

**МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра механіки і проектування машин**

**О.В. Оробінський, Н.А. Аксьонова**

**ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

**Частина 1**

**Харків – 2014**

Оробінський О.В., Аксьонова Н.А. Технічна механіка:  
Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2014. – Ч. 1. – 77 с.

Конспект лекцій призначено для студентів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей факультету УПП. За об'ємом конспект охоплює першу частину курсу та є основною складовою частиною методичного забезпечення роботи студентів при вивченні дисципліни «Технічна механіка».

Іл. 79, табл. 1, бібліогр.: 8 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри механіки і проектування машин 26 грудня 2012 р., протокол № 7.

Рецензент  
проф. О.В. Братченко

О.В. Оробінський, Н.А. Аксьонова

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Частина 1

Відповідальний за випуск Оробінський О.В.

Редактор Ібрагімова Н.В.

---

Підписано до друку 14.05.13 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 5,5. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,  
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра “Механіка і проектування машин”

# **ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА**

**Конспект лекцій**

**Частина 1**

Харків 2013 р.

Оробінський О.В., Аксьонова Н.А. Технічна механіка: Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2013. – Ч. 1. – 77 с.

Конспект лекцій призначено для студентів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей факультету УПП. За об'ємом конспект охоплює першу частину курсу та є основною складовою частиною методичного забезпечення роботи студентів при вивченні дисципліни «Технічна механіка».

Іл. 79, табл. 1, бібліогр.: 8 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Механіка і проектування машин” 26 грудня 2012 р., протокол № 7.

Рецензент  
доц. О.В. Братченко

## ЗМІСТ

Вступ.....	6
1 Основні поняття та аксіоми статички.....	7
1.1. Основні поняття та визначення.....	7
1.2 Аксіоми статички.....	9
1.3 Опори та їх реакції.....	10
2 Система збіжних сил.....	13
2.1 Теорема про три сили.....	13
2.2 Теорема про рівнодійну системи збіжних сил.....	13
2.3 Умови рівноваги системи збіжних сил.....	14
3 Момент сили відносно точки .....	14
3.1 Момент сили відносно точки як алгебраїчна величина.....	14
3.2 Вектор-момент сили відносно точки.....	15
3.3 Теорема Варіньона (про момент рівнодійної).....	16
4 Теорія пар сил.....	17
4.1 Три теореми про пару сил.....	17
4.2 Теореми про еквівалентність пар сил.....	18
4.3 Умови рівноваги системи пар сил.....	19
5 Довільна плоска система сил.....	19
5.1 Теорема про паралельне перенесення сили (метод Пуансо) .....	20
5.2 Приведення довільної системи сил до даного центра. ....	20
5.3 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил.....	21
5.3.1 Геометричні умови рівноваги.....	21
5.3.2 Аналітичні умови рівноваги.....	21
6 Тертя ковзання.....	22
6.1 Закони тертя ковзання (закони Амонтона – Кулона).....	22
6.2 Тертя кочення.....	24
7 Довільна просторова система сил.....	25
7.1 Момент сили відносно осі.....	25

7.2	Теорема про залежність моментів сили відносно осі і точки, що належить цій осі.....	26
7.3	Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил.....	26
8	Система паралельних сил.....	26
8.1	Додавання двох паралельних сил, спрямованих в один бік.....	26
8.2	Додавання двох паралельних сил, спрямованих у різні боки.....	27
8.3	Теорема про рівнодійну.....	27
8.4	Центр ваги твердого тіла.....	28
8.5	Способи визначення положення центра ваги.....	29
8.5.1	Метод симетрії.....	29
8.5.2	Метод фрагментів.....	32
8.5.3	Метод від'ємних площин.....	32
9	Наука про розрахунки на міцність деталей машин.....	33
9.1	Основні поняття.....	33
9.2	Основні форми елементів конструкцій.....	33
9.3	Основні гіпотези опору матеріалів.....	34
10	Розтяг і стиск.....	35
10.1	Напруження та деформації.....	35
10.2	Умова міцності при розтягу (стиску).....	37
10.3	Випробування матеріалів на розтяг. Діаграма розтягу.....	38
10.4	Допустиме напруження.....	41
10.5	Побудова епюри подовжної сили.....	42
10.6	Розрахунок стержня на міцність.....	44
10.7	Напруження в довільному перерізі.....	45
11	Розрахунки на зріз.....	46
11.1	Деформація зсуву.....	46
11.2	Умова міцності на зріз.....	48
11.3	Розрахунок на зріз зварного з'єднання.....	51
12	Кручення стержней.....	53
12.1	Напруження і деформації.....	53

12.2 Побудова епюри крутного моменту. Розрахунок вала на міцність.....	58
13 Згин прямих стержнів.....	61
13.1 Внутрішні зусилля при згині.....	63
13.2 Побудова епюри $Q$ і $M_u$ .....	64
13.3 Диференціальні залежності при згині.....	68
13.4 Нормальні деформації і напруження при згині.....	69
13.5 Дотичні напруження при згині.....	73
13.6 Розрахунок на міцність при згині.....	74
13.7 Згин з крученням прямих круглих валів.....	75
Список літератури.....	77

## ВСТУП

Навчальними планами для студентів факультету управління процесами перевезень (УПП) передбачено вивчення дисципліни «Технічна механіка», яка є складовою загальноінженерної підготовки майбутніх фахівців залізничного транспорту.

Дисципліна «Технічна механіка» будується на об'єднанні головних розділів базових інженерних наук таких, як теоретична механіка, опір матеріалів, деталі машин, теорія механізмів і машин. Це дозволяє сформувавши у студентів комплексний всебічний підхід до проблем проектування механічних вузлів, тобто вирішувати питання міцності, компоновання та погоджування складових частин функціональних приладів.

Кредитно-модульна система навчання передбачає підвищення ролі самостійної роботи студентів. Тому вивчення дисципліни «Технічна механіка» супроводжується послідовним виконанням індивідуальних розрахункових завдань і курсової роботи. Обмеженість обсягів лекційних занять обумовила необхідність створення конспекту лекцій, спрямованого на поліпшення якості і продуктивності самостійної роботи студентів. Аналізуючи труднощі, що виникають у студентів при вивченні курсу, автори дійшли висновку відступити від звичайної послідовності викладання матеріалу. Тому дана навчально-методична розробка містить виключно розділи, які найбільш наближені до змісту індивідуальних завдань для студентів.



# 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА АКсіОМИ СТАТИКИ

**Статика** – це розділ теоретичної механіки, у якому вивчають методи перетворення заданих систем сил на еквівалентні системи, але більш спрощені, і встановлюють умови рівноваги сил, прикладених до твердого тіла.

## 1.1 Основні поняття та визначення

**Абсолютно тверде тіло** – тіло, у якому відстань між двома довільними його точками залишається незмінною. Вважаючи тіла абсолютно твердими, не враховують деформації, що виникають у реальних тілах.

**Кінематичний стан тіла** – стан спокою або руху певного характеру, у якому тіло може знаходитись.

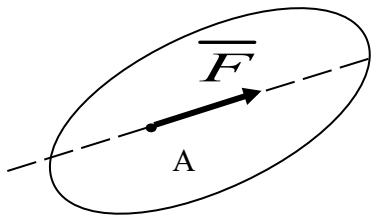


Рисунок 1

**Сила** – це векторна величина, яка є мірою механічної взаємодії тіл і визначає інтенсивність і напрямок цієї взаємодії (рисунок 1). Одиницею вимірювання сили в системі СІ є ньютон (1 Н).

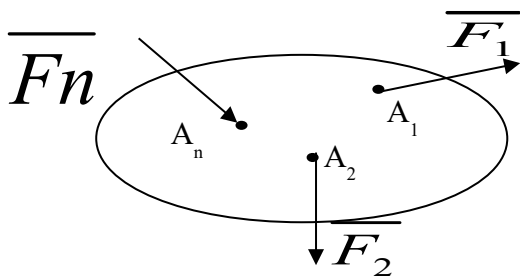


Рисунок 2

**Система сил** – це сукупність сил, що діють на тіло.  $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n\}$  або  $\{\overline{F}_k\}$ , де  $k = 1, 2, \dots, n$  (рисунок 2).

**Еквівалентними системами сил** називаються такі дві системи  $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n\}$  і  $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots, \overline{P}_k\}$ , кожен з яких можна замінити іншою, не порушуючи кінематичного стану твердого тіла:

$$\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n\} \infty \{\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots, \overline{P}_k\}.$$

**Рівнодійна** системи сил – це сила  $\bar{R}$ , яка еквівалентна системі сил  $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\}$

$$\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\} \infty \bar{R}.$$

**Зрівноважена система сил** – це система сил, яка еквівалентна нулю.

$$\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\} \infty \bar{R} \infty 0.$$

Під дією зрівноваженої системи сил тіло знаходиться в рівновазі.

### Види сил

**Активна сила** – це сила, яка намагається порушити рівновагу тіла.

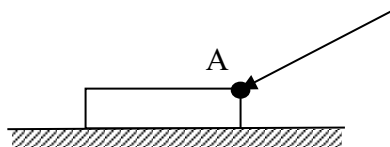


Рисунок 3

**Зосереджена сила** – це сила  $\bar{Q}$ , прикладена до тіла в будь-якій одній його точці (рисунок 3).

**Розподілені сили** – це сили, що діють на всі точки тіла (масові, об'ємні) чи на всі точки певної частини поверхні тіла (поверхневі) (рисунок 4).

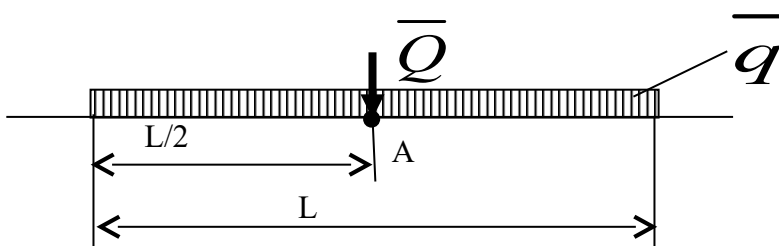


Рисунок 4

$$Q = L \cdot q,$$

де  $q$  – інтенсивність поверхневих сил, Н/м;  
 $Q$  – рівнодійна поверхневих сил, Н.

### Основні задачі статyki

1 Приведення системи сил, діючої на тіло, до еквівалентної спрощеного вигляду.

2 Визначення умов рівноваги системи сил, діючої на тіло.

## 1.2 Аксиоми статички

Аксиоми відображають властивості сил, діючих на тіло.

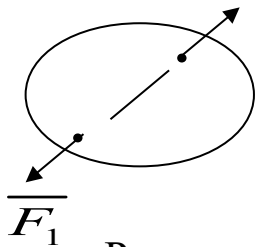


Рисунок 5

### Аксиома рівноваги двох сил

Дві сили будуть зрівноважені, якщо вони рівні за модулем і спрямовані протилежно вздовж однієї прямої (рисунок 5).

$$\{\overline{F}_1, \overline{F}_2\} \infty 0, \quad \overline{F}_1 = -\overline{F}_2, \quad |F_1| = |F_2|.$$

### Аксиома додавання та вилучення зрівноваженої системи сил

Дія даної системи сил  $\{\overline{F}_k\}$  на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або вилучити будь-яку зрівноважену систему сил  $\{\overline{P}_n\} \infty 0$ :

$$\{\overline{F}_k\} \infty \{\overline{F}_k, \overline{P}_n\}.$$

**Наслідок.** Не порушуючи кінематичного стану тіла, силу можна переносити вздовж її лінії дії в будь-яку точку (рисунок 6).

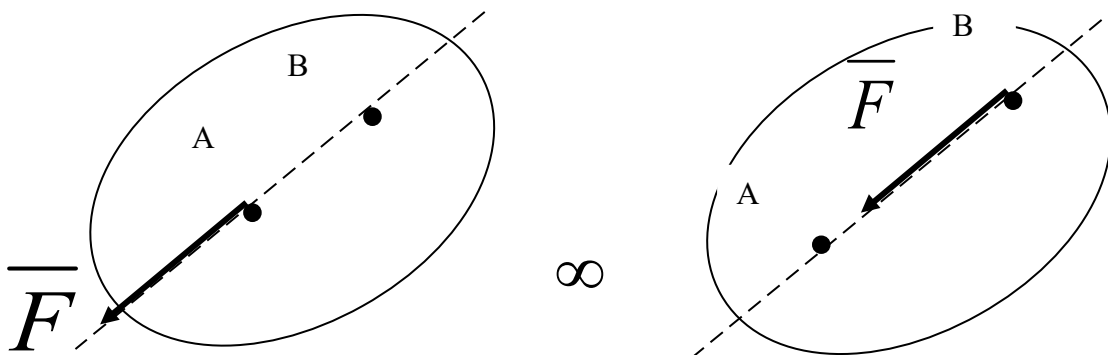


Рисунок 6

### Аксиома додавання двох сил

Рівнодійна двох сил, які прикладені в одній точці, відповідає діагоналі паралелограма, побудованого на векторах цих сил (рисунок 7).

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \infty \overline{R}, \quad \overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2, \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

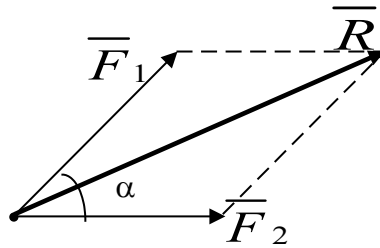


Рисунок 7

### 1.3 Опори та їх реакції

**Опори** – це спеціальні конструкції, вузли, які забезпечують рівновагу тіла під дією заданої системи активних сил  $\{\overline{F}_k\}$ .

Основні види зв'язків наведено в таблиці 1.

**Реакції опори** – це сили, що виникають на опорі у напрямках, у яких опора обмежує свободу переміщення тіла  $\{\overline{R}_i\}$ . Тіло знаходиться в рівновазі під дією активних сил  $\{\overline{F}_k\}$  і реакцій опор  $\{\overline{R}_i\}$ , тобто  $(\overline{F}_k, \overline{R}_i) \infty 0$ .


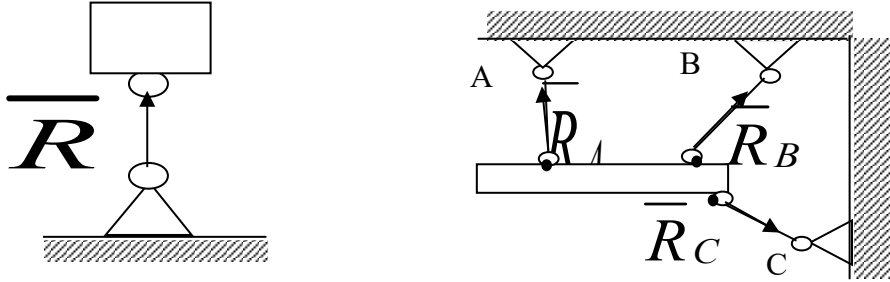
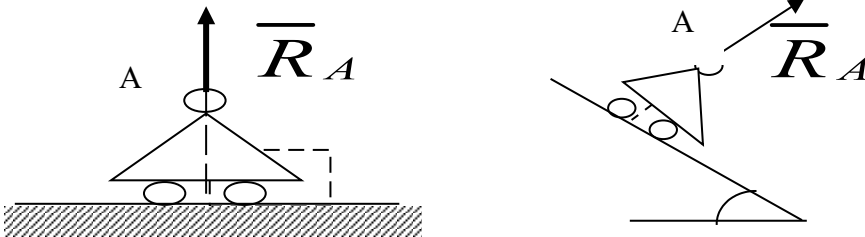
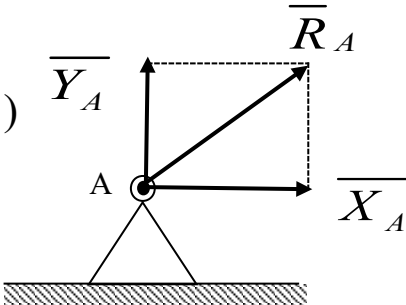
**Метою розв'язування** практичної задачі статичної є визначення векторів реакцій опор  $\{\overline{R}_i\}$  залежно від заданої системи активних сил  $\{\overline{F}_k\}$ .

Таблиця 1 – Основні види опор

1	2
1	<p><i>Ідеальна (гладенька) поверхня</i> (реакція <math>\overline{N}</math> перпендикулярна до поверхні)</p>

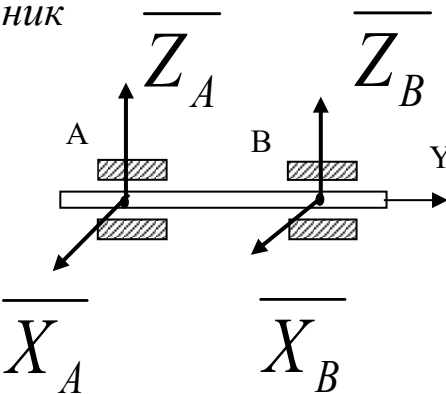
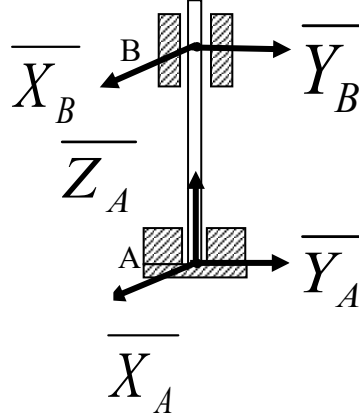
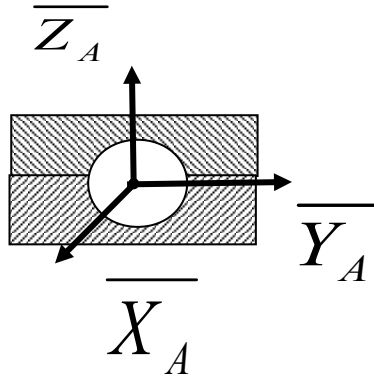
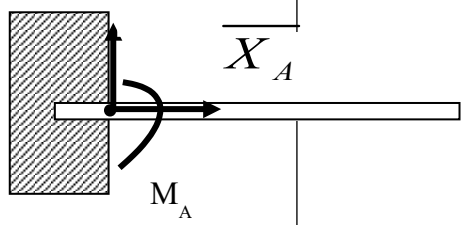
Продовження таблиці 1

1	2
---	---

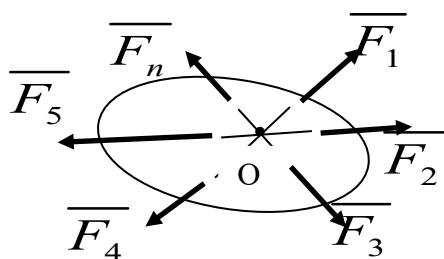
2	<p><i>Ідеальна нитка (реакція <math>\bar{R}</math> спрямована вздовж нитки, троса)</i></p> 
3	<p><i>Ідеальний стержень (реакція <math>\bar{R}</math> спрямована вздовж стержня)</i></p> 
4	<p><i>Шарнірно – рухома опора (опора на котках) (реакція <math>\bar{R}_A</math> перпендикулярна до поверхні опору)</i></p> 
5	<p><i>Шарнірно – нерухома опора (реакція <math>\bar{R}_A</math> складається з проєкцій на координатні осі <math>\bar{X}_A</math> та <math>\bar{Y}_A</math>)</i></p> $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$ 

Продовження таблиці 1

1	2
---	---

6	<p><i>Циліндричний шарнір або підшипник</i>  (реакція <math>\bar{R}_A</math> складається з проєкцій <math>\bar{z}_A</math> і <math>\bar{x}_A</math> спрямованих перпендикулярно до осі шарніра)</p>	
7	<p><i>Упорний підшипник</i>  (реакція <math>\bar{R}_A</math> складається з проєкцій <math>\bar{z}_A</math>, <math>\bar{y}_A</math> і <math>\bar{x}_A</math> вздовж координатних осей. У точці В – циліндричний шарнір)</p>	
8	<p><i>Сферичний підшипник.</i>  (реакція <math>\bar{R}_A</math> складається з проєкцій <math>\bar{z}_A</math>, <math>\bar{y}_A</math> і <math>\bar{x}_A</math> на просторові осі координат)</p> $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$	
9	<p><i>Нерухоме закріплення</i>  (жорстке закладання)  (реакції складаються з проєкцій <math>\bar{x}_A</math> і <math>\bar{y}_A</math>, а також реактивного моменту <math>M_A</math>)</p>	

## 2 СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ



**Система збіжних сил** – це система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці (рисунок 8).

Рисунок 8

### 2.1 Теорема про три сили

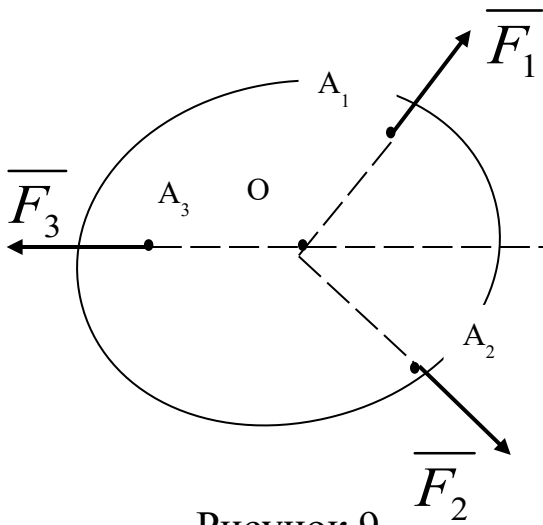


Рисунок 9

**Теорема**  
Якщо три сили зрівноважені  $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3) \infty 0$  і лежать в одній площині, то вони утворюють збіжну систему (рисунок 9).

### 2.2 Теорема про рівнодійну системи збіжних сил

**Теорема.** Система збіжних сил  $\{\overline{F}_k\}$  має рівнодійну, яка дорівнює векторній сумі сил системи і прикладається в точці O перетину ліній їх дії:

$$\{\overline{F}_k\} \infty \overline{R}_O, \quad \overline{R}_O = \sum_{n=1}^k \overline{F}_n. \quad (1)$$

### 2.3 Умови рівноваги системи збіжних сил

**Геометрична умова:** для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб геометрична сума векторів сил системи дорівнювала нулю:

$$\bar{R} = \sum_{n=1}^k \bar{F}_n = 0 . \quad (2)$$

**Аналітична умова:** для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій сил системи на координатні осі дорівнювали нулю:

$$\sum_{n=1}^k F_{nx} = 0, \quad \sum_{n=1}^k F_{ny} = 0, \quad \sum_{n=1}^k F_{nz} = 0 . \quad (3)$$

### 3 МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ

#### 3.1 Момент сили відносно точки як алгебраїчна величина

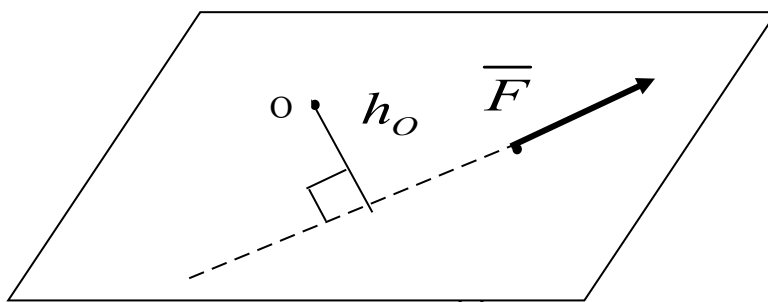
**Момент сили відносно точки** – це величина, яка характеризує спроможність сили повертати тіло навколо цієї точки.

