

МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра механіки і проектування машин

РІВНОВАГА ТІЛ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ТЕРТЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до розв'язання окремих задач з дисципліни

«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

Розділ «СТАТИКА»

Харків – 2014

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри механіки і проектування машин 26 грудня 2012 р., протокол № 7.

Укладачі:

доценти Н.А. Аксьонова,
О.В. Оробінський

Рецензент

проф. О.В. Братченко

РІВНОВАГА ТІЛ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ТЕРТЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розв'язання окремих задач з дисципліни

«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»
РОЗДІЛ «СТАТИКА»

Відповідальний за випуск Аксьонова Н.А.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 14.05.13 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,0. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра “Механіка і проектування машин”

Рівновага тіл з урахуванням сил тертя.

Методичні вказівки до розв’язання окремих задач з

дисципліни

“ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”.

Розділ «СТАТИКА».

Харків 2013 р.

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри механіки і проектування машин 26 грудня 2012 р., протокол № 7.

Рецензент
проф. Братченко О. В.

З М І С Т

Вступ.....	4
1 Методичні поради.....	4
2 Рівновага за наявності сил тертя.....	5
2.1 Закони тертя ковзання.....	5
3 Рівновага сил з урахуванням зчеплення (тертя спокою)	7
3.1 Умови завдання.....	7
3.2 Рекомендації та приклад виконання завдання для варіантів схем з гальмівними пристроями.....	12
3.3 Рекомендації та приклад виконання завдання для варіантів 21 - 30.....	14
Список літератури.....	17

ВСТУП

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами механічного та будівельного факультетів на I, II та III курсах дисципліни “Теоретична механіка”. При формуванні теоретичної бази з цієї дисципліни головна роль відводиться лекційним курсам, які висвітлюють основні питання розділу «Статика». У ході вивчення курсу теоретичної механіки важливим аспектом є проведення практичних занять і виконання індивідуальних розрахунково-графічних робіт (РГР). Основою РГР є розв’язання задач, пов’язаних з тематикою розділу. Багато важливих питань стосовно рівноваги твердих тіл розглядається при врахуванні сил тертя спокою. Вважаючи складність і різноманітність підходів до даної теми, доцільним є використання методичних вказівок.

Сказане вище зумовило необхідність розроблення і введення до навчального процесу методичних вказівок з розділу «Статика», які дають комплексне уявлення про обсяг і структуру питань, що виникають при вивченні рівноваги за наявності тертя, про специфіку виконання і оформлення індивідуальних самостійних завдань, знайомлять з прикладами, наводять належні рекомендації та надають варіанти для виконання РГР, а також пропонують рекомендовану літературу.

Методичні вказівки призначені для студентів будівельного, механічного та АТЗ факультетів денної форми навчання усіх спеціальностей.

1 МЕТОДИЧНІ ПОРАДИ

Програмою дисципліни „Теоретична механіка” передбачено виконання розрахунково-графічних робіт (РГР) з розділу «Статика».

Зміст РГР, а саме номери варіанта уточнюються викладачем під час аудиторних занять.

Кожне завдання супроводжується рисунками та таблицею (номери схем співпадають з тим самим номером, що і умова завдання в таблиці).

РГР виконуються на форматі А4. Типові звіти до РГР здійснюються відповідно до встановлених вимог, а саме обов'язково вказуються назва кафедри, назва дисципліни, номер роботи, рік, прізвище та ініціали студента.

Розв'язання завдань повинно супроводжуватись коротким текстовим поясненням (які формули або теореми застосовуються, звідки отримуються ті чи інші результати та ін.), а також детальним викладом усіх розрахунків, що виконуються.

Рисунки до розв'язання завдань повинні бути виконані акуратно із застосуванням креслярського приладдя. На них наносять позначення всіх використовуваних величин: розміри, координатні осі, вектори сил, швидкостей, прискорень та ін.

Слід звернути увагу на те, що розрахункова схема виконується строго, згідно з вихідними даними свого варіанта завдання, і тоді в більшості випадків вона має бути простішою, ніж на загальному рисунку.

Розрахунково-графічні роботи, що не відповідають всім переліченим вимогам, рецензуватися не будуть і повертатимуться для переоформлення.

2 РІВНОВАГА ЗА НАЯВНОСТІ СИЛ ТЕРТЯ

Залежно від взаємних рухів тіл тертя між твердими тілами буває трьох видів:

1 Якщо відносна швидкість точок дотику тіл, що контактують, не дорівнює нулю, то виникає **тертя ковзання**.

2 Якщо відносна швидкість точок дотику тіл, що контактують, дорівнює нулю і має місце кочення без ковзання, то виникає **тертя кочення**.

