

ФАКУЛЬТЕТ АВТОМАТИКИ, ТЕЛЕМЕХАНІКИ ТА ЗВ'ЯЗКУ

Кафедра обчислювальної техніки і систем управління

О.Б. Болотов

**ЧИСЛОВІ МЕТОДИ
І МОДЕЛЮВАННЯ НА ЕОМ**

Конспект лекцій

Харків – 2014

Болотов О.Б. Числові методи і моделювання на ЕОМ:
Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2014. – 65 с.

Конспект лекцій містить деякі поширені числові методи та їх використання у математичному моделюванні систем, а також у вирішенні задач оптимізації. Розглянуто основи побудови математичних моделей детермінованих та стохастичних систем, основи теорії оптимізації, числові методи та алгоритми, що використовуються у математичних моделях, такі як методи вирішення систем диференціальних та лінійних алгебраїчних рівнянь, методи вирішення трансцендентних рівнянь, регресійний аналіз, методи інтегрування та ін., а також методи та алгоритми оптимізації: метод динамічного програмування, випадковий пошук, метод золотого перерізу, лінійне програмування.

Рекомендується для напряму підготовки 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» всіх форм навчання.

Лл. 38, бібліогр.: 8 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри обчислювальної техніки та систем управління 26 березня 2013 р., протокол № 9.

Рецензент

проф. С.І. Приходько

О.Б. Болотов

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ І МОДЕЛЮВАННЯ НА ЕОМ

Конспект лекцій

Відповідальний за випуск Болотов О.Б.

Редактор Буранова Н.В.

Підписано до друку 14.08.13 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 3,50. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

Українська державна академія залізничного транспорту

Факультет автоматики, телемеханіки та зв'язку

Кафедра обчислювальної техніки та систем управління

Числові методи і моделювання на ЕОМ

Конспект лекцій
для студентів факультету АТЗ

*Розглянуто на раді методичної комісії факультету АТЗ та
рекомендовано до друку для студентів факультету АТЗ денної та заочної
форм навчання*

Декан ф-ту АТЗ, доц..

О.М. Прогонний

Голова МК ф-ту АТЗ, доц.

Н.А. Корольова

Зав. каф. ОТ та СУ, доц

С.Є. Бантюков

Укладач, доц.

О.Б. Болотов

Харків 2013

Болотов О.Б. Числові методи і моделювання на ЕОМ: Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2014. – 66 с.

Конспект лекцій містить деякі поширені числові методи та їх використання у математичному моделюванні систем, а також у вирішенні задач оптимізації. Розглянуто основи побудови математичних моделей детермінованих та стохастичних систем, основи теорії оптимізації, числові методи та алгоритми, що використовуються у математичних моделях, такі як методи вирішення систем диференційних та лінійних алгебраїчних рівнянь, методи вирішення трансцендентних рівнянь, регресійний аналіз, методи інтегрування та ін., а також методи та алгоритми оптимізації: метод динамічного програмування, випадковий пошук, метод золотого перерізу, лінійне програмування.

Іл. 38, бібліогр.: 8 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри обчислювальної техніки та систем управління 26 березня 2013 р., протокол № 9.

Рекомендується для напряму підготовки 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» всіх форм навчання.

Рецензент
проф. С.І. Приходько

ЗМІСТ

1	Числові методи у моделюванні	5
1.1	Моделювання як метод пізнання	5
1.1.1	Основні поняття моделювання	5
1.1.2	Класифікація методів моделювання	5
1.2	Моделювання поведінки динамічних детермінованих систем	6
1.2.1	Загальні відомості про динамічні системи.....	6
1.2.2	Числові методи вирішення задачі Коші	6
1.2.3	Метод Ейлера	9
1.2.4	Метод Рунге-Кутта	10
1.2.5	Алгоритми обчислення $y(x)$	11
1.2.6	Вирішення задачі Коші для двох змінних	12
1.3	Побудова моделі залежності за результатами експерименту методом регресійного аналізу	14
1.4	Числові методи вирішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь	18
1.4.1	Метод Гаусса	18
1.4.2	Метод Зейделя	21
1.5	Числові методи обчислення визначених інтегралів	23
1.5.1	Метод прямокутників	23
1.5.2	Метод трапецій	25
1.5.3	Метод Симпсона	27
1.6	Математична модель і метод вирішення задачі оптимального управління запасами	29
1.7	Статистичне моделювання систем	35
1.7.1	Загальні відомості	35
1.7.2	Моделювання випадкових величин	36
1.8	Числові методи вирішення трансцендентних рівнянь	38
1.8.1	Загальні відомості	38
1.8.2	Відділення коренів	39
1.8.3	Уточнення коренів	40
2	Числові методи у задачах оптимізації	43
2.1	Основні поняття теорії оптимізації і математична модель задачі оптимізації	43
2.2	Метод динамічного програмування	45
2.2.1	Загальна характеристика методу	45

2.2.2	Визначення шляху мінімальної вартості методом динамічного програмування.....	47
2.3	Методи визначення екстремуму функції однієї змінної	51
2.3.1	Метод простого перебору	51
2.3.2	Метод випадкового пошуку (метод Монте-Карло)	52
2.3.3	Метод золотого перерізу	54
2.4	Лінійне програмування	59
	Список літератури	65

1 ЧИСЛОВІ МЕТОДИ У МОДЕЛЮВАННІ

1.1 Моделювання як метод пізнання

1.1.1 Основні поняття моделювання

Процес пізнання об'єктів навколишнього світу завжди супроводжується побудовою моделей цих об'єктів. Модель відображає реальний об'єкт, і її дослідження може дати нові знання про об'єкт.

Модель – це штучно створений допоміжний об'єкт, подібний досліджуваному об'єкту і призначений для проведення експериментів з метою одержання додаткових знань про досліджуваний об'єкт.

Моделювання – це процес створення моделі і проведення експериментів з нею.

Обов'язковою умовою моделювання є подоба моделі та об'єкта. Вона виявляється у відповідності структури, властивостей і закономірностей функціонування моделі й об'єкта. Модель будується на підставі знань про об'єкт, і оскільки ці знання завжди неповні, то і подоба моделі й об'єкта ніколи не буває повною.

