

МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра вагонів

Р.І. Візняк, А.О. Ловська, А.В. Рибін

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ ТА СТІЙКОСТІ
РУХОМОГО СКЛАДУ**

Конспект лекцій

Частина II

Харків 2014

Візняк Р.І., Ловська А.О., Рибін А.В. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу: Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2014. – Ч. II. – 40 с.

У конспекті лекцій викладено матеріал щодо особливостей складання диференціальних рівнянь руху механічних систем. Розглянуті різні типи механічних систем та особливості зв'язків, які можуть діяти на них. Наведено основні види коливальних рухів механічних систем з урахуванням збурюючої дії.

Рекомендовано для студентів усіх форм навчання спеціальності «Вагони та вагонне господарство».

Іл. 25, бібл.: 16 назв.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вагонів 4 листопада 2013 р., протокол № 4.

Рецензент

проф. І.Е. Мартинов

Р.І. Візняк, А.О. Ловська, А.В. Рибін

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ ТА СТІЙКОСТІ РУХОМОГО
СКЛАДУ

Конспект лекцій

Частина II

Відповідальний за випуск Ловська А.О.

Редактор Еткало О.О.

Підписано до друку 30.01.14 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,0. Тираж 75. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

Зміст

1 Вільні коливання при в'язкому опорі (вплив опору на вільні коливання лінійних систем з одним ступенем вільності.....	4
2 Методи складання диференціальних рівнянь руху.....	15
3 Вимушені коливання механічних систем.....	19
4 Крутильні коливання механічних систем.....	29
Список літератури.....	40

1 Вільні коливання при в'язкому опорі (вплив опору на вільні коливання лінійних систем з одним ступенем вільності)

Природа виникнення сил опору така. Розглянемо систему з коливаннями, які викликані одноразовим зовнішнім збуренням (рисунок 1).

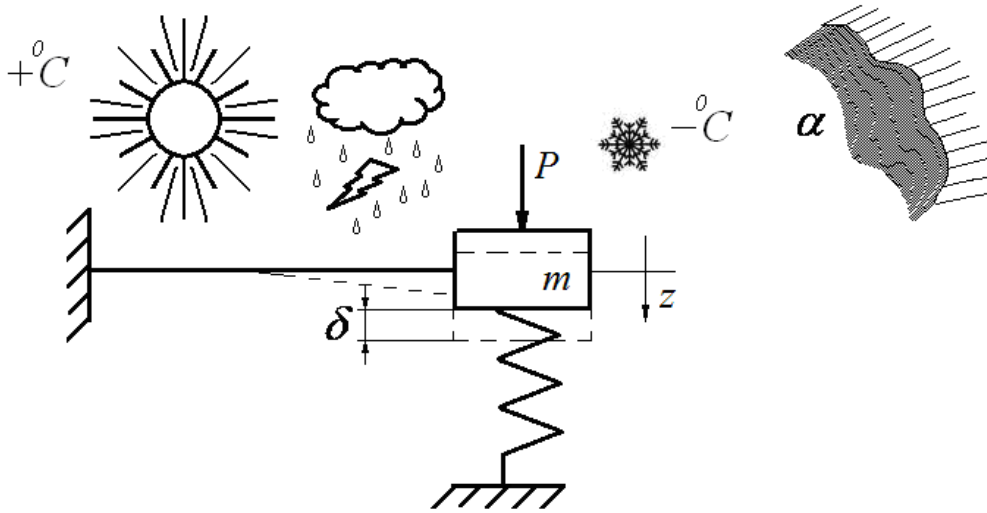


Рисунок 1 – Схема коливального руху системи

Після прикладення сили P виникають вільні коливання системи, які з часом згасають, причина згасання така: крім сил пружності $|cz|$ розвиваються дисипативні сили $F(t)$, тобто сили непружного опору, які розсіюють енергію коливальної системи, що виведена зі стану рівноваги. Ці сили пов'язані із незбідним тертям у кінематичних парах, з тертям з середовищем α , а також з внутрішнім тертям у матеріалі конструкції, яка коливається (на атомічному рівні кристалічної решітки матеріалу). На здолаання непружних опорів безперервно у зворотному напрямку витрачається робота, внаслідок чого повільно згасає загальний запас енергії та зменшуються розмахи коливань, амплітуда з плином часу, тобто $A \rightarrow 0$ (рисунок 2).

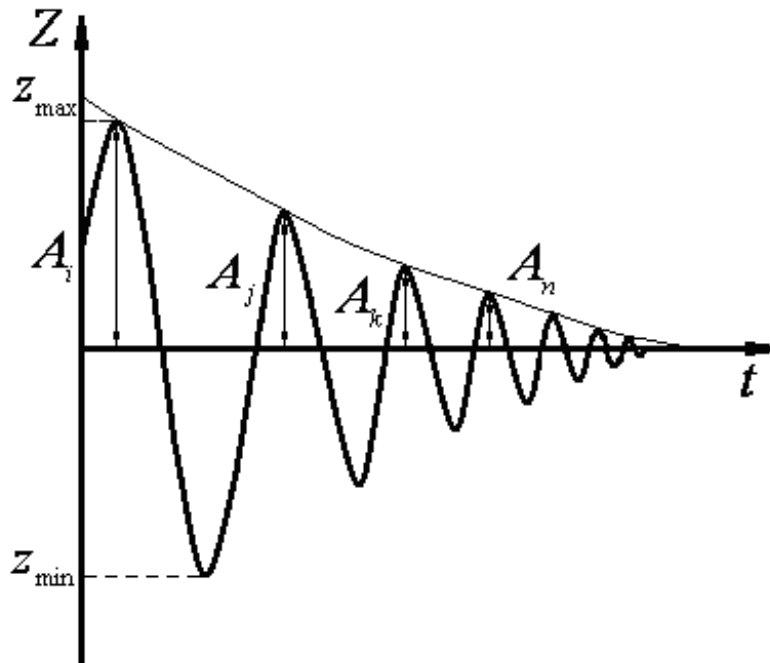


Рисунок 2 – Вільні коливання системи з характером згасання у часі

Якщо визначено, що опір прямо пропорційний 1-му ступеню швидкості, тоді силу опору (зокрема тертя) запишемо у такому вигляді:

$$R = -k\dot{\vartheta}, \quad (1)$$

де k – емпіричний коефіцієнт пропорційності, який визначається дослідним шляхом.

Як приклад розглянемо роботу простого механічного осцилятора коливального контуру (рисунок 3).

Поршень призначений для створення демпфірування (пневморесори). Сила демпфірування R буде визначатися так:

$$R = -k(d\dot{z}) . \quad (2)$$

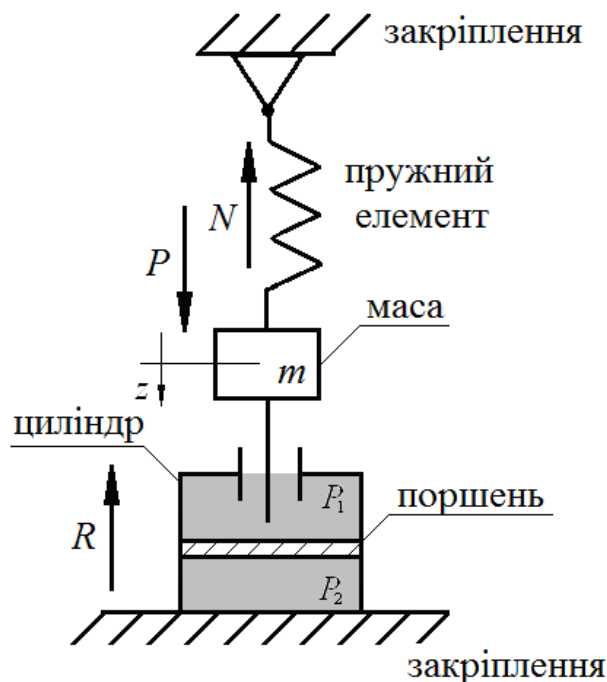


Рисунок 3 – Схема роботи механічного осцилятора

Сила демпфірування спрямована на гальмування руху. З урахуванням сили демпфірування R умова рівноваги набуває такого вигляду:

$$F + R + N = 0 \quad (3)$$

або

$$m\ddot{z} + d\dot{z} + cz = 0. \quad (4)$$

На відміну від простої системи, яка позбавлена демпфірування (наприклад, пружина ресорного підвішування (механічної частини візка)):

$$m\ddot{z} + cz = 0. \quad (5)$$

У кожному випадку демпфівальний вплив є функцією швидкості, позначимо її через $g(z') = a$, сили опору $f(z) = \frac{cz}{m}$ (4) після розділення його членів на коефіцієнт інерції m , рівняння руху осцилятора набуде такого вигляду:

$$\ddot{z} + g(\dot{z}) + f(z) = 0. \quad (6)$$

При тісному зв'язку сил демпфірування та відновлювальних сил у рівнянні руху раціонально записати:

$$\ddot{z} + f(z, \dot{z}) = 0. \quad (7)$$

Існує не тільки лінійне подання сил опору R , а й змішане, яке дає змогу розв'язувати більш складні задачі у такому вигляді:

$$R = -k\vartheta|\vartheta|^{n-1}, \quad (8)$$

де n – також постійна степе́ня, яка визначається експериментальним шляхом.