3 Існує ще **тертя вертіння**.

2.1 Закони тертя ковзання

Силою тертя ковзання $\overline{F_{TP}}$ називається сила, що виникає в точках співдотику, лежить у спільній дотичній площині до поверхонь контактуючих тіл і чинить опір ковзанню одного тіла відносно іншого.

Сила тертя, що розвивається за відсутності взаємних рухів, називається **силою тертя спокою**.

Рівновага за наявності сил тертя для тіл, що могли б рухатись під дією сили \vec{s} , по шорсткій (неідеальній) поверхні зумовлена силою **тертя зчеплення** $\overline{F_{зч}}$ ($\overline{F_{TP}}$), яка чинить опір цьому руху (рисунок 1).

Закони тертя ковзання (закони Амонтона – Кулона) відображають практично всі основні особливості явища тертя ковзання.

1 При намаганні зсунути одне тіло по поверхні іншого в площині дотику тіл виникає сила тертя, величина якої може приймати будь-які значення від нуля до значення $\overline{F_{TP}^{MAX}}$ ($\overline{F_{зч}^{MAX}}$) – **максимальна (гранична) сила тертя**.

$$F_{TP} \leq F_{TP}^{MAX} .$$

Сила тертя **спрямована** в бік, протилежний тому, у якому діють сили, що намагаються зсунути тіло. При рівновазі сила тертя спокою спрямована протилежно можливому напрямку руху.

2 **Величина граничної сили тертя** дорівнює добутку статичного коефіцієнта тертя на силу нормального тиску (нормальну реакцію):

$$F_{TP}^{MAX} = f \cdot N .$$

Статичний коефіцієнт тертя f – число безрозмірне, визначається експериментальним шляхом і залежить від матеріалу взаємодіючих тіл і стану поверхні (характер обробки, температура, вологість, змащення і т. п.).

Для абсолютно гладеньких поверхонь $f = 0$, для реальних $f > 0$. При сухому терті „дерево – дерево” $f \in [0,4; 0,7]$; „метал – метал” $f \in [0,15; 0,25]$; „сталь – лід” $f = 0,025$.

3 Величина граничної сили тертя в широких межах **не залежить** від розмірів площі контакту поверхонь тіл, що стикаються.

При **рівновазі сила тертя спокою** (тертя зчеплення) визначається за виразом:

$$F_{TP} \leq f \cdot N.$$

Для тіл, які рухаються, сила тертя спрямована протилежно руху і дорівнює добутку динамічного коефіцієнта тертя на силу нормального тиску:

$$F_{TP} = f \cdot N.$$

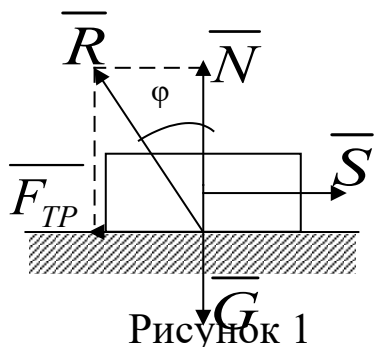


Рисунок 1

Повна реакція шорстої поверхні $\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_{TP}$ складається з нормальної реакції \bar{N} та перпендикулярної їй сили тертя \bar{F}_{TP} , тобто \bar{R} буде відхилена від нормалі до поверхні на кут ϕ (рисунок 1).

Максимальне значення кута ϕ^{\max} , який складає повна реакція шорсткої поверхні з нормаллю до поверхні, називається **кутом тертя**.

$$\operatorname{tg} \phi^{\max} = \frac{F_{TP}^{\max}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f.$$

При дії на тіло будь-якою силою, прикладеною під кутом до нормалі меншим за кут тертя ($\phi < \phi^{\max}$), зсунути тіло неможливо.

3 РІВНОВАГА СИЛ З УРАХУВАННЯМ ЗЧЕПЛЕННЯ (ТЕРТЯ СПОКОЮ)

3.1 Умови завдання

Визначити мінімальне (у варіантах 1 - 20, 25, 26, 29, 30) або максимальне (у варіантах 21 - 24, 27, 28) значення сили P та реакції опор системи (точки вказані в таблиці), яка знаходиться в стані спокою. Схеми варіантів надані на рисунках 2 - 4, а необхідні для розрахунків дані – у таблиці 1.

Тертям в опорних пристроях знехтувати. Вагу стержнів, колодок у ниток не враховувати.