**Момент сили відносно точки O** дорівнює добутку модуля сили  $\bar{F}$  на плече  $h_o$  взяте з відповідним знаком:

$$M_o(\bar{F}) = \pm F \cdot h_o . \quad (4)$$

**Плече сили**  $h_o$  – це перпендикуляр, що опущений з точки O на лінію дії сили  $\bar{F}$  (рисунок 10).

Величина  $M_o(\bar{F}) > 0$ , якщо сила намагається повертати тіло навколо точки O проти годинникової стрілки, і  $M_o(\bar{F}) < 0$  – за годинниковою стрілкою.





## Рисунок 10

Момент сили відносно точки дорівнює нулю  $M_o(\vec{F}) = 0$ , якщо лінія дії сили проходить через цю точку ( $h_o = 0$ ).

Сила  $\vec{F}$  повертає тіло навколо точки  $O$  в площині, якій належить точка  $O$  та лінія дії сили.

### 3.2 Вектор-момент сили відносно точки

Вектор-момент сили  $\vec{F}$  відносно точки  $O$  дорівнює векторному добутку векторів  $\vec{r}_o$  і  $\vec{F}$  (рисунок 11):

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r}_o \times \vec{F}, \quad (5)$$

де  $\vec{r}_o$  – вектор, що з'єднує точку  $O$  з точкою прикладання сили  $\vec{F}$ .

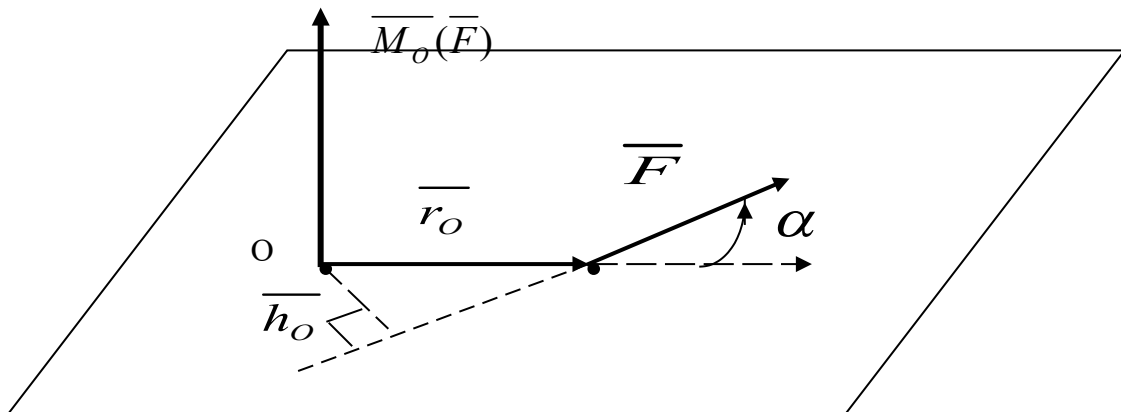


Рисунок 11

Необхідно зазначити:

- вектор  $\vec{M}_o(\vec{F})$  перпендикулярний до векторів  $\vec{r}_o$  і  $\vec{F}$ , тобто до площини, у якій сила повертає тіло навколо точки  $O$ ;

- вектор  $\vec{M}_o(\vec{F})$  спрямовано в бік, дивлячись з якого поворот вектора  $\vec{r}_o$  до вектора  $\vec{F}$  на мінімальний кут  $\alpha$  здійснюється проти стрілки годинника;

- модуль вектора  $\vec{M}_o(\vec{F})$  дорівнює:

$$|\vec{M}_o(\vec{F})| = r_o \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot h_o. \quad (6)$$

Якщо сили  $\overline{F}_i$  ( $i=1\dots n$ ) повертають тіло відносно точки  $O$  в різних площинах, то це враховується різними напрямками векторів  $\overline{M}_O(\overline{F}_i)$  ( $i=1\dots n$ ).

### 3.3 Теорема Варіньона (про момент рівнодійної)

**Теорема.** Якщо система сил має рівнодійну  $\{\overline{F}_i\} \infty \overline{R}$ , то вектор – момент рівнодійної відносно точки  $O$  дорівнює сумі вектор – моментів сил системи відносно цієї точки

$$\overline{M}_O(\overline{R}) = \sum \overline{M}_O(\overline{F}_i) \quad (7)$$

**Наслідок:** Вектор-момент сили  $\overline{F}$  дорівнює сумі вектор-моментів її складових  $\overline{F}_x$ ,  $\overline{F}_y$ ,  $\overline{F}_z$ .

$$(\overline{F}_x, \overline{F}_y, \overline{F}_z) \infty \overline{F},$$

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{M}_O(\overline{F}_x) + \overline{M}_O(\overline{F}_y) + \overline{M}_O(\overline{F}_z). \quad (8)$$

## 4 ТЕОРІЯ ПАР СИЛ

**Пара сил** – це система двох паралельних, рівних за модулем, протилежно спрямованих сил (рисунок 12).

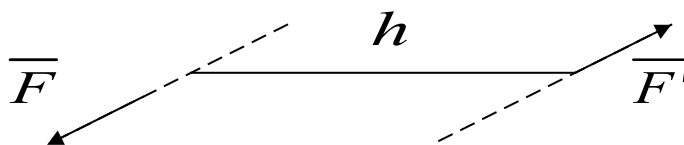


Рисунок 12

Поряд із силою пара сил є самостійним елементом навантаження.

**Плече пари сил  $h$**  – це відстань між лініями дії сил пари.

Пара сил діє в площині, у якій розташовані лінії дії сил пари.

#### 4.1 Три теореми про пару сил

**Теорема 1.** Пара сил не має рівнодійної, тобто пару сил не можна замінити однією силою.

**Теорема 2.** Пара сил не є системою зрівноважених сил. Пара сил намагається обернути тіло в площині дії.

**Теорема 3.** Сума векторів-моментів сил пари відносно довільної точки в просторі є величиною незмінною і називається вектор-моментом пари:

$$\overline{M}_o(\overline{F}) + \overline{M}_o(\overline{F}') = \overline{M}(\overline{F}) = \text{const} . \quad (9)$$

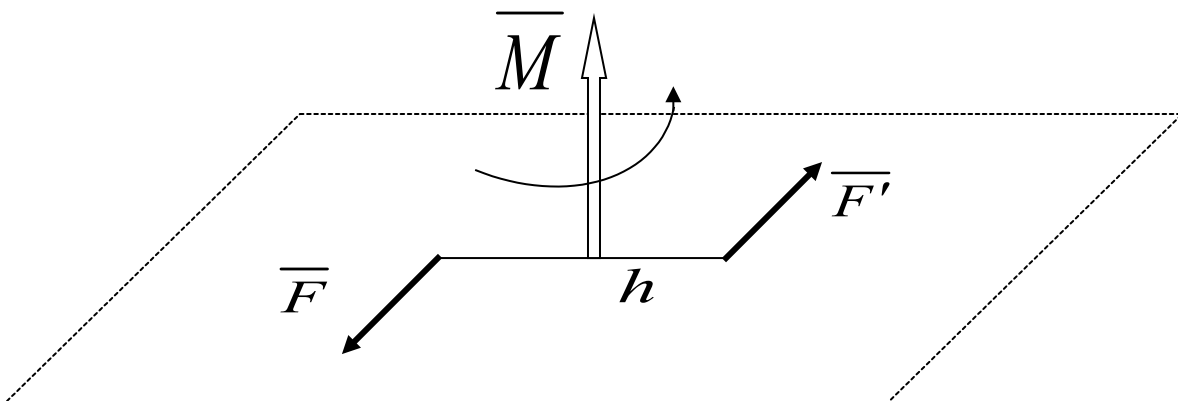
Слід окремо зазначити (рисунок 13):

1 Вектор-момент  $\overline{M}(\overline{F})$  пари сил перпендикулярний до площини дії пари.

2 Вектор-момент  $\overline{M}(\overline{F})$  спрямований у бік, дивлячись звідки обертання, що здійснює пара, відбувається проти стрілки годинника.

3 Модуль  $|\overline{M}(\overline{F})|$  дорівнює добутку величини сили пари  $\overline{F}$  на плече пари  $h$  :

$$|\overline{M}_o(\overline{F})| = F \cdot h . \quad (10)$$



## 4.2 Теореми про еквівалентність пар сил

**Теорема 1.** Дві пари сил еквівалентні, якщо їх вектор-моменти рівні:

$$\overline{M}(\overline{F}) = \overline{M}(\overline{Q}) \Rightarrow (\overline{F}, \overline{F}') \infty (\overline{Q}, \overline{Q}').$$

**Теорема 2.** Система пар сил еквівалентна одній парі, вектор-момент якої дорівнює сумі вектор-моментів пар системи:

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^n \overline{M}(\overline{F}_i) \quad (11)$$

У випадку, коли пари сил діють в одній площині, векторне додавання слід замінити алгебраїчним:

$$M = \sum_{i=1}^n M(\overline{F}_i), \quad (12)$$

де  $M(\overline{F}_i) = \pm h_i \cdot F_i$ .

Момент пари сил  $M(\overline{F}_i)$  приймається додатним, якщо обертання парою здійснюється проти стрілки годинника (рисунок 14), і від'ємним, якщо за годинниковою стрілкою (рисунок 15).

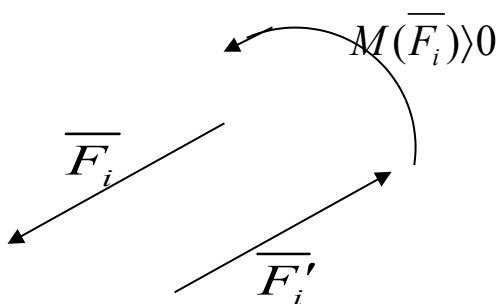


Рисунок 14

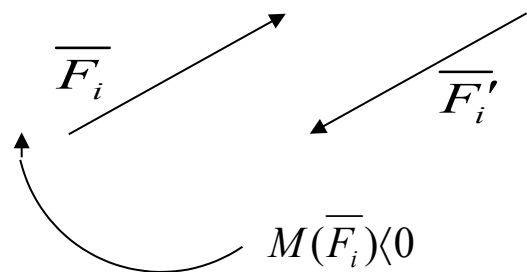


Рисунок 15

## 4.3 Умови рівноваги системи пар сил

Система пар сил зрівноважена (еквівалентна нулю), якщо сума вектор-моментів пар системи дорівнює нулю:

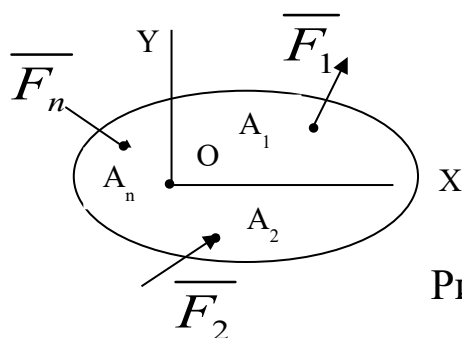
$$\sum_{i=1}^n \overline{M}(\overline{F}_i) = 0. \quad (13)$$

Для пар сил, що діють в одній площині, векторне додавання слід замінити алгебраїчним:

$$\sum_{i=1}^n M(\overline{F}_i) = 0. \quad (14)$$

## 5 ДОВІЛЬНА ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ

Довільна плоска система сил – це система сил, лінії дії яких розташовані в одній площині (рисунок 16).



$A_1, A_2, A_n$  –  
точки прикладання  
сил системи  $\{, \dots\}$ .

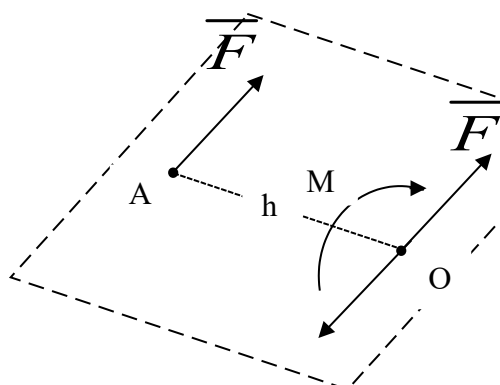
Рисунок 16

### 5.1 Теорема про паралельне перенесення сили (метод Пуансо)

**Теорема.** Силу  $\overline{F}$ , не змінюючи її дії, можна переносити паралельно в будь-яку точку  $O$ , додавши при цьому пару сил, момент якої дорівнює моменту сили відносно точки  $O$ .

Сила  $\overline{F}$  прикладена в точці

$A$ . При паралельному перенесенні  $\overline{F}$  у точку  $O$  (рисунок 17) додається пара сил, момент  $M$  якої дорівнює моменту сили відносно точки  $O$ :

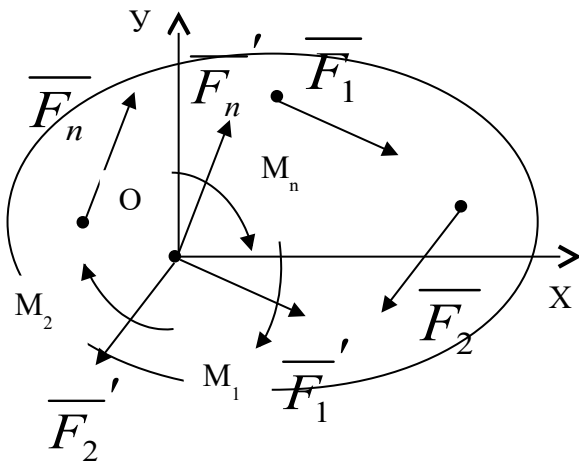


$$M = M_o(\bar{F}) = \pm F \cdot h,$$

Рисунок 17

де  $h$  – плече сили відносно точки.

## 5.2 Приведення довільної системи сил до даного центра



Методом Пуансо в точці  $O$  буде отримано систему збіжних сил і систему пар, моменти  $M_i$  яких дорівнюють моментам  $M_o(\bar{F}_i)$  відповідних сил відносно точки  $O$  (рисунок 18).

Рисунок 18

**Головним вектором системи  $\bar{R}$**  називається вектор, що дорівнює геометричній сумі сил системи.

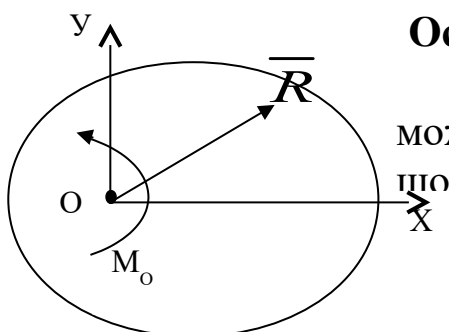
$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i. \quad (15)$$

**Головним моментом системи  $M_o$**  відносно точки  $O$  називається алгебраїчна сума моментів сил системи відносно точки приведення  $O$ .

$$M_o = \sum_{i=1}^n M_o(\bar{F}_i). \quad (16)$$

Головний вектор  $\bar{R}$  не залежить від обраної точки приведення  $O$ .

Головний момент сил  $M_o$  залежить від обраної точки приведення  $O$ .



### Основна теорема статички

Будь – яка плоска система сил може бути замінена однією силою  $\bar{R}$ , що дорівнює головному вектору системи і прикладається в центрі

Рисунок 19

приведення  $O$ , та однією парою з моментом  $M_o$ , що дорівнює головному моменту системи відносно центра  $O$  (рисунок 19).

### 5.3 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

#### 5.3.1 Геометричні умови рівноваги

Для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб водночас головний вектор і головний момент системи дорівнювали нулю:

$$\bar{R} = 0, \quad M_o = 0. \quad (17)$$

#### 5.3.2 Аналітичні умови рівноваги

##### Основна форма умов рівноваги

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iY} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_o(\bar{F}_i) = 0. \quad (18)$$

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил на координатні осі та сума їх моментів відносно будь – якої точки, яка належить площині дії сил, дорівнювали нулю.

##### Друга форма умов рівноваги

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iL} = 0. \quad (19)$$

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів всіх сил відносно будь – яких двох точок  $A$  і  $B$  та сума їх проекцій на вісь  $L$ , неперпендикулярну до прямої  $AB$  ( $AB \perp L$ ), дорівнювали нулю.

##### Третя форма умов рівноваги

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0. \quad (20)$$

Для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів всіх сил відносно будь – яких трьох точок А, В і С, що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю.

## 6 ТЕРТЯ

**Силою тертя**  $\overline{F_{TP}}$  називається сила, що виникає в точках співдотику тіл, лежить у спільній дотичній площині до їх поверхонь і чинить опір ковзанню одного тіла відносно іншого.

Сила тертя, що виникає за відсутності відносного ковзання, називається **силою тертя спокою**.

### 6.1 Закони тертя ковзання (закони Амонтона – Кулона)

**1** При намаганні зсунути одне тіло по поверхні іншого в площині дотику тіл виникає сила тертя, величина якої може приймати значення від нуля до величини  $F_{TP}^{MAX}$  **сили тертя ковзання**.

$$F_{TP} \leq F_{TP}^{MAX}. \quad (21)$$

Сила тертя **спрямована** в бік, протилежний тому, у якому активні сили намагаються зсунути тіло.

**2** Величина сили тертя ковзання дорівнює добутку коефіцієнта тертя ковзання  $f$  на силу  $N$  нормального стиску поверхонь (нормальну реакцію):

$$F_{TP}^{MAX} = f \cdot N. \quad (22)$$

**Коефіцієнт тертя ковзання**  $f$  – безрозмірна величина, визначається експериментальним шляхом і залежить від матеріалу взаємодіючих тіл і стану їх поверхонь (характер обробки, температура, вологість, змащення і т. п.).

Для абсолютно гладеньких поверхонь  $f = 0$ , для реальних  $f > 0$ . При сухому терті „дерево – дерево”  $f \in [0,4; 0,7]$ ; „метал – метал”  $f \in [0,15; 0,25]$ ; „сталь – лід”  $f = 0,025$ .

**3** Величина сили тертя ковзання  $F_{TP}^{MAX}$  в широких межах **не залежить** від розмірів площі контакту поверхонь тіл.

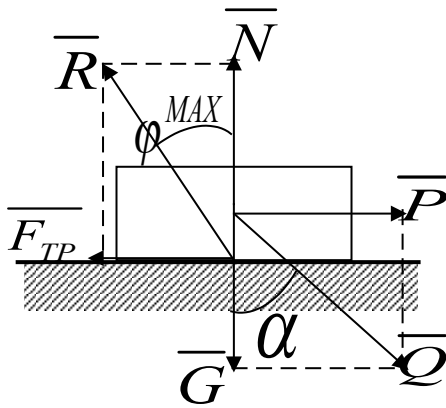


При рівновазі сила тертя відповідає співвідношенню

$$F_{TP} < f \cdot N. \quad (23)$$

Для тіл, які рухаються, сила тертя спрямована протилежно руху і дорівнює

$$F_{TP} = f \cdot N. \quad (24)$$



Повна реакція шорсткої поверхні  $\bar{R}$  складається з нормальної реакції  $\bar{N}$  та сили тертя (рисунок 20):

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_{TP}.$$

Кут  $\varphi$  відхилення  $\bar{R}$  від нормалі до поверхні дорівнює  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{TP}}{N}$ .

Рисунок 20

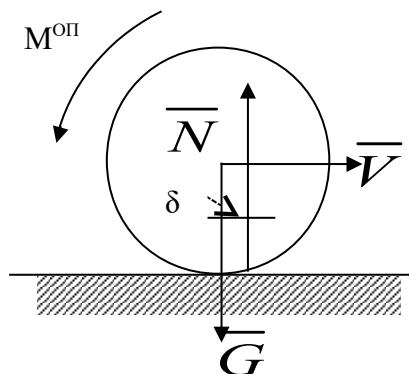
начення кута  $\varphi^{\max}$  називається **кутом тертя**.

$$\operatorname{tg} \varphi^{\max} = \frac{F_{TP}^{\max}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f. \quad (25)$$

Конічні поверхні, що відповідають  $\varphi^{\max}$ , називаються **конусом тертя**. При дії на тіло силою  $\bar{Q}$ , яка знаходиться всередині конуса тертя  $\alpha < \varphi^{\max}$ , зсунути тіло неможливо.

## 6.2 Тертя кочення

**Тертям кочення** називають опір, що виникає при коченні одного тіла по поверхні іншого тіла.



## Рисунок 21

У реальних умовах поверхні тіла і площини, по якій тіло котиться, деформуються під тиском тіла на площину. Внаслідок цього реакція  $\bar{N}$  зміщується (рисунок 21) у бік руху тіла ( $\bar{v}$  – швидкість руху). Сили  $\bar{N}$  і  $\bar{G}$  утворюють пару сил, спрямовану проти руху тіла. Момент цієї пари називається моментом опору кочення  $M^{оп}$  і дорівнює

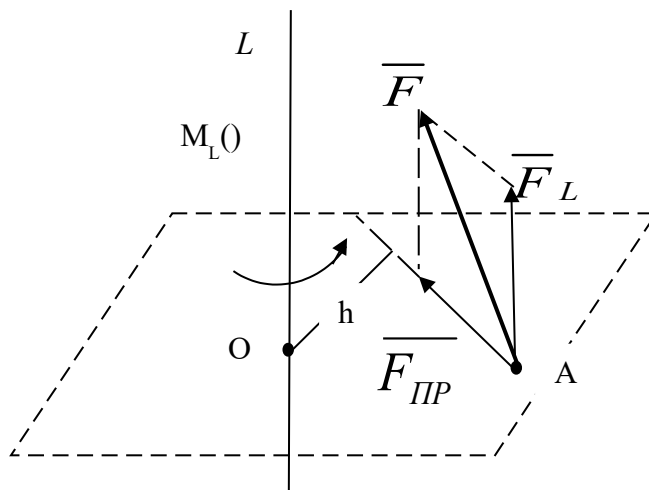
$$M^{оп} = N \cdot \delta, \quad (26)$$

де  $\delta$  – коефіцієнт тертя кочення (плече пари). Одиниці вимірювання  $\delta$  - це одиниці довжини (мм, см).

