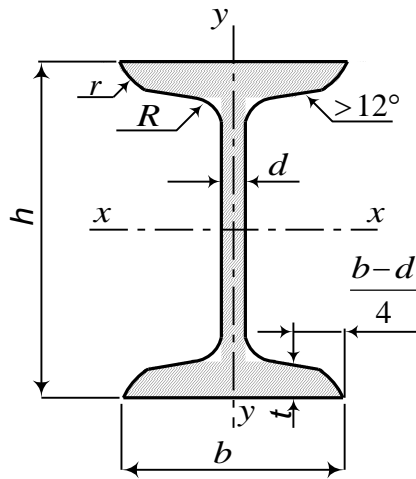
Вид деформации	Растяжение-сжатие	Сдвиг	Кручение	Плоский поперечный изгиб
1	2	3	4	5
Схема				
Усилия	$N$	$Q$	$M_{\text{кр}}$	$Q_y, M_z$
Напряжения	$\sigma = \frac{N}{A}$	$\tau = \frac{Q}{A_{\text{сдв}}}$	$\tau = \frac{M_{\text{кр}}}{J_{\rho}} \rho$	$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y ; \tau = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{b J_z}$ $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$
Деформации	$\Delta l = l_1 - l ; \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_1}$	$\Delta s ; \gamma = \frac{\Delta s}{a}$	$\gamma ; \varphi ; \frac{d\varphi}{dx}$	$y'' = \frac{1}{\rho} ; y' ; y$
Закон Гука	$\sigma = \varepsilon E ; \Delta l = \frac{Nl}{EA}$	$\tau = \gamma G ;$ $\Delta s = \frac{Qa}{GA_{\text{сдв}}}$	$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\rho}} ; \varphi = \frac{M_{\text{кр}}x}{GJ_{\rho}}$	$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z}$

Продолжение таблицы Б.1

204

1	2	3	4	5
<b>Условия прочности</b>	$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]$	$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A_{\text{сдв}}} \leq [\tau]$	$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} \leq [\tau]$	$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma];$ $\tau_{\max} = \frac{Q_y S_z^{0,5}}{b J_z} \leq [\tau]$ $\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma];$ $\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$
<b>Условия жесткости</b>	$\Delta l_{\max} = \frac{N_{\max} l}{EA} \leq [\Delta l]$	—	$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\rho}} \leq \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right]$	$y_{\max} \leq [y]$
<b>Подбор Сечения</b>	$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}$	$A_{\text{сдв}} \geq \frac{Q_{\max}}{[\tau]}$	$W_{\rho} \geq \frac{M_{\text{кр}}}{[\tau]}, J_{\rho} \geq \frac{M_{\text{кр}}}{G \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right]}$	$W_z \geq \frac{M_z}{[\sigma]}$

**ПРИЛОЖЕНИЕ В**  
**СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ**  
**Балки двутавровые (по ГОСТ 8239-89)**



**Обозначения:**

- |                              |   |
|------------------------------|---|
| $h$ - высота балки;          | $J$ - момент инерции;                   |
| $b$ - ширина полки;          | $W$ - момент сопротивления;             |
| $d$ - толщина стенки;        | $i$ - радиус инерции;                   |
| $t$ - средняя толщина полки; | $S$ - статический момент<br>полусечения |

Таблица В.1

205

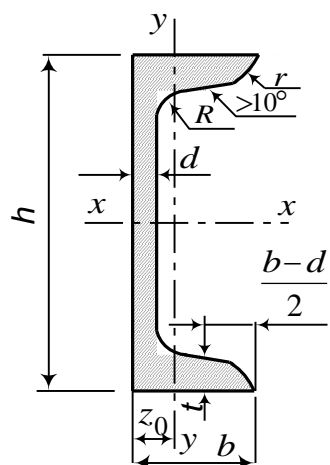
Номер профи- ля	Размеры, мм				Пло- щадь сече- ния, см <sup>2</sup>	$J_x,$ см <sup>4</sup>	$W_x,$ см <sup>3</sup>	$i_x,$ см	$S_x,$ см <sup>3</sup>	$J_y,$ см <sup>4</sup>	$W_y,$ см <sup>3</sup>	$i_y,$ см	Масса 1м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$									
10	100	55	4.5	7.2	12.0	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22	9.46
12	120	64	4.8	7.3	14.7	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38	11.5
14	140	73	4.9	7.5	17.4	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.5	1.55	13.7
16	160	81	5.0	7.8	20.2	873	109	6.57	62.3	58.6	14.5	1.70	15.9
18	180	90	5.1	8.1	23.4	1290	143	7.42	81.4	82.6	18.4	1.88	18.4
20	200	100	5.2	8.4	26.8	1840	184	8.28	104	115	23.1	2.07	21.0
22	220	110	5.4	8.7	30.6	2550	232	9.13	131	157	28.6	2.27	24.0