Таблиця 1

Варіант	G	Q	a	b	c	α , град	Коефіцієнт зчеплення (коефіцієнт тертя спокою)	Точка, у якій визначається реакція
	кН		м					
1	1,0	10	0,20	0,10	0,04	30	0,10	О, А
2	1,1	-	0,10	0,15	-	30	0,15	О, А, В
3	1,3	14	0,45	0,40	0,05	45	0,20	О, А
4	1,8	15	0,10	0,40	0,06	-	0,25	О, А
5	1,5	16	0,20	0,30	0,04	45	0,30	О, А
6	1,6	18	0,15	0,10	-	45	0,35	О, А, В
7	2,0	20	0,20	0,50	0,05	30	0,40	О, А
8	2,2	18	0,20	0,10	-	30	0,35	О, А, В
9	2,1	20	0,10	0,20	-	30	0,30	О, А, В
10	1,8	22	0,30	0,30	0,04	45	0,25	О, А
11	1,9	24	0,40	0,50	0,06	-	0,20	О, А
12	2,0	25	0,10	0,25	-	30	0,15	О, А, В
13	1,6	20	0,10	0,10	-	45	0,10	О, А, В
14	1,7	24	0,10	0,25	0,04	60	0,15	О, А
15	1,8	20	0,10	0,15	-	45	0,20	О, А, В
16	1,2	15	0,20	0,45	0,04	45	0,25	О, А
17	1,3	12	0,15	0,15	-	45	0,30	О, А, В, С
18	1,4	14	0,20	0,30	0,05	60	0,35	О, А
19	1,7	16	0,50	0,20	0,06	30	0,40	А, С, D
20	1,6	18	0,10	0,15	-	-	0,45	О, А, В
21	1,0	-	2	0,5	-	45	0,45	А, В, С, D
22	1,5	-	3	0,8	-	30	0,35	А, В, С, D
23	2,0	-	5	1,4	-	-	0,40	А, В, С
24	3,0	-	4	0,8	-	-	0,30	А, В, С, D
25	1,0	-	0,8	0,4	-	30	0,25	А, В, С, D
26	2,0	-	0,4	-	-	-	0,25	А, В, С
27	4,0	-	4	1,0	-	45	0,35	А, В, С, D
28	5,0	-	5	0,8	-	30	0,40	А, В, С, D
29	2,0	-	2	0,3	-	30	0,20	А, В, С
30	1,0	-	2	8,0	-	30	0,20	А, В, С, D