## 7 ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

### 7.1 Момент сили відносно осі

**Момент сили відносно осі** – це величина, яка характеризує спроможність сили обертати тіло навколо осі.



**Момент сили відносно осі** дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з площиною (рисунок 22).

$$M_L(\bar{F}) = M_O(\bar{F}_{PP}) = \pm F_{PP} \cdot h. \quad (27)$$

Рисунок 22

**Момент** приймається **додатним**, якщо з кінця осі L поворот, що здійснює сила  $\bar{F}_{PP}$ , спрямований проти стрілки годинника, і **від'ємним**, якщо за годинниковою стрілкою.

Момент сили відносно осі **дорівнює нулю**, якщо сила і вісь лежать в одній площині, тобто:

- 1) сила паралельна осі ( $\bar{F}_{\text{пр}}=0$ );
- 2) лінія дії сили перетинає вісь ( $h=0$ ).

**Аналітичні вирази для моментів сили  $\bar{F}$  відносно координатних осей:**

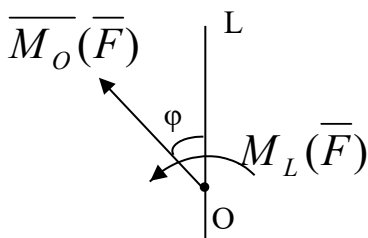
$$\left. \begin{aligned} M_x(\bar{F}) &= y_A \cdot F_z - z_A \cdot F_y, \\ M_y(\bar{F}) &= z_A \cdot F_x - x_A \cdot F_z, \\ M_z(\bar{F}) &= x_A \cdot F_y - y_A \cdot F_x. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

де  $x_A, y_A, z_A$  – координати точки А прикладання сили  $\bar{F}$ .

## 7.2 Теорема про залежність моментів сили відносно осі і точки, що належить цій осі

**Теорема.** Момент сили  $\bar{F}$  відносно осі L дорівнює проекції на цю вісь вектор-моменту цієї сили відносно довільної точки O, що належить осі (рисунок 23):

$$M_L(\bar{F}) = n_{pL} \overline{M_O}(\bar{F}) = |\overline{M_O}(\bar{F})| \cdot \cos \varphi, \quad (29)$$



$M_L(\bar{F})$  – момент сили відносно осі L;  
 $\overline{M_O}(\bar{F})$  – вектор-момент сили відносно точки O.

Рисунок 23

## 7.3 Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій сил на координатні осі і суми їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^k F_{nX} &= 0, & \sum_{n=1}^k F_{nY} &= 0, & \sum_{n=1}^k F_{nZ} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

$$\sum_{n=1}^k M_x(\overline{F}_n) = 0, \quad \sum_{n=1}^k M_y(\overline{F}_n) = 0, \quad \sum_{n=1}^k M_z(\overline{F}_n) = 0.$$

## 8 СИСТЕМА ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ

### 8.1 Додавання двох паралельних сил, спрямованих в один бік

Сили  $\overline{F}_1$  і  $\overline{F}_2$  діють у точках А і В (рисунок 24).

Рівнодійна  $\overline{R}$  двох паралельних сил, спрямованих в один бік, дорівнює за модулем сумі модулів цих сил  $R = F_1 + F_2$ , паралельна їм та діє в тому самому напрямку.

Точка С прикладання рівнодійної  $\overline{R}$  ділить відрізок АВ обернено пропорційно величинам  $\overline{F}_1$  і  $\overline{F}_2$ :

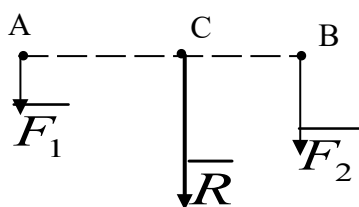
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$


Рисунок 24

### 8.2 Додавання двох паралельних сил, спрямованих у різні боки

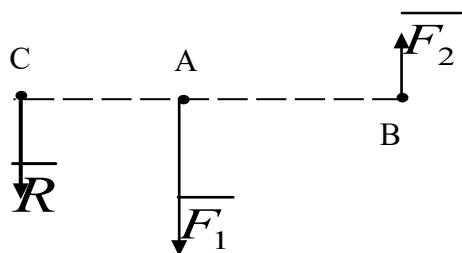
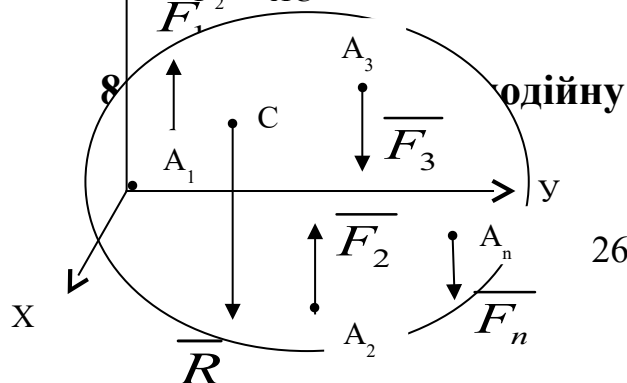


Рисунок 25

Сили  $\overline{F}_1$  і  $\overline{F}_2$  діють у точках А і В (рисунок 25). Рівнодійна  $\overline{R}$  двох паралельних протилежно спрямованих сил паралельна їм і діє в напрямку більшої сили, а її модуль дорівнює різниці модулів цих сил:  $R = F_1 - F_2$ .

Точка С прикладання рівнодійної  $\overline{R}$  розташована зовні з боку більшої сили так, що відрізки АС і ВС обернено пропорційні

$$\overline{F}_1 \text{ Z } \overline{F}_2: \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$



### Теорема

Система паралельних сил  $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n\}$  має рівнодійну  $\overline{R}$ . Величина рівнодійної дорівнює алгебраїчній сумі  $R = \sum_{i=1}^n F_i$ , а її напрямок відповідає знаку цієї суми.

Рисунок 26

Точка С прикладання рівнодійної  $\overline{R}$  називається **центром паралельних сил** (рисунок 26). Координати центра паралельних сил визначають за формулами

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^k (F_n \cdot x_n)}{\sum_{n=1}^k F_n}, \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^k (F_n \cdot y_n)}{\sum_{n=1}^k F_n}, \quad z_c = \frac{\sum_{n=1}^k (F_n \cdot z_n)}{\sum_{n=1}^k F_n}, \quad (31)$$

де величини  $F_n$  враховуються з відповідними знаками.

### 8.4 Центр ваги твердого тіла

Якщо система паралельних сил утворена силами тяжіння, то центр паралельних сил С називається **центром ваги** (рисунок 27).

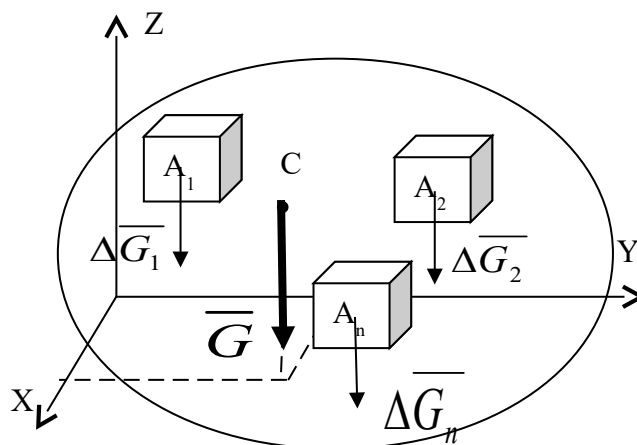


Рисунок 27

**Координати центра ваги** визначаються за формулами (31), у яких за сили  $F_n$  приймаються сили ваги частин тіла  $\overline{\Delta G_1}, \overline{\Delta G_2}, \dots, \overline{\Delta G_n}$  (рисунок 27), тобто

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^k (\Delta G_n \cdot x_n)}{G}, \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^k (\Delta G_n \cdot y_n)}{G}, \quad z_c = \frac{\sum_{n=1}^k (\Delta G_n \cdot z_n)}{G}, \quad (32)$$

де  $G = \sum_{n=1}^k \Delta G_n$  – вага тіла;

$x_n, y_n, z_n$  – відповідні координати точок прикладання  $A_1, A_2, \dots, A_n$  сил ваги частин тіла.

Якщо кількість частин тіла зростає необмежено ( $n \rightarrow \infty$ ), то формули (32) набувають вигляду

$$x_c = \frac{\int x dG}{G}, \quad y_c = \frac{\int y dG}{G}, \quad z_c = \frac{\int z dG}{G}. \quad (33)$$

Для однорідного тіла  $dG = \rho dV$  ( $\rho$  – щільність матеріалу) і формули (33) спрощуються. Положення **центра ваги однорідного тіла** ( $\rho = const$ ) залежить від його геометричної форми і розмірів і не залежить від матеріалу.

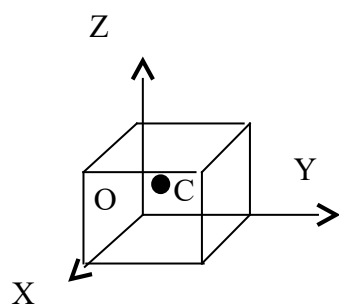


Рисунок 28

**Об'ємне тіло** (рисунок 28):

$$x_c = \frac{\int x dV}{V}, \quad y_c = \frac{\int y dV}{V}, \quad z_c = \frac{\int z dV}{V} \quad (34)$$

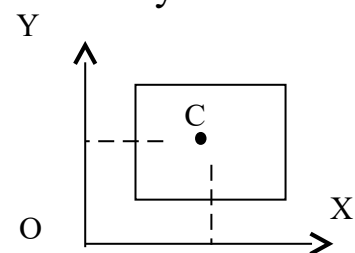


Рисунок 29

**Плоске тіло постійної товщини** (рисунок 29):

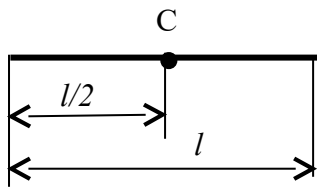
$$x_c = \frac{\int x dS}{S}, \quad y_c = \frac{\int y dS}{S}. \quad (35)$$

де  $S$  – площа тіла.

## 8.5 Способи визначення положення центра ваги

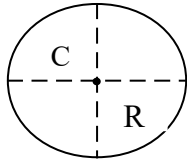
### 8.5.1 Метод симетрії

Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то центр ваги лежить відповідно або в площині симетрії, або на осі симетрії, або в центрі симетрії.



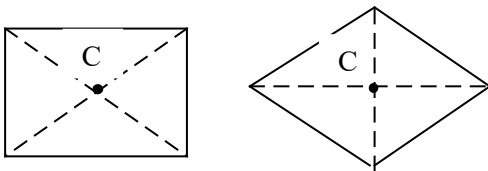
Центр ваги стержня довжини  $l$   
(рисунок 30).

Рисунок 30



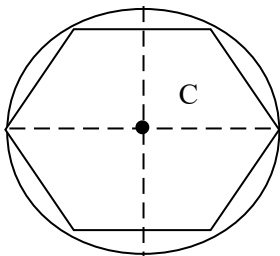
Центр ваги кола радіуса  $R$   
(рисунок 31).

Рисунок 31



Центр ваги паралелограма,  
ромба або прямокутника  
(рисунок 32).

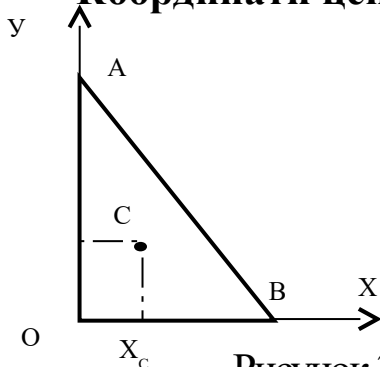
Рисунок 32



Центр ваги правильного  
багатокутника (рисунок 33).

Рисунок 33

### Координати центра ваги плоских фігур



Прямокутний трикутник (рисунок 34):

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \text{ — площа,}$$

Рисунок 34

$$x_c = \frac{1}{3}b,$$

$$y_c = \frac{1}{3}a.$$

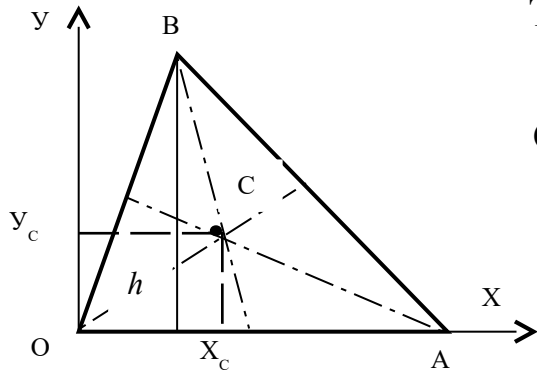


Рисунок 35

**Трикутник (рисунок 35):**

$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AO - \text{площа,}$$

$C(x_c, y_c)$  – точка перетину медіан,

$$x_c = \frac{1}{3}(x_A + x_B); \quad y_c = \frac{1}{3}h.$$

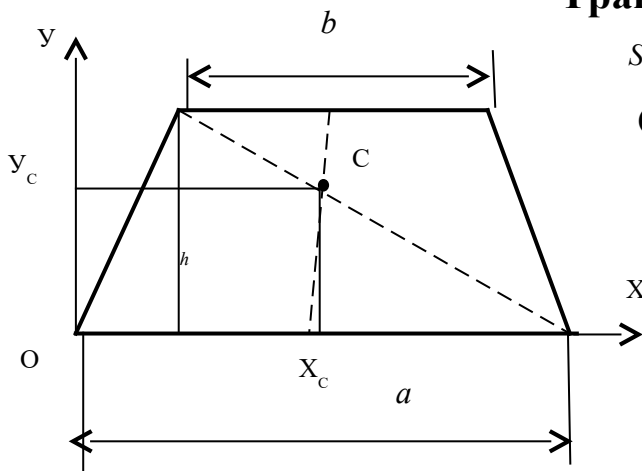


Рисунок 36

**Трапеція (рисунок 36):**

$$S = \frac{(a+b)}{2} \cdot h,$$

$C(x_c, y_c)$  – на лінії, проведеній через середини основ,

$$x_c = \frac{a}{2},$$

$$y_c = \frac{h \cdot (a+2b)}{3 \cdot (a+b)}.$$

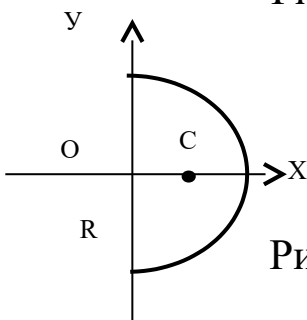


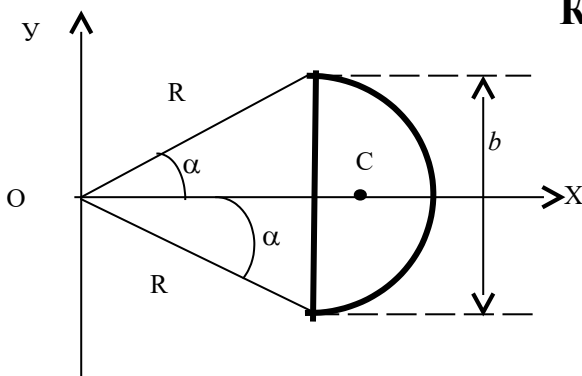
Рисунок 37

**Півколо (рисунок 37):**

$$S = \frac{\pi R^2}{2},$$

$C(x_c, 0),$

$$x_c = \frac{4R}{3\pi}.$$



**Круговий сегмент (рисунок 38):**

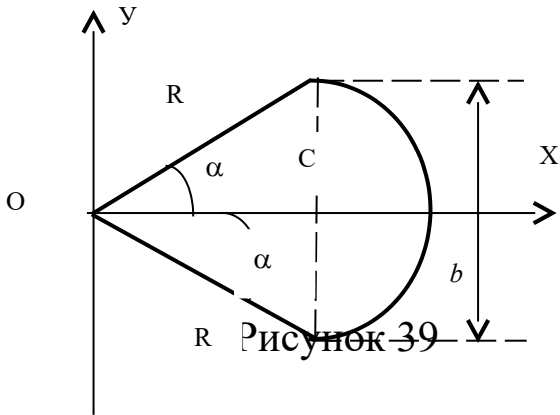
$$S = \frac{1}{2} R^2 (2\alpha - \sin 2\alpha),$$

$C(x_c, 0),$

$$x_c = \frac{b^3}{12 \cdot S}.$$



Рисунок 38



**Круговий сектор** (рисунок 39):

$$S = \alpha \cdot R^2,$$

$$C(x_c, 0),$$

$$x_c = \frac{b \cdot R^2}{3 \cdot S}.$$

Рисунок 39

### 8.5.2 Метод фрагментів

Якщо тіло можна розбити на кінцеву кількість фрагментів (рисунок 40), для кожного з яких відомо положення центра ваги, то координати центра ваги всього тіла можна визначити за формулами

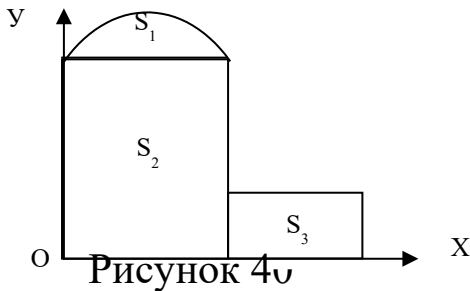


Рисунок 40

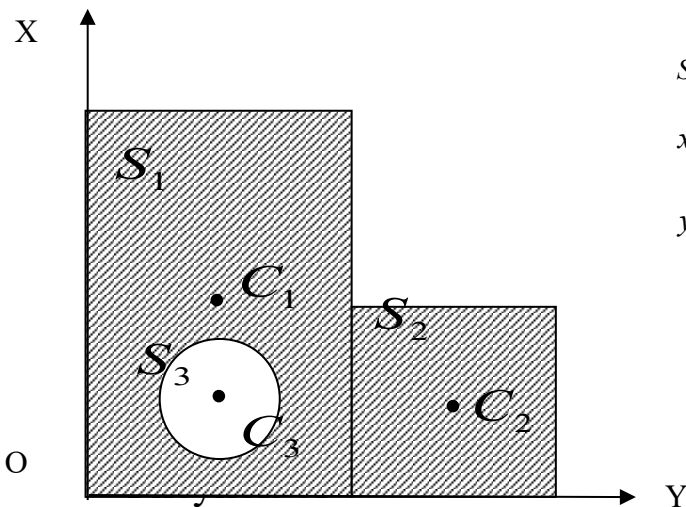
$$S = \sum S_i,$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n (S_i \cdot x_i)}{S}, \quad (36)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n (S_i \cdot y_i)}{S}.$$

### 8.5.3 Метод від'ємних площин

Якщо тіло має вирізані фрагменти, то у формулах (36) відповідні їм величини  $S_i$  приймаються від'ємними (рисунок 41).



$$S = S_1 + S_2 - S_3,$$

$$x_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 - S_3 x_3}{S}, \quad (37)$$

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 - S_3 y_3}{S}.$$

## 9 НАУКА ПРО РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

### 9.1 Основні поняття

**Опір матеріалів** вивчає інженерні методи розрахунку на міцність та жорсткість деталей (елементів) машин і споруд.

**Міцність** – це здатність конструкції та її деталей витримувати задане навантаження без руйнування.

**Жорсткість** – це здатність конструкції та її деталей протистояти деформуванню під дією заданого навантаження.

Для того щоб конструкції відповідали вимогам міцності і жорсткості, тобто були надійними в експлуатації, необхідно визначити форму і розміри їх деталей залежно від величин заданих сил і характеристик міцності матеріалів.

### 9.2 Основні форми елементів конструкцій

При всьому різноманітті видів конструктивних елементів, які зустрічаються в спорудах і машинах, їх можна звести до невеликої кількості основних форм. Це стержні, пластини та оболонки.

**Стержень** (брус) – це тіло, у якого один розмір (довжина) значно перевищує два інших (поперечних) розміри (вали, осі, лопатки турбомашин). Стержні бувають прямолінійними, криволінійними, призматичними та тонкостінними (рисунок 42).

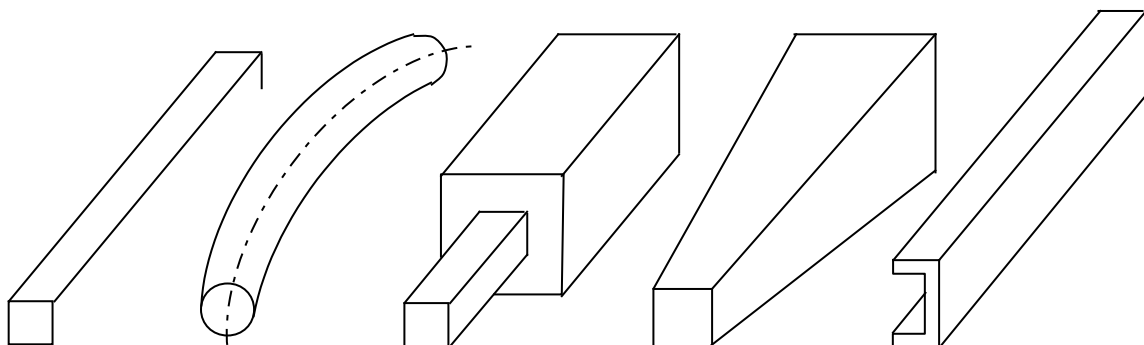


Рисунок 42 – Види стержнів

**Пластина** – це тіло малої товщини (рисунок 43), яке утворено двома паралельними площинами (диски турбін, полотна пил).

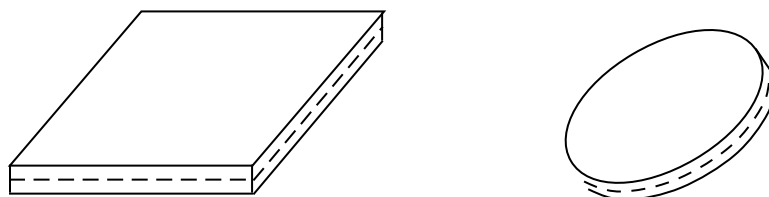


Рисунок 43 – Види пластин

**Оболонка** – це тіло, яке обмежено криволінійними поверхнями, що розташовані на близькій відстані одна від одної (корпуси машин, котлів, куполи споруд). За формою оболонки розрізняють: циліндричні, конічні, сферичні, тороїдальні (рисунок 44).

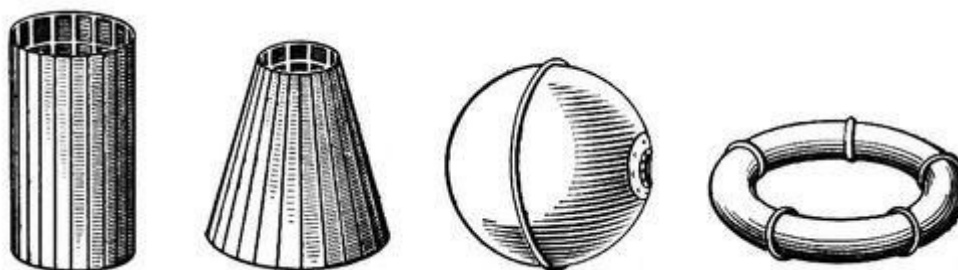


Рисунок 44 – Види оболонок

### 9.3 Основні гіпотези опору матеріалів

**1 Гіпотеза про суцільність матеріалу.** Матеріал повністю заповнює форму тіла.

**2 Гіпотеза про однорідність та ізотропність матеріалу.** Матеріал у різних об'ємах і різних напрямках має однакові властивості.