Наприклад,

при $n = 1$, $R = -k\vartheta|\vartheta|^{n-1} = -k\vartheta \Rightarrow R \approx \vartheta$ і характеристика тертя – пряма (рисунок 4, а);

$n = 0$, $R = -k\vartheta|\vartheta|^{n-1} = -k\frac{\vartheta}{\vartheta} = -k$ – кулонове тертя і характеристика тертя – гіпербола (рисунок 4, б);

$n = 2$, $R = -k\vartheta|\vartheta|^{n-1} = -k\vartheta^2$ – квадратичний опір і характеристика тертя – парабола (рисунок 4, в).

На рисунку 4, г наведена комбінована характеристика сухого тертя (суцільна пряма) з уточненням (пунктирна крива), згідно із законом Г. Амонтона – Ш. О. Кулона.

Для механічних систем із декількома ступенями вільності формулу (8) раціонально записати у матричному вигляді:

$$R^0 = -B\dot{q}$$

$$B = \begin{Bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{Bmatrix}, \quad (9) \quad R^0 = \begin{Bmatrix} R_1^0 \\ R_2^0 \\ \dots \\ R_n^0 \end{Bmatrix}; \quad \dot{q} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix};$$

де R^0 – вектор узагальнених сил опору;

\dot{q} – вектор узагальнених швидкостей;

B – матриця коефіцієнтів опору;

A – амплітуда переміщень.

При в'язкому терті в коливальній системі, що обумовлене наявністю в ресорному підвішуванні в'язкого лінійного демпфера, сили непружного опору R природно залежать від швидкості, тобто в кінцевому підсумку від частоти процесу деформування.

Це говорить про суттєву залежність площі петлі гістерезису * від швидкості руху (рисунок 5).

Петля гістерезису – це зв'язок між напруженням σ та відносними деформаціями ε у матеріалах і безпосередньо в конструкціях підвішування, який описується криволінійними гілками особливостей циклів навантаження та деформації конструкції, як і самого матеріалу, структура якого у віддаленні, навіть при існуванні малих амплітуд, відхиляється від відомого закону Р. Гука:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (10)$$

де E – модуль пружності матеріалу конструкції (для сталей, що застосовуються у вагонобудуванні, $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па).

Площу петлі гістерезису можна визначити за формулою Н. Н. Давіденкова

$$\psi = kA^{n+1}, \quad (11)$$

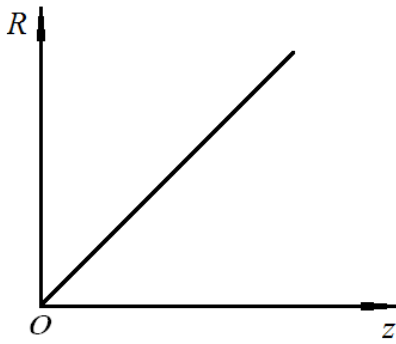
де $k_n - \text{const}$, які залежать від інтервалу й типу конструкції.

Те ж пов'язано і зі зв'язками між навантаженням P на ресорне підвішування ходової (екіпажної) частини вагона з внутрішнім тертям та відповідає переміщенню x . Причини гістерезисних явищ (рисунок 5) криються також відносно механічних систем, в опорах та нерухомих з'єднаннях (при застосуванні нарізних, зварних, болтових та інших).

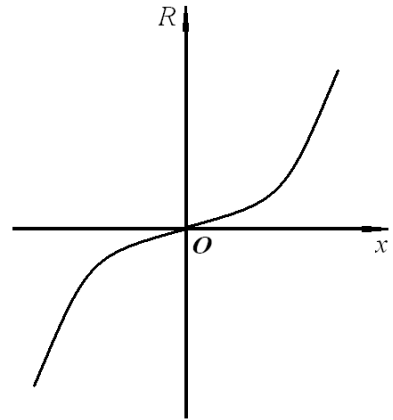
* *hysteresis* (від гр.) – відставання, запізнення при змінненні фізичної величини, що характеризує стан речовини.

а)

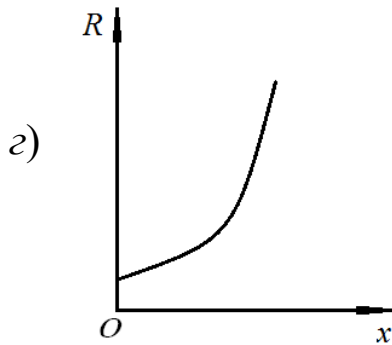
б)



б)



в)



г)

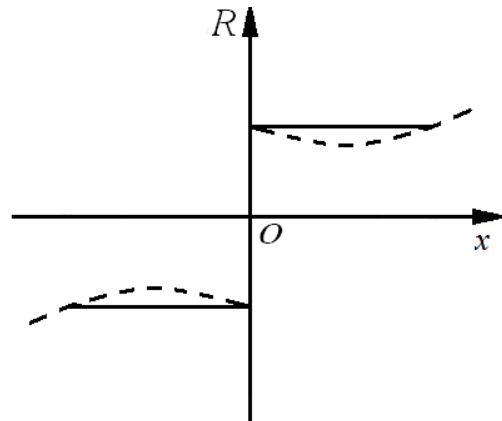
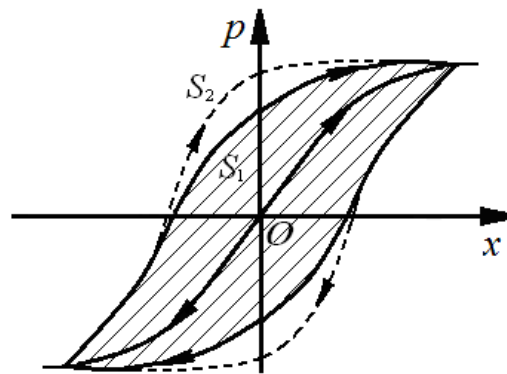


Рисунок 4 – Залежність сил демпфірування (дисипації) від переміщення точок системи



S_1, S_2 – відповідно площі петель гістерезисних явищ

Рисунок 5 – Гілки та петлі гістерезису з різними характеристиками запізнення

Розглянемо приклад системи з в'язким лінійним демпфером*, якій властива пропорційність між силами зв'язку опору та швидкостями їх змінення (рисунок 6).

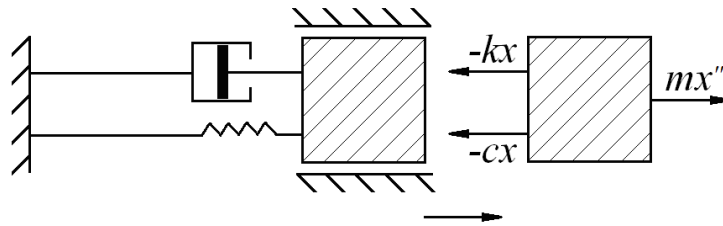


Рисунок 6 – Система з в'язким лінійним демпфером

Складемо диференціальні рівняння руху системи:

$$m\ddot{x} + cx + kx = 0 \quad \text{або} \quad m\ddot{x} = -cx - kx, \quad (12)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x + \frac{k}{m}\dot{x} = 0, \quad \text{де} \quad \frac{c}{m} = p^2,$$

позначимо $\frac{k}{2m} = n$,

де n – показник в'язкості системи, який не є показником степеня згідно з виразом (10).

$$\frac{c}{m} = p^2 \Rightarrow \ddot{x} + p^2x + 2n\dot{x} = 0,$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = 0. \quad (13)$$

Зазвичай необхідно намагатися проектувати ресорне підвішування, щоб виконувалося переважання квадрата частоти над в'язкістю системи, іншими словами, система не була передемпфірованою, а демпфірування сприяло змінному (поступовому) згасанню вільних коливань при великих значеннях амплітуд A .

* *Daempfer* (від нім.) – зменшувати, заглушувати.

Отже,

$$p = p^2 > n^2, \quad (14)$$

що характеризує випадок слабкого демпфірування.