Властивість моделі давати істинні знання про відображуваний нею об'єкт називається адекватністю, а модель, що володіє такою властивістю, називається адекватній об'єкту.

Будь-який об'єкт навколишнього світу являє собою систему, тобто складається з якихось взаємопов'язаних елементів. Відповідно до сучасної теорії систем, системою називається сукупність взаємопов'язаних елементів, що утворюють визначену цілісність. Тому надалі, говорячи про моделювання, ми будемо мати на увазі моделювання систем.

1.1.2 Класифікація методів моделювання

Методи моделювання прийнято класифікувати, насамперед, за характером матеріального втілення моделі. З цього погляду моделювання буває реальне й уявне.

При реальному моделюванні модель являє собою матеріальну систему. У свою чергу, реальне моделювання прийнято підрозділяти на натурне і фізичне.

При натурному моделюванні моделлю є сама досліджувана система, з якою проводяться різні випробування.

Фізичне моделювання полягає в тому, що моделлю є фізична система, але при цьому матеріальна природа моделі і досліджуваної системи може бути зовсім різною.

Уявне моделювання умовно прийнято підрозділяти на три основних види: наочне, символічне і математичне.

До наочних моделей належать гіпотези, аналогії і макети.

Символічне моделювання – це моделювання за допомогою різних мов, у тому числі розмовних, систем кодування тощо.

Математична модель – це відображення системи за допомогою математичних виразів (формул, функцій, рівнянь і ін.).

Математичне моделювання з використанням числових методів вирішення задач отримало широкого застосування завдяки ЕОМ, висока швидкодія і великі обсяги пам'яті яких дозволяють у короткий термін одержувати результати моделювання.

1.2 Моделювання поведінки динамічних детермінованих систем

1.2.1 Загальні відомості про динамічні системи

Багато процесів, що відбуваються в системах різної природи, у тому числі в технічних системах, являють собою перехідні процеси, що можуть бути досліджені за допомогою математичних моделей.

Система, у якій можуть відбуватися перехідні процеси, називається динамічною.

Система, на поведінку якої не можуть впливати випадкові зовнішні фактори, називається детермінованою.

Перехідний процес – це зміна стану системи в часі, яку ще прийнято називати рухом системи. Стан системи описується набором змінних, які залежно від природи системи можуть

відображати різні фізичні величини, такі як швидкість, прискорення, струм, напруга, температура, тиск і т. д., а також їх похідні. Ці змінні змінюються при перехідному процесі. У теорії динамічних систем їх називають фазовими координатами. Процес називається перехідним тому, що система переходить із стану нерівноваги у стан рівноваги.

Дослідження поведінки динамічної системи за допомогою математичних моделей являє собою побудову функцій, що описують її перехідний процес. Динамічні властивості різних природних і технічних систем такі, що перехідні процеси в них відбуваються за тими самими законами і, отже, описуються однією і тією ж математичною моделлю. Такою моделлю є звичайні диференціальні рівняння (ЗДР).

У найзагальнішому випадку система диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \dot{y}_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

де y_1, y_2, \dots, y_n – змінні системи;

x - аргумент – величина, від якої залежать змінні системи в перехідних процесах; найчастіше такою величиною є час.

Однак найбільш зручним є представлення системи диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші. Рівняння вищих порядків на практиці зустрічаються рідко, тому розглянемо систему ЗДР першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Для того щоб отримати уявлення про перехідний процес, необхідно визначити залежність змінних y_1, y_2, \dots, y_n від x , тобто знайти функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, а для цього треба вирішити дану систему диференціальних рівнянь.

Для простоти розглянемо випадок, коли $n = 1$, тобто в системі є одна змінна, а перехідний процес описується одним диференціальним рівнянням:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \text{або} \quad y' = f(x, y).$$

Рішенням даного рівняння буде функція $y(x)$.

Як відомо, диференціальне рівняння має незліченну безліч рішень $y(x)$ і для того, щоб знайти яке-небудь одне рішення, потрібно задати початкові умови – x_0 і y_0 і інтервал зміни x : x_0, x_k . Тоді $x_0 \leq x \leq x_k$. Така задача називається задачею Коші.

Вирішення цієї задачі аналітичним шляхом буває складним і не завжди можливим (для цього потрібно проінтегрувати функцію $f(x, y)$, тобто знайти $y(x) = \int_{x_0}^{x_k} f(x, y) dx$, при $y = y_0$, а такий інтеграл не завжди можна взяти), тому на практиці найчастіше використовують числові методи, що дозволяють досить просто одержати наближене рішення.

1.2.2 Числові методи вирішення задачі Коші

При використанні числових методів визначається не сама функція $y(x)$ (первісна) в аналітичному вигляді, а приблизно обчислюються її окремі значення в заданих точках на заданому інтервалі $[x_0, x_k]$.

В основу числових методів покладена така процедура:

- 1 Задаються початкові умови x_0, y_0 і інтервал зміни x – $[x_0, x_k]$.
- 2 Точки, у яких обчислюються значення $y(x)$, задаються таким чином: інтервал $[x_0, x_k]$ розбивається на кінцеве число відрізків рівної довжини (рисунки 1.2.1).

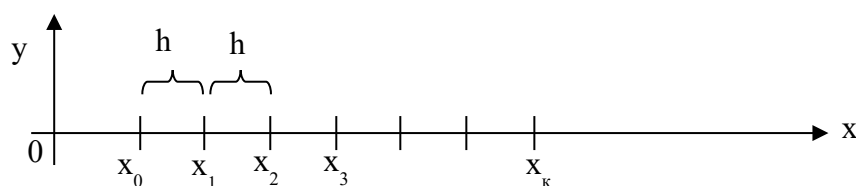


Рисунок 1.2.1

Значення $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ і є заданими точками. Довжина відрізка h називається кроком інтегрування.

3. Значення $y(x)$ у точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ обчислюються за допомогою формули розкладання функції в ряд Тейлора:

$$y_{i+1} = y_i + \underbrace{h \cdot y'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i + \frac{h^3}{3!} y'''_i + \dots}_{\text{Приріст } y},$$

де y_i, y'_i, y''_i, \dots – значення y і її похідних у попередній (i -й) точці;
 y_{i+1} – значення y у наступній ($i+1$ -й) точці.