**3 Гіпотеза про малість деформацій.** Деформації тіла малі порівняно з його розмірами і не враховуються при складанні рівнянь рівноваги.

**4 Гіпотеза про абсолютно пружне тіло.** Після зняття навантаження тіло повертається до початкових розмірів і форми.

**5 Гіпотеза пропорційності.** Між деформаціями і навантаженням існує лінійна залежність.

**6 Гіпотеза суперпозиції.** Результат дії на конструкцію системи навантажень дорівнює сумі результатів дії кожного навантаження окремо.

**7 Гіпотеза плоских перерізів.** Плоскі перерізи, які перпендикулярні до осі стержня, залишаються плоскими і перпендикулярними і після деформування.

## 10 РОЗТЯГ І СТИСК

### 10.1 Напруження та деформації

Розглянемо стержень, який розтягується (стискається) силою  $P$ , спрямованою вздовж осі стержня (рисунок 45). Згідно з гіпотезою 7 довільний плоский переріз  $cd$  переміщується в положення  $c'd'$  і залишається плоским, тобто всі волокна стержня подовжуються (скорочуються) однаково на величину  $\Delta l$ .

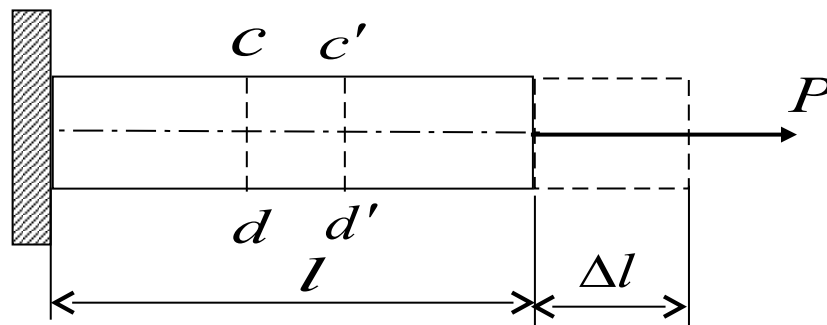


Рисунок 45  
 Подовження  $\Delta l$  абсолютним подольним подовженням (скороченням). Тоді відносне подольне подовження (скорочення)  $\varepsilon$  теж однакове для всіх точок перерізу  $cd$  і визначається за формулою (геометричний зміст задачі)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \text{const}. \quad (38)$$

Умовно розріжемо стержень на дві частини (рисунок 46).

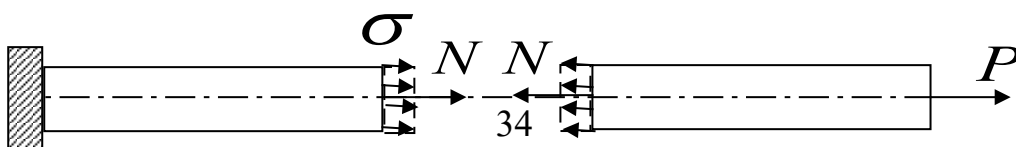


Рисунок 46

**Подовжня сила**  $N$ , внутрішнє зусилля взаємодії двох частин стержня, перетворюється на зовнішню силу. Умова рівноваги правої частини стержня має вигляд:  $N = \pm P$ . Приймається  $N > 0$ , якщо стержень розтягнутий, і  $N < 0$ , якщо стиснутий.

Позначимо через  $F$  площу перерізу стержня. Для точок перерізу визначимо **нормальне напруження**  $\sigma$  за формулою (статичний зміст задачі)

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (39)$$

Нормальне напруження  $\sigma$  за напрямком співпадає з силою  $N$ , тобто **перпендикулярне до площини перерізу**.

Враховуючи, що  $\sigma$  відповідає навантаженню  $P$ , а  $\varepsilon$  - деформації  $\Delta l$ , згідно з гіпотезою 5 між ними існує лінійна залежність (фізичний зміст задачі)

$$\sigma = \varepsilon \cdot E. \quad (40)$$

Залежність (40) називається **законом Гука**. Коефіцієнт  $E$  – **модуль пружності (модуль Юнга)**, який є одною з головних фізичних констант матеріалу. Одиниці вимірювання  $\sigma$  і  $E$  однакові:  $1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Па (паскаль)} = 10^{-6} \text{ МПа (мега-паскаль)} = 10^{-5} \text{ кг/см}^2 = 10^{-7} \text{ кг/мм}^2$ . Для сталі модуль пружності  $E$  дорівнює  $2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Згідно з формулами (38)-(40) абсолютне подовження  $\Delta l$  розраховується за формулою:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}. \quad (41)$$

Добуток  $E \cdot F$  називається **жорсткістю перерізу на розтяг (стиск)**.

Розтяг (стиск) стержня також супроводжується зміненням поперечних розмірів його перерізу (рисунок 47). **Відносна поперечна деформація**  $\varepsilon'$  дорівнює

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} \quad (42)$$

У випадку розтягу  $\varepsilon > 0$ , а  $\varepsilon' < 0$ , при стиску  $\varepsilon < 0$ , а  $\varepsilon' > 0$ . У межах існування закону Гука для даного матеріалу відношення  $\varepsilon'$  і  $\varepsilon$  величина стала, що називається **коефіцієнтом Пуассона**  $\mu$  і визначається за формулою:

$$\mu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}. \quad (43)$$

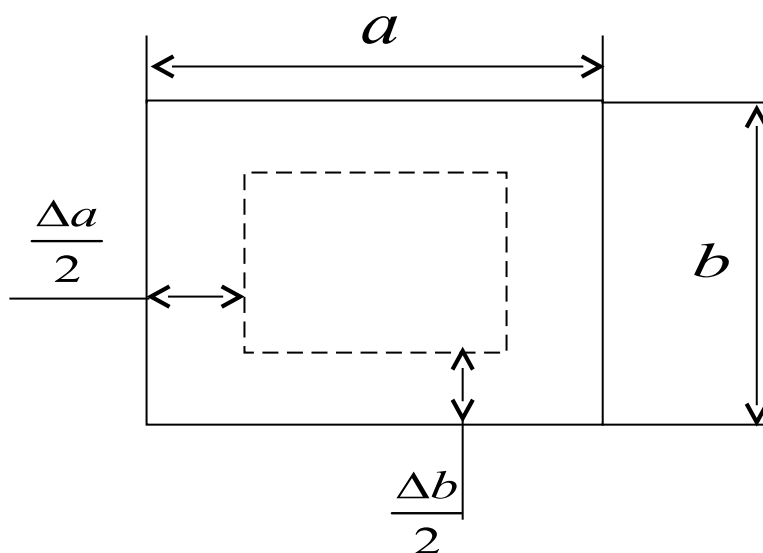


Рисунок 47

Значення коефіцієнта Пуассона  $\mu$  для ізотропних матеріалів лежить у межах  $0 \div 0,5$ , для конструкційних сталей  $\mu \approx 0,3$ .

## 10.2 Умова міцності при розтягу (стиску)

Основою для розв'язання всіх задач опору матеріалів є **умова міцності**. При розтягу (стиску) умова міцності має вигляд

$$\sigma \leq [\sigma], \quad \text{або} \quad \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad (44)$$

де  $[\sigma]$  – **допустиме напруження**, яке відображає властивості міцності матеріалу (більш докладно в п. 10.3).

Залежно від того, що відомо в умові (44), існує три **задачі розрахунків на міцність**.

1 Задано навантаження  $N$  і площу перерізу  $F$ . Треба визначити напруження  $\sigma$  і перевірити умову міцності (44).

2 Задано навантаження  $N$  і допустиме напруження  $[\sigma]$  (матеріал). Слід визначити площу перерізу  $F$ , щоб забезпечити міцність стержня згідно з умовою (44).

3 Задано площу перерізу  $F$  і допустиме напруження  $[\sigma]$  (матеріал). Слід визначити найбільше зовнішнє навантаження  $P$  виходячи з умови міцності (44).

Якщо існують обмеження на деформацію стержня, то умова міцності (44) замінюється **умовою жорсткості**:

$$\Delta l \leq [\Delta l], \quad (45)$$

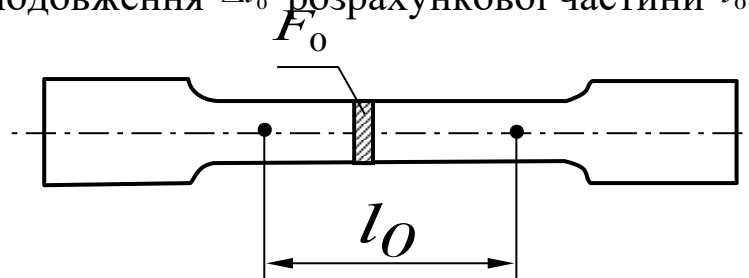
де  $[\Delta l]$  – допустиме подовження.

Після розв'язування перелічених трьох задач, у яких  $[\sigma]$  замінено на  $[\Delta l]$ , слід перевірити умову міцності (44).

### 10.3 Випробування матеріалів на розтяг. Діаграма розтягу

При розрахунках на міцність деталей машин необхідно знати механічні властивості матеріалів. Одним із основних видів випробувань матеріалів є випробування на розтяг. З випробувального матеріалу виготовляється спеціальні циліндричні або призматичні (плоскі) зразки (рисунок 48).

Зразок встановлюється у затискачах і розтягується на спеціальній машині, яка автоматично вимірює навантаження  $P$  і абсолютне подовження  $\Delta l_0$  розрахункової частини  $l_0$  зразка.



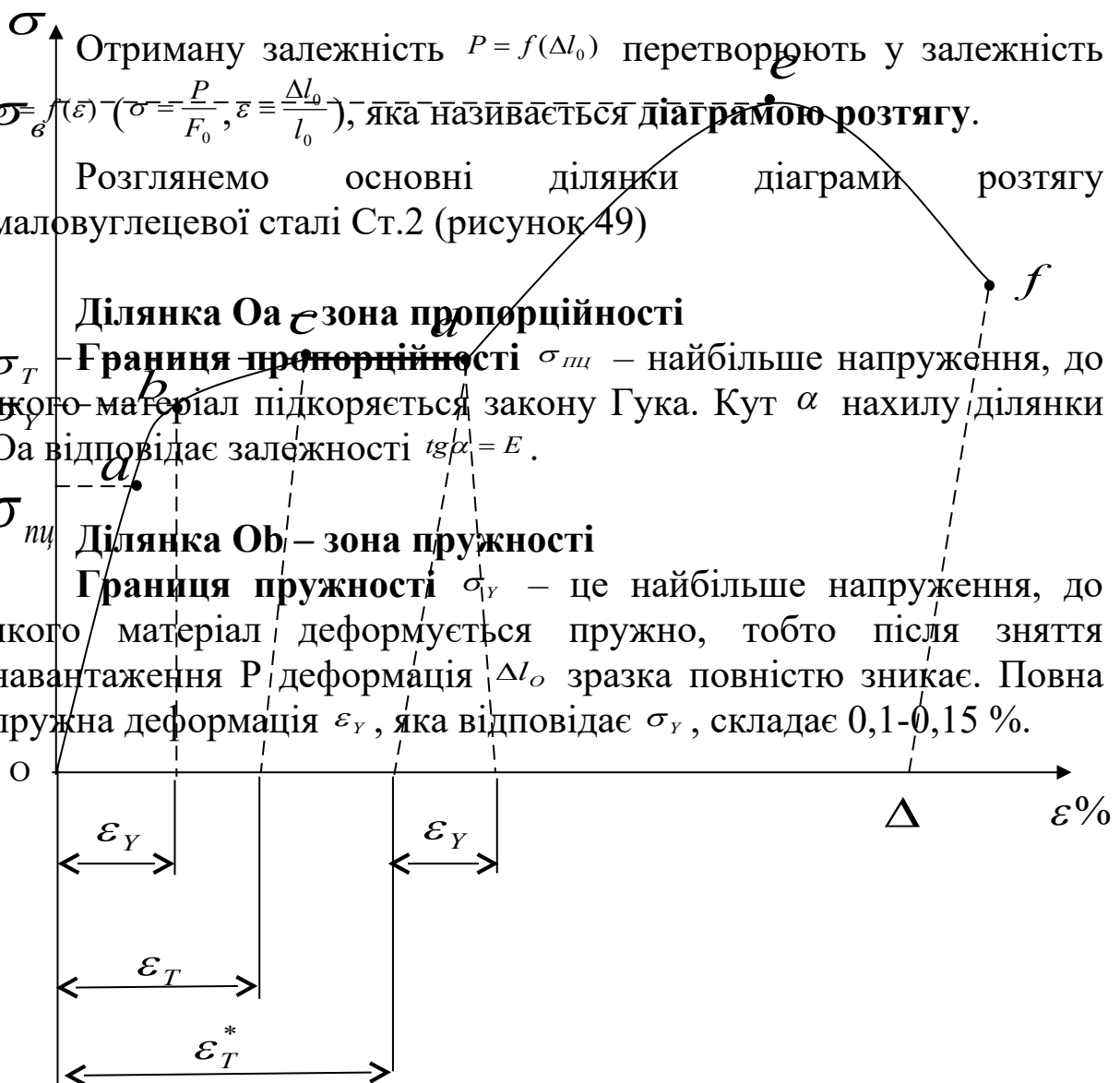
- розрахункова довжина зразка; – довгий зразок;
- короткий зразок; – нормальний зразок

Отриману залежність  $P = f(\Delta l_0)$  перетворюють у залежність  $\sigma = f(\varepsilon)$  ( $\sigma = \frac{P}{F_0}$ ,  $\varepsilon = \frac{\Delta l_0}{l_0}$ ), яка називається **діаграмою розтягу**.

Розглянемо основні ділянки діаграми розтягу маловуглецевої сталі Ст.2 (рисунок 49)

**Ділянка Oa – зона пропорційності**  
**Границя пропорційності  $\sigma_{пл}$**  – найбільше напруження, до якого матеріал підкоряється закону Гука. Кут  $\alpha$  нахилу ділянки Oa відповідає залежності  $tg\alpha = E$ .

**Ділянка Ob – зона пружності**  
**Границя пружності  $\sigma_Y$**  – це найбільше напруження, до якого матеріал деформується пружно, тобто після зняття навантаження  $P$  деформація  $\Delta l_0$  зразка повністю зникає. Повна пружна деформація  $\varepsilon_Y$ , яка відповідає  $\sigma_Y$ , складає 0,1-0,15 %.



Для маловуглецевої сталі Ст. 2  
 $\sigma_{пл} = 200$  МПа,  $\sigma_Y = 220$  МПа,  $\sigma_f = 340$  МПа

Рисунок 49



### **Ділянка cd – площадка текучості**

**Границя текучості  $\sigma_T$**  – це напруження, при якому відбувається текучість матеріалу зразка при постійному навантаженні Р.

**Текучість матеріалу** супроводжується появою залишкових деформацій, які не зникають після зняття навантаження Р. Горизонтальна ділянка cd називається **площадкою текучості**. Точкам с і d відповідають залишкові деформації  $\varepsilon_T$  і  $\varepsilon_T^*$ , які складають відповідно 0,2 і 0,4 %.

### **Ділянка de – зона зміцнення**

**Границя міцності або тимчасовий опір  $\sigma_B$**  – це напруження, яке відповідає максимальній силі Р.

### **Ділянка ef – зона локальної деформації**

При досягненні на діаграмі точки  $e$  на зразку з'являється зона локальної деформації, місцевого звуження, яка називається шийкою. Поблизу шийки деформації швидко зростають, шийка тоншає і, як наслідок, зразок руйнується (точка  $f$ ).

**Пластичність** – це властивість матеріалу сприйняти значні деформації без руйнування. Відносна залишкова деформація  $\delta$  характеризує пластичність матеріалу.

**Крихкість** – властивість матеріалу руйнуватися без залишкових деформацій (чавун, скло, бетон).

Величина  $\delta$  розраховується за формулою

$$\delta = \frac{l_p - l_0}{l_0}, \quad (46)$$

де  $l_p$  – довжина розрахункової частини зразка після руйнування. Якщо  $\delta > 5\%$  – матеріал пластичний (сталь, мідь, алюміній). Для маловуглецевої сталі Ст.2 величина  $\delta$  дорівнює 30 %. Якщо  $\delta < 5\%$  – матеріал крихкий.

## 10.4 Допустиме напруження

У деталях машин, які виготовлені з пластичних матеріалів, напруження не повинні перевищувати границю текучості  $\sigma_T$ , тому що в них неприпустимі залишкові деформації. У випадках, коли матеріал деталей крихкий, напруження обмежуються  $\sigma_B$ . Проте в умові міцності (44) напруження  $\sigma$  порівнюється з допустимим напруженням  $[\sigma]$ . Це пояснюється такими обставинами:

1 Неоднорідність характеристик матеріалу, тобто на різних зразках різні значення  $\sigma_T$  і  $\sigma_B$ .

2 Величини і характер найбільших навантажень конструкції не завжди відомі.

3 Результати розрахунків на міцність внаслідок прийнятих гіпотез мають приблизний характер.

Допустиме напруження  $[\sigma]$  визначається з таких співвідношень:

- для пластичних матеріалів  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{K_T}$ ,  $K_T = 1,4 \div 1,6$ ;
- для крихких матеріалів  $[\sigma] = \frac{\sigma_B}{K_B}$ ,  $K_B = 2,5 \div 3,0$ ,

де  $K_T$  і  $K_B$  – коефіцієнти запасу міцності. Для маловуглецевої сталі Ст.2 –  $[\sigma] = 160$  МПа, для сірого чавуну –  $[\sigma] = 80$  МПа.

### 10.5 Побудова епюри подовжньої сили

**Епюра подовжньої сили  $N$**  – це графічне зображення розподілення сили  $N$  вздовж осі стержня.

Розглянемо стержень, який розтягується силою  $P$  (рисунок 50).

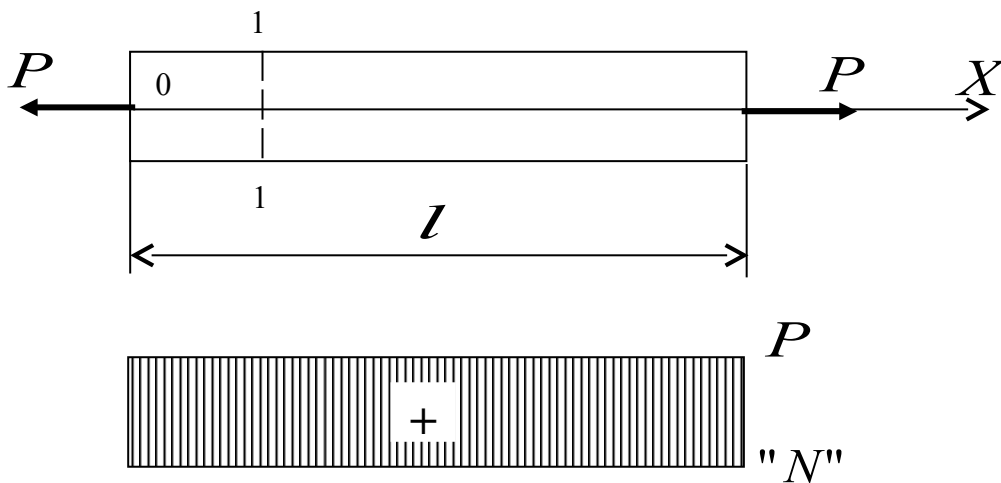


Рисунок 50

У межах  $0 \leq x \leq l$  в довільному перерізі (1-1) виникає додатна сила  $N$ , яка зрівноважує силу  $P$ :  $N = P$ . Тобто епюра подовжньої сили  $N$  має одну ординату по всій довжині стержня.

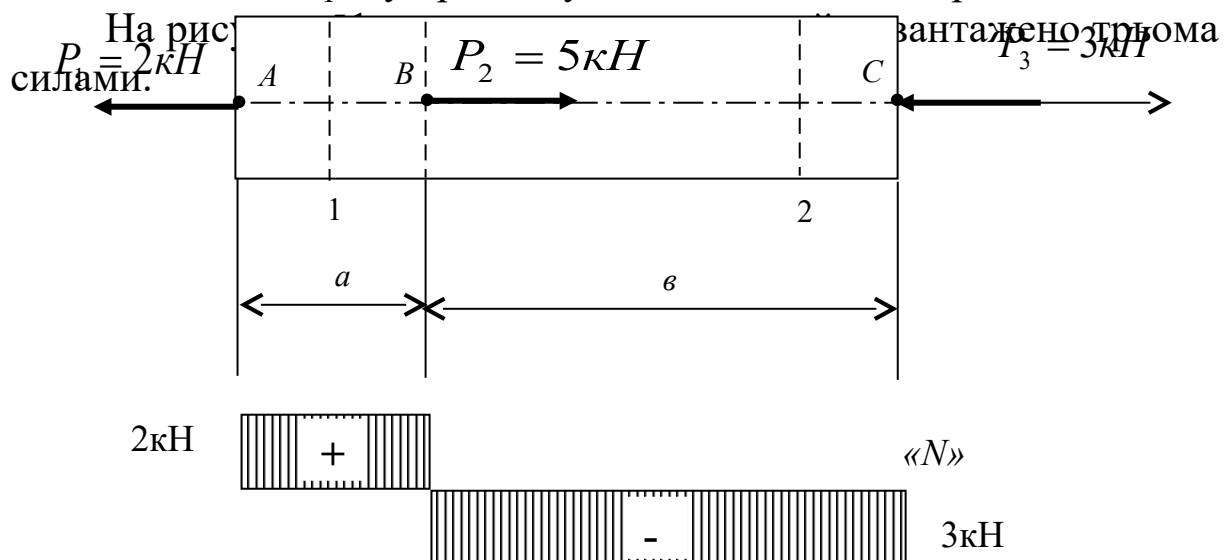


Рисунок 51

Сили  $P_1$ ,  $P_2$  і  $P_3$  утворюють зрівноважену систему:  $-P_1 + P_2 - P_3 = 0$ . Подовжну силу  $N$  в перерізі (1-1) можна визначити з умови рівноваги правої або лівої частини стержня:

$$N_1 = P_1 = 2\text{кН} \quad (\text{ліва частина}),$$

$$N_1 = P_2 - P_3 = 2\text{кН} \quad (\text{права частина}).$$

Величина сили  $P_i$  приймається додатною, якщо вона розтягує відповідну частину стержня і від'ємною, якщо стискає. В межах ділянки  $0 < x < a$  значення  $N_1$  незмінне.