Продолжение таблицы В.1

Номер профи- ля	Размеры, мм				Пло- щадь сече- ния, см <sup>2</sup>	$J_x,$ см <sup>4</sup>	$W_x,$ см <sup>3</sup>	$i_x,$ см	$S_x,$ см <sup>3</sup>	$J_y,$ см <sup>4</sup>	$W_y,$ см <sup>3</sup>	$i_y,$ см	Масса 1м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$									
24	240	115	5.6	9.5	34.8	3460	289	9.97	163	198	34.5	2.37	27.3
27	270	125	6.0	9.8	40.2	5010	371	11.2	210	260	41.5	2.54	31.5
30	300	135	6.5	10.2	46.5	7080	472	12.3	268	337	49.9	2.69	36.5
33	330	140	7.0	11.2	53.8	9840	597	13.5	339	419	59.9	2.79	42.2
36	360	145	7.5	12.3	61.9	13380	743	14.7	423	516	71.1	2.89	48.6
40	400	155	8.3	13.0	72.6	19062	953	16.2	545	667	86.1	3.03	57.0
45	450	160	9	14.2	84.7	27696	1231	18.1	708	808	101	3.09	66.5
50	500	170	10	15.2	100	39727	1589	19.9	919	1043	123	3.23	78.5
55	550	180	11	16.5	118	55962	2035	21.8	1181	1356	151	3.39	92.6
60	600	190	12	17.8	138	76806	2560	23.6	1491	1725	182	3.54	108



## Швеллеры (по ГОСТ 8240-89)



Обозначения:

- $h$  - высота швеллера;  $J$  - момент инерции;  
 $b$  - ширина полки;  $W$  - момент сопротивления;  
 $d$  - толщина стенки;  $i$  - радиус инерции;  
 $t$  - средняя толщина полки;  $S$  - статический момент  
 полусечения;  
 $z_0$  - расстояние от центра тяжести  
 до внешней грани стенки

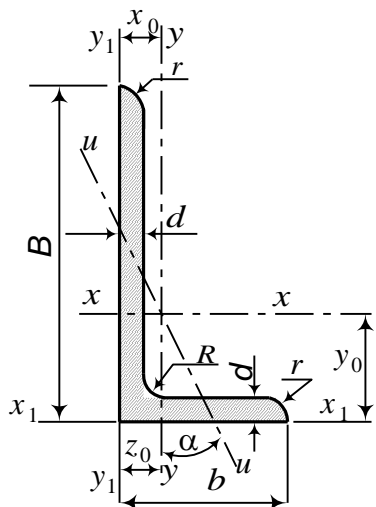
Таблица В.2

Номер профи- ля	Размеры, мм				Пло- щадь сече- ния, см <sup>2</sup>	$J_x,$ см <sup>4</sup>	$W_x,$ см <sup>3</sup>	$i_x,$ см	$S_x,$ см <sup>3</sup>	$J_y,$ см <sup>4</sup>	$W_y,$ см <sup>3</sup>	$i_y,$ см	$z_0$ см	Масса 1м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$										
5	5	32	4.4	7.0	6.16	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.954	1.16	4.84
6.5	65	36	4.4	7.2	7.51	48.6	15.0	2.54	9.0	8.7	3.68	1.08	1.24	5.90
8	80	40	4.5	7.4	8.98	89.4	22.4	3.16	13.3	12.8	4.75	1.19	1.31	7.05
10	100	46	4.5	7.6	10.9	174	34.8	3.99	20.4	20.4	6.46	1.37	1.44	8.59
12	120	52	4.8	7.8	13.3	304	50.6	4.78	29.6	31.2	8.52	1.53	1.54	10.4
14	140	58	4.9	8.1	15.6	491	70.2	5.60	40.8	45.4	11.0	1.70	1.67	12.3
16	160	64	5.0	8.4	18.1	747	93.4	6.42	54.1	63.6	13.8	1.87	1.80	14.2