Таким чином, значення $y(x)$ у кожній наступній точці обчислюється, виходячи зі значення $y(x)$ і її похідних у попередній точці.

Є декілька методів обчислення $y(x)$. Вони відрізняються одне від одного способом обчислення приросту y .

1.2.3 Метод Ейлера

У формулі розкладання функції в ряд Тейлора всі члени ряду, що містять похідні другого і вищих порядків, відкидаються через їхню малість (за рахунок цього обчислення виходить наближеним), і формула набуває вигляду:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot y'_i$$

або $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$.

На графіку це можна відобразити таким чином (рисунок 1.2.2).

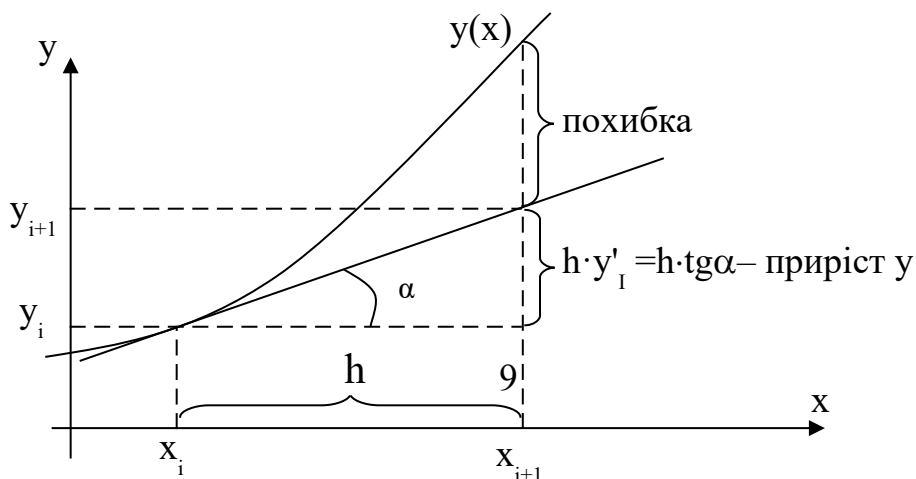


Рисунок 1.2.2

За рахунок спрощення формули розкладання в ряд Тейлора шукана функція $y(x)$ на кожному відрізку інтервалу інтегрування замінюється рівнянням прямої лінії, дотичної до кривої $y(x)$ на початку відрізка, тобто виробляється кусково-лінійна апроксимація.

Погрішність даного методу складає порядку h^2 . Для підвищення точності потрібно зменшити h , але при цьому збільшується обсяг обчислень. Алгоритм подано на рисунку 1.2.3.

1.2.4 Метод Рунге-Кутта

Цей метод є більш точним і найбільш поширеним. Він дає можливість при меншому обсязі обчислень більш точно обчислити приріст y на кожному кроці. Уточнення досягається за рахунок спеціального підбору координат чотирьох сусідніх точок, у яких обчислюється перша похідна y'_i , а приріст функції $y(x)$ визначається як усереднене значення приростів у цих точках:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6,$$

де

$$k_1 = f(x_i, y_i);$$

$$k_2 = f(x_i + 0,5h, y_i + 0,5k_1);$$

$$k_3 = f(x_i + 0,5h, y_i + 0,5k_2);$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3).$$

Погрішність даного методу складає порядку h^5 . Алгоритм подано на рисунку 1.2.4.

При обчисленні значень $y(x)$ числовими методами вхідні дані можуть задаватися у двох варіантах:

- 1) задані $f(x, y)$, x_0 , y_0 , h і N – число кроків;
- 2) задані $f(x, y)$, x_0 , y_0 , x_k і N , у цьому випадку необхідно обчислити крок h за формулою:

$$h = \frac{x_k - x_0}{N}.$$

1.2.5 Алгоритми обчислення $y(x)$

Метод Ейлера

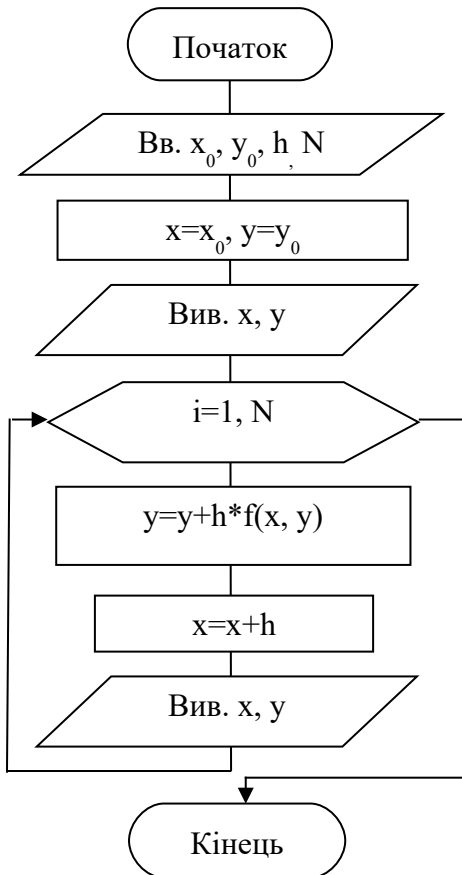


Рисунок 1.2.3

Метод Рунге-Кутта

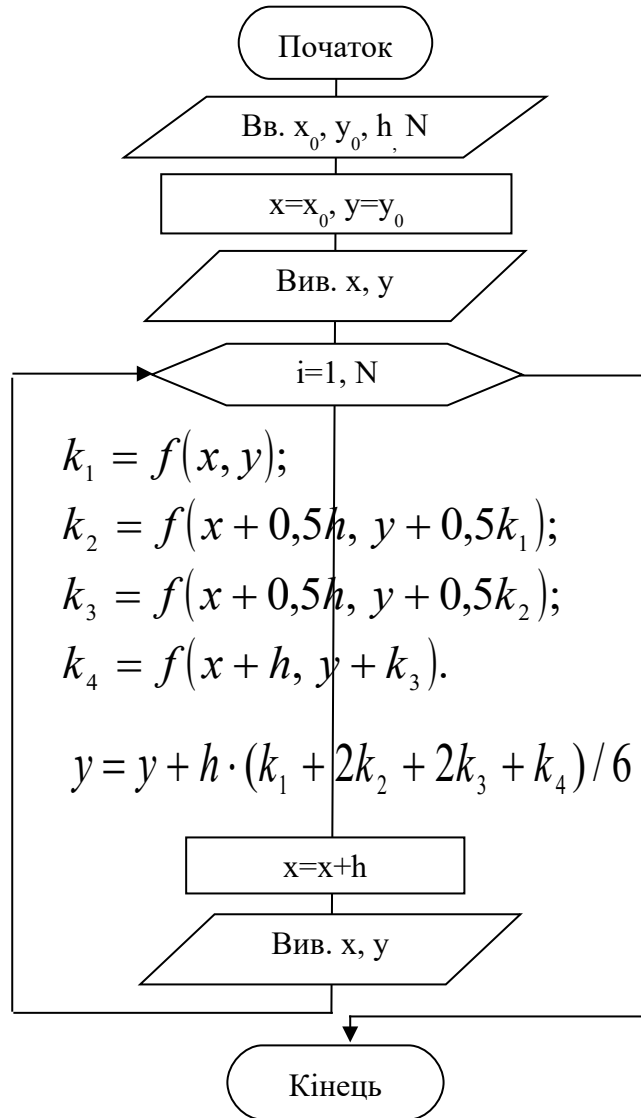


Рисунок 1.2.4

1.2.6 Вирішення задачі Коші для двох змінних

Якщо у системі дві змінних, наприклад y і z , то перехідний процес у системі буде описуватись системою двох диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z); \\ \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z). \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y' = f_1(x, y, z); \\ z' = f_2(x, y, z). \end{cases}$$

Тоді при обчислюванні $y(x)$ і $z(x)$ методом Ейлера формули будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i); \\ z_{i+1} &= z_i + h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i). \end{aligned}$$

а при обчислюванні методом Рунге-Кутта:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6; \\ z_{i+1} &= z_i + h \cdot (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) / 6. \end{aligned}$$

де

$$k_1 = f_1(x_i, y_i, z_i);$$

$$k_2 = f_1(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + l_1/2);$$

$$k_3 = f_1(x_i + h/2, y_i + k_2/2, z_i + l_2/2);$$

$$k_4 = f_1(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3);$$

$$l_1 = f_2(x_i, y_i, z_i);$$

$$l_2 = f_2(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + l_1/2);$$

$$l_3 = f_2(x_i + h/2, y_i + k_2/2, z_i + l_2/2);$$

$$l_4 = f_2(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3).$$

1.2.6. Алгоритми обчислення $y(x)$

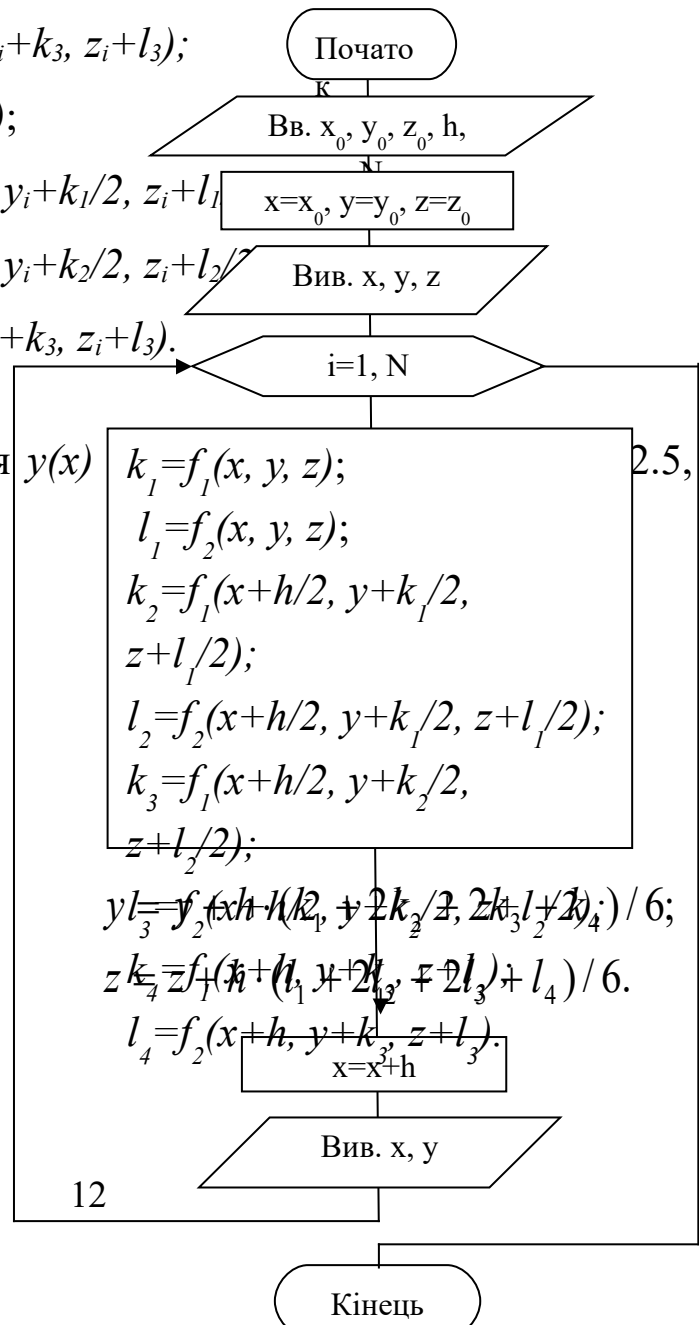
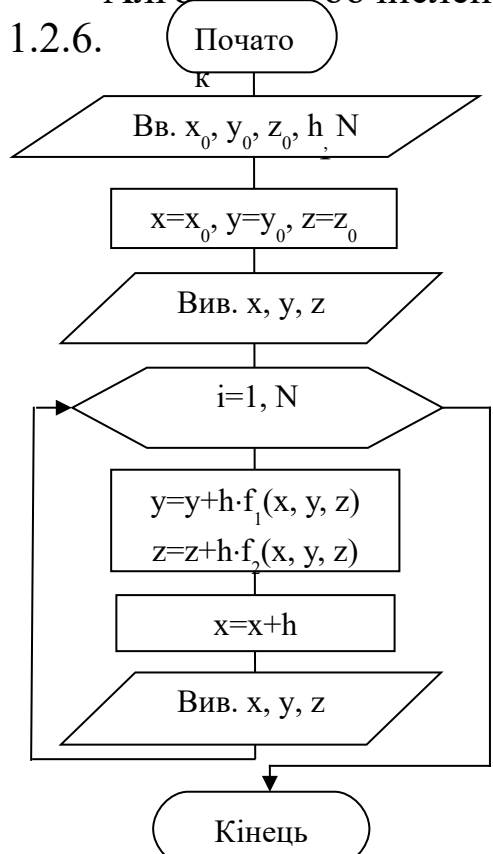