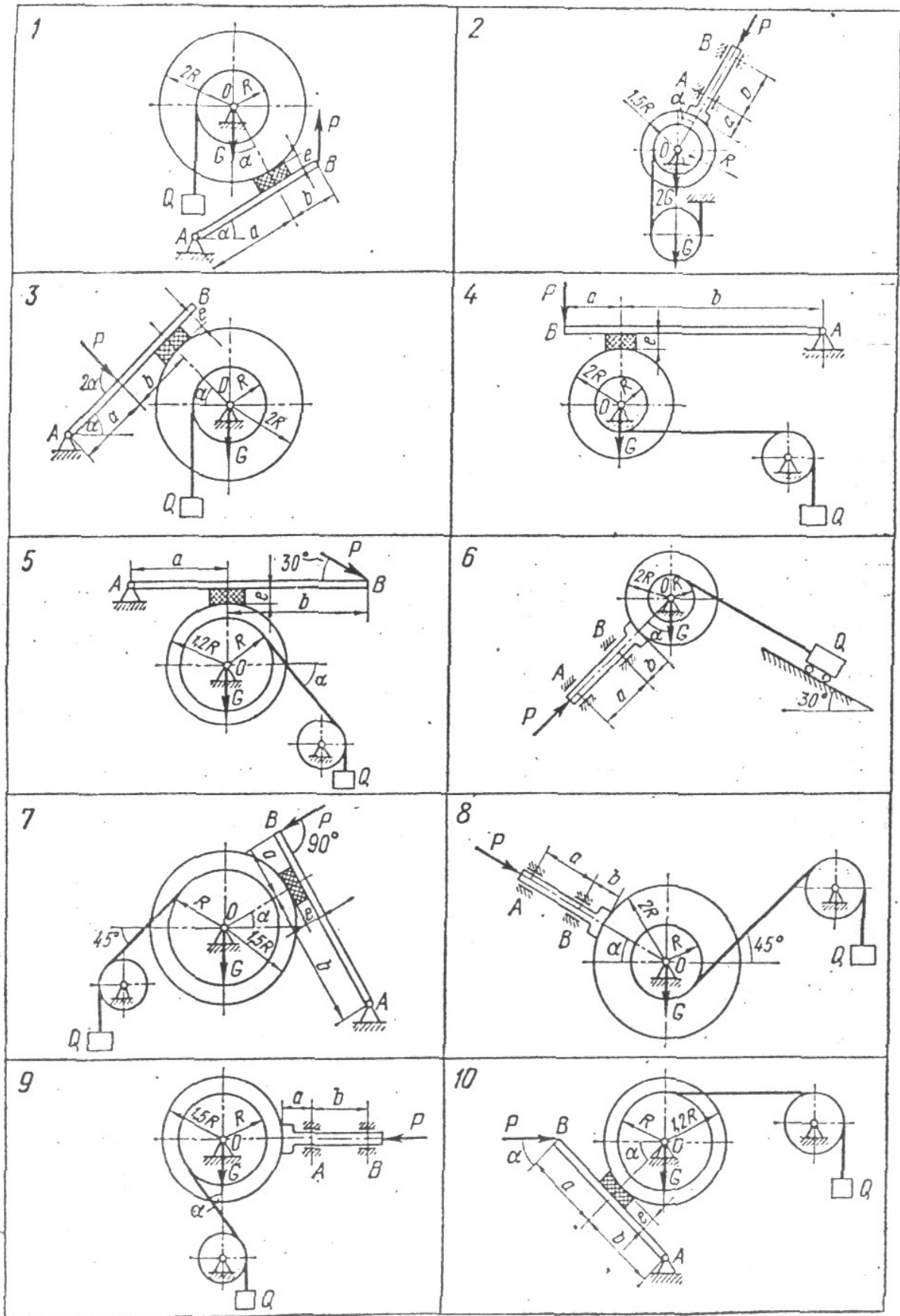


Рисунок 2

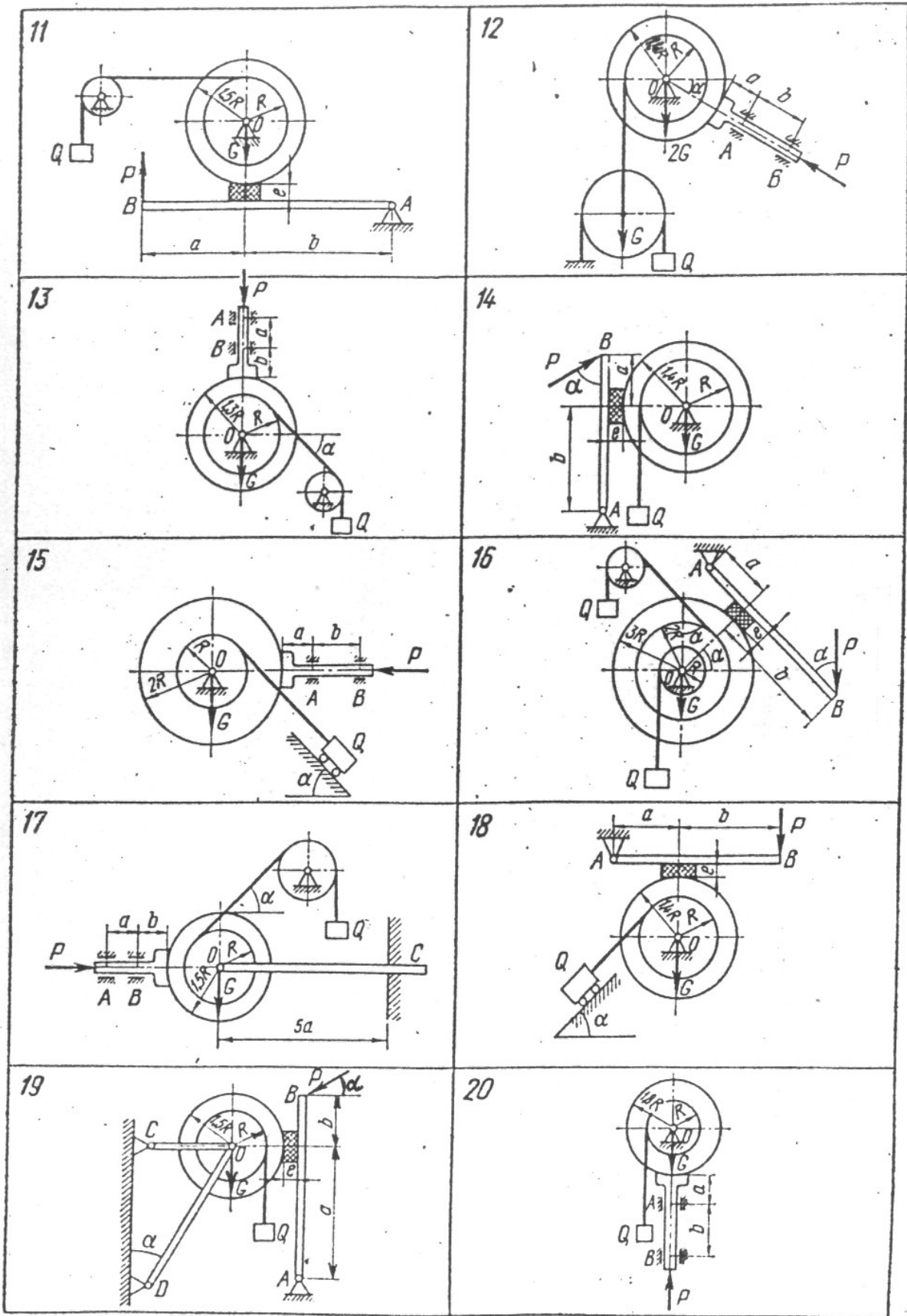


Рисунок 3