Продолжение таблицы В.2

Номер профи- ля	Размеры, мм				Пло- щадь сече- ния, см <sup>2</sup>	$J_x$ ,	$W_x$ ,	$i_x$ ,	$S_x$ ,	$J_y$ ,	$W_y$ ,	$i_y$ ,	$z_0$	Масса 1м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$		см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см <sup>3</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см	
16а	160	68	5.0	9.0	19.5	823	103	6.49	59.4	78.8	16.4	2.01	2.00	15.3
18	180	70	5.1	8.7	20.7	1090	121	7.24	69.8	86	17.0	2.04	1.94	16.3
18а	180	74	5.1	9.3	22.2	1190	132	7.32	76.1	105	20.0	2.18	2.13	17.4
20	200	76	5.2	9.0	23.4	1520	152	8.07	87.8	113	20.5	2.20	2.07	18.4
22	220	80	5.4	9.5	26.7	2110	192	8.89	110	151	25.1	2.37	2.21	21.0
24	240	90	5.6	10.0	30.6	2900	242	9.73	139	208	31.6	2.60	2.42	24.0
27	270	95	6.0	10.5	35.2	4160	308	10.9	178	262	37.3	2.73	2.47	27.7
30	300	100	6.5	11.0	40.5	5810	387	12.0	224	327	43.6	2.84	2.52	31.8
33	330	105	7.0	11.7	46.5	7980	484	13.1	281	410	51.8	2.97	2.59	36.5
36	360	110	7.5	12.6	53.4	10820	601	14.2	350	513	61.7	3.10	2.68	41.9
40	400	115	8.0	13.5	61.5	15220	761	15.7	444	642	73.4	3.23	2.75	48.3

### Уголки неравнополочные (по ГОСТ 8510-86\*)



Обозначения:  
*B* - ширина большей полки;  
*b* - ширина меньшей полки;  
*d* - толщина стенки;  
*J* - момент инерции;  
*i* - радиус инерции;  
*x*<sub>0</sub>, *y*<sub>0</sub> - расстояние от центра тяжести до  
 внешних граней полк

Таблица В.3

Номер профиля	Размеры, мм			Площадь сечения, см <sup>2</sup>	<i>J<sub>x</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>x</sub></i> , см	<i>J<sub>y</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> , см	<i>J<sub>u min</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>u min</sub></i> , см <sup>4</sup>	Угол наклона оси <i>u</i> <i>tg α</i>	<i>J<sub>x1</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>J<sub>y1</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>x</i> <sub>0</sub> , см	<i>y</i> <sub>0</sub> , см	Масса 1 м, кг
	<i>B</i>	<i>b</i>	<i>d</i>													
2.5/1.6	25	16	3	1.16	0.7	0.78	0.22	0.44	0.13	0.3	0.392			0.42	0.86	0.91
3.2/2	32	20	3	1.49	1.52	1.01	0.46	0.55	0.28	0.43	0.382			0.49	1.08	1.17
			4	1.94	1.93	1.00	0.57	0.54	0.35	0.43	0.374			0.53	1.12	1.52
4/2.5	40	25	3	1.89	3.06	1.27	0.93	0.7	0.56	0.54	0.385			0.59	1.32	1.48
			4	2.47	3.93	1.26	1.18	0.69	0.71	0.54	0.381			0.63	1.37	1.94
			5	3.03	4.73	1.25	1.41	0.68	0.86	0.53	0.374			0.66	1.41	2.37
5/3.2	50	32	3	2.42	6.18	1.6	1.99	0.91	1.18	0.7	0.403			0.72	1.6	1.9