Загальний розв'язок рівняння (13) має такий вигляд:

$$x = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{p^2 - n^2}t + \alpha), \quad (15)$$

де

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{g_0}{p}\right)^2} \text{ — амплітуда коливань;}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{px_0}{g_0}\right) \text{ — фаза коливань.}$$

Відомо, що

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad c_1 = \frac{g_0}{p}, \quad c_2 = x_0 \Rightarrow x = c_1 \sin pt + c_2 \cos pt,$$

$$x = A \sin(pt + \alpha).$$

Згідно з цим для даного випадку маємо кінцеві вирази:

$$A = \frac{\sqrt{x_0^2 + (g_0 + nx_0)^2}}{(p^2 - n^2)}, \quad (16)$$

$$\alpha = \arctg\left[\frac{(x_0 \sqrt{p^2 - n^2})}{(g_0 + nx_0)}\right], \quad (17)$$

або згідно з розв'язком у попередньому вигляді для вільних коливань без урахування опору гасника коливань:

$$x = x_0 \cos pt + \left(\frac{g_0}{p}\right) \sin pt. \quad (18)$$

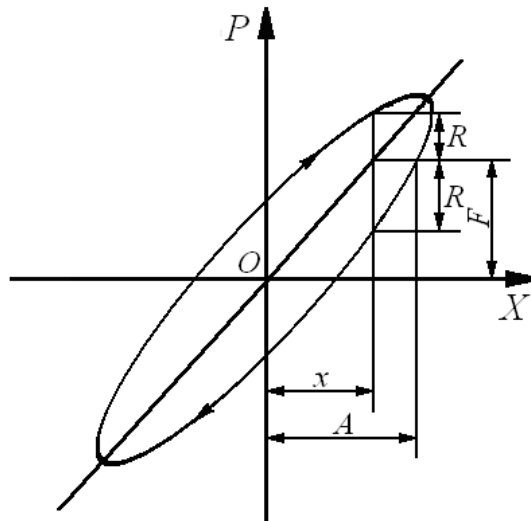
Розв'язок (15) остаточно запишемо у такому вигляді:

$$x = e^{-nt} \left[x_0 \cos \sqrt{p^2 - n^2} t + (g_0 + nx_0) \sin \frac{\sqrt{p^2 - n^2} t}{\sqrt{p^2 - n^2}} \right]. \quad (19)$$

На рисунку 7 наведена силова характеристика для системи з одним ступенем вільності з постановкою в'язкого лінійного демпфера.

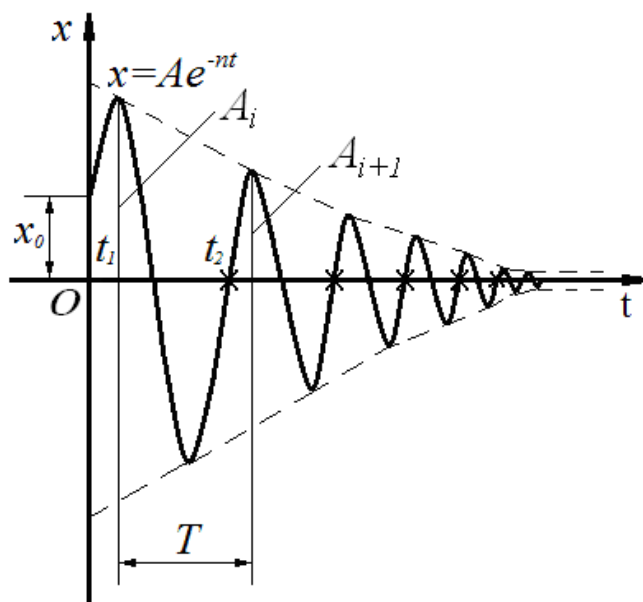
Відомо, що складова F відповідає закону Р. Гука, а складова R – наряду деформування, “+” – завантаження; “-” – розвантаження.

На рисунку 8 наведено графік згасання коливань, що характеризує роботу системи з розміщенням різноманітних в'язких демпферів.



P – сили опору; F – лінійна складова P ; R – непружна складова P ;
 A – амплітуда

Рисунок 7 – Силова характеристика системи з в'язким лінійним демпфером



t_i – час максимального відхилення

Рисунок 8 – Графік (характер) коливального процесу

Частота коливального процесу для гармонічних коливань може бути визначена за формулою

$$p_z^* = \sqrt{p^2 - n^2} . \quad (20)$$

Вирази для амплітуд послідовних хвиль циклу коливань можливо записати у такому вигляді:

$$A_1 = Ae^{-nt}; \quad A_2 = Ae^{-n(t_1+T)}; \quad A_3 = Ae^{-n(t_1+2T)}, \quad (21)$$

де e^{-nt} – експоненціальна (показникова) функція, що за наближенням характеризує згасання коливального процесу.

Період (не періодичність, а тривалість коливального циклу) визначається так:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - n^2}} - a ,$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_i}{A_{i+1}} = \dots = e^{nT} = \text{const}.$$

З урахуванням характерної геометричної прогресії при будь-якому i , а також відношенні послідовних циклових значень амплітуд переміщень маємо:

$$nT = \ln\left(\frac{A_i}{A_{i+1}}\right), \quad (22)$$

де nT – логарифмічний декремент* згасання коливань (характеристика дисипативних властивостей коливальної системи, швидкості згасання), тоді

$$\delta = nT. \quad (23)$$

Робота, яка здійснюється силою тертя $F_{\text{тр}}$ за час T , – це втрати енергії за один новий цикл. Відношення цих втрат до середнього значення енергії за цикл характеризує швидкість згасання коливань та імітується коефіцієнтом поглинання:

$$\varphi = 2nT = 2\delta. \quad (24)$$

Як видно, це вдвічі більше за δ .

Значення φ та δ визначаються конструкцією, матеріалом та іншими власними властивостями коливальної системи.

Також разом з δ та φ як характеристику дисипативних властивостей використовують величину γ – коефіцієнт втрат або коефіцієнт недружного опору, який визначається за формулою

$$\gamma = \frac{\delta}{\pi}. \quad (25)$$

* *decrementum* (від лат.) – зменшення.

Системи з комбінованими розв'язками пружного та в'язкого опору дають змогу отримати належні динамічні характеристики при русі вагонів та локомотивів у складі єдиного поїзда і тому відіграють суттєву роль у конструкції ресорного підвішування екіпажної частини рухомого складу.

2 Методи складання диференціальних рівнянь руху

Є система (рисунок 9), яка передає зовнішнє збурення X (сила бере участь у переміщенні).

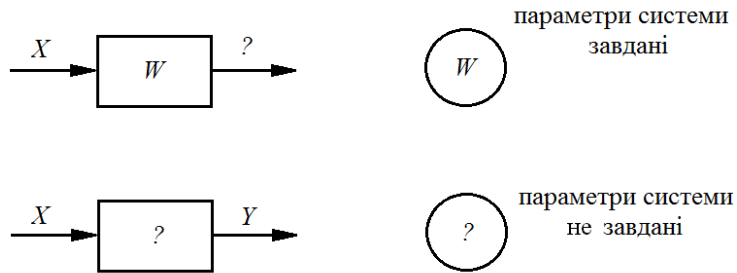


Рисунок 9 – Схема передачі зовнішнього збурення на систему

Згідно з основним законом динаміки рівняння руху у прагне до *min*, де y – вихідний параметр (відомий); необхідно визначити задані параметри системи.

1 Метод, заснований на використанні рівняння Жозефа Луї Ла-гранжа (1736 – 1813).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dq_i} \right) + \frac{dU}{dq_i} + \frac{d\Phi}{dq_i} = F_i. \quad (26)$$

Із загального рівняння динаміки

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^n = 0,$$

де $\sum A$ – сума активних та реактивних сил, які діють на систему.

З нього отримуємо принцип Даламбера-Лагранжа: при русі системи з ідеальними зв'язками в кожний даний момент часу сума елементарних робіт усіх прикладених активних сил та усіх сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи буде дорівнювати нулю.

$$\sum \left[(F_{kx}^a + F_{kx}^n) \delta x_k + (F_{ky}^a + F_{ky}^n) \delta y_k + (F_{kz}^a + F_{kz}^n) \delta z_k \right] = 0. \quad (27)$$

Ці два рівняння дають змогу скласти диференціальні рівняння руху будь-якої механічної системи.

За формулою (26):

T – кінетична енергія системи; $T = \sum \frac{mk\dot{q}_k^2}{2}$;

U – потенційна енергія системи; $U = \sum \frac{cz^2}{2}$;

Φ – функція дисипативних сил – розсіювання; $\Phi = cz + \beta\dot{z}$;

q_i – узагальнені координати (кількість узагальнених координат дорівнює кількості ступенів вільності системи), м;

\dot{q}_i – узагальнена швидкість, м/с;

F_i – узагальнена сила (активна), Н.

Кількість рівнянь, які входять до системи (26), визначається кількістю ступенів вільності механічної системи.

Основна задача динаміки в узагальнених координатах полягає в тому, щоб, знаючи F_i, F_j, F_r та початкові умови, знайти закон руху у вигляді визначеної узагальненої координати, як $f(t)$.

$q_1 = f_1(t), q_2 = f_2(t), q_s = f_s(t)$ – кінематичне рівняння руху системи в узагальнених координатах. T залежить від узагальненої швидкості \dot{q}_1 , що змінюється на \ddot{q}_1 при диференціюванні за t – лівих частин системи.