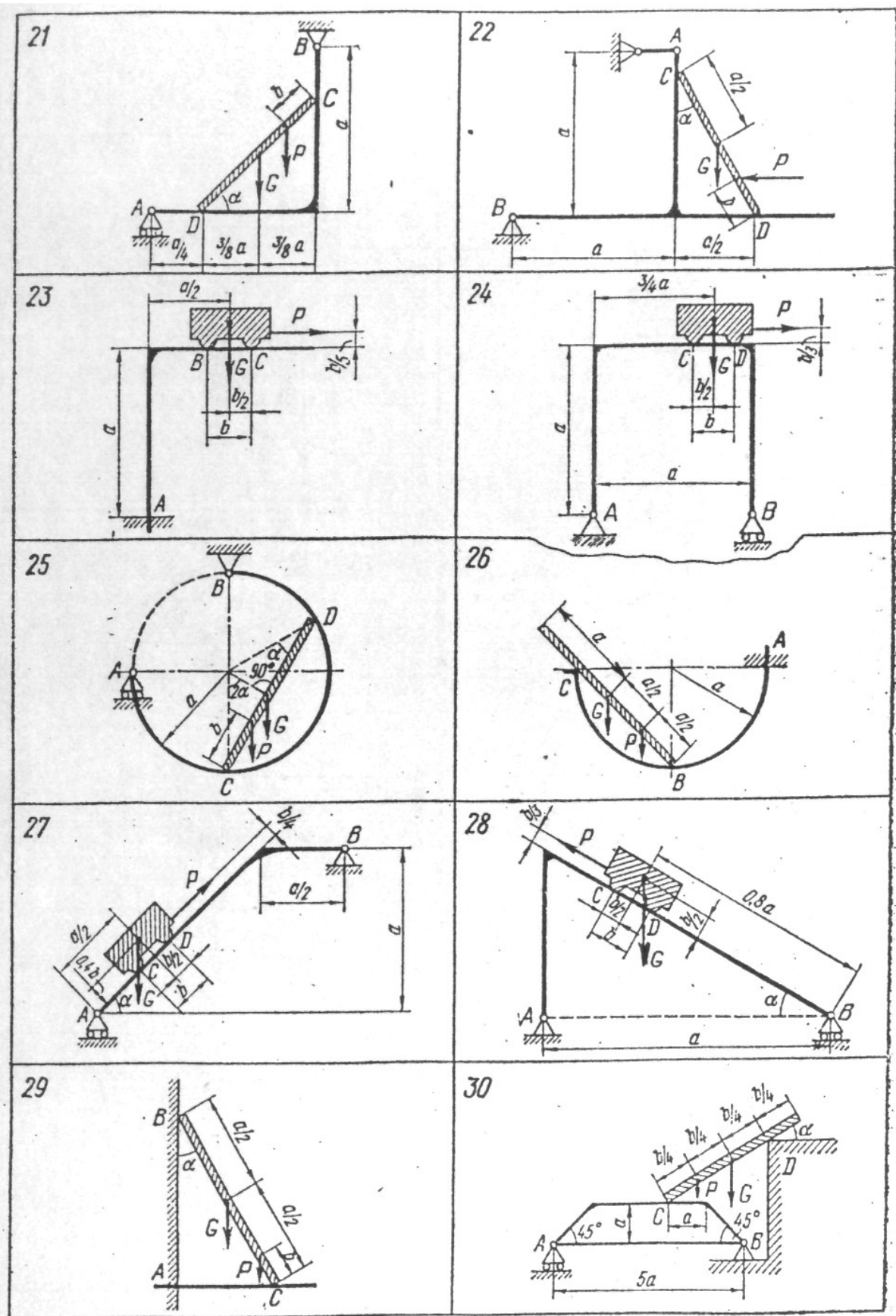


Рисунок 4

3.2 Рекомендації та приклад виконання завдання для варіантів схем з гальмівними пристроями