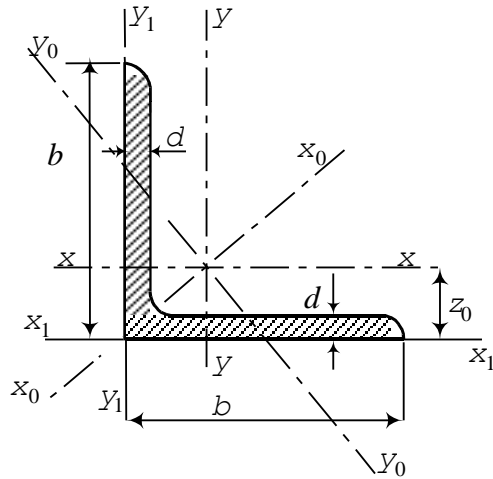
Продолжение таблицы В.3

Номер профи- ля	Размеры, мм			Пло- щадь сече- ния, см <sup>2</sup>	$J_x,$ см <sup>4</sup>	$i_x,$ см	$J_y,$ см <sup>4</sup>	$i_y,$ см	$J_{u\ min},$ см <sup>4</sup>	$i_{u\ min},$ см <sup>4</sup>	Угол наклона оси $u$  $tg\ \alpha$	$J_{x1}$ см <sup>4</sup>	$J_{y1}$ см <sup>4</sup>	$x_0,$ см	$y_0,$ см	Мас- са 1м, кг
	$B$	$b$	$d$													
5.6/3.6	56	36	4	3.58	11.4	1.78	3.7	1.02	2.19	0.78	0.406	23.2	6.25	0.84	1.82	2.81
			5	4.41	13.8	1.77	4.48	1.01	2.66	0.78	0.404	29.2	7.91	0.88	1.86	3.46
6.3/4	63	40	4	4.04	16.3	2.01	5.16	1.13	3.07	0.87	0.397	33.0	8.51	0.91	2.03	3.17
			5	4.98	19.9	2.00	6.26	1.12	3.72	0.86	0.396	41.4	10.8	0.95	2.08	3.91
			6	5.90	23.3	1.99	7.28	1.11	4.36	0.86	0.393	49.9	13.1	0.99	2.12	4.63
			8	7.68	29.6	1.96	9.15	1.09	5.58	0.85	0.386	66.9	17.9	1.07	2.20	6.03
7/4.5	70	45	5	5.59	27.8	2.23	9.05	1.27	5.34	0.98	0.406	56.7	15.2	1.05	2.28	4.39
7.5/5	75	50	6	7.25	40.9	2.38	14.6	1.42	8.48	1.08	0.435	83.9	25.2	1.21	2.44	5.69
			8	9.47	52.4	2.35	18.5	1.40	10.9	1.07	0.430	112	34.2	1.29	2.52	7.43
8/5	80	50	5	6.36	41.6	2.56	12.7	1.41	7.58	1.09	0.387	84.6	20.8	1.13	2.60	4.99
			6	7.55	49.0	2.55	14.8	1.40	8.88	1.08	0.386	102	25.2	1.17	2.65	5.92
9/5.6	90	56	5.5	7.86	65.3	2.88	19.7	1.58	11.8	1.22	0.384	132	32.2	1.26	2.92	6.17
			6	8.54	70.6	2.88	21.2	1.58	12.7	1.22	0.384	145	35.2	1.28	2.95	6.70
			8	11.18	90.9	2.85	27.1	1.56	16.3	1.21	0.380	194	47.8	1.36	3.04	8.77
10/6.3	100	63	6	9.59	98.3	3.20	30.6	1.79	18.2	1.38	0.393	198	49.9	1.42	3.23	7.53
			7	11.1	113	3.19	35.0	1.78	20.8	1.37	0.392	232	58.7	1.46	3.28	8.70
			8	12.6	127	3.18	39.2	1.77	23.4	1.36	0.391	266	67.6	1.50	3.32	9.87
			10	15.5	154	3.15	47.1	1.75	28.3	1.35	0.387	333	85.8	1.58	3.40	12.1