Рисунок 1.2.5

Рисунок 1.2.

1.3 Побудова моделі залежності за результатами експерименту методом регресійного аналізу

При дослідженні і моделюванні різних фізичних, технологічних, економічних і інших процесів часто виникає необхідність визначити характер зміни якої-небудь змінної величини залежно від зміни іншої величини, аналітичне вираження цієї залежності у вигляді функції, значення, що може набувати ця величина при різних умовах функціонування системи. Такі дані дозволяють прогнозувати поведінку системи і дають можливість приймати обґрунтовані рішення в питаннях

проектування систем, керування системою і т. д. Для одержання таких даних проводяться експерименти з моделлю системи або процесу. Результати експериментів являють собою сукупності значень досліджуваних величин. Вплив випадкових факторів у ході експерименту на систему або її модель призводить до того, що результати експерименту набувають характеру випадкових величин. Тоді для виявлення закономірностей і побудови математичної моделі процесу використовуються методи статистичної обробки даних.

У багатьох випадках задача полягає в тому, щоб знайти аналітичне вираження функції однієї перемінної шляхом визначення рівняння лінії, що проходить через задані точки (експериментальні значення досліджуваної величини). Вирішення цієї задачі за допомогою інтерполяційного полінома Лагранжа є недоцільним з таких причин:

1 При великій кількості точок обчислення полінома є досить громіздким.

2 Дані експерименту завжди мають розкид через вплив випадкових факторів, тому рівняння кривої може вийти дуже складним і його важко буде використовувати практично.

3 Якщо проводиться декілька або багато однакових експериментів, то дані, отримані у кожному з них, будуть завжди відрізнятися одне від одного, тому й рівняння кривої буде для кожної сукупності даних своє, що ускладнить аналіз.

Тому найчастіше застосовується метод статистичної обробки даних, називаний регресійним аналізом.

Регресійний аналіз дає можливість побудувати математичну модель залежності, щонайкраще відповідну експериментальним даним. При цьому крива апроксимуючої функції проходить не через точки, отримані в результаті експерименту, а поблизу них, даючи усереднену характеристику процесу. Така процедура називається згладжуванням експериментальної залежності (рисунок 1.3.1).

Апроксимуючу, або функцію, що згладжує, називають ще регресійною моделлю. При побудові регресійної моделі необхідно, щоб вона якнайточніше відображала характер залежності, що моделюється, і при цьому були б можливо повніше виключені випадкові відхилення. Для вирішення цієї

задачі використовується метод найменших квадратів, суть якого полягає в тому, що критерієм відповідності функції даним експерименту є функція помилки, обумовлена як сума квадратів відхилень експериментальних точок від кривої, що згладжує:

$$S = \sum_{i=1}^N \delta_i^2,$$

де i – номер експериментальної точки ;

N – кількість експериментальних точок ;

δ_i – відхилення в i -й точці .

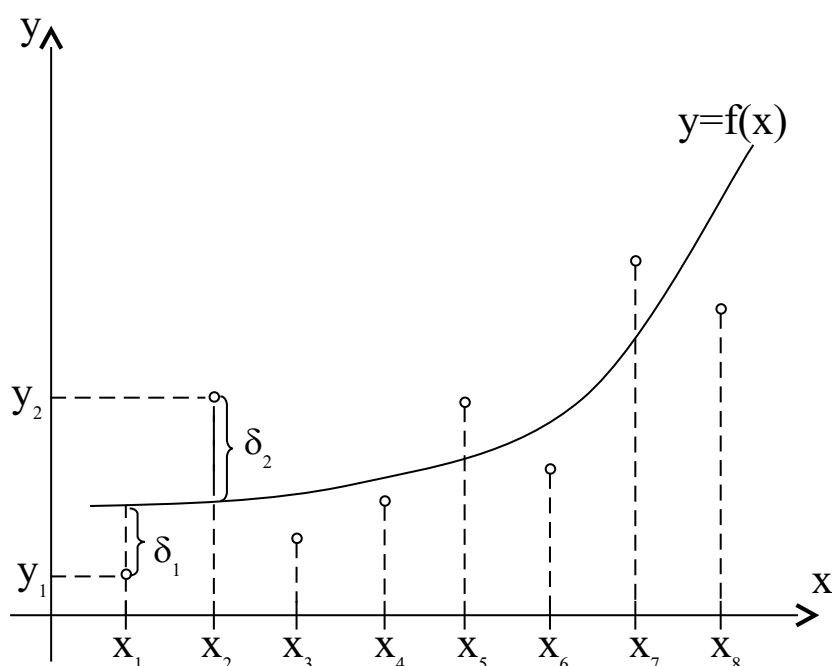


Рисунок 1.3.1

Необхідно знайти таку функцію $y=f(x)$, для якої функція помилки S мінімальна.