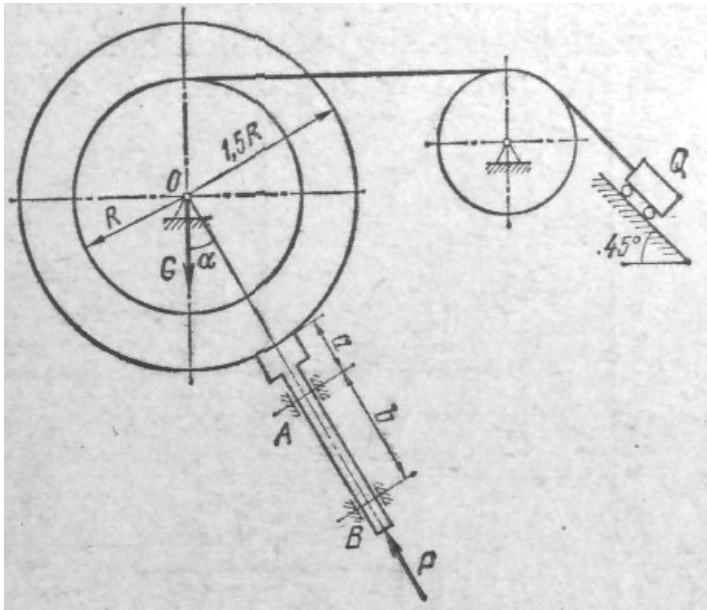


Рисунок 5

Дано:
 $G = 2$ кН, $Q = 20$ кН, $\alpha = 20^\circ$,
 $f = 0,1$ — коефіцієнт зчеплення (тертя спокою),
 $a = 10$ см, $b = 20$ см (рисунок 5).

Визначити:
 Мінімальне значення сили P і реакції опор O , A та B .

Розв'язання:
 Розглянемо спочатку зрівноважену систему сил, прикладених до тіла Q (рисунок 6).

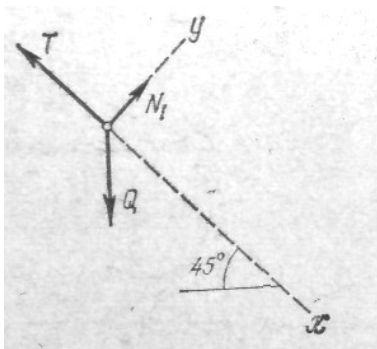


Рисунок 6

На тіло діють: сила ваги \overline{Q} , реакції нитки \overline{T} та нормальна реакція \overline{N}_1 .

Розглядаючи тіло Q як матеріальну точку, складемо рівняння рівноваги указаних сил:

$$\sum X_i = 0; \quad Q \cos 45^\circ - T = 0,$$

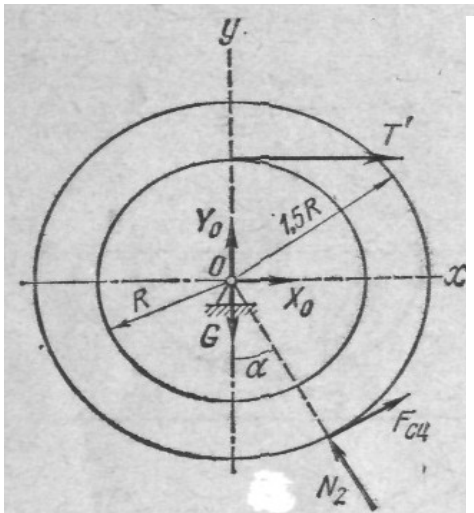
звідки $T = Q \cos 45^\circ = 20 \cdot 0.707 = 14,1$ кН.

Далі розглянемо рівновагу сил, які прикладені до барабана (рисунок 7):

$$\sum M_{iO} = 0, \quad -T' \cdot R + F_{зч} \cdot 1,5R = 0, \quad (1)$$

де $F_{зч}$ — сила зчеплення (сила тертя спокою),

$$\sum X_i = 0, \quad T' + F_{зч} \cdot \cos \alpha - N_2 \sin \alpha + X_O = 0, \quad (2)$$



$$\sum Y_i = 0, \quad -G + F_{3y} \cdot \sin \alpha + N_2 \cos \alpha + Y_O = 0. \quad (3)$$