Продолжение таблицы В.3

Номер профи- ля	Размеры, мм			Пло- щадь сече- ния, см <sup>2</sup>	$J_x,$ см <sup>4</sup>	$i_x,$ см	$J_y,$ см <sup>4</sup>	$i_y,$ см	$J_{u\ min},$ см <sup>4</sup>	$i_{u\ min},$ см <sup>4</sup>	Угол наклона оси $u$  $tg\ \alpha$	$J_{x1}$ см <sup>4</sup>	$J_{y1}$ см <sup>4</sup>	$x_0,$ см	$y_0,$ см	Мас- са 1м, кг
	$B$	$b$	$d$													
11/7	110	70	6.5	11.4	142	3.53	45.6	2.00	26.9	1.53	0.402	286	74.3	1.58	3.55	8.98
			8	13.9	172	3.51	54.6	1.98	32.3	1.52	0.400	353	92.3	1.64	3.61	10.9
12.5/8	125	80	7	14.1	227	4.01	73.7	2.29	43.4	1.76	0.407	452	119	1.80	4.01	11.0
			8	16.0	256	4.00	83	2.28	48.8	1.75	0.406	518	137	1.84	4.05	12.5
			10	19.7	312	3.98	100	2.26	59.3	1.74	0.404	649	173	1.92	4.14	15.5
			12	23.4	365	3.95	117	2.24	69.5	1.72	0.400	781	210	2.00	4.22	18.3
14/9	140	90	8	18.0	364	4.49	120	2.58	70.3	1.98	0.411	727	104	2.03	4.49	14.1
			10	22.2	444	4.47	146	2.56	85.5	1.96	0.409	911	245	2.12	4.58	17.5
16/10	160	100	9	22.9	606	5.15	186	2.85	110	2.20	0.391	1221	300	2.23	5.19	18.0
			10	25.3	667	5.13	204	2.84	121	2.19	0.390	1359	335	2.28	5.23	19.8
			12	30.0	784	5.11	239	2.82	142	2.18	0.388	1634	405	2.36	5.32	23.6
			14	34.7	897	5.08	272	2.80	162	2.16	0.385	1910	477	2.43	5.40	27.3
18/11	180	110	10	28.3	952	5.80	276	3.12	165	2.42	0.375	1933	444	2.44	5.88	22.2
			12	33.7	1123	5.77	324	3.10	194	2.40	0.374	2324	537	2.52	5.97	26.4
20/12.5	200	125	11	34.9	1449	6.45	446	3.58	264	2.75	0.392	2920	718	2.79	6.50	27.4
			12	37.9	1568	6.43	482	3.57	285	2.74	0.392	3189	786	2.83	6.54	29.7
			14	43.9	1801	6.41	551	3.54	327	2.73	0.390	3726	922	2.91	6.62	34.4
			16	49.8	2026	6.38	617	3.52	367	2.72	0.388	4264	1061	2.99	6.71	39.1

### Уголки равнополочные (по ГОСТ 8509-93)



Обозначения:

- $b$  - ширина полки;
- $d$  - толщина стенки;
- $J$  - момент инерции;
- $i$  - радиус инерции;
- $z_0$  - расстояние от центра тяжести до внешних граней полки

Таблица В.4

Номер профиля	$b$	$d$	Площадь сечения, $\text{см}^2$	Справочные величины для осей								Масса 1 м длины профиля, кг
				$x-x$		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$	$z_0, \text{см}$	
				$J_x,$ $\text{см}^4$	$i_x,$ $\text{см}$	$J_{x_0 \max},$ $\text{см}^4$	$i_{x_0 \max},$ $\text{см}$	$J_{y_0 \min},$ $\text{см}^4$	$i_{y_0 \min},$ $\text{см}$	$J_{x_1},$ $\text{см}^4$		
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59		0,85	1,36
		4	2,27	1,84	0,90	2,92	1,13	0,77	0,58		0,89	1,78