Як функція, що згладжує, найчастіше використовується степеневий поліном $y=f(A, B, C, \dots, x)$, де A, B, C, \dots – коефіцієнти рівняння. Порядок полінома вибирається експертним шляхом, виходячи з аналізу природи досліджуваної залежності і досвіду фахівців. Функція помилки буде мати вигляд:

$$S = \sum_{i=1}^N [y_i - f(A, B, C, \dots, x_i)]^2.$$

Задача зводиться до того, щоб знайти такі значення коефіцієнтів A, B, C, \dots , при яких функція S досягає мінімуму. У даному випадку A, B, C, \dots – це змінні, від яких залежить S , і очевидно, що мінімум S можна знайти, вирішивши систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dA} = 0 \\ \frac{dS}{dB} = 0 \\ \frac{dS}{dC} = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Якщо апроксимуюча функція лінійна (поліном 1-го порядку), то вона має вигляд:

$$y = A + Bx.$$

Функція помилки при цьому набуде вигляду:

$$S = \sum_{i=1}^N [y_i - (A + Bx_i)]^2.$$

Після зведення в квадрат одержимо вираз:

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i^2 - 2Ay_i - 2Bx_i y_i + A^2 + 2ABx_i + B^2 x_i^2).$$

Для визначення мінімуму S треба вирішити систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dA} = 0; \\ \frac{dS}{dB} = 0. \end{cases}$$

Обчисливши похідні від S по A і по B , одержимо систему рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N (-2y_i + 2A + 2Bx_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^N (-2x_i y_i + 2Ax_i + 2Bx_i^2) = 0. \end{cases}$$

Після виконання простих перетворень система рівнянь набуде вигляду:

$$\begin{cases} AN + B \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i; \\ A \sum_{i=1}^N x_i + B \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i. \end{cases}$$

Таким чином, отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь, рішення якої дасть шукані значення коефіцієнтів A і B .

Якщо як регресійна модель вибирається квадратична функція, що має вигляд полінома 2-го порядку:

$$y = A + Bx + Cx^2,$$

то функція помилки набуде вигляду:

$$S = \sum_{i=1}^N [y_i - (A + Bx_i + Cx_i^2)]^2.$$

Виконавши аналогічні перетворення, одержимо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} AN + B \sum_{i=1}^N x_i + C \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N y_i, \\ A \sum_{i=1}^N x_i + B \sum_{i=1}^N x_i^2 + C \sum_{i=1}^N x_i^3 = \sum_{i=1}^N x_i y_i, \\ A \sum_{i=1}^N x_i^2 + B \sum_{i=1}^N x_i^3 + C \sum_{i=1}^N x_i^4 = \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Аналогічно можуть бути отримані системи рівнянь для поліномів будь-якого порядку.

Для вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь можуть бути використані такі відомі методи, як метод Гаусса або метод Зейделя.

1.4 Числові методи вирішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь

1.4.1 Метод Гаусса

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) у загальному випадку має такий вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Як відомо, рішенням є значення невідомих x_1, x_2, \dots, x_n , що перетворюють кожне рівняння в тотожність.

Для вирішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь використовуються числові методи, що підрозділяються на точні та ітераційні. Точні методи дають точне рішення, але вимагають великого обсягу обчислень. Ітераційні методи дають змогу при невеликому обсязі обчислень одержати наближене рішення.

До точних належить метод Гаусса. Рішення системи рівнянь методом Гаусса містить у собі два основних етапи:

1 Спочатку система рівнянь шляхом послідовного виключення невідомих x_2, x_3, \dots, x_{n-1} з рівнянь з 2-го по n -не приводиться до трикутного вигляду. Цей етап ще називають прямим ходом. Приведення системи до трикутного вигляду здійснюється таким чином:

1) кожне рівняння з 2-го по n -не помножується на постійний коефіцієнт m_i , який визначається з умови:

$$a_{11} = m_2 a_{21} = m_3 a_{31} = \dots = m_n a_{n1},$$

звідки випливає, що $m_2 = a_{11}/a_{21}, m_3 = a_{11}/a_{31}, \dots, m_n = a_{11}/a_{n1}$;

2) з рівнянь з 2-го по n -не віднімається 1-ше рівняння. При цьому система рівнянь набуде вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 - b_1/a_{11} \\ \dots \\ a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n - b_1/a_{11} \end{cases}$$

де $a'_{22} = m_2 \cdot a_{22} - a_{12}$; $a'_{23} = m_2 \cdot a_{23} - a_{13}$; \dots $a'_{2n} = m_2 \cdot a_{2n} - a_{1n}$; $b'_2 = m_2 \cdot b_2 - b_1$ і аналогічно для інших рівнянь.

Таким чином, з рівнянь з 2-го по n -не виключається невідома x_1 ;

3) аналогічним способом з рівнянь з 3-го по n -не виключається невідома x_2 , з рівнянь з 4-го по n -не – x_3 і так далі доти, поки система не набуде трикутного вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 - b_1/a_{11} \\ \dots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} - b_1/a_{11} - a_{n-1,2}x_2 - \dots - a_{n-1,n-2}x_{n-2} \end{cases}$$

2 Далі, на другому етапі, що називається зворотним ходом, визначаються корені системи рівнянь. Спочатку з n -го рівняння визначається $x_n = b_n^{n-1} / a_{nn}^{n-1}$. Після цього x_n підставляється в $(n-1)$ -ше рівняння з якого визначається x_{n-1} , потім x_n і x_{n-1} підставляються в $(n-2)$ -ге рівняння і визначається x_{n-2} і так доти, поки не будуть визначені всі корені.

Метод Гаусса можливо використовувати тільки за умови, що при приведенні системи до трикутного вигляду на всіх етапах виключення невідомі коефіцієнти a_{ij} , що розташовані на головній діагоналі матриці коефіцієнтів, відмінні від нуля.

Алгоритм вирішення системи рівнянь методом Гаусса показано на рисунку 1.4.1.