Подовжну силу  $N$  в перерізі (2-2) також визначимо з умови рівноваги правої або лівої частини стержня:

$$N_2 = P_1 - P_2 = -3\text{кН} \quad (\text{ліва частина}),$$

$$N_2 = -P_3 = -3\text{кН} \quad (\text{права частина}).$$

У межах ділянки  $a < x < a+b$  значення  $N_2$  незмінне. Зазначимо, що в перерізах А, В і С епюра  $N$  має стрибки. Їх величини дорівнюють силам  $P_1$ ,  $P_2$  і  $P_3$ , прикладеним до стержня в цих перерізах.

## 10.6 Розрахунок стержня на міцність

Навантаження стержня показано на рисунку 52. Визначимо діаметр  $d$  круглого перерізу стержня з умови міцності на розтяг при  $[\sigma] = 160$  МПа (сталь Ст. 2).

1 Побудуємо епюру подовжної сили  $N$ , розглядаючи три ділянки:

$$\begin{aligned} 0 < x < 0,5\text{м} \quad N_1 &= -4\text{кН}, \\ 0,5 < x < 1,0\text{м} \quad N_2 &= -4 + 18 = 14\text{кН}, \\ 1,0 < x < 1,5\text{м}, \quad N_3 &= -4 + 18 - 6 = 8\text{кН}. \end{aligned}$$

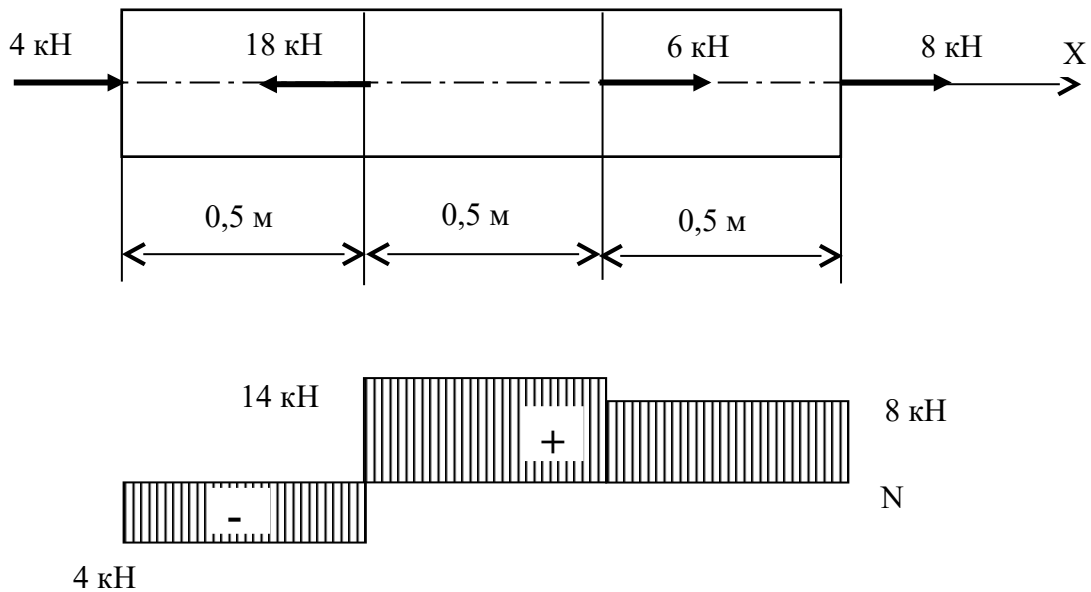
2 Запишемо умову міцності на розтяг:

$$\sigma = \frac{\max N}{F} \leq [\sigma].$$

Знайдемо величину  $F$  площі перерізу стержня:

$$F = \frac{\max N}{[\sigma]} = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{14 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 0,9 \text{ см}^2.$$

Враховуючи, що  $F = \frac{\pi d^2}{4}$ , визначимо  $d = 11$  мм.



## 10.7 Напруження в Рисунок 52 у перерізі

У перерізі перпендикулярному до осі стержня, виникає нормальне напруження  $\sigma = \frac{P}{F}$  (п. 10.1). Умовно розріжемо стержень на дві частини довільним перерізом, який відповідає куту  $\alpha$  між нормаллю  $n_\alpha$  і віссю стержня (рисунок 53). Якщо кут  $\alpha$  відраховується проти стрілки годинника, то приймається  $\alpha > 0$ , якщо за стрілкою –  $\alpha < 0$ .

Запишемо умову рівноваги частини стержня:

$$p_\alpha \cdot F_\alpha - \sigma \cdot F = 0,$$

де  $p_\alpha$  – повне напруження в похилому перерізі;

$F_\alpha$  – площа похилого перерізу.

Враховуючи, що  $F = F_\alpha \cdot \cos \alpha$ , отримуємо

$$P_\alpha = \sigma \cdot \cos \alpha .$$

**Нормальне  $\sigma_\alpha$  і дотичне  $\tau_\alpha$  напруження** в похилому перерізі – це дві складові повного напруження  $P_\alpha$ , які дорівнюють

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= p_\alpha \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha , \\ \tau_\alpha &= p_\alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha . \end{aligned}$$

**Дотичне напруження  $\tau_\alpha$**  лежить у площині перерізу. Приймається  $\tau_\alpha > 0$ , якщо воно намагається повертати частину стержня за стрілкою годинника,  $\tau_\alpha < 0$  – якщо проти годинникової стрілки.

У двох взаємно перпендикулярних перерізах дотичні напруження  $\tau_\alpha$  і  $\tau_\beta$  рівні за величиною, але протилежні за знаками:

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta \quad \left( \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \right).$$

Максимум  $\tau_\alpha$  відповідає куту  $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$  і дорівнює  $\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$ .

Руйнування крихких матеріалів (чавун) при стиску відбувається вздовж перерізів, які відповідають  $\tau_{\max}$  (рисунок 54).

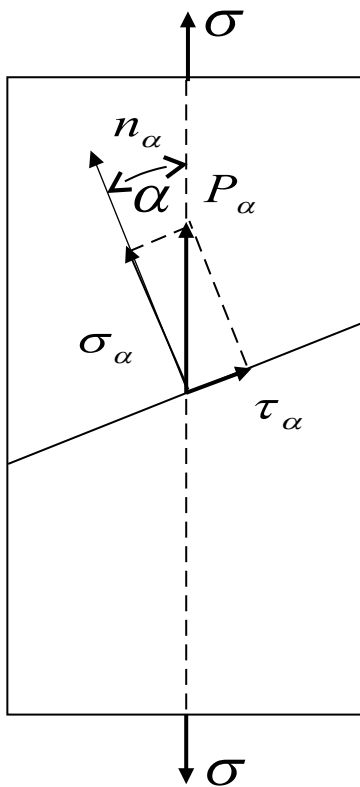


Рисунок 53

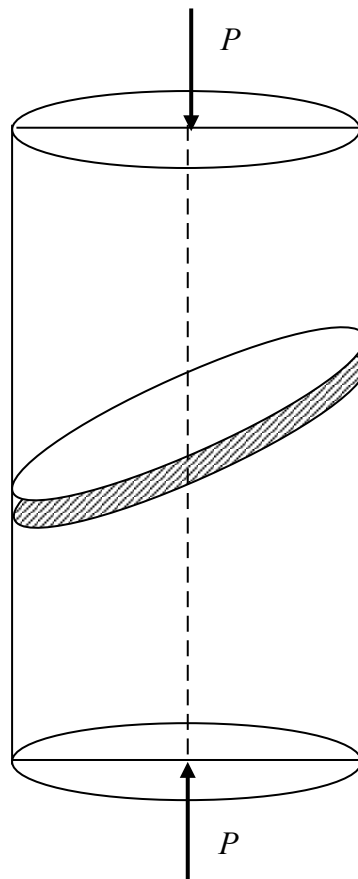


Рисунок 54

## 11 РОЗРАХУНКИ НА ЗРІЗ

### 11.1 Деформація зсуву

Розглянемо брус, до якого прикладені дві рівні, паралельні, протилежно спрямовані сили, що знаходяться на незначній відстані  $S$  (рисунок 55). Прикладом такої дії сил є розрізання металевого прута на гільйотині.

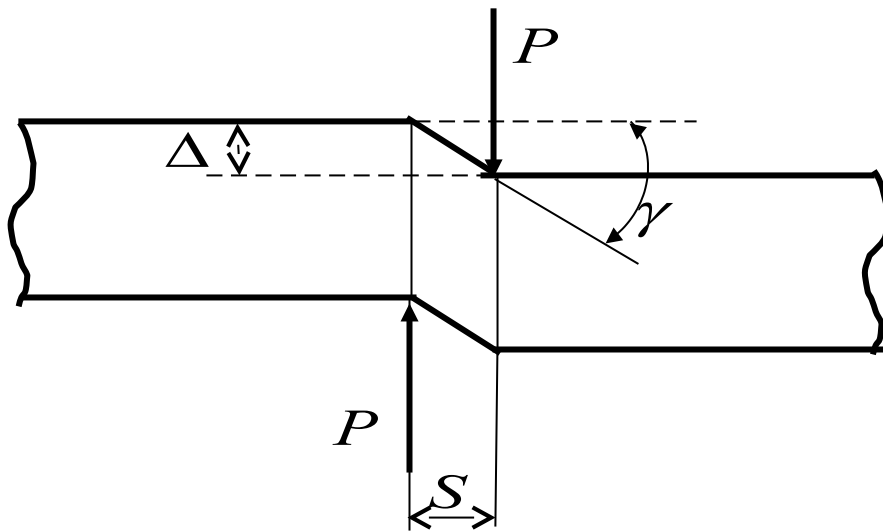


Рисунок 55

#### Геометричний зміст задачі

Деформація бруса при зсуві в зоні дії зусиль  $P$  полягає в перекошуванні прямих кутів. Тобто при зсуві виникає **кутова деформація**  $\gamma$ , або **кут зсуву**, який дорівнює

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta}{S}, \quad (47)$$

де  $\Delta$  – **абсолютний зсув**.

### Статичний зміст задачі

Умовно розріжемо брус на дві частини (рисунок 56).

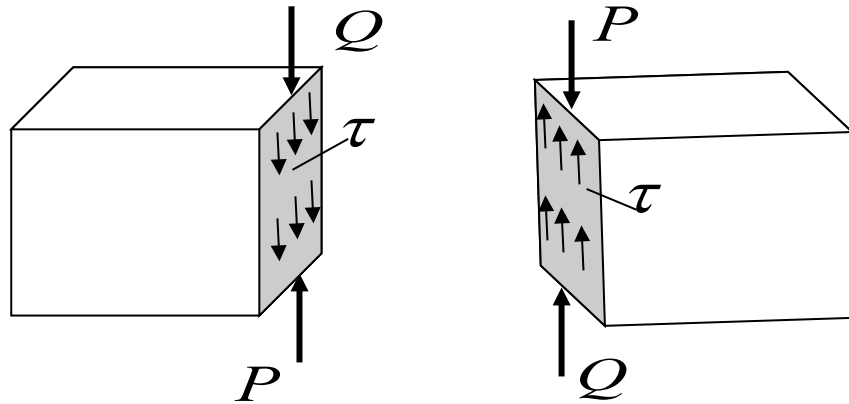


Рисунок 56

Поперечна сила  $Q$  зусилля взаємодії двох частин бруса, перетворюється на зовнішню силу. Умова рівноваги кожної частини бруса має вигляд  $Q = P$ .

Для точок перерізу з площею  $F$  визначимо напруження зрізу  $\tau$  за формулою

$$\tau = \frac{Q}{F}, \quad (48)$$

Напруження  $\tau$  дотичне, тому що лежить у площині перерізу бруса.

### Фізичний зміст задачі

Згідно з гіпотезою про лінійну залежність напруження від деформацій, дотичне напруження  $\tau$  і кут зсуву  $\gamma$  зв'язані законом Гука:

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (49)$$

де  $G$  – модуль зсуву.

Модуль пружності  $E$ , коефіцієнт Пуассона  $\mu$  і модуль зсуву  $G$  пов'язані співвідношенням  $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ .

Згідно з формулами (47) – (49) абсолютний зсув  $\Delta$  розраховується за формулою

$$\Delta = \frac{P \cdot S}{G \cdot F}. \quad (50)$$



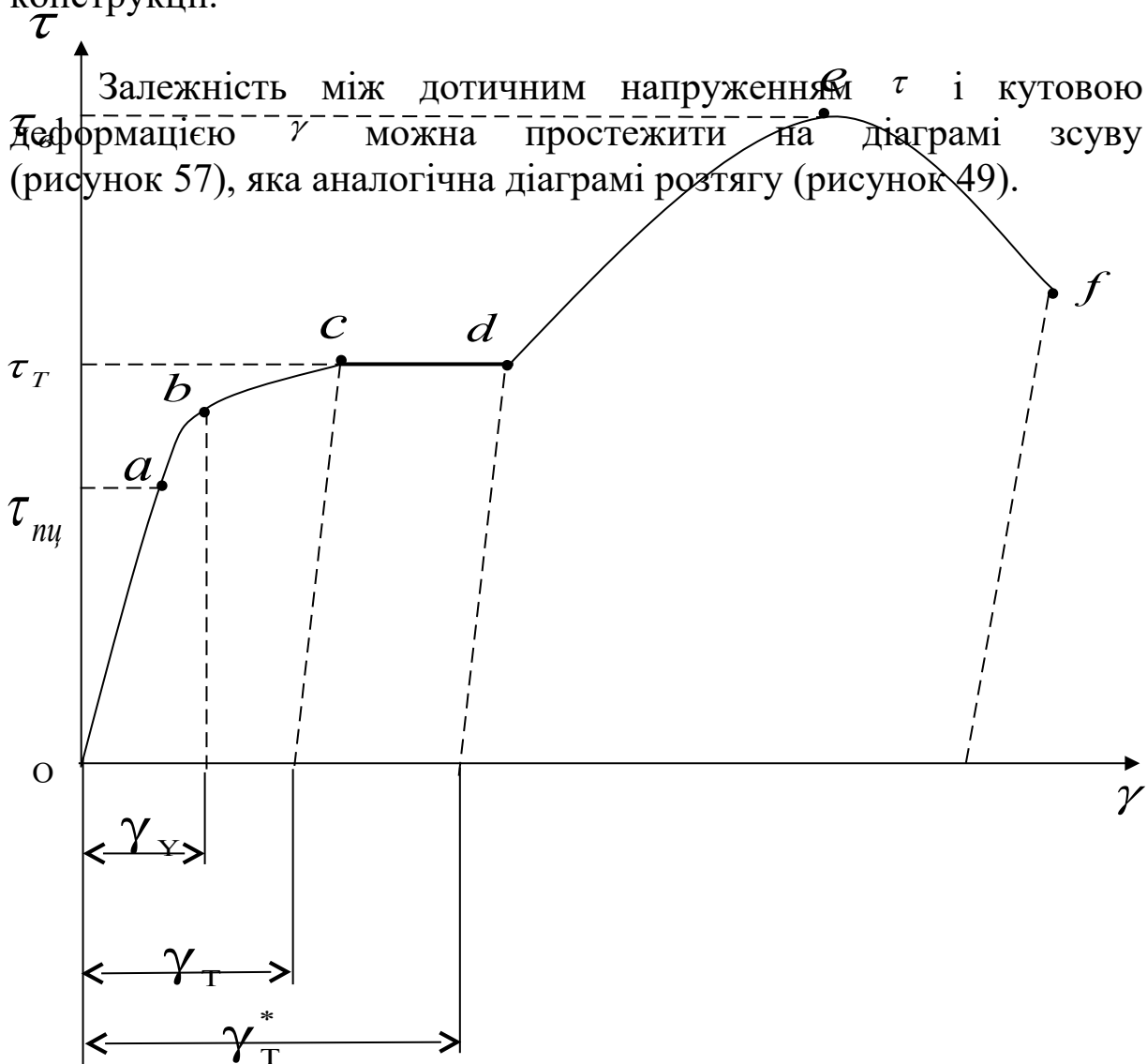
Залежність (50) на відміну від виразу (49), виражає закон Гука, записаний в абсолютних величинах  $\Delta$  і  $P$ . Добуток  $G \cdot F$  – це жорсткість перерізу на зсув.

## 11.2 Умова міцності на зріз

При деформації зсуву умова міцності на зріз має вигляд

$$\tau \leq [\tau], \text{ або } \frac{P}{F} \leq [\tau],$$

де  $[\tau]$  – допустиме напруження на зріз, яке залежить від властивостей матеріалу, характеру навантаження і особливостей конструкції.



– границя пропорційності, – границя текучості, –  
 границя міцності, – границя деформації, , –  
 залишкова деформація

Рисунок 57

Діаграма зсуву отримується при крученні тонкостінної труби (рисунок 58) парою сил з моментом  $M$ .

При навантаженні відстань між гранями  $ab$  і  $cd$  не змінюється, тобто нормальне напруження  $\sigma$  на цих гранях дорівнює нулю.

При навантаженні довжина граней  $ab$  і  $cd$  не змінюється, тобто нормальне напруження  $\sigma$  на гранях  $ac$  і  $bd$  дорівнює нулю.

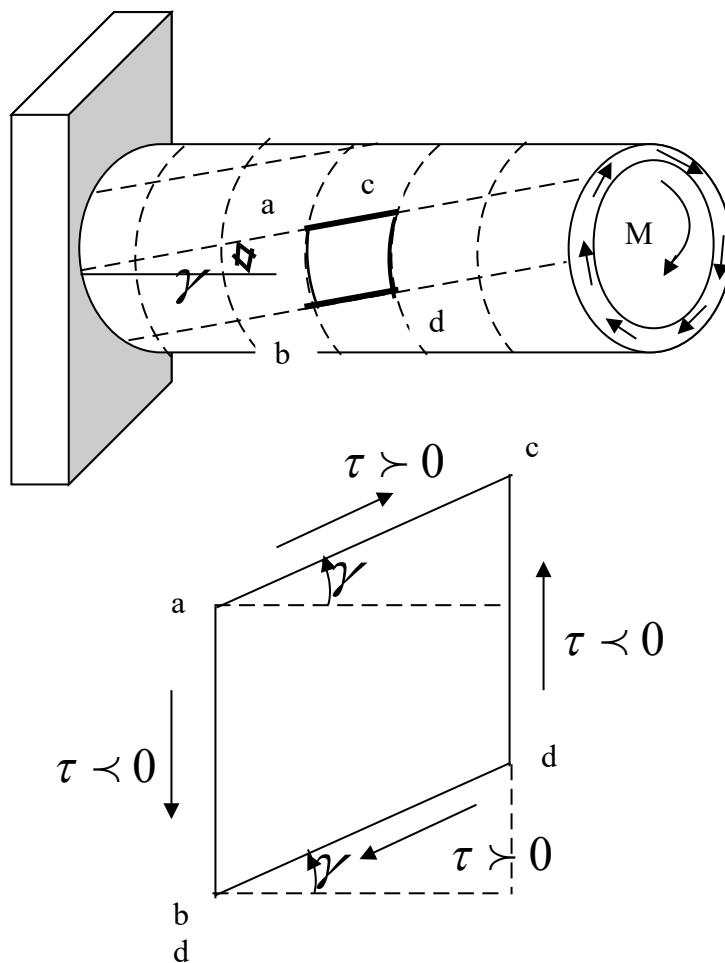


Рисунок 58

На гранях  $ab$  і  $cd$  присутні дотичні напруження  $\tau$ , які відповідають зовнішньому навантаженню  $M$  і утворюють пару сил.

Якщо елемент  $acdb$  знаходиться в рівновазі, то на гранях  $ac$  і  $bd$  теж діють дотичні напруження  $\tau$  і утворюють пару сил. Таким чином, дотичне напруження  $\tau$  на взаємно перпендикулярних гранях ( $ac \perp cd$  і  $ab \perp bd$ ) рівні за величиною і протилежні за знаком. Пружній стан елемента, для якого характерна присутність на гранях тільки дотичних напружень  $\tau$ , називається **чистим зсувом**. Слід зазначити, що кутова деформація  $\gamma$  є однаковою для кожного поперечного перерізу труби  $\gamma = const$ .

### 11.3 Розрахунок на зріз зварного з'єднання

На зріз прийнято розраховувати зварні кутові шви, які з'єднують паралельні або перпендикулярні листи (рисунок 59).

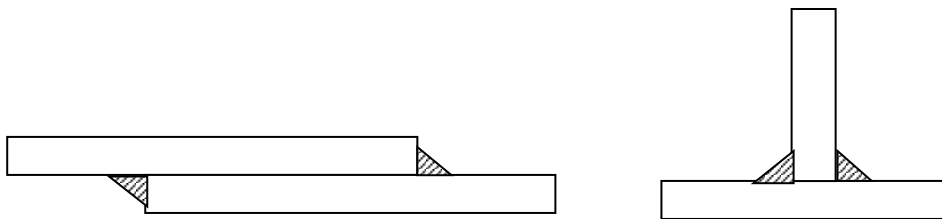


Рисунок 59

Якщо напрямок кутового шва перпендикулярний до зусилля  $P$ , то шов називається лобовим. Шви, які паралельні зусиллю  $P$ , мають назву флангові. Поперечний переріз зварного кутового шва має форму рівнобедреного прямокутного трикутника (рисунок 60).

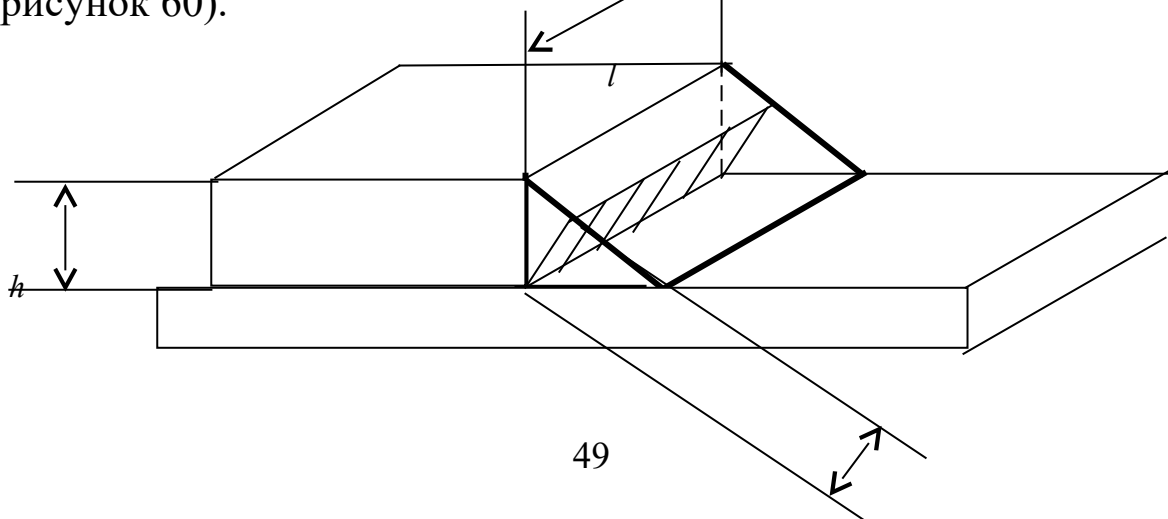


Рисунок 60

Руйнування шва відбувається в площині мінімальної площі, що відповідає висоті цього трикутника:  $m = h \cdot \cos 45$ . Тоді, розрахункова площа шва складає  $F = m \cdot l = 0,7h \cdot l$ .