Продолжение таблицы В.4

Номер профиля	b	d	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей								Масса 1м длины профиля кг
				x-x		x <sub>0</sub> -x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>	z <sub>0</sub> , см	
	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см		J <sub>x0 max</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x0 max</sub> , см	J <sub>y0 min</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y0 min</sub> , см	J <sub>x1</sub> , см <sup>4</sup>				
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
		4	2,43	2,26	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	1,91	
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69		0,97	1,60
		4	2,67	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68		1,01	2,10
		5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68		1,05	2,58
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	2,42
		5	3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17	2,97
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	2,08
		4	3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26	2,73
		5	4,29	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30	3,37
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42	3,77
		6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98		1,46	4,47
5,6	56	4	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30	1,52	3,44
		5	5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69	3,90
		5	6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
		6	7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78	5,72

Продолжение таблицы В.4

Номер профиля	$b$	$d$	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей								Масса 1м длины профиля кг
				$x-x$		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$	$z_0, \text{ см}$	
	$J_x,$ см <sup>4</sup>	$i_x,$ см		$J_{x0 \max},$ см <sup>4</sup>	$i_{x0 \max},$ см	$J_{y0 \min},$ см <sup>4</sup>	$i_{y0 \min},$ см	$J_{x1},$ см <sup>4</sup>				
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,50	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15	9,02
		9	12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18	10,10
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	94,0	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19	7,36
		7	10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23	8,51
		8	12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27	9,65
9	90	6	10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43	8,33
		7	12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47	9,64
		8	13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51	10,90
		9	15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55	12,20



Продолжение таблицы В.4

215

Номер профиля	$b$	$d$	Площадь сечения, $\text{см}^2$	Справочные величины для осей								Масса 1м длины профиля кг
				$x-x$		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$	$z_0, \text{ см}$	
	$J_x,$ $\text{см}^4$	$i_x,$ $\text{см}$		$J_{x0 \max},$ $\text{см}^4$	$i_{x0 \max},$ $\text{см}$	$J_{y0 \min},$ $\text{см}^4$	$i_{y0 \min},$ $\text{см}$	$J_{x1},$ $\text{см}^4$				
10	100	6,5	12,80	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	214,0	2,68	10,10
		7	13,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71	10,80
		8	15,60	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75	12,20
		10	19,20	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83	15,10
		12	22,80	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91	17,90
		14	26,30	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99	20,60
		16	29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06	23,30
11	110	7	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96	11,90
		8	17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00	13,50
12,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5

Продолжение таблицы В.4

Номер профиля	<i>b</i>	<i>d</i>	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей								Масса 1м длины профиля кг
				<i>x-x</i>		<i>x<sub>0</sub>-x<sub>0</sub></i>		<i>y<sub>0</sub>-y<sub>0</sub></i>		<i>x<sub>1</sub>-x<sub>1</sub></i>	<i>z<sub>0</sub></i> , см	
	<i>J<sub>x</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>x</sub></i> , см		<i>J<sub>x0 max</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>x0 max</sub></i> , см	<i>J<sub>y0 min</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>y0 min</sub></i> , см	<i>J<sub>x1</sub></i> , см <sup>4</sup>				
16	160	10	31,3	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8

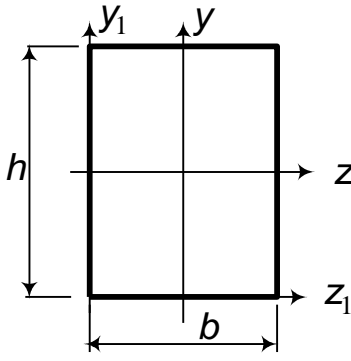
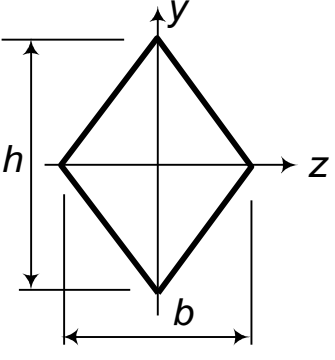
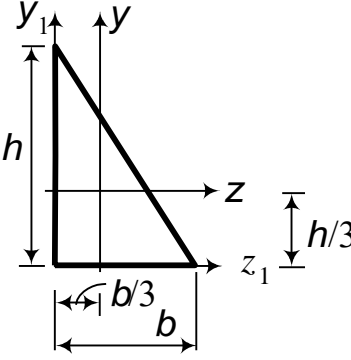
Продолжение таблицы В.4