З цього випливає, що рівняння Лагранжа – звичайне диференціальне рівняння 2-го порядку відносно q_1, q_2, \dots, q_g ; $T = -U$

Для складання диференціальних рівнянь руху механічної системи необхідним є встановити число ступенів її вільності та обрати узагальнені координати;

скласти розрахункову схему (із зображенням передачі активних сил);

визначити узагальнені сили Q_i : $Q_i(j, k) = \sum F_k \frac{dr_k}{dq_1}$ для i, j, r – координат з правильним напрямком узагальнених переміщень;

визначити кінетичну енергію в абсолютному русі та виразити її через q_1 та \dot{q}_1 ;

визначити частинні похідні від кінетичної енергії за \dot{q}_1 та q_1 , підставити їх у рівняння (26).

З отриманих рівнянь, якщо відомі величини активних сил та початкові умови задані, інтегруванням можна знайти закон руху.

2 Метод, заснований на використанні принципу Жана Лерона Даламбера (1717 – 1783): сума всіх зовнішніх сил, які діють на тіло, дорівнює нулю.

Сила інерції точки (даламберова) визначається так:

$$F_k^n = -m_k \omega_k,$$

$$F_k^e + F_k^i + F_k^n = 0. \quad (28)$$

За другим законом Ісаака Ньютона (1643 – 1727)

$$m_k \omega_k = F_k^e + F_k^i,$$

де $m\omega = F^n \dots$.

Принцип Даламбера та другий закон Ньютона еквівалентні для визначення умов за прикладенням до системи сил інерції, система буде в рівновазі, що дасть змогу використовувати до неї рівняння статички, а не динаміки.

Перевага принципу: можливість використання добре відомих рівнянь рівноваги.

На підставі принципів можливих переміщень (Лагранжа) та Даламбера складається поєднуючий принцип Даламбера – Лагранжа: при русі системи з ідеальними зв'язками в кожний даний момент часу сума елементарних робіт усіх прикладених активних сил та всіх сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи буде дорівнювати нулю.

Приклад запису диференціальних рівнянь (рисунок 10).

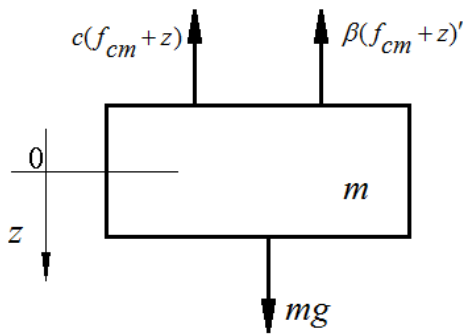


Рисунок 10 – Розрахункова схема

$$m\ddot{z} = \sum p_z ;$$

$$cf_{cm} = Q; \quad Q = mg; \quad cf_{cm} = mg ;$$

$$\beta z' = \beta(f_{cm} + z)' ;$$

$$m\ddot{z} = mg - c(f_{cm} + z) - \beta\dot{z} ;$$

$$m\ddot{z} = Q - Q - cz - \beta\dot{z} ;$$

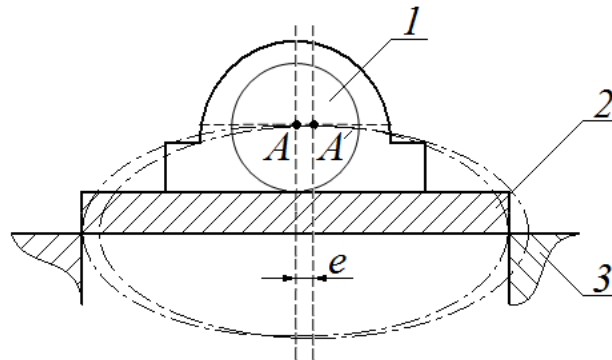
$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + cz = 0 ;$$

$$\sum p_z + F_{опору} + p = 0 .$$

3 Вимушені коливання механічних систем

Вимушені коливання пружних систем виникають при впливі на систему (протягом усього періоду коливань) заданих зовнішніх періодично змінних збурюючих сил, які діють безперервно, незалежно від коливань у системі. Характер процесу визначається як властивостями самої системи, так і

залежить від природи самої зовнішньої сили. Прикладом можуть бути електродвигуни з незрівноваженою масою, у яких період вимушених коливань $T_{в.к.}$ збігається з періодом змінення вимушеної сили $T_{з.в.с.}$, тобто $T_{в.к.} = T_{з.в.с.}$, що використовуються у різних галузях машинобудування, у тому числі і вагонному господарстві, та експлуатації систем життєзабезпечення пасажирських вагонів (рисунок 10).



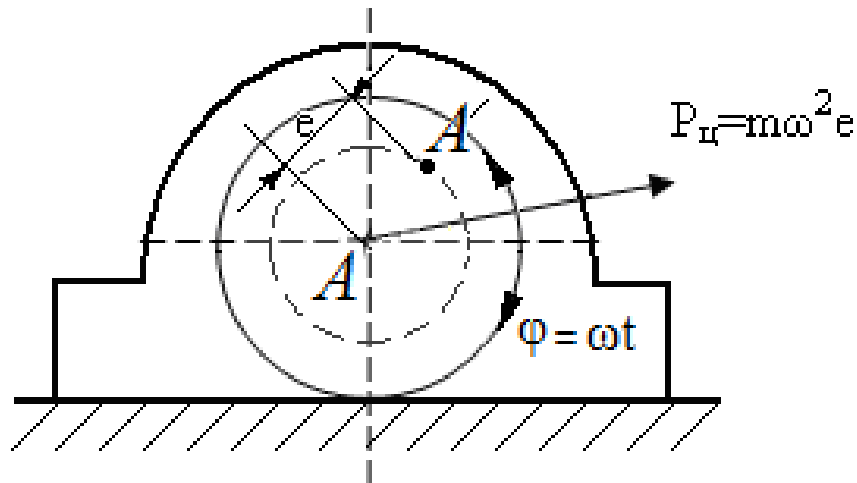
A' – центр мас незрівноваженого двигуна; A – центр мас зрівноваженого двигуна; e – зміщення ротора (ексцентриситет);
 1 – електродвигун; 2 – проміжна металоконструкція;
 3 – фундамент (жорстка опора)

Рисунок 11 – Електродвигун з незрівноваженою масою

Вимушені коливання на відміну від власних не згасають, але існують місце сили опору R (оскільки енергія, яка постійно підводиться, витрачається на подолання в системі сил опору R_i , які в ній є). Коли початкові частоти збурюючих сил близькі або збігаються з частотами власних коливань системи, вимушені коливання супроводжуються значними амплітудами, викликаючи недопустимі для конструкції деформації – резонанс*. Збурюючі сили задані у вигляді явних функцій $f(t)$ та не залежать від руху системи, до якої вони прикладені.

$$F = \{ \dots \} .$$

Наприклад, сили від обертут зрівноваженого ротора електродвигуна на фундамент привода машини (рисунок 12).

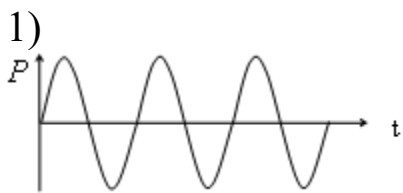


e – ексцентриситет; m – маса; ω – кутова швидкість; φ – кутове переміщення

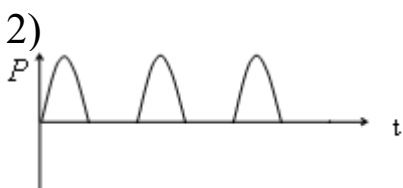
Рисунок 12 – Сили від обертання незрівноваженого ротора на фундамент машини

* *Резонанс* (від франц. *Resonance*, лат. *Resono* – відгукатися).

При цьому можуть виникати нижченаведені види коливальних рухів.

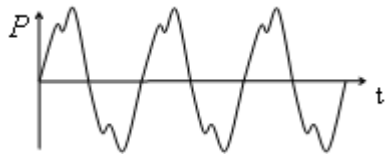


Гармонічні вимушені сили (в машинах з незрівноваженими роторами)



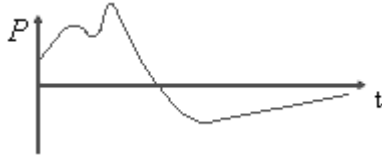
Періодичні вимушені сили (в машинах з кривошипно-шатунними та повзунковими механізмами)

3)



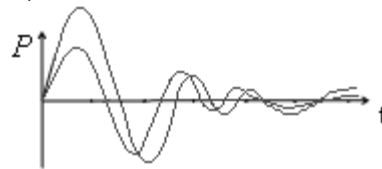
Періодичні короткочасні імпульси (у вібраційно-ударних, накладних, навісних та формувальних вібраторах для дорозвантаження вагонів)

4)



Неперіодичні вимушені сили (у двигунах, наприклад, прокатного стану)

5)



Імпульсно-вимушені сили (копрові пристрої, кувальні машини, машини для буровибухових робіт, кар'єрні екскаватори, грейферні ковші при зачерпуванні насипних вантажів, відбійні молоти, знесення старих будівель із залученням піротехніки та ін.)