Визначимо довжину  $l$  флангових швів, що з'єднують дві полоси (рисунок 61). Розтягуюча сила  $P = 140\text{kH}$ , допустиме напруження на зріз  $[\tau] = 110\text{МПа}$ , товщина пластини  $h = 10\text{мм}$ .

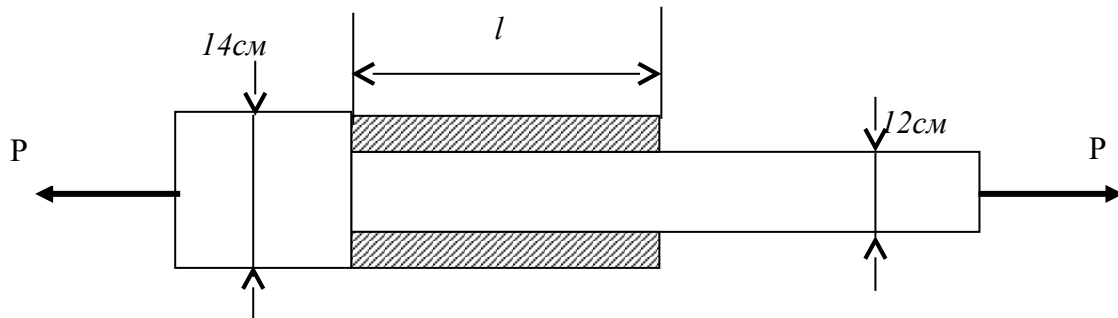


Рисунок 61

Запишемо умову міцності на зріз, враховуючи що кількість швів  $n = 2$ :

$$\tau = \frac{P}{n \cdot F} \leq [\tau].$$

Знайдемо довжину  $l$ : 
$$l = \frac{P}{2 \cdot 0,7h[\tau]} = \frac{140 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,7 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 110 \cdot 10^6} = 0,09\text{м}.$$

Фактична довжина флангового шва приймається більшою на 10 мм, щоб врахувати технологічні дефекти при зварюванні.

Наприкінці зазначимо, що також на зріз розраховуються шліцьові, шпонкові, заклепкові, болтові з'єднання.

## 12 КРУЧЕННЯ СТЕРЖНЕЙ

### 12.1 Напруження і деформації

Стержень працює на кручення, якщо в площинах його кінцевих перерізів, протилежно одна одній, діють пари сил з моментами  $M$  (рисунок 62). Стержень, що скручується, називається валом.

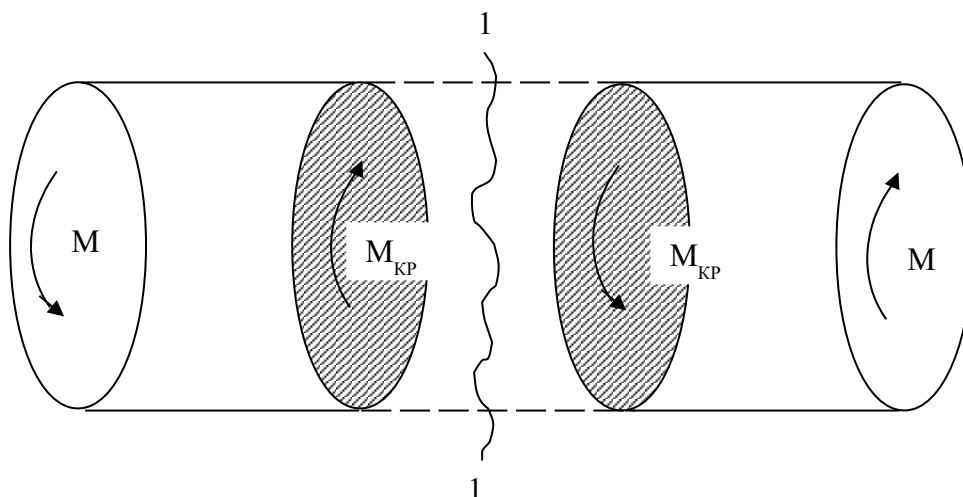


Рисунок 62

За умови рівноваги частин вала в довільному його перерізі (1-1) з'являється єдиний внутрішній силовий фактор – крутний момент  $M_{кр} = M$ .

Розглядаючи кручення круглого вала за схемою, наведеною на рисунку 63, зробимо такі висновки:

1 Довільний переріз вала повертається на кут  $\varphi$  – **кут повороту переріза**. Для кінцевого перерізу ( $x = l$ ) маємо  $\varphi = \varphi_e$ .

2 Продольні лінії сітки повертаються на кут  $\gamma$  (**кутова деформація**), на який змінюються прями кути прямокутника  $acdb$ .

3 Поперечні перерізи вала залишаються плоскими, відстань між ними не змінюється, тобто на гранях  $ab$  і  $cd$  нормальне напруження  $\sigma$  дорівнює нулю.

4 Довжина граней  $ab$  і  $cd$  не змінюється, тобто нормальне напруження  $\sigma$  на гранях  $ac$  і  $bd$  дорівнює нулю.

5 Радіуси перерізів залишаються прямолінійним, довжина їх не змінюється, тобто нормальне напруження  $\sigma$  на поверхнях елементів  $acdb, a_1c_1d_1b_1, \dots$  дорівнює нулю.

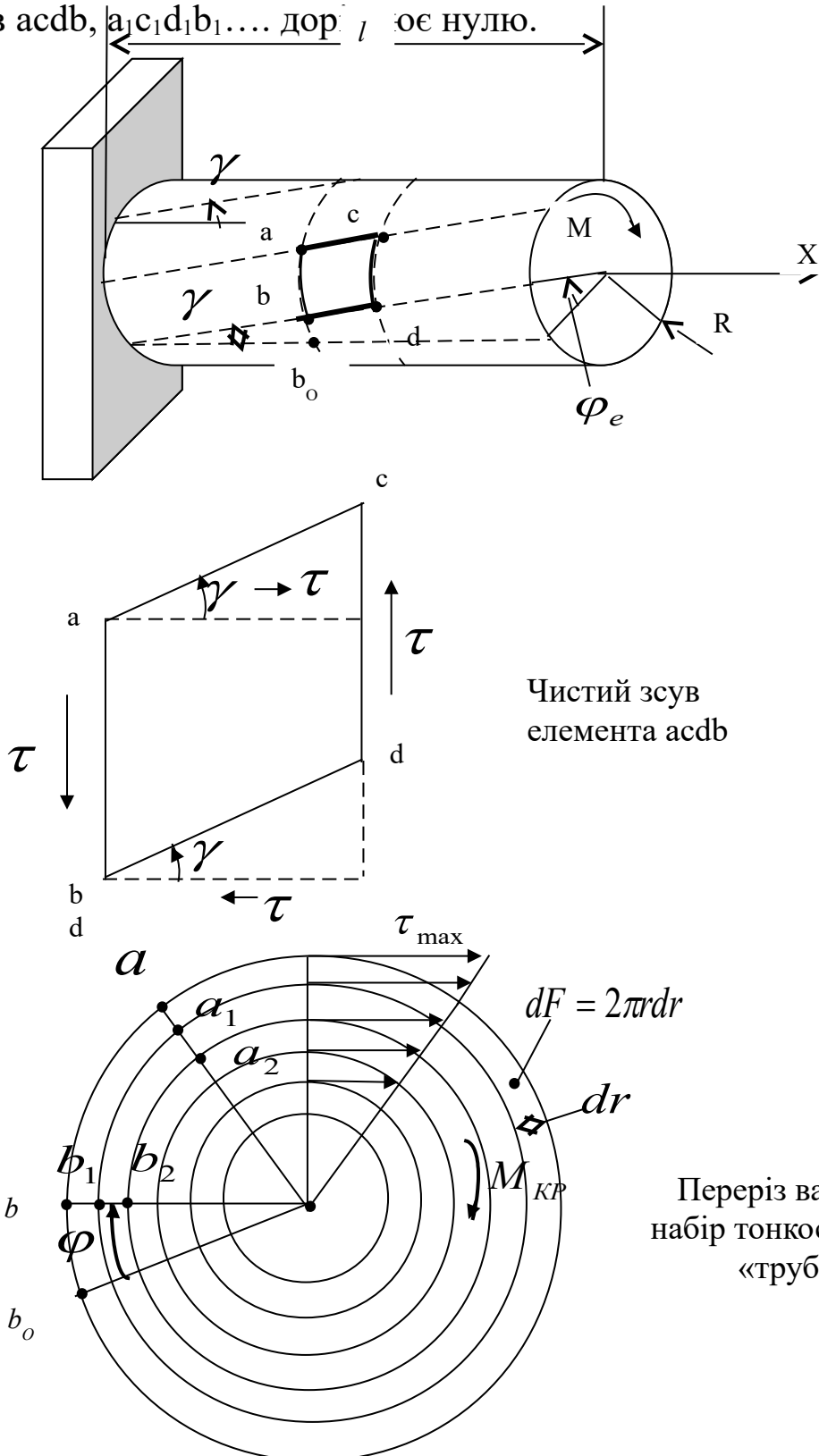


Рисунок 63

Перелічені положення дозволяють уявити вал при крученні як набір ізольованих тонкостінних «труб» (рисунки 58), що вкладені одна в одну і закручуються на однаковий кут  $\varphi$  (рисунки 63). Таким чином, кожний елемент  $a_1c_1d_1b_1, \dots$  знаходиться в стані чистого зсуву і при  $r = \text{const}$  (у кожній «трубі») маємо:

1 У поперечному перерізі напруження  $\tau$  спрямовані по дотичній до кола відносно центра вала. Тоді складемо рівняння рівноваги (статична сторона задачі):

$$\int_F \tau \cdot r dF = M_{KP} \quad (51)$$

де  $dF = 2\pi r dr$  – площа перерізу «труби» радіуса  $r$ ;  
 $F$  – площа перерізу вала.

2 Кутова деформація  $\gamma = \text{const}$  (у межах «труби») зв'язана з кутом повороту перерізу  $\varphi$  співвідношенням (геометрична сторона задачі)

$$\begin{aligned} \gamma \cdot x &= r \cdot \varphi, \text{ або} \\ \gamma_\varphi &= r \cdot \frac{\varphi}{x} = r \cdot \Theta, \end{aligned} \quad (52)$$

де  $\Theta = \frac{\varphi}{x}$  – відносний кут повороту.

3 Якщо для кожної «труби»  $r = \text{const}$  і  $\gamma = \text{const}$ , то в межах цієї «труби»  $\Theta = \frac{\gamma}{r} = \text{const}$  не залежить від  $x$ .

Крім того, у кожному перерізі вала  $x = \text{const}$  і  $\varphi = \text{const}$ , отже,  $\Theta = \frac{\varphi}{x} = \text{const}$  не залежить від  $r$ .

Таким чином,  $\Theta = const$  для вала в цілому, тобто кут повороту  $\varphi = \Theta \cdot x$  лінійно залежить від координати  $x$ , а кутова деформація  $\gamma = \Theta \cdot r$  лінійно залежить від радіуса  $r$ . Величина відносного кута повороту  $\Theta$  вказує на скільки градусів (радіан) змінюється кут повороту  $\varphi$  на одиницю довжини вала і дорівнює

$$\Theta = \frac{\varphi_e}{l}. \quad (53)$$

Враховуючи лінійну залежність між деформаціями  $\gamma$  і напруженнями  $\tau$ , а також співвідношення (52), запишемо закон Гука для кручення вала у вигляді (фізична сторона задачі)

$$\tau = \gamma \cdot G = r \cdot \Theta G. \quad (54)$$

З формул (51) і (54) маємо

$$M_{KP} = \int_F \tau r dF = G \Theta \cdot \int_F r^2 dF = G \Theta J_P, \text{ або}$$

$$\Theta = \frac{M_{KP}}{G J_P}. \quad (55)$$

Тут  $J_P = \int_F r^2 dF$  – полярний момент інерції перерізу вала,  $G J_P$  – жорсткість вала на кручення.

Остаточно отримуємо такі формули:

- повний кут повороту вала

$$\varphi_e = \Theta l = \frac{M_{KP} \cdot l}{G J_P}; \quad (56)$$

- дотичне напруження  $\tau$  лінійно залежить від  $r$ :

$$\tau = r \Theta G = \frac{M_{KP} \cdot r}{J_P}; \quad (57)$$

- найбільше напруження  $\tau_{MAX}$  досягається при найбільшій відстані від центра вала ( $r = R$ ):

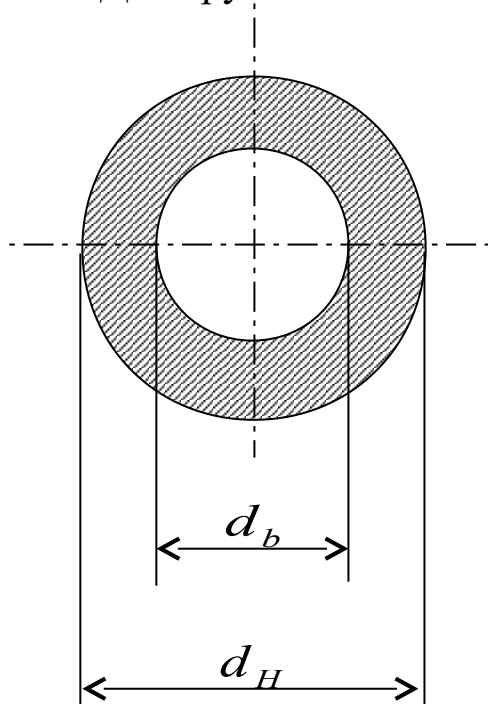
$$\tau_{MAX} = \frac{M_{KP}}{W_P},$$

де  $W_P = \frac{J_P}{R}$  – полярний момент опору при крученні.



Для круглого суцільного вала діаметра  $d$   $J_P = \frac{\pi d^4}{32}$ ,  $W_P = \frac{\pi d^3}{16}$

Для круглого полого вала (рисунок 64):



(1-),

(1-),

.

Рисунок 64

Внутрішня частина вала при крученні навантажена слабо, тобто для зниження ваги вала доцільне використання полых валів.

Так, при  $\alpha = 0,4$ , вага вала знижується на 16 %, а  $\tau_{MAX}$  підвищується лише на 2,5 %.

**Умова міцності при крученні:**

$$\tau_{MAX} < [\tau], \text{ або } \frac{M_{KP}}{[\tau]} \leq W_P, \quad (58)$$

де  $[\tau]$  – допустиме напруження при крученні.

**Умова жорсткості при крученні:**

$$\Theta \leq [\Theta], \text{ або } \frac{M_{KP}}{G[\Theta]} \leq J_P \quad (59)$$

де  $[\Theta] \approx 0,3$  град/м – допустимий відносний кут повороту.

Важливо зауважити, що формули (51)-(56) справедливі для ділянки вала, у межах якої  $M_{KP} = const$  і  $d = const$ .

## 12.2 Побудова епюри крутного моменту. Розрахунок вала на міцність

Розглянемо вал, який закручується зовнішніми моментами  $M$  (рисунок 65).

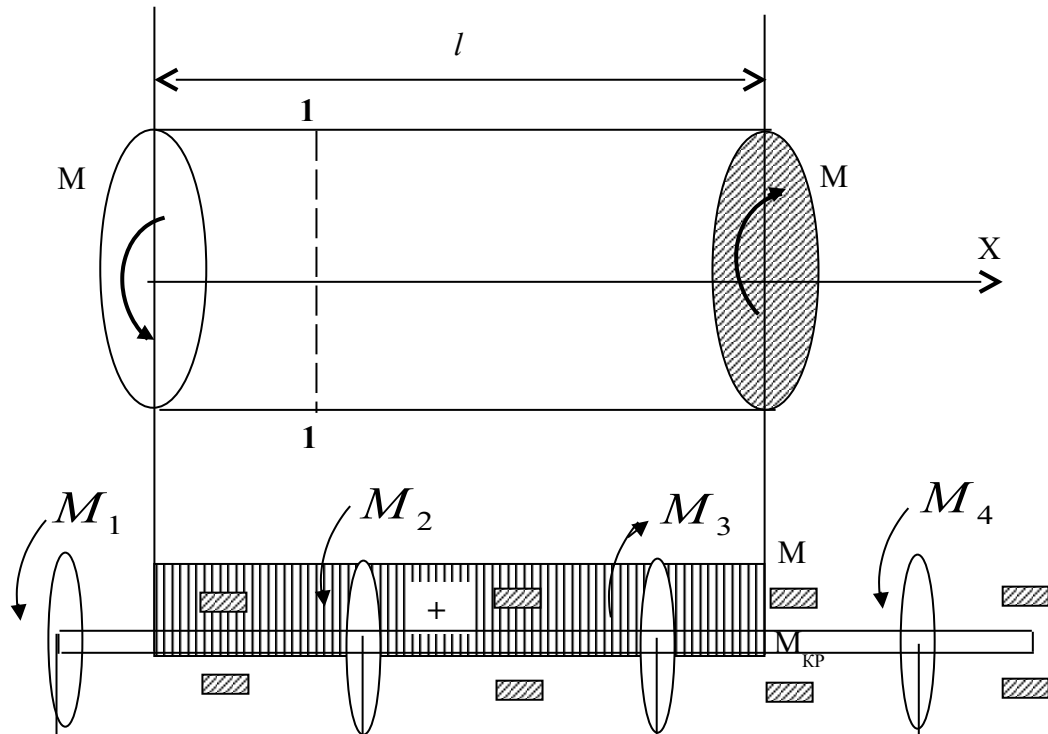


Рисунок 65

$$l_1 = 0,5\text{ м}$$

$$l_2 = 0,5\text{ м}$$

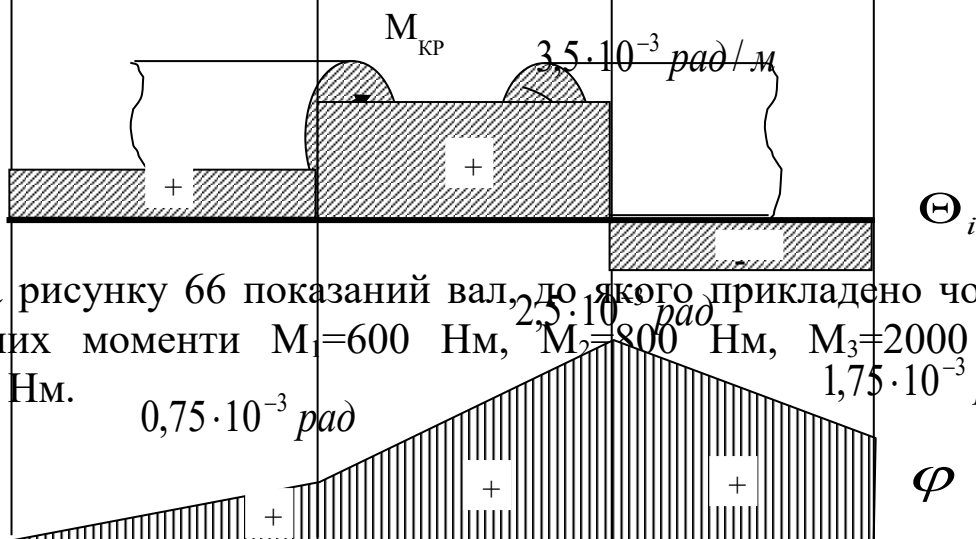
$$l_3 = 0,5\text{ м}$$

У межах  $0 \leq x \leq l$  в довільному перерізі (1-1) виникає крутний момент  $M_{\text{кр}}$ , який дорівнює моменту  $M$ .  
 У цьому епюрі крутного моменту  $M_{\text{кр}}$  має однакову ординату по всій довжині валу. Крутний момент  $M_{\text{кр}}$  приймається додатною, якщо на кожну сторону валу діє за годинниковою стрілкою, від'ємною – проти.

$$600\text{ Нм}$$

$$400\text{ Нм}$$

$$600\text{ Нм}$$



На рисунку 66 показаний вал, до якого прикладено чотири зовнішні моменти  $M_1=600$  Нм,  $M_2=800$  Нм,  $M_3=2000$  Нм,  $M_4=600$  Нм.

$$0,75 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

$$2,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

$$1,75 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

Рисунок 66

Визначимо  $M_{KP}$  на кожній ділянці вала:

- 1)  $0 \leq x \leq 0,5\text{ м} : M_{KP} = M_1 = 600\text{ Нм} > 0$ ,
- 2)  $0,5 \leq x \leq 1\text{ м} : M_{KP} = M_1 + M_2 = 1400\text{ Нм} > 0$ ,
- 3)  $1 \leq x \leq 1,5\text{ м} : M_{KP} = M_1 + M_2 - M_3 = -600\text{ Нм} < 0$ .

Будуємо епюру  $M_{KP}$ . На границях ділянок епюра  $M_{KP}$  має «стрибки», значення яких дорівнюють величинам відповідних зовнішніх моментів  $M_i$  (рисунок 66).

Визначимо діаметр перерізу вала при  $[\tau]=20$  кН,  $[\Theta]=0,2$  град/м =  $3,5 \cdot 10^{-3}$  рад/м,  $G=8 \cdot 10^5$  МПа.

Максимум  $M_{KP}$  знаходиться на другій ділянці вала і складає:

$$M_{MAX} = 1400 \text{ Нм.}$$

Діаметр вала з умови міцності (58) дорівнює

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1400}{\pi \cdot 20 \cdot 10^6}} = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Діаметр вала з умов жорсткості (59) дорівнює

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\max}}{G \cdot \pi \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1400}{8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 3,5 \cdot 10^{-3}}} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Приймаємо більше значення  $d = 8 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$

Визначимо  $\Theta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) для кожної ділянки вала за формулою (55):

$$\Theta_1 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}, \quad \Theta_2 = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}, \quad \Theta_3 = -1,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}.$$

Кут повороту  $\varphi_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) на кожній ділянці вала розраховуємо за формулою:

$$\varphi_i = \Theta_i \cdot l_i$$

$$\varphi_1 = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ рад}, \quad \varphi_2 = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ рад}, \quad \varphi_3 = -0,75 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Визначимо кути повороту окремих перерізів вала:

$$\varphi(x=0) = 0,$$

$$\varphi(x=0,5\text{м}) = \varphi_1 = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

$$\varphi(x=1\text{м}) = \varphi_1 + \varphi_2 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

$$\varphi(x=1,5\text{м}) = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Будуємо епюри  $\Theta$  і  $\varphi$  (рисунок 66).