Для випадку крайньої рівноваги система рівнянь (1) - (3) доповнюється рівнянням

$$F_{3y} = f \cdot N_2. \quad (4)$$

Рисунок 7

Із рівняння (1)

$$F_{3y} = \frac{T' \cdot R}{1,5R} = \frac{14,1}{1,5} = 9,4 \text{ кН.}$$

Із рівняння (4)

$$N_2 = \frac{F_{3y}}{f} = \frac{9,4}{0,1} = 94 \text{ кН.}$$

Із рівняння (2)

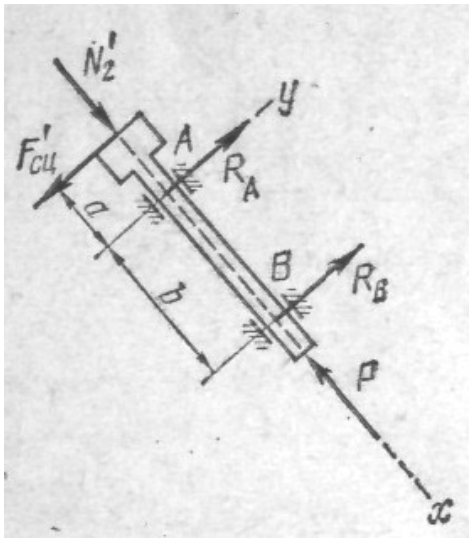
$$X_O = -T' - F_{3y} \cdot \cos \alpha + N_2 \sin \alpha = -14,1 - 9,4 \cdot 0,94 + 94 \cdot 0,342 = 9,2 \text{ кН.}$$

Із рівняння (3)

$$Y_O = G - F_{3y} \cdot \sin \alpha - N_2 \cos \alpha = 2 - 9,4 \cdot 0,342 - 94 \cdot 0,94 = -89,6 \text{ кН.}$$

Для визначення мінімального значення сили P і реакцій опор А і В (ці реакції перпендикулярні до направляючих А і В) розглянемо рівновагу сил, що прикладені до гальмуючого пристрою (рисунок 8).

$$\sum M_{iA} = 0, \quad F'_{3y} \cdot a + R_B \cdot b = 0, \quad (5)$$



$$\sum X_i = 0, \quad N'_2 - P_{\min} = 0, \quad (6)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad R_A + R_B - F'_{3y} = 0. \quad (7)$$

Розв'язуючи ці рівняння, отримаємо

$$R_B = -(F'_{3y} \cdot a) / b =$$

$$= -(9.4 \cdot 0.1) / 0.22 = -4.7 \text{ кН},$$

$$P_{\min} = N'_2 = 94 \text{ кН},$$

$$R_A = -R_B + F'_{3y} = -(-4.7) + 9.4 = 14.1 \text{ кН}.$$

Рисунок 8

3.3 Рекомендації та приклад виконання завдання для варіантів 21 - 30

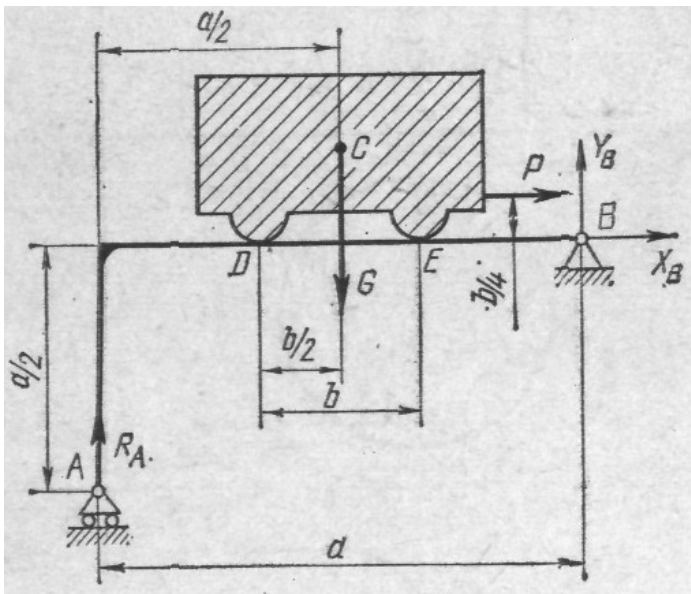


Рисунок 9

Дано:
 $G = 1 \text{ кН}$, $f = 0,4$ —
 коефіцієнт зчеплення
 (тертя спокою), $a = 6 \text{ м}$,
 $b = 2 \text{ м}$ (рисунок 9).