Випадковий характер збурюючого збудження (вимушених) сил, простежується у таких випадках: наприклад, дія нерівностей рейкової колії на необресорені елементи вагона, шляху (автополотна) на колесо автомобіля, навантажень на виконуючі органи гірничних машин або грейферного механізму (ковша) на кузов напіввагона при вивантаженні вугілля та інших насипних вантажів.

Якщо на лінійну систему з одним ступенем вільності діє довільна задана узагальнена сила $P(t)$, то при відсутності опору узагальнене диференціальне рівняння вимушених коливань запишемо у такому вигляді:

$$a\ddot{q} + cq = P(t), \quad (29)$$

де a – коефіцієнт інерції;
 c – коефіцієнт жорсткості,
 або

$$\ddot{q} + p^2 q = \frac{P(t)}{a},$$

де p – власна частота системи, $p = \sqrt{\frac{c}{a}}$, $a \sim m_{\text{системи}}$.

Приклад 1 (рисунок 13)

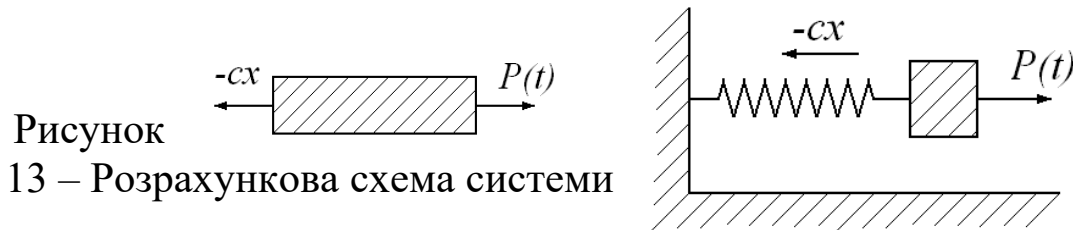


Рисунок
 13 – Розрахункова схема системи

При складанні диференціального рівняння руху системи перейдемо від узагальненої координати q та частоти P до дискретних величин x та P .

Диференціальне рівняння руху вантажу має такий вигляд:

$$P(t) - cx = m\ddot{x}, \quad (30)$$

де c – жорсткість пружини.

Схему переміщення елементів системи в повздовжньому напрямку наведено на рисунку 14.

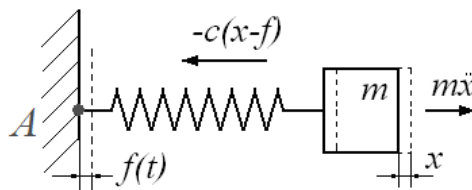


Рисунок 14 – Схема переміщення елементів системи в повздовжньому напрямку

Закон руху точки заданий у вигляді $f(t)$. Позначимо поточне переміщення точки в абсолютному русі через x . На вантаж масою m діє пружина (сила пружності) $-c(x-f)$, тоді $cf(t)$ – приведена вимушена сила, тобто $P(t) = cf(t)$, що приводить до основної форми (29). При кінематичному збудженні точки A закріплення пружини подовження пружини буде визначатися таким чином: $\Delta l = x - f$.

Тоді диференціальне рівняння руху можна записати у такому вигляді:

$$-c \cdot \Delta l = m\ddot{x},$$

або з урахуванням подальших перетворень:

$$-c(x-f) = m\ddot{x} ;$$

$$-cx + cf = m\ddot{x} ;$$

$$m\ddot{x} + cx = cf .$$

Остаточно диференціальне рівняння вимушених коливань системи буде мати такий вигляд:

$$\ddot{x} + p^2 x = \frac{cf(t)}{m} . \quad (31)$$

Приклад 2. Для розрахунку міцності пружин (у тому числі ресорного підвішування візка, а також пружних елементів поглинальних апаратів) викликає інтерес не абсолютний, а відносний рух вантажу. Позначимо x^* – відносне переміщення вантажу в системі координат, що зв'язаний з лівим кінцем пружини, тоді диференціальне рівняння руху можна записати у такому вигляді:

$$m\ddot{x}^* + cx^* = -m\dot{f} ,$$

де $m\dot{f}$ – переносна сила інерції вантажу.

Спрощуючи, маємо

$$\ddot{x}^* + p^2 x^* = -\ddot{f} . \quad (32)$$

Тобто кінематичне збудження завжди може бути замінено силовим.

Як відомо, у такому випадку загальний розв'язок цього рівняння дорівнює сумі загального розв'язку та частинного. Якщо позначити ω власну частоту коливань системи, то рівняння (31) може бути записано у такому вигляді:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = q \cos pt .$$

Тоді отримаємо

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t .$$

Проведемо математичне перетворення, знайдемо першу та другу похідну від x_q :

$$x_q = C \cos pt ;$$

$$\dot{x}_q = -pC \sin pt;$$

$$\ddot{x}_q = -p^2 C \sin pt .$$

Тоді після підстановки x_q та похідних значень \dot{x}_q і \ddot{x}_q маємо

$$-p^2 C \cos pt + \omega^2 C \cos pt = q \cos pt;$$

$$C(\omega^2 - p^2) = q .$$

Після нескладних перетворень отримаємо значення амплітуди коливань C :

$$C = \frac{q}{\omega^2 - p^2} .$$

Звідси загальний розв'язок рівняння матиме такий вигляд:

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{q}{\omega^2 - p^2} \cos pt \quad . \quad (33)$$

Перші два доданки правої частини рівняння (33) характеризують вільні коливання, які зазвичай швидко згасають. Доданок $\frac{q}{\omega^2 - p^2} \cos pt$ характеризує вимушені встановлені коливання системи, які відбуваються з частотою зовнішньої збурюючої сили. Амплітуда C вимушених коливань залежить від частоти вимушених коливань p . Статична деформація $x_{cm} = \frac{q \cos pt}{\omega^2}$ (враховуючи повільне змінення $P(t)$, тобто $p \rightarrow 0$ у порівнянні з ω , буде мати малі значення, якими можливо знехтувати). Тоді, після перетворень, остаточно:

$$\frac{c}{x_{cm}} = \frac{q}{\omega^2 - p^2} : \frac{q}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} = \beta$$

або

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{T^2}{T_1^2}} - \text{коефіцієнт наростання амплітуд,}$$

$$\text{де } T_1 = \frac{2\pi}{p}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

У випадку, коли $\frac{p}{\omega} \rightarrow 0, \beta \rightarrow 1$ та $c \approx x_{cm}$, але коли $p \rightarrow \omega$, тобто $\frac{p}{\omega} = 1$, тоді $c \rightarrow \infty$ (спостерігається явище резонансу, відповідна частота збурюючої сили у цьому випадку іменується критичною).

Графічна залежність динамічного коефіцієнта від відношення частот вільних та вимушених коливань наведена на рисунку 15.

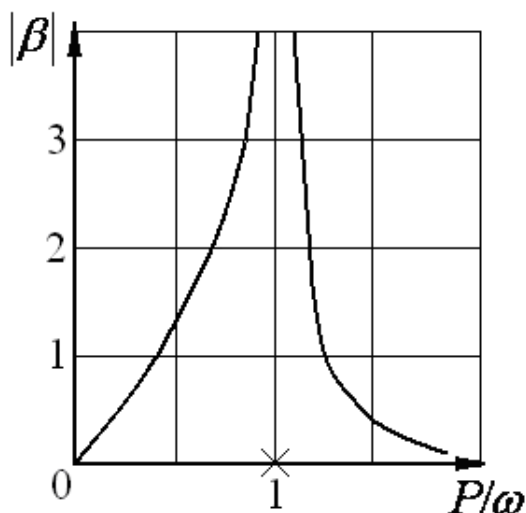


Рисунок 15 – Графічна залежність динамічного коефіцієнта від відношення частот вільних та вимушених коливань

При $p > \omega$ c зменшується, а при $p \gg \omega$ $c \ll x_{cm}$, маса вантажу може бути розглянута у відносному спокої.

При $p < \omega$ вимушені коливання та збурююча сила N перебувають в одній фазі, тобто зсув фаз $\alpha = 0$, при досягненні вантажем максимального відхилення збурююче зусилля $P(t)$ максимальне в цьому ж напрямку (рисунок 16).