Номер профиля	<i>b</i>	<i>d</i>	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей								Масса 1м длины профиля кг
				<i>x-x</i>		<i>x0-x0</i>		<i>y0-y0</i>		<i>x1-x1</i>	<i>z0, см</i>	
	<i>J<sub>x</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>x</sub></i> , см		<i>J<sub>x0 max</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>x0 max</sub></i> , см	<i>J<sub>y0 min</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>y0 min</sub></i> , см	<i>J<sub>x1</sub></i> , см <sup>4</sup>				
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	111,4

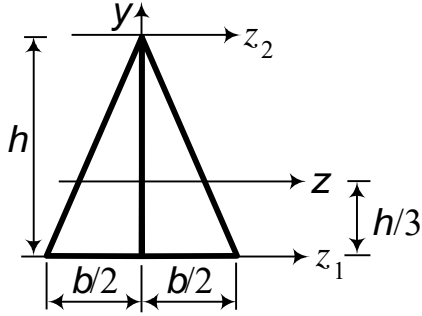
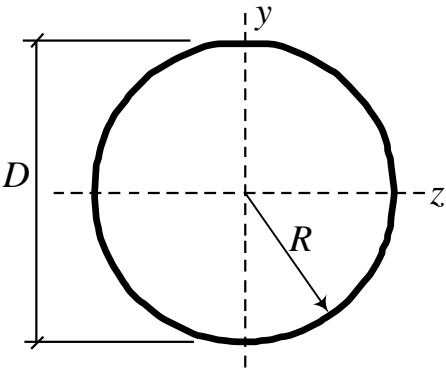
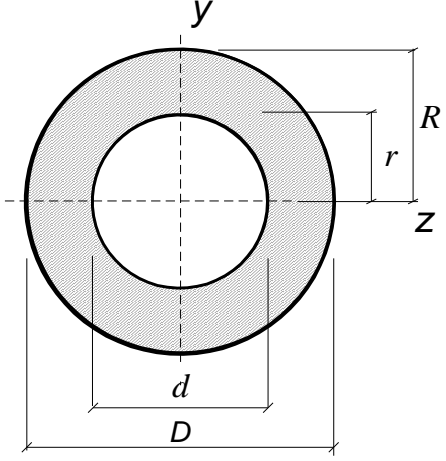
## ПРИЛОЖЕНИЕ Г

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ СЕЧЕНИЙ

Таблица Г.1

Сечение	Геометрические характеристики (z, y – центральные оси)
	$A = bh$ $J_z = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{b^3h}{12}$ $W_z = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{b^2h}{6}$ $J_{z_1} = \frac{bh^3}{3}; \quad J_{y_1} = \frac{b^3h}{3}$
	$A = \frac{bh}{2}$ $J_z = \frac{bh^3}{48}; \quad J_y = \frac{b^3h}{48}$ $W_z = \frac{bh^2}{24}; \quad W_y = \frac{b^2h}{24}$
	$A = \frac{bh}{2}$ $J_z = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{b^3h}{36}$ $J_{z_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{y_1} = \frac{b^3h}{12}$

Продолжение таблицы Г.1

Сечение	Геометрические характеристики ( $z, y$ – центральные оси)
	$A = \frac{bh}{2}$ $J_z = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{b^3h}{48}$ $J_{z_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{z_2} = \frac{bh^3}{4}$
	$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi R^2}{2}$ $J_z = J_y = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$ $W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{\pi R^3}{4}$ $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi R^3}{2}$
	$A = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) = \frac{\pi R^2}{2} (1 - \alpha^2)$ $\alpha = \frac{d}{D} = \frac{r}{R}$ $J_z = J_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^4}{4} (1 - \alpha^4)$ $W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^3}{4} (1 - \alpha^4)$ $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^3}{2} (1 - \alpha^4)$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Таблица Д.1 – Значения  $\sigma_T$ ,  $\sigma_{шц}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\lambda_{пред}$ ,  $\lambda_0$