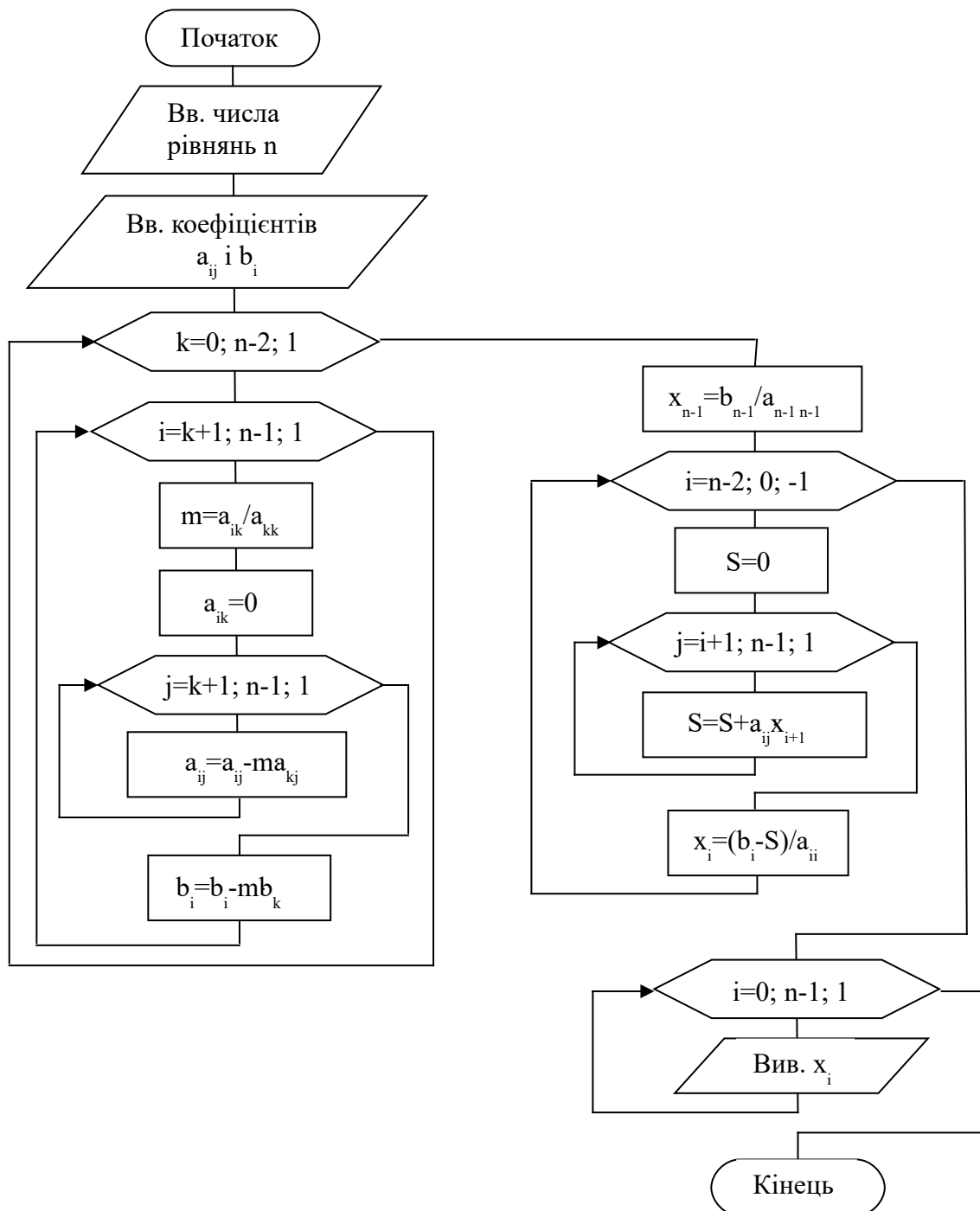


Рисунок 1.4.1

1.4.2 Метод Зейделя

Метод Зейделя є ітераційним і полягає в тому, що рішення СЛАР обчислюється шляхом послідовних наближень – ітерацій. На кожній наступній ітерації обчислюється більш точне рішення, ніж на попередній ітерації. Закінчення процесу обчислень

визначається досягненням заданої точності або заданої кількості ітерацій.

Розглянемо метод Зейделя на прикладі системи з трьох рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Для вирішення цієї системи методом Зейделя виразимо з першого рівняння x_1 , з другого – x_2 і з третього – x_3 :

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) / a_{11};$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) / a_{22};$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) / a_{33}.$$

Далі виконується така ітераційна процедура:

1) змінним x_1 , x_2 та x_3 довільно задаються значення початкового наближення:

$$x_1 = x_1^{(0)}; x_2 = x_2^{(0)}; x_3 = x_3^{(0)}.$$

2) Виконується перша ітерація – обчислюється перше наближення x_1 , x_2 та x_3 :

$$x_1^{(1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}) / a_{11};$$

$$x_2^{(1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}) / a_{22};$$

$$x_3^{(1)} = (b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}) / a_{33}.$$

На другій ітерації аналогічно обчислюється друге наближення. У загальному випадку формули обчислення k -го наближення мають вигляд:

$$x_1^{(k)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}) / a_{11};$$

$$x_2^{(k)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)}) / a_{22};$$

$$x_3^{(k)} = (b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}) / a_{33}.$$

При достатньо великій кількості ітерацій рішення близьке до точного.

Аналогічно виконуються обчислення для будь-якої кількості рівнянь.

Алгоритм подано на рисунку 1.4.2.