При $p > \omega$ різниця у фазах вимушених коливань та збурюючої сили становить величину $\alpha = \pi$ (рисунок 17), тобто коливання відбуваються у протифазі зі збурюючою силою (це означає, що в той час, коли збурююча сила має максимальне значення у напрямку праворуч, вантаж, який коливається, досягає свого максимального відхилення ліворуч). Введемо початкові умови: $t_0 = 0; x = 0; \dot{x} = 0$, тобто $(x)_{t=0} = 0; (\dot{x})_{t=0} = 0$, тоді з (33)

$A = -\frac{q}{\omega^2 - p^2}$, далі беремо першу похідну й остаточно отримаємо:

$$\dot{x} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t - \frac{q}{\omega^2 - p^2} \sin pt ;$$

$$x = -\frac{q}{\omega^2 - p^2} \cos \omega t + \frac{q}{\omega^2 - p^2} \cos pt ;$$

$$x = \frac{q}{\omega^2 - p^2} (\cos pt - \cos \omega t) . \quad (34)$$

З початку дії збурюючої сили виникають вимушені та вільні коливання однієї амплітуди. Якщо $\omega \rightarrow p$, то відбувається биття (рисунок 18). Вважаючи, що $\omega - p = 2\Delta$, вираз (34) при $\Delta = \frac{\omega - p}{2}$ матиме такий вигляд:

$$x = -\frac{2q}{\omega^2 - p^2} \sin \frac{(p + \omega)t}{2} \sin \frac{(p - \omega)t}{2} = -\frac{2q}{\omega^2 - p^2} \sin(-\Delta)t \sin \frac{(p + \omega)t}{2} = \frac{2q \sin t \Delta}{\omega^2 - p^2} \sin \frac{(p + \omega)t}{2}. \quad (35)$$

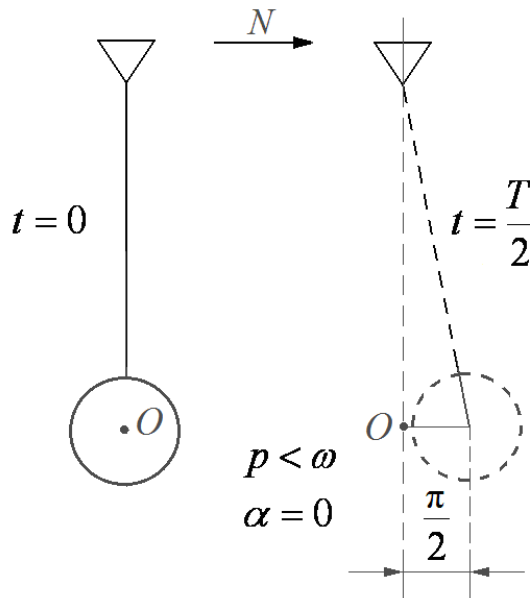


Рисунок 16 – Коливання маятника в одній фазі зі збурюючим фактором

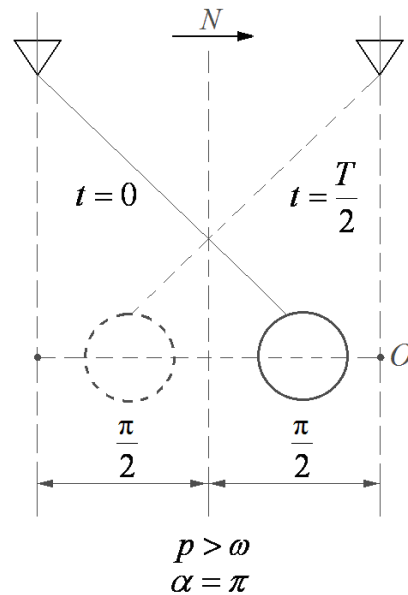


Рисунок 17 – Коливання маятника в протифазі зі збурюючим фактором

При $p = \omega$, період биття $T_b \rightarrow \infty$, при $p \rightarrow \omega$, $\Delta \rightarrow 0$ запишемо вираз (35) у такому вигляді:

$$x = \frac{2qt\Delta}{2\Delta(\omega + p)} \sin \frac{(p + \omega)t}{2} = \frac{qt}{2p} \sin pt ; \quad (36)$$

$$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{p+\omega}{2}\right)} = \frac{4\pi}{p+\omega} \text{ (рисунок 16).}$$

$$a = \frac{2q}{\omega^2 - p^2} \sin t\Delta, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\Delta}$$

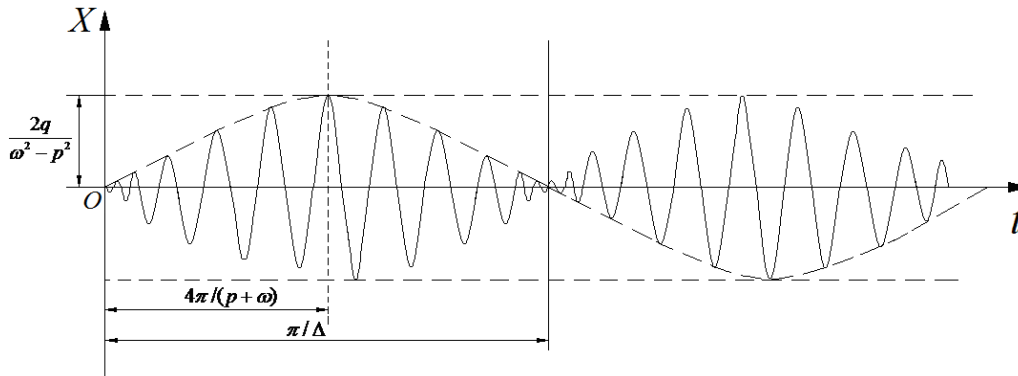


Рисунок 18 – Коливання биття

Вираз (36) справедливий тільки при відсутності сил опору в системі, що насправді не є можливим. Але вивченню коливань биття і їх характеристик, як перехідних процесів, та автоколивань механічних систем у майбутньому необхідно приділяти більш ретельну увагу.

4 Крутильні коливання механічних систем

Як відомо з класичної механіки та опору матеріалів, кручення – це вид деформації, при якому у поперечних перерізах бруса виникають крутні моменти, як силові фактори. Кручення виникає у брусах, валах, осях колісних пар, гвинтових пружинах, стабілізуючих пристроях, торсіонах машин і вагонів та інших елементах конструкцій. Зазвичай кручення відносно цих елементів конструкції відбувається при їх навантаженні зовнішніми скручувальними моментами (парами сил), площини дії яких перпендикулярні до його повздовжньої осі. При розрахунку валів часто величини зовнішніх скручувальних моментів визначають за величиною потужності, що

споживається, та швидкості руху вала. Крутні моменти, які виникають у поперечних перерізах брусів, валів, пружин, визначають за величинами зовнішніх моментів скручувальних з використанням методу перерізів (рисунок 19, *a*).

Крутний момент у будь-якому поперечному перерізі бруса (на ділянці між зовнішніми моментами) за величиною дорівнює зовнішньому моменту $|M_1| = |M_2|$

У більш складних випадках, коли до бруса прикладено декілька зовнішніх моментів, крутний момент у поперечному перерізі будь-якої ділянки бруса неоднаковий (рисунок 19, *б*).

На підставі методу перерізів крутний момент у довільному поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх скручувальних моментів, що прикладені до бруса за одним боком від перерізу, який розглядається.

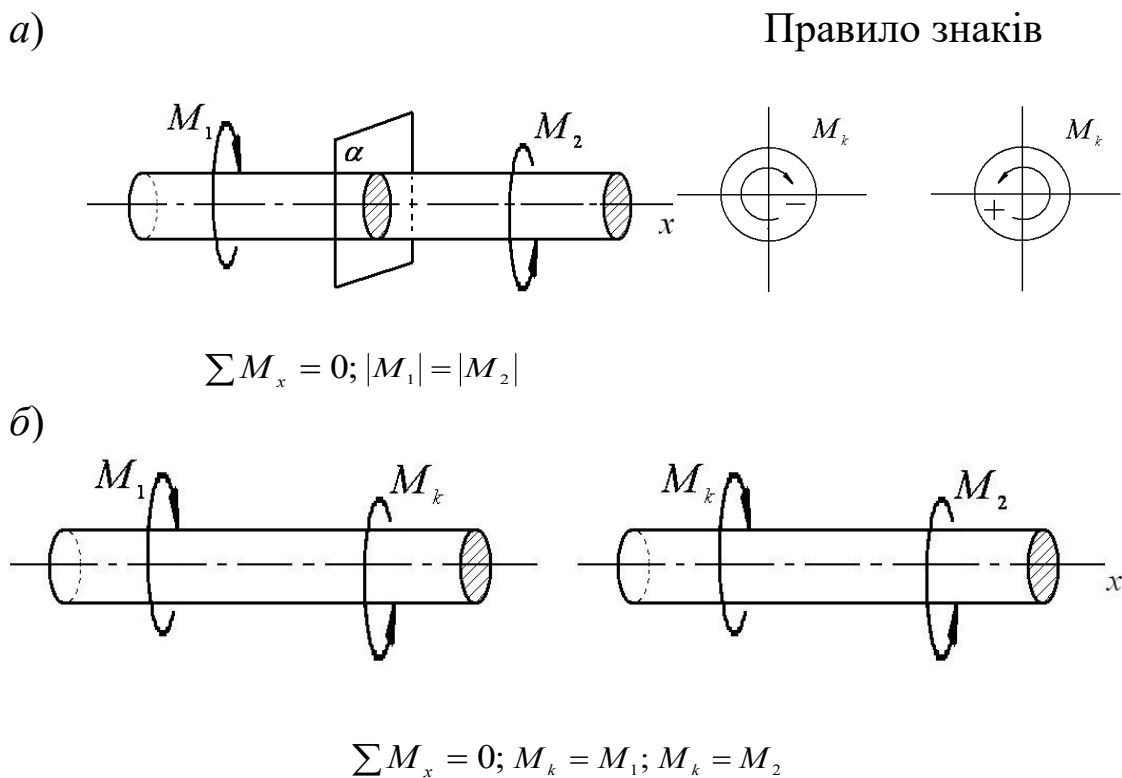


Рисунок 19 – Дія крутних моментів на вал

Така епюра крутних моментів вала для прикладу наведена на рисунку 20.