Материал	$\sigma_T$	$\sigma_{шц}$	$a$	$b$	$\lambda_{пред}$	$\lambda_0$
	МПа					
Сталь Ст2	220	190	264	0,7	105	62
Сталь Ст3	240	200	310	1,14	100	61
Сталь 20, Ст4	260	220	328	1,11	96	60
Сталь 25, Ст5, 36Л	280	240	350	1,15	92	57
Сталь 35, 45Л	320	270	398	1,43	90	55
Сталь 45	360	305	449	1,67	85	52
Сталь 50, 55Л	380	320	473	1,87	82	50
Сталь 10Г2СД, 14Г2, 15ГС, 14ХГС, 15ХСНД	350	300	429	1,52	83	50
Сталь 30ХНА, 35ХМФА, 30ГСА	850	700	1000	5,57	55	28
Дюралюминий Д16Т	320	255	406	2,83	53	30
Дюралюминий Д6Т	280	220	300	1,43	57	15
Сосна, ель	-	-	29,3	0,194	70	-
Чугун СЧ 12-28, СЧ 15-32 и др.	-	-	-	-	80	10

Таблица Д. 2 – Значения коэффициентов  $\varphi$

Гибкость $\lambda = \frac{l_{пр}}{i}$	Сталь марок			Чугун марок		Дюралюминий Д16Т	Деревос (сосна, ель)	Сталь с расчетным сопротивлением $R=240\text{МПа}$ СНИП II-23-81
	Ст3 Ст4	Ст5	14Г2, 15ГС, 10Г2С, 10Г2СД, 15ХСНД	СЧ 12-28 СЧ 15-32 СЧ 18-36 СЧ 21-40	СЧ 24-44 СЧ 28-48			
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,999	0,99	0,987
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,998	0,97	0,962
30	0,95	0,93	0,92	0,81	0,75	0,835	0,93	0,931
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,700	0,87	0,894
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,568	0,80	0,852
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,455	0,71	0,805
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,353	0,61	0,754
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,269	0,49	0,686
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,212	0,38	0,612
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,172	0,31	0,542
110	0,52	0,43	0,39			0,142	0,25	0,478
120	0,45	0,37	0,33			0,119	0,22	0,419
130	0,40	0,32	0,29			0,101	0,18	0,364
140	0,36	0,28	0,25			0,087	0,16	0,315
150	0,32	0,25	0,23			0,076	0,14	0,276
160	0,29	0,23	0,21				0,12	0,244
170	0,26	0,21	0,19				0,11	0,218
180	0,23	0,19	0,17				0,10	0,196
190	0,21	0,17	0,15				0,09	0,177
200	0,19	0,15	0,13				0,08	0,161
210	0,17	0,14	0,12					0,147

## ПРИЛОЖЕНИЕ Е

### СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

Таблица Е.1 – Некоторые величины и их размерности  
в системе СИ

Величина		Размерность
Обозначение	Наименование	
$l$	Длина	м
$A$	Площадь	$\text{м}^2$
$J_z, J_y, J_{zy}, J_\rho$	Моменты инерции плоского сечения	$\text{м}^4$
$S_z, S_y$	Статические моменты плоского сечения	$\text{м}^3$
$W_z, W_y$	Моменты сопротивления плоского сечения	$\text{м}^3$
$i_z, i_y$	Радиусы инерции плоского сечения	м
$F$	Сила	Н
$M$	Момент силы	Нм
$q$	Распределенная нагрузка	Н/м, $\text{Н}/\text{м}^2$ , $\text{Н}/\text{м}^3$
$\gamma$	Удельный вес	$\text{Н}/\text{м}^3$
$A, U$	Работа и энергия	Дж = Нм
$W$	Мощность	Вт = Дж/с = Нм/с
$\sigma, \tau$	Напряжения	Па = $\text{Н}/\text{м}^2$
$E, G$	Модули упругости	Па = $\text{Н}/\text{м}^2$
$\mu$	Коэффициент Пуассона	Безразмерная
$\lambda$	Гибкость	Безразмерная

Таблица Е.2 – Приставки для образования кратных и  
дольных единиц

Приставка	Обозначение	Множитель
Гига	Г	$10^9$
Мега	М	$10^6$
Кило	к	$10^3$
Деци	д	$10^{-1}$
Сант	с	$10^{-2}$
Милли	м	$10^{-3}$
Микро	мк	$10^{-6}$