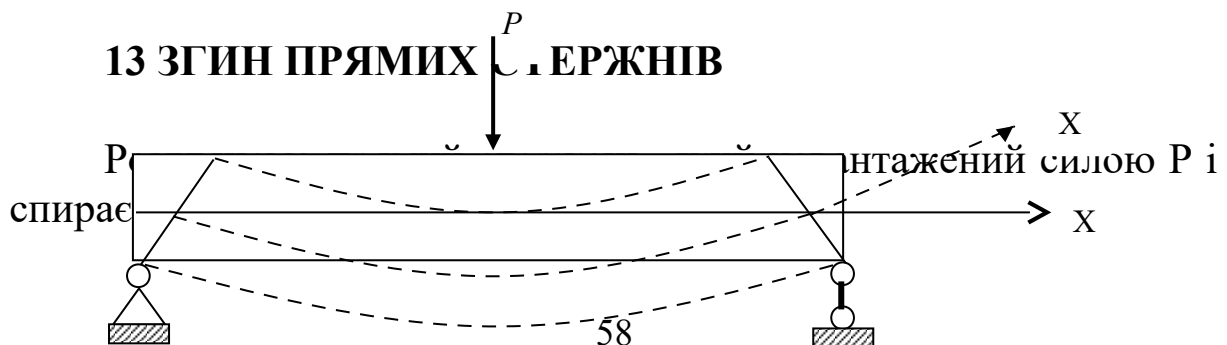
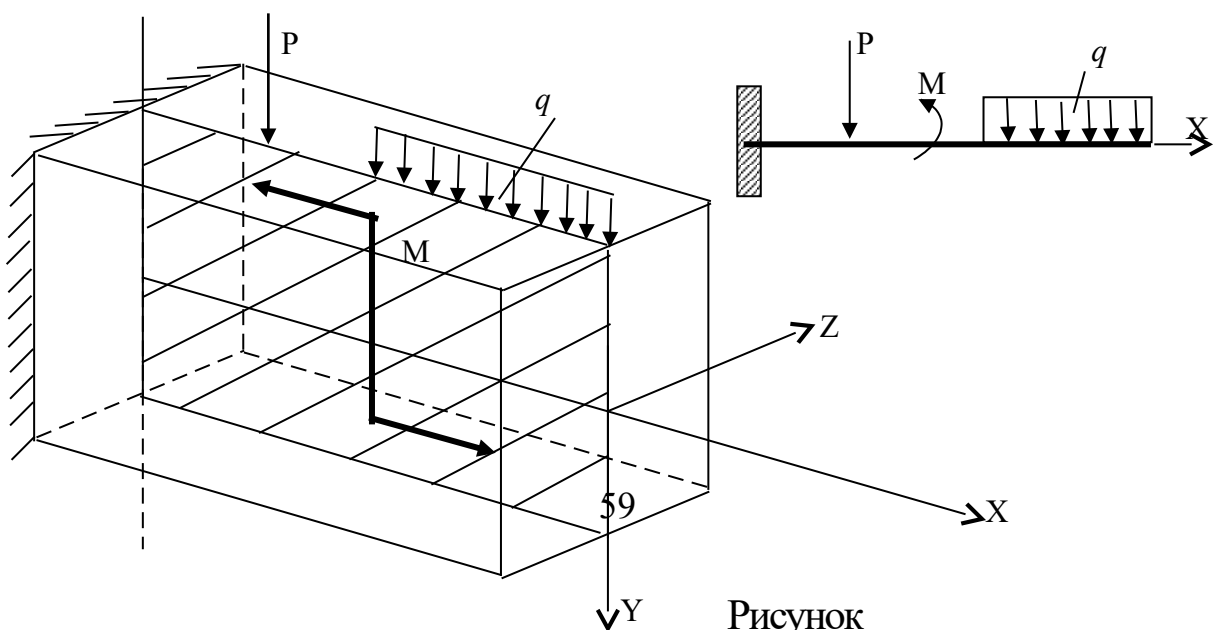


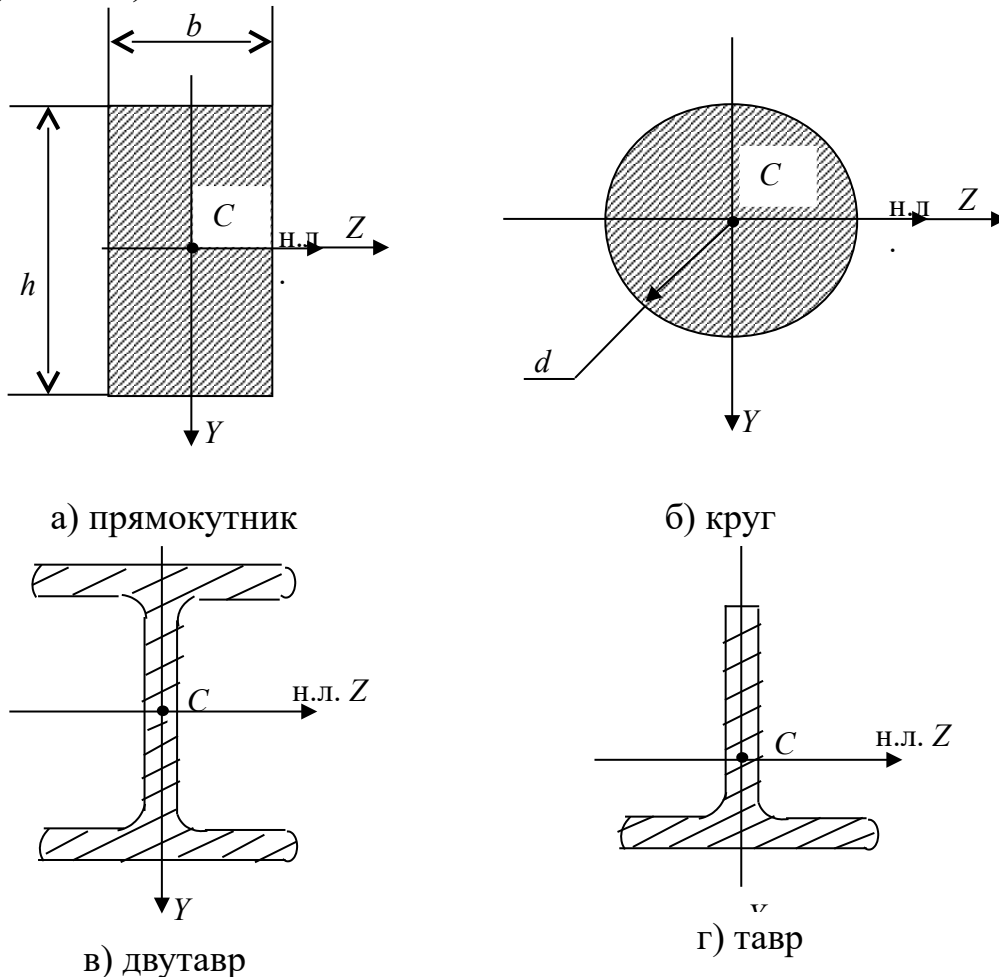
Рисунок 67

**Згин** – це деформація, при якій вісь стержня (вісь  $X$ ) викривляється. Стержень, що працює на згин, називається **балкою**. На згин працює значна більшість деталей машин: вали, лопатки турбін, болти, осі залізничних вагонів, зуби шестерень, важелі приладів.

Крім зосереджених сил, до згину балки призводять пари сил і розподілені навантаження (рисунок 68). Припускається, що всі навантаження належать одній **силовій площині**. При розрахунках балку заміняють її віссю.



Найчастіше перерізи балок мають хоча б одну вісь симетрії (рисунок 69).



$C$  – центр ваги перерізу

Рисунок 69

Вісь симетрії перерізу (наприклад  $Y$ ) і вісь балки  $X$  утворюють **головну площину**. Далі розглядається **плоский згин** балки, при якому **силова площина і головна площина співпадають**.

### 13.1 Внутрішні зусилля при згині

Розглянемо згин консольної балки парою сил  $M$  (рисунок 70). Балка називається **консольною**, якщо її кінець не має опори.

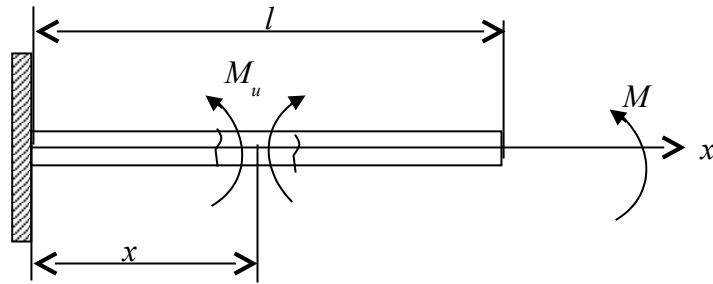


Рисунок 70

Розрізаємо балку на дві частини. З умови рівноваги правої частини балки зовнішній момент  $M$  зрівноважується внутрішнім згинальним моментом  $M_u$ , тобто:  $M_u(x) = M$ ,  $0 < x < l$ .

Розглянемо згин консольної балки силою  $P$  (рисунок 71). З умови рівноваги правої частини балки зовнішня сила  $P$  зрівноважується згинальним моментом  $M_u$  і поперечною силою  $Q$ , оскільки

$$Q(x) = P, \quad M_u(x) = P(l - x), \quad 0 < x < l.$$

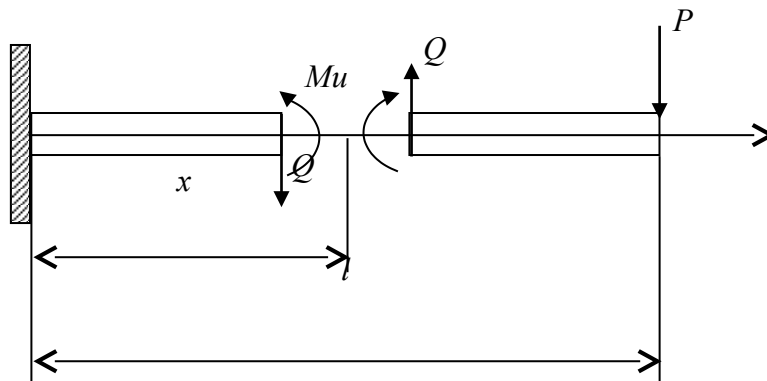


Рисунок 71

Тобто при згині в довільному перерізі виникають внутрішні зусилля, згинальний момент  $M_u$  і поперечна сила  $Q$ :

$$M_u \neq 0, \quad Q = 0 \text{ – чистий згин,}$$

$$M_u \neq 0, \quad Q \neq 0 \text{ – поперечний згин.}$$

Поперечна сила  $Q$  приймається додатною, якщо її вектори намагаються повертати частини розрізаної балки за стрілкою годинника.

Згинальний момент  $M_u$  приймається додатним, якщо він згинає частини розрізаної балки так, що стискаються верхні волокна балки, від'ємним – якщо навпаки.

## 13.2 Побудова епюри $Q$ і $M_u$

Епюри  $Q$  і  $M_u$  будуються в такій послідовності:

1 Визначаються реакції опор балки (для консольної балки необов'язково).

2 Балка розбивається на ділянки і на кожній з них позначається переріз на відстані  $x$  від лівого кінця балки.

Ділянка – це частина балки, яка обмежується силою, моментом, початком або закінченням розподіленого навантаження.

3 Для довільного перерізу кожної ділянки записують вирази для  $Q(x)$  і  $M_u(x)$ , розглядаючи ліву або праву частину балки.

Якщо зовнішня сила (у тому числі реакція опори) повертає частину балки відносно перерізу за годинниковою стрілкою, то ця сила у формулі для  $Q(x)$  враховується додатною і від'ємною, якщо навпаки.

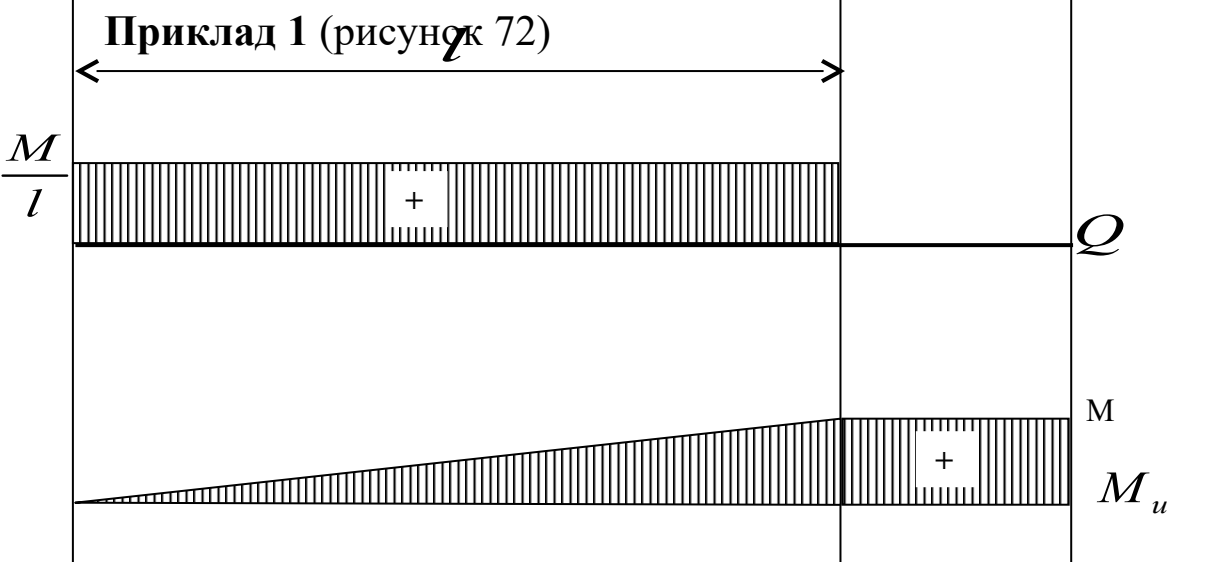
Якщо момент від зовнішнього навантаження відносно перерізу стискає верхні волокна балки, то цей момент у формулі для  $M_u(x)$  враховується додатним і від'ємним, якщо навпаки.

Якщо на балку діє розподілене навантаження, то у виразах для  $Q(x)$  і  $M_u(x)$  враховується частина цього навантаження, яка прикладена зліва або справа від перерізу.

4 Обчислюються величини  $Q(x)$  і  $M_u(x)$  у характерних перерізах балки і будуються епюри.

Додатні значення  $Q(x)$  відкладаються над віссю балки (вісь  $X$ ). Епюра згинального моменту  $M_u(x)$  будується на внутрішніх сторонах балки.

Розглянемо декілька простих прикладів навантаження балки.





Рівняння рівноваги балки:

$$\begin{aligned} \sum F_{iy} = 0, & \quad R_A - R_B = 0 \\ \sum M_B(\bar{F}_i) = 0, & \quad -R_A \cdot l + M = 0. \end{aligned}$$

Звідки  $R_A = R_B = \frac{M}{l}$ .

Запишемо вирази для  $Q(x)$  і  $M_u(x)$  на кожній ділянці.

1-ша ділянка:  $0 < x < l$ :  $Q(x) = R_A = \frac{M}{l} = \text{const}$ .

$$M_u(x) = R_A x, \quad M(l) = M.$$

2-га ділянка:  $l \leq x$   $Q(x) = R_A - R_B = 0$ ,

$$M(x) = M = \text{const}.$$

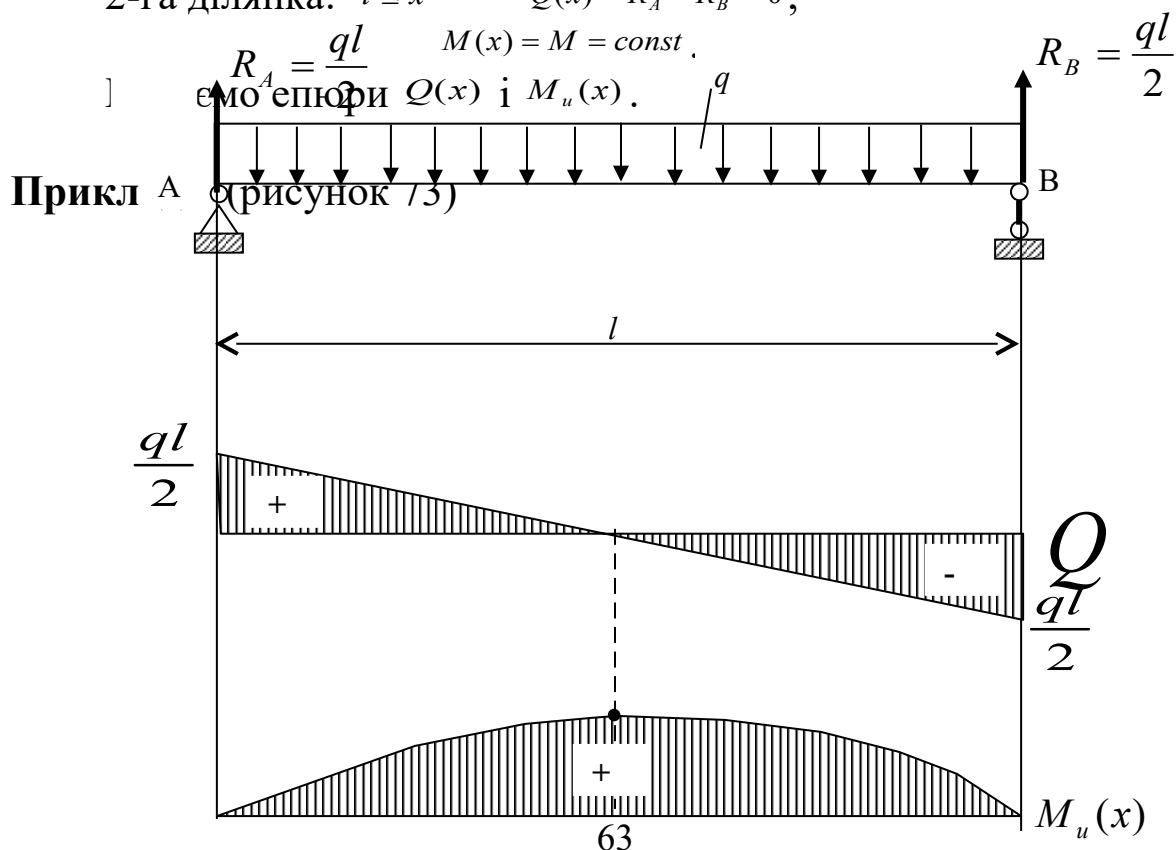


Рисунок 73

$$0 < x < l \quad Q(x) = R_A - qx, \quad Q(0) = \frac{ql}{2}, \quad Q\left(\frac{l}{2}\right) = 0, \quad Q(l) = -\frac{ql}{2},$$

$$M_u(x) = R_A \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2}, \quad M_u(0) = 0, \quad M_u\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{8}, \quad M_u(l) = 0.$$

Будуємо епюри  $Q(x)$  і  $M_u(x)$ .

### Приклад 3 (рисунок 74)

Зовнішнє навантаження:  $P = 30 \text{ кН}$ ,  $M = 50 \text{ кНм}$ ,  $q = 20 \text{ кН/м}$ .

Складаємо рівняння рівноваги і знаходимо величини

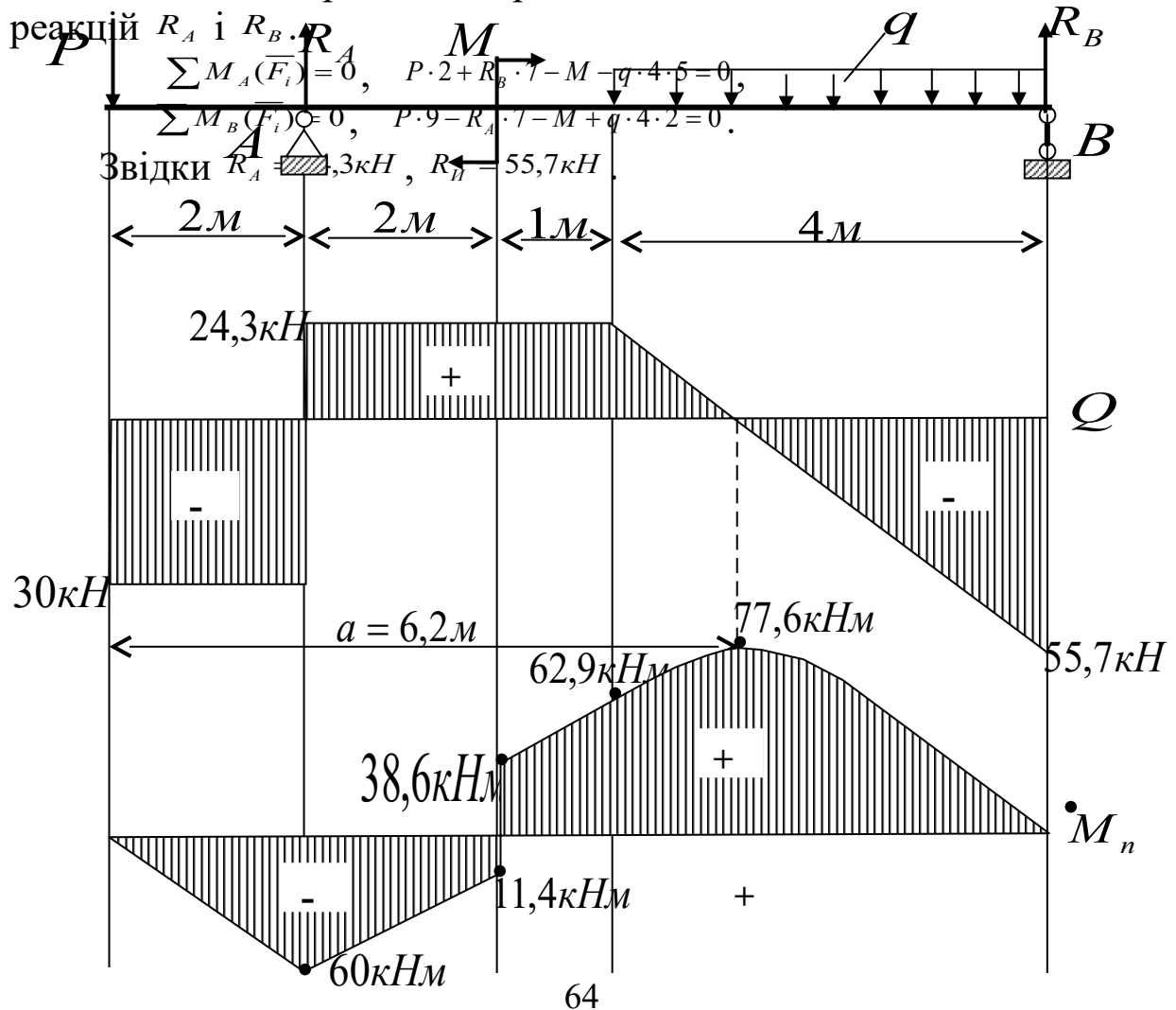


Рисунок 74

---

-

Запишемо вирази для  $Q(x)$  і  $M_n(x)$  на кожній ділянці балки і обчислимо їх величини у характерних точках.