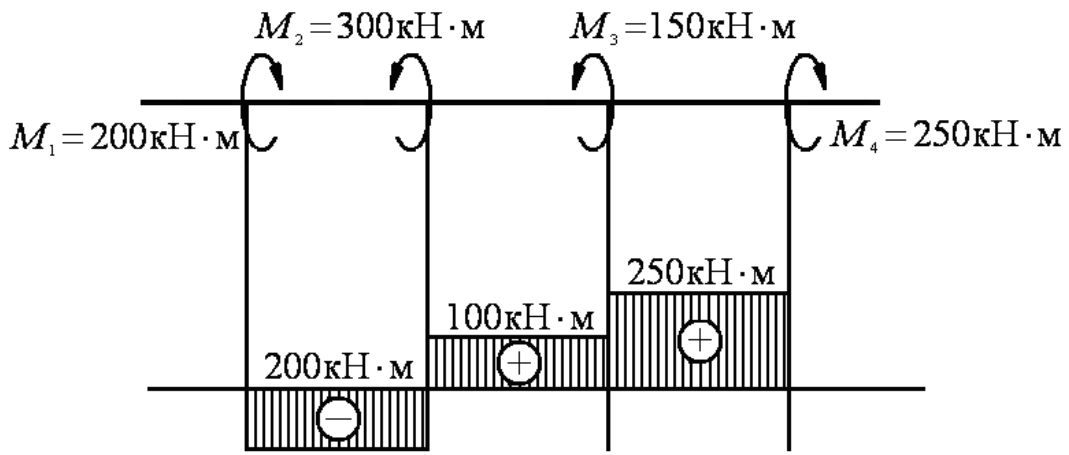
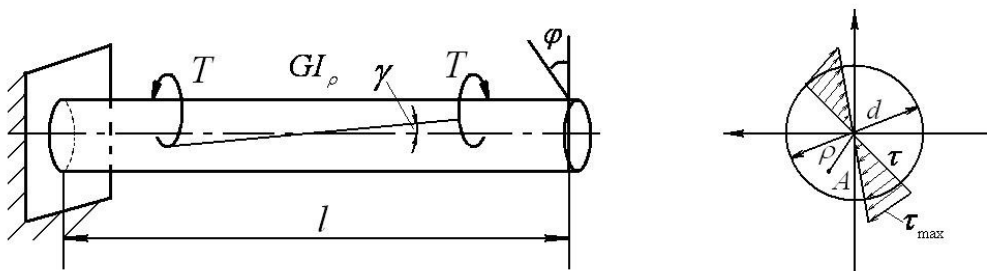


Рисунок 20 – Епюра крутних моментів

Крутний момент, що діє на брус, який зацмлений, наведений на рисунку 21.



γ – відносний зсув волокон матеріалу, $\gamma = \vartheta \cdot \rho$

Рисунок 21 – Крутний момент, що діє на брус, який зацмлений

Відносний кут закручування бруса визначається за формулою

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx}, \quad (37)$$

де $d\varphi$ – повний кут закручування (оберту), град.;

dx – ділянка довжини бруса, м.

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} \cdot l}{G \cdot I_{\rho}}, \quad (38)$$

де G – модуль зсуву матеріалу бруса, Н/м^2 ;

I_{ρ} – полярний момент інерції, м^4 .

Радіус кривизни ρ від дослідної точки A до центра визначається за формулою

$$\rho d\varphi = \rho \vartheta dx ; \quad (39)$$

$$\gamma = \vartheta \rho .$$

Тоді момент скручувальний у поперечному перерізі бруса визначаємо за формулою

$$M_k = \vartheta GI_p .$$

Для визначення дотичних напружень τ проведемо нескладні математичні перетворення:

$$\vartheta = \frac{M_k}{GI_p}, \Rightarrow \tau = \frac{M_k}{GI_p} \cdot \rho G = \frac{M_k}{I_p} \rho,$$

де GI_p – жорсткість перерізу при скручуванні, Н·м².

$$\tau = \gamma G = \vartheta \rho G$$

Максимальні дотичні напруження визначаються так:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (40)$$

де W_p – полярний момент опору, м³.

Згідно із [16], відомо, що до круглого поперечного перерізу можна записати:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4 .$$

Тоді

$$W_p = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{2I_p}{d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3 . \quad (41)$$

Потенційна енергія U деформації при крученні за всією площею визначається так:

$$U = \frac{M_k^2 \cdot l}{2GI_\rho} . \quad (42)$$

Якщо брус змінний за довжиною:

$$U = \sum_i \int \frac{M_k^2 \cdot l}{2GI_\rho} . \quad (43)$$

Умова міцності при крученні має вигляд $\tau_{\max} \leq [\tau]$, тобто порівняння максимальних та припустимих дотичних напружень.

Вали, крім зусиль на кручення, сприймають деформацію згину, тому при розрахунку на кручення допустиму величину $[\tau]$ знижують на $20 \div 40$ МПа. Для бруса постійного перерізу непружним є переріз, де $\tau = \max$. Великі кути закручування вала особливо небезпечні при передачі їм змінних у часі моментів, оскільки при цьому виникають небезпечні для його міцності крутильні коливання. Вали повинні бути при цьому розраховані на міцність та жорсткість.

Бруси некруглого поперечного перерізу сприймають депланацію, на відміну від круглих, які залишаються плоскими після деформації.

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k} ,$$

де I_k – геометрична характеристика;

W_k – коефіцієнт опору при скручуванні.

$$W_k = \frac{I_k}{b} = \frac{hb^2}{3} ; \quad (44)$$

$$I_k = \frac{h \cdot b^3}{3} . \quad (45)$$

Для тонкостінного стрижня відкритого профілю некруглого (прямокутного) поперечного перерізу криволінійний (некруглий)

переріз доцільно спрощувати на кількість n прямокутних елементів.

Перейдемо до вивчення крутильних коливань механічних систем.

Розглянемо систему, що складається з абсолютно жорсткого диска, який закріплений на пружному стрижні, враховуючи, що він безмасовий (рисунок 22).

Відновлювальний момент створюється дотичними напруженнями τ_1, τ_2 у поперечному перетині стрижня та коефіцієнтом жорсткості:

$$c = \frac{GI_p}{l}, \quad (46)$$

де l – довжина стрижня, м.

Розглянемо двомасову систему. Процес коливань відбувається таким чином. Нехай на диску діє відносна деформація. Тоді згідно з рівнянням Ж. Л. Лагранжа енергетичний баланс запишемо у такому вигляді:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{q}} \right) - \frac{dT}{dq} = \frac{d\Pi}{dq}; \quad (47)$$

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2; \quad (48)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c (\varphi_2 - \varphi_1)^2, \quad (49)$$

де T і Π – відповідно кінетична та потенційна енергія, Дж.

Момент сил пружності вала запишемо за формулою

$$M_{\text{пруж}} = c(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (50)$$

Нехай на диски діють рівні та протилежно спрямовані пари скручувальні (рисунок 23), які за час $t_0 = 0$ миттєво зникають.

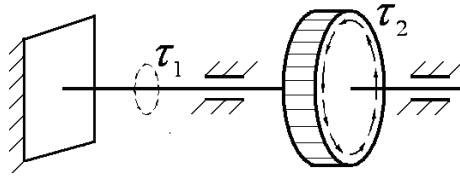


Рисунок 22 – Стрижне-дискова умовна система

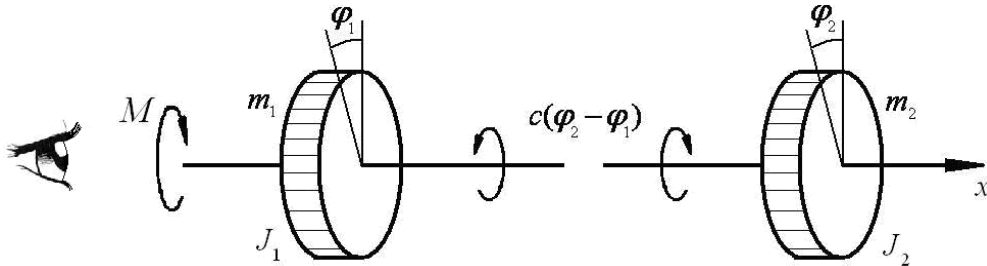


Рисунок 23 – Дія крутних моментів на диски

Для деякого моменту часу $t_0 > 0$ кут $\varphi = \varphi_1$ та $\varphi = \varphi_2$, так що відносно $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Момент сил пружності вала $M_{\text{пруж}}$ діє на кожний з дисків, I_1 та I_2 – момент інерції дисків вала. Запишемо диференціальне рівняння руху:

$$I\ddot{\varphi} + c\varphi = 0 \quad (51)$$

Враховуючи, що система наведена двома тілами, запишемо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} I_1\ddot{\varphi}_1 - c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0; \\ I_2\ddot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0. \end{cases} \quad (52)$$

Аналогія знаків залишається як при повздовжніх, так і поперечних силах пружності, оскільки пружний момент діє і на другий диск, спрямований за ходом годинникової стрілки (від'ємний момент).