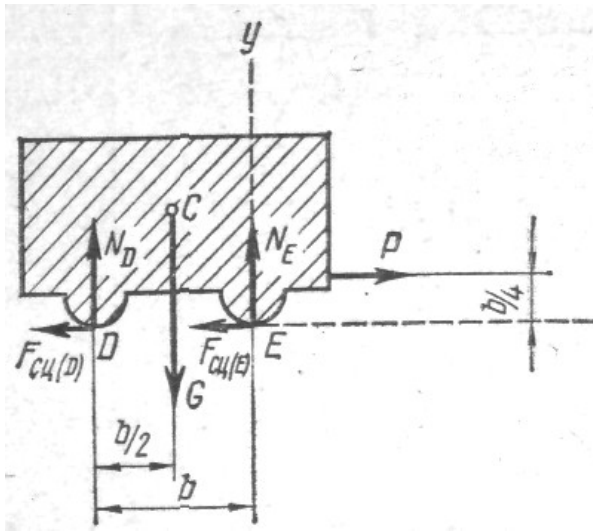
Визначити:
 Максимальне значення
 сили P і реакції опор A , B ,
 D і E .

Розв'язання
 Розглянемо спочатку
 зрівноважену систему сил,
 прикладених до тіла вагою
 G (рисунок 10).

До тіла прикладені сили:
 сила ваги \overline{G} , сила \overline{P} , нормальні реакції \overline{N}_D та \overline{N}_E , а також сили
 зчеплення $\overline{F}_{зчD}$ та $\overline{F}_{зчE}$ (сили тертя спокою).

Складемо рівняння рівноваги вказаних сил:

$$\sum X_i = 0, \quad -F_{зчD} - F_{зчE} + P = 0 \quad (8)$$



$$\sum Y_i = 0, \quad N_D + N_E - G = 0, \quad (9)$$

$$\sum M_{iD} = 0, \quad -G \cdot \frac{b}{2} + N_E \cdot b - P \cdot \frac{b}{4} = 0. \quad (10)$$

У випадку крайньої рівноваги $P = P_{\max}$ система рівнянь (8) - (10) доповнюється рівняннями

$$F_{зчD} = f \cdot N_D, \quad (11)$$

$$F_{зчE} = f \cdot N_E. \quad (12)$$

Рисунок 10

Підставляючи вирази (11) та (12) в рівняння (8), отримаємо

$$-f \cdot N_D - f \cdot N_E + P_{\max} = 0. \quad (8')$$

Із рівняння (9)

$$N_D + N_E = G. \quad (9')$$

Із рівнянь (8') та (9')

$$P_{\max} = f \cdot (N_D + N_E) = f \cdot G = 0.4 \cdot 1 = 0.4 \text{ кН.}$$

Із рівняння (10)

$$N_E = \frac{P_{\max} \cdot \frac{b}{4} + G \cdot \frac{b}{2}}{b} = \frac{f \cdot G \cdot \frac{b}{4} + G \cdot \frac{b}{2}}{b} = \frac{0.4 \cdot 1 \cdot 0.5 + 1 \cdot \frac{2}{2}}{2} = 0.6 \text{ кН.}$$

Із рівняння (9)

$$N_D = G - N_E = 1 - 0.6 = 0.4 \text{ кН.}$$

Із рівнянь (11) і (12)

$$F_{зчD} = f \cdot N_D = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16 \text{ кН,}$$

$$F_{3чЕ} = f \cdot N_E = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24 \text{ кН.}$$

Сукупності сил $\overline{N_D}$ та $\overline{F_{3чD}}$, $\overline{N_E}$ та $\overline{F_{3чE}}$ складають відповідно опорні реакції в точках D і E.

Розглянемо тепер рівновагу системи сил $\overline{R_A}$, $\overline{X_B}$, $\overline{Y_B}$, \overline{G} і $\overline{P} = \overline{P_{\max}}$, які прикладені до всієї системи (рисунок 8):

$$\sum X_i = 0, \quad X_B + P_{\max} = 0, \quad (13)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad R_A - G + Y_B = 0, \quad (14)$$

$$\sum M_{iD} = 0, \quad G \cdot \frac{a}{2} - R_A \cdot a - P_{\max} \cdot \frac{b}{4} = 0. \quad (15)$$

Розв'язуючи ці рівняння, отримаємо

$$X_B = -P_{\max} = -0.4 \text{ кН,}$$

$$R_A = \frac{-P_{\max} \cdot \frac{b}{4} + G \cdot \frac{a}{2}}{a} = \frac{-0.4 \cdot 0.5 + 1 \cdot 3}{6} = 0.467 \text{ кН,}$$

$$Y_B = G - R_A = 1 - 0.467 = 0.533 \text{ кН.}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М., 1986.

2 Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М., 1984. – Ч. 1, 2.

3 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. – М., 1985.

4 Аксьонова Н.А. Робочий конспект лекцій з дисципліни "Теоретична механіка". – Харків: УкрДАЗТ, 2005.