1-ша ділянка:  $0 < x < 2\text{м}$ ,

$$Q(x) = -P = -30\text{кН}, \quad M_n(x) = -P \cdot x, \quad M_n(0) = 0, \quad M_n(2) = -60\text{кНм}.$$

2-га ділянка:  $2 < x < 4\text{м}$ ,

$$Q(x) = -P + R_A = 24,3\text{кН}, \quad M_n(x) = -P \cdot x + R_A(x - 2), \quad M_n(4) = -11,4\text{кНм}.$$

3-тя ділянка:  $4 < x < 5\text{м}$ ,

$$Q(x) = -P + R_A = 24,3\text{кН}, \\ M_n(x) = -P \cdot x + R_A(x - 2) + M, \quad M_n(4) = 38,6\text{кНм}, \quad M_n(5) = 62,9\text{кНм}.$$

4-га ділянка:  $5 < x < 9\text{м}$ ,

$$Q(x) = -R_B + q(9 - x), \quad Q(5) = 24,3\text{кН}, \quad Q(9) = -55,7\text{кН}, \\ M_n(x) = R_B(9 - x) - q(9 - x) \cdot \frac{9 - x}{2}, \quad M_n(5) = 62,9\text{кНм}, \quad M_n(9) = 0.$$

Визначимо координату  $x = a$  перерізу, у якому  $Q(a) = 0$  ( $a = 6,2\text{м}$ ):

$$-R_B + q(9 - a) = 0.$$

Звідки обчислимо  $M_u(x = a) = R_B(9 - a) - \frac{q(9 - a)^2}{2} = 77,6\text{кНм}$ .

Будуємо епюри  $Q(x)$  і  $M_u(x)$ .

Відмітимо, що в перерізах прикладення зосереджених сил  $P$ ,  $R_A$ ,  $R_B$  епюра  $Q(x)$  має стрибки, які дорівнюють величинам цих сил. В перерізі прикладення зосередженого моменту ( $x = 4\text{м}$ ) епюра  $M_u(x)$  має стрибок, який дорівнює величині  $M$  цього моменту.

### 13.3 Диференціальні залежності при згині

Розглянемо нескінченно малий елемент довжиною  $dx$  зігнутої балки (рисунок 75).

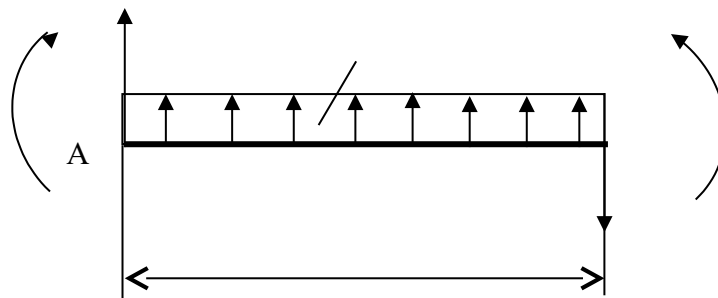


Рисунок 75

Запишемо умови його рівноваги:

$$\sum F_{iy} = Q + qdx - (Q + dQ) = 0,$$

$$\sum M_A(\bar{F}_i) = M + (Q + dQ) \cdot dx - qdx \cdot \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.$$

Знехтуємо доданками  $dQ \cdot dx$  і  $qdx \frac{dx}{2}$  другого порядку малості і отримаємо диференціальні залежності при згині:

$$\frac{dQ}{dx} = q,$$

$$\frac{dM_u}{dx} = Q \quad (60)$$

Співвідношення (60) обґрунтовують такі взаємозалежності епюр  $Q(x)$  і  $M_u(x)$ , які можна простежити на рисунках (72-74):

1 На ділянках, де  $q = 0$ , епюра  $Q(x)$  прямокутна, а епюра  $M_u(x)$  – похилена пряма.

2 На ділянках, де  $q = const$ , епюра  $Q(x)$  похилена пряма, а епюра  $M_u(x)$  – парабола. Нахил епюри  $Q(x)$  співпадає з напрямком  $q$ , а випуклість параболи  $M_u(x)$  спрямована протилежно напрямку  $q$ . В перерізі  $x=a$ , де  $Q(a)=0$ , парабола  $M_u(x)$  має локальний максимум або мінімум.

3 На ділянках, де  $Q > 0$  функція  $M_u(x)$  зростає, де  $Q < 0$  функція  $M_u(x)$  убиває.

### 13.4 Нормальні деформації і напруження при згині

Експериментально встановлено, що при чистому згині балка деформується згідно з такими положеннями (рисунок 76):

1 Поперечні перерізи залишаються плоскими і перпендикулярними до осі балки.

2 Прямі кути «сітки» не змінюються.

3 Довжина верхніх волокон зменшується, тобто вони стискаються.

4 Довжина нижніх волокон збільшується, тобто вони розтягуються.

5 Існують волокна, довжини яких не змінюються, тобто вони не деформуються.

Волокна, що не деформуються, утворюють **нейтральний шар** (н.ш.), який перетинається з кожним поперечним перерізом балки по **нейтральній лінії** (н.л.). При плоскому згині для перерізів, наведеніх на рисунку, на лінія епюри з віссю  $Z$ , тобто на ліній перпендикулярна до осі симетрії (вісь  $Y$ ) і проходить через центр ваги перерізу  $C$ .

У точках перерізу, що відповідають верхнім (стиснутим) і нижнім (розтягнутим) волокнам, виникають відповідно від'ємні і позитивні нормальні напруження  $\sigma$ , а в точках недеформованої н.л. вони дорівнюють нулю.

Нормальні напруження  $\sigma$  утворюють відносно осі  $Z$  пари сил, які в сумі складають згинальний момент  $M_u$  (статичний зміст задачі):

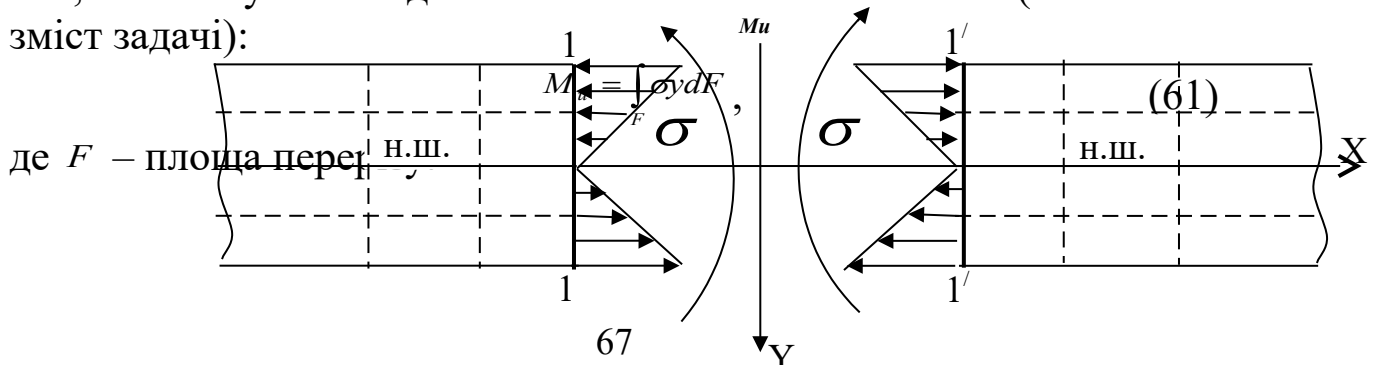


Рисунок 76

Розглянемо, як поводить себе ділянка балки між близькими перерізами (1-1) і (2-2). На рисунку 77 зображено цей елемент до і після згину.

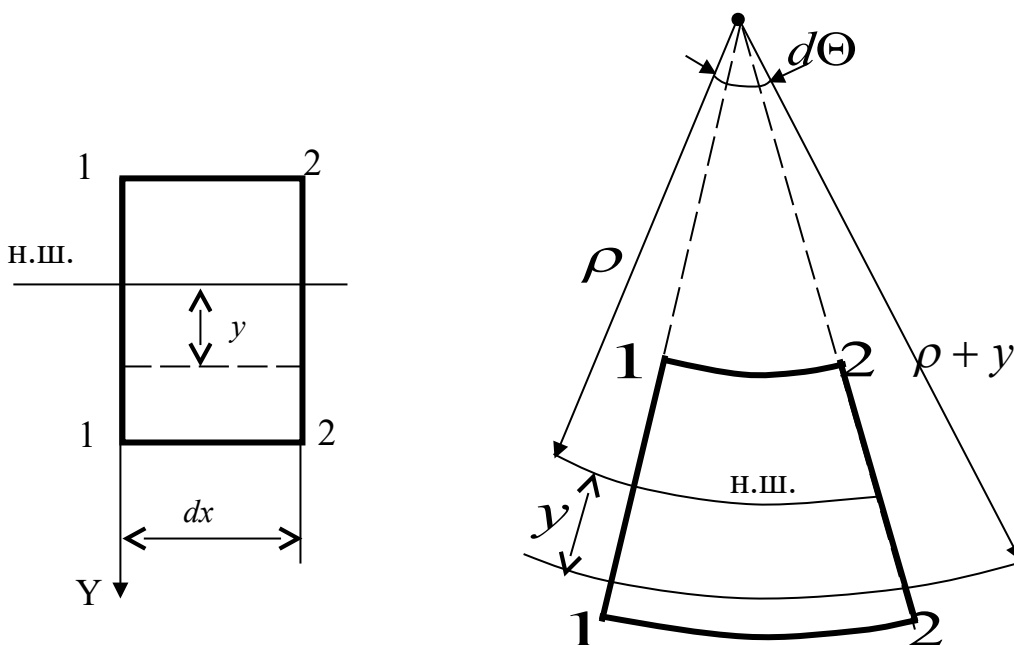


Рисунок 77

Після згину н.ш. перетворюється в дугу радіуса  $\rho$ , волокно на відстані  $y$  – у дугу радіуса  $(\rho + y)$ . Враховуючи, що н.ш. не деформується, то

$$\begin{aligned} dx &= \rho \cdot d\Theta, \text{ або} \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{d\Theta}{dx}. \end{aligned} \quad (62)$$

Відносну деформацію  $\varepsilon$  волокна на відстані  $y$  запишемо у вигляді

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\Theta - dx}{dx}. \quad (63)$$

Тоді з урахуванням виразу (62) отримаємо (геометричний зміст задачі)

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (64)$$

Враховуючи лінійну залежність між деформаціями  $\varepsilon$  і напруженнями  $\sigma$ , а також співвідношення (64), запишемо закон Гука для згину балки у вигляді (фізичний зміст задачі)

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y. \quad (65)$$

Тоді з урахуванням виразу (61) отримаємо таку залежність (у межах перерізу  $\rho = \text{const}$ ):

$$\frac{E}{\rho} \cdot \int_F y^2 dF = M_u, \quad \text{або} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_u}{EJ_z}, \quad (66)$$

де  $J_z = \int_F y^2 dF$  – момент інерції перерізу балки відносно н.л.;

$EJ_z$  – жорсткість балки на згин.

Остаточно для нормального напруження  $\sigma$  запишемо формулу

$$\sigma = \frac{M_n \cdot y}{J_z} \quad (65)$$

Максимум напруження  $\sigma_{\text{max}}$  досягається при найбільшій відстані від н.л. ( $y = y_{\text{max}}$ ) і дорівнює

$$\sigma_{\max} = \frac{M_n}{W_z},$$

де  $W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}$  – момент опору перерізу балки при згині відносно н.л.

Для перерізів, що наведені на рисунку 77, величини  $J_z$  і  $W_z$  обчислюються за формулами:

- прямокутник –  $J_z = \frac{bh^3}{12}$ ,  $W_z = \frac{bh^2}{6}$ ;

- круг –  $J_z = \frac{\pi d^4}{64}$ ,  $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$ ;

- двотавр, тавр – величини  $J_z$  і  $W_z$  зведені в таблицях Держстандарту.

### 13.5 Дотичні напруження при згині

Якщо в перерізах балки діє поперечна сила  $Q(x) \neq 0$  (поперечний згин), то в цих перерізах виникають не тільки нормальні напруження  $\sigma$ , але і дотичні напруження  $\tau$ . Дотичні напруження розподіляються в перерізі згідно з законом, який встановлено Д.І. Журавським:

$$\tau = \frac{Q \cdot S(y)}{b \cdot J_z}. \quad (68)$$

Для довільного перерізу величини, що входять у формулу (68), мають такі значення (рисунок 78):  $Q = Q(x)$  – модуль поперечної сили в перерізі,  $J_z$  – момент інерції перерізу відносно н.л. (вісь  $Z$ ),  $b = b(y)$  – ширина перерізу по лінії, де визначаються  $\tau$ ,  $S(y)$  – статичний момент на величину статичного моменту відносно н.л. частини перерізу, що відокремлюється від перерізу на відстані  $y$  від н.л.  $F(y)$ , що відокремлюється від перерізу на відстані  $y$  від н.л.  $F(y)$  від н.л.

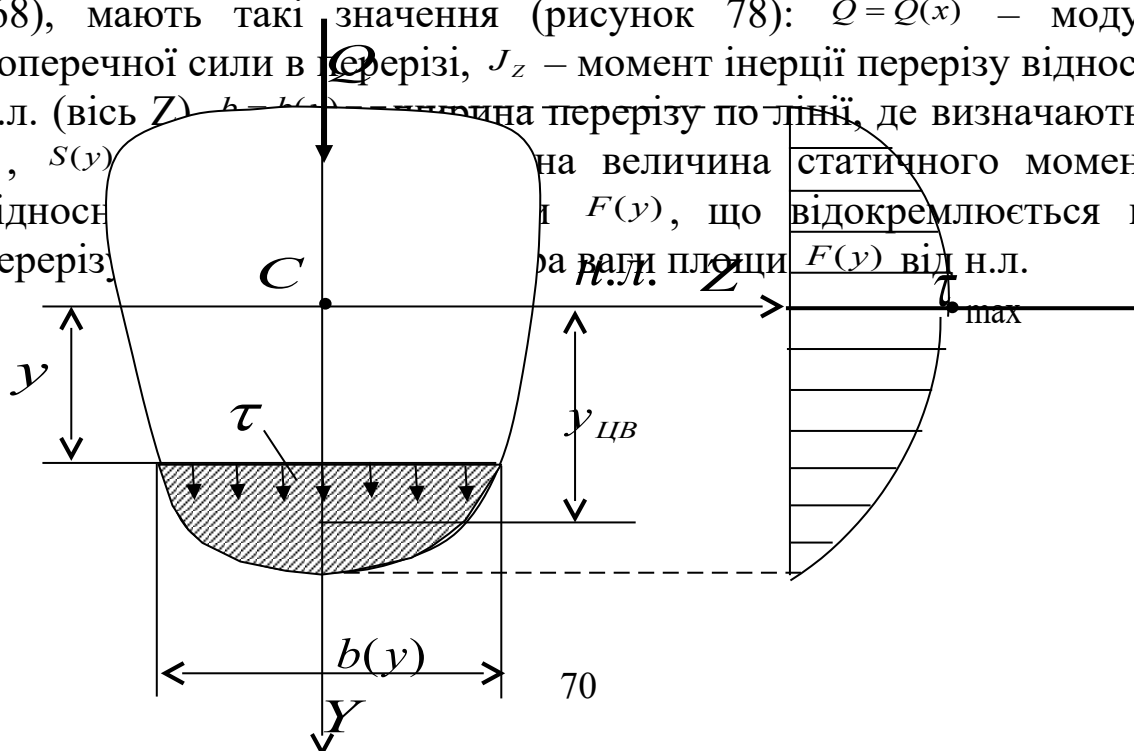


Рисунок 78



Зазначимо, що напрямок  $\tau$  співпадає з напрямком  $Q$ . Максимум  $\tau = \tau_{\max}$  відповідає н.л., де досягає найбільшої величини статичний момент  $S = S_{\max}$ .

Для прямокутного і круглого перерізів (рисунок 79) закон розподілення  $\tau$  є параболою:

$$\text{- прямокутник } \tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right), \quad \tau_{\max} = \frac{3}{2} \tau_{CP}; \quad (69)$$

$$\text{- круг } \tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi R^2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right), \quad \tau_{\max} = \frac{4}{3} \tau_{CP} \quad (70)$$

Тут  $\tau_{CP} = \frac{Q}{F}$  – середнє напруження в перерізі,  $F$  – площа перерізу.

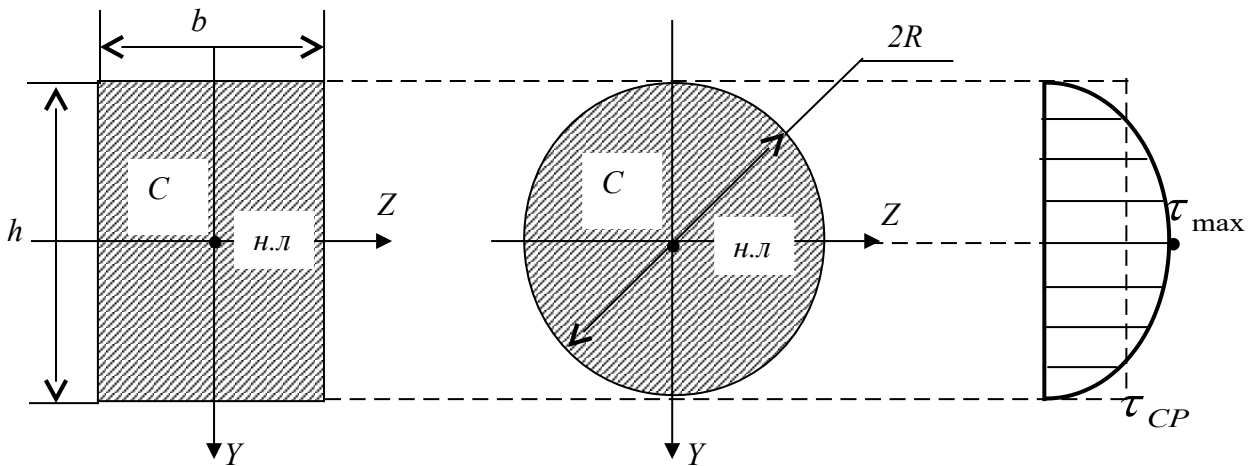


Рисунок  
79

### 13.6 Розрахунок на міцність при згині

При поперечному згині в перерізі балки виникають нормальні  $\sigma$  і дотичні  $\tau$  напруження. Напруження  $\sigma$  будуть найбільшими в перерізі, де згинальний момент  $M_u$  досягає свого

максимуму. Напруження  $\tau$  будуть найбільшими в перерізі, у якому виникає максимальна поперечна сила  $Q$ .

Практикою розрахунків балок на міцність підтверджено, що найбільш небезпечним є переріз, у якому згинальний момент  $M_u$  стає максимальним. Тому **основна умова міцності на згин** має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_n}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (71)$$

Для сталюї балки, що надана на рисунку 74, при  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$  визначимо діаметр  $d$  круглого перерізу з умови міцності. Найбільш небезпечним є переріз  $x = a$ , у якому  $M_u$  досягає максимуму, який дорівнює  $\max M_u = 77,6 \text{ кНм}$ . Визначимо  $W_z$  з умови (71):

$$W_z = \frac{\max M_n}{[\sigma]} = \frac{77,6 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,49 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Для круглого перерізу  $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$ , звідки  $d = 0,17 \text{ м}$ .

### 13.7 Згин з крученням прямих круглих валів

Передача валам крутного моменту  $M_{кр}$  (розділ 12), неодмінно супроводжується його згином. Згин викликається силами, діючими в зубчатих парах, натяжінням пасових ременів, інерційними силами рухомих деталей, силами ваги вала і шківів. Кожну з діючих сил  $P_i$  можна розкласти на складові  $P_{iy}$  і  $P_{iz}$  ( $X$  – вісь вала,  $Y$  і  $Z$  – осі круглого перерізу). Таким чином, згин вала відбувається одночасно у двох площинах  $XU$  і  $XZ$  відповідно, згинальними моментами  $M_z$  і  $M_y$ . У кожному перерізі виникають нормальні напруження  $\sigma$ , які досягають свого максимуму  $\sigma_{\max}$  у зовнішніх волокнах вала ( $r = R$ ). Величина  $\sigma_{\max}$  відповідає згинальному моменту  $M_u = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$  і дорівнює

$$\sigma_{\max} = \frac{M_n}{W_z},$$

де  $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$  – момент опору перерізу відносно н.л.

При передачі крутного моменту  $M_{кр}$  в кожному перерізі вала присутні дотичні напруження  $\tau$ , які досягають свого максимуму  $\tau_{\max}$  також у зовнішніх волокнах ( $r = R$ ):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P},$$

де  $W_P = \frac{\pi d^3}{16}$  – полярний момент опору перерізу.

Одночасну присутність  $\sigma_{\max}$  і  $\tau_{\max}$  у зовнішніх волокнах перерізу вала ( $r = R$ ), враховують величиною **еквівалентного напруження**  $\sigma_e$ . Для валів зі сталі рекомендовано  $\sigma_e$  обчислювати за формулою так званої IV теорії міцності:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2}.$$

Враховуючи, що  $W_P = 2W_Z$ , отримаємо:

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{M_Y^2 + M_Z^2 + 0,75M_{KP}^2}}{W_Z}.$$

Позначимо  $Me = \sqrt{M_Y^2 + M_Z^2 + 0,75M_{KP}^2}$ . Таким чином, при одночасній дії згину і кручення умова міцності круглого вала набуває вигляду аналогічному умові (71):

$$\sigma_e = \frac{\max Me}{W_Z} \leq [\sigma].$$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: «Высшая школа», 2010. – 416 с.

2 Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М.: КноРус., 2011. – 608 с.

3 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие / Под ред. А. А. Яблонского. – 18 изд. — М.: КноРус, 2011.— 386 с.

4 Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1973. – 447 с.

5 Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с.

6. Писаренко Г.С., Агарев В.А., Квитка А.Л., Панков В.Г., Уманский Э.С. Сопротивление материалов. – К.: Тех. лит. УССР, 1963. – 791 с.

7. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.

8. Одоевский Б.А., Ханин С.Е. Сопротивление материалов в примерах и задачах. – Харьков: Вища школа, 1981. – 344 с.