Поділивши перше рівняння на I_1 , а друге на I_2 та віднявши перше рівняння з другого, отримуємо:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 - \frac{c}{I_1}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0; \\ \ddot{\varphi}_2 - \frac{c}{I_2}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0; \end{cases}$$

$$\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 - \frac{c}{I_1}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{c}{I_2}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 ;$$

$$\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 = \left(\frac{c}{I_1} - \frac{c}{I_2} \right) (\varphi_2 - \varphi_1) .$$

Введемо в рівняння відносний кут φ дисків $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Тоді рівняння набуде вигляду:

$$\ddot{\varphi} - \left(\frac{c}{I} \right) \varphi = 0 .$$

Якщо припустити, що $I = \frac{I_1 I_2}{(I_1 + I_2)}$, то власну частоту будемо шукати у вигляді $p = \sqrt{\frac{c(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$ з урахуванням $m_1 + m_2 = m$.

$$p = \sqrt{\frac{c(I_1 + I_2)}{m I_1 I_2}} . \quad (53)$$

Результат не зміниться, якщо, окрім пружних коливань, відбувається оберт системи як жорсткого цілого. Деякий проміжний переріз – вузол коливань – не бере участі у коливальному процесі, для його визначення врахуємо, що в процесі власних коливань зовнішні моменти відсутні, отже, в будь-який час $\sum I \ddot{\varphi} = 0$ двох дисків відносно осі вала,

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 - I_2 \ddot{\varphi}_2 = 0 . \quad (54)$$

Позначимо через A_1 та A_2 амплітуди кутових переміщень, отримаємо прискорення:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -A_1 p^2 \sin(pt + \alpha); \\ \ddot{\varphi}_2 &= -A_2 p^2 \sin(pt + \alpha); \end{aligned} \quad (55)$$

$$I_1 A_1 + I_2 A_2 = 0,$$

звідки $\frac{A_1}{A_2} = -\frac{I_2}{I_1}$, тоді відношення амплітуд дисків зворотно-пропорційне відношенню моментів, знак “-” означає, що відхилення відбувається $I_1 A_1 = -\frac{I_2}{A_2}; \frac{A_1}{A_2} = -\frac{I_2}{I_1}; -\frac{A_1}{A_2} = \frac{I_2}{I_1}$.

Епюру крутних моментів, які діють на двомасову систему, наведено на рисунку 24.

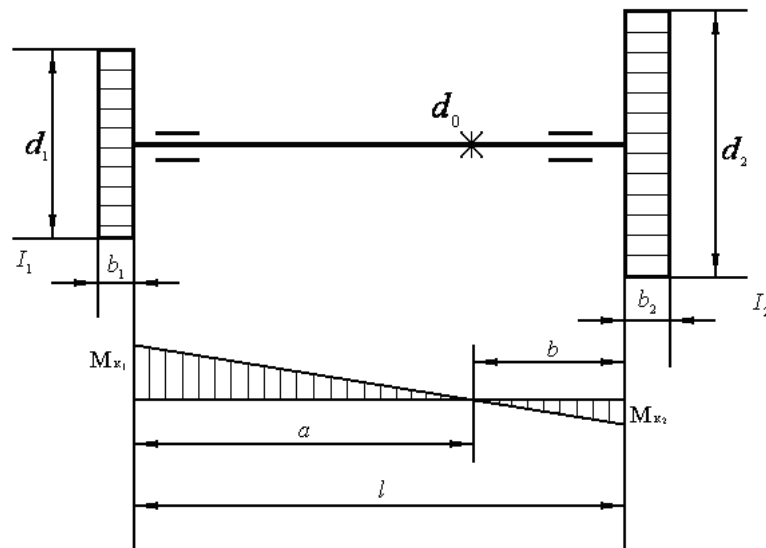


Рисунок 24 – Епюра крутних моментів, які діють на двомасову систему

Відстань від вузла коливань до кінців вала:

$$(I_1 + I_2)a = I_2 l; \quad a = \frac{I_2 l}{(I_1 + I_2)}; \quad b = I_1 l / (I_1 + I_2); \quad (56)$$

$$\frac{I_1 + I_2}{I_2} = \frac{l}{a}; \quad I_1 + I_2 \cdot b = I_2 \cdot l;$$

$$\frac{I_1}{I_2} + 1 = \frac{l}{a}; \quad 1 + \frac{I_2}{I_1} = \frac{l}{b};$$

$$I_1 = \left(\frac{l}{a} - 1\right) I_2; \quad I_2 = \left(\frac{l}{b} - 1\right) I_1;$$

$$I_1 = I_2 \frac{l}{a} - I_2; \quad I_2 = I_2 \frac{l}{b} - I_1.$$

Складемо систему диференціальних рівнянь для чотиримасової системи, що наведена на рисунку 25.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{q}} \right) - \frac{dT}{dq} = \frac{d\Pi}{dq};$$

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} (h \dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{2} I_4 \dot{\varphi}_4^2 ;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2} c_{34} (\varphi_4 - h \varphi_2) ;$$

$$n = \frac{K_2}{K_3}; \quad \varphi_3 = -n \varphi_2 ;$$

$$(57) \quad \begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 - c_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \\ (I_2 + n^2 I_3) \ddot{\varphi}_2 + c_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) + c_{34} n (\varphi_4 + n \varphi_2) = 0, \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 + c_{34} n (\varphi_4 + n \varphi_2) = 0. \end{cases}$$

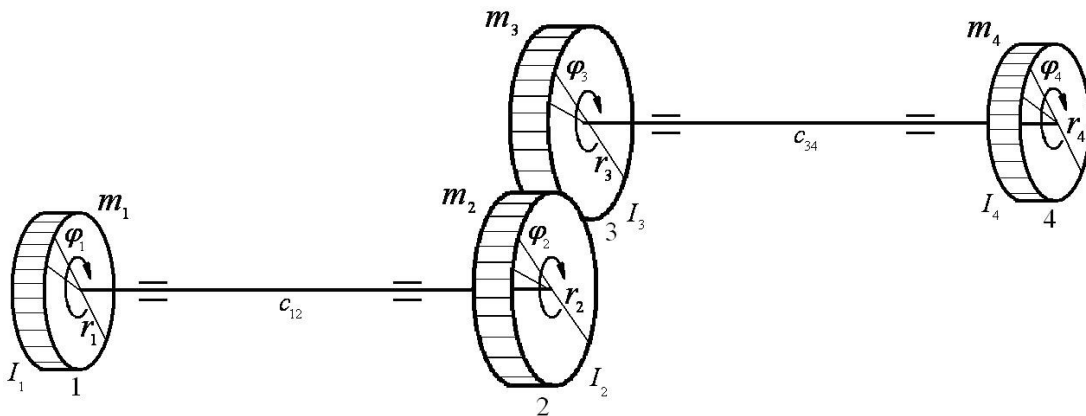


Рисунок 25 – Чотиримасова коливальна система

Також слід зауважити, що у подібному режимі працюють торсіонні механізми кришок люків восьмивісних вагонів, поворотальних та стабілізуючих пристроїв візків сучасних пасажирських вагонів та ін.

Список літератури

- 1 Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Политехника, 1990. – 272 с.
- 2 Пановко Я.Г., Губанова Н.Н. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
- 3 Магнус Курт. Колебания: Введение и исследования колебательных систем. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
- 4 Лазарян В.А. Динамика вагонов. – М.: Трансжелдориздат, 1964. – 255 с.
- 5 Вершинский С.В., Данилов В.Н., Челноков И.И. Динамика вагона. – М.: Транспорт, 1978. – 352 с.
- 6 Трофимова Т.Н. Физика в таблицах и формулах. – М.: Дрофа, 2004. – 432 с.
- 7 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1968. – 478 с.
- 8 Яблонский А.А. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1984. – 423 с.
- 9 Вайнберг Д.В., Писаренко Г.С. Механические колебания и их роль в технике. – М.: Наука, 1965. – 276 с.
- 10 Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
- 11 Стрелков, С.П. Введение в теорию колебаний. – СПб.: Лань, 2005. – 440 с.
- 12 Алфутов Н.А., Колесников К.С. Устойчивость движения и равновесия. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 256 с.
- 13 Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
- 14 Лукин В.В., Шадур Л.А., Котуранов В.Н. и др. Конструирование и расчет вагонов; Под ред. В.В. Лукина. – М.: УМК МПС России, 2000. – 731 с.
- 15 Советский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1986. – 1600 с.
- 16 Писаренко Г. С. Соппротивление материалов / Под ред. Г. С. Писаренко. – К.: Вища шк., 1986. – 775 с.