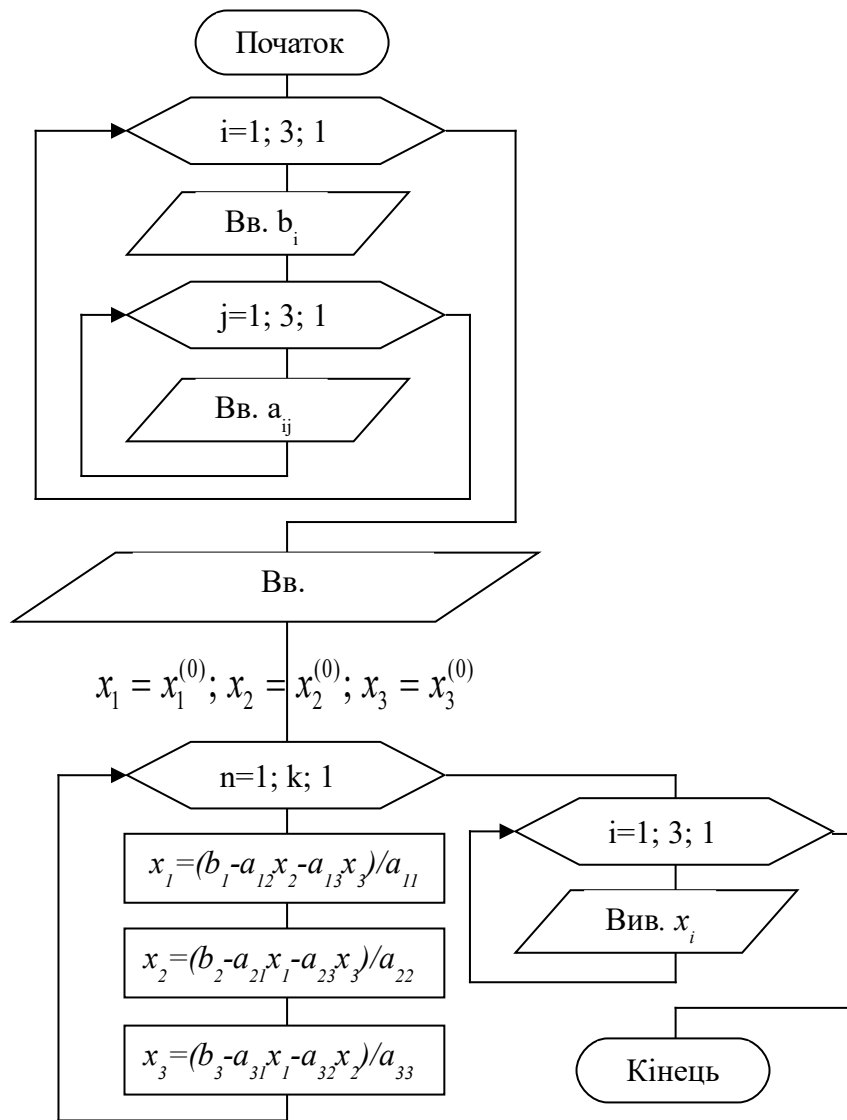


Рисунок 1.4.2

1.5 Числові методи обчислення визначених інтегралів

При дослідженні моделей систем буває необхідно обчислювати визначені інтеграли. Точне обчислення інтеграла аналітичним шляхом буває неможливим або досить складним, якщо підінтегральна функція не виражається через елементарні функції, виражається, але дуже складно, або задана в табличному вигляді. Тоді використовуються числові методи, які дозволяють достатньо просто обчислити наближене значення інтеграла.

Як відомо, визначений інтеграл від якої-небудь функції геометрично являє собою площу фігури, обмеженої графіком цієї функції, границями інтервалу інтегрування і віссю абсцис. При використанні числових методів площа цієї фігури обчислюється

не точно, а приблизно за рахунок того, що складна фігура замінюється на близьку до неї більш просту .

Числові методи інтегрування побудовані на таких діях:

1 Інтервал інтегрування розбивається на відрізки однакової довжини.

2 На кожному такому відрізку функція, що інтегрується, апроксимується більш простою, елементарною функцією.

3 На кожному відрізку будується елементарна фігура, обмежена графіком апроксимуючої функції, границями відрізка і віссю абсцис.

4 Обчислюються площі всіх елементарних фігур.

5 Наближене значення інтегралу обчислюється як сума площ елементарних фігур.

Залежно від виду апроксимуючої функції елементарні фігури будуть мати різну конфігурацію. Відповідно до цього існують різні методи інтегрування.

1.5.1 Метод прямокутників

Функція $y=f(x)$, що інтегрується, апроксимується функціями нульового порядку. Елементарні фігури являють собою прямокутники (рисунок 1.5.1).

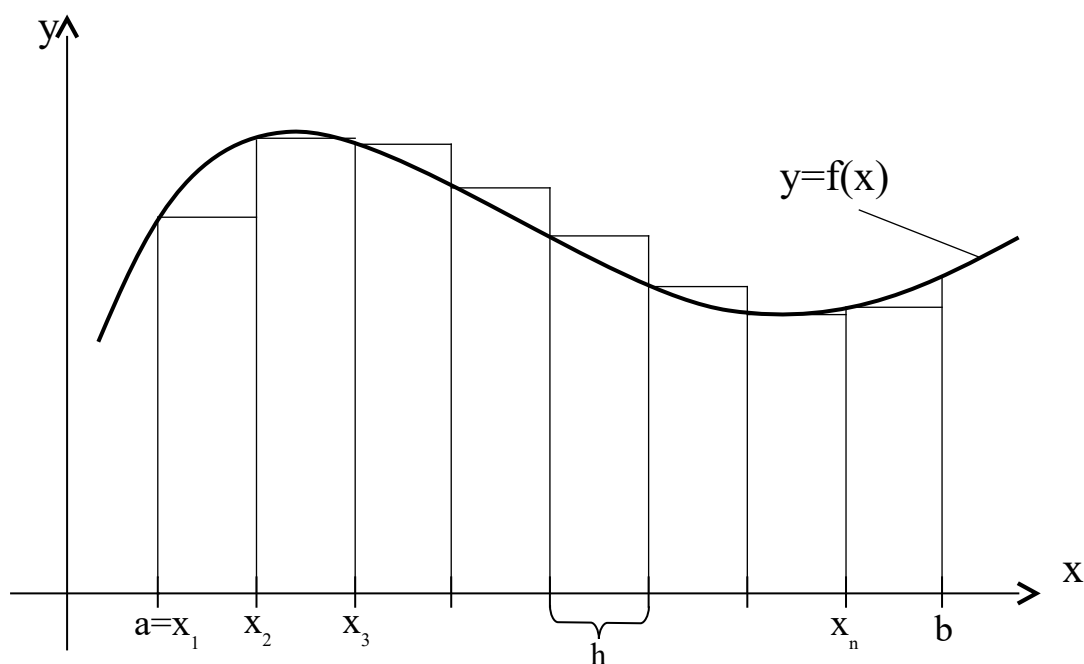


Рисунок 1.5.1

Наближене значення інтеграла обчислюється як сума площ усіх прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx hy_1 + hy_2 + \dots + hy_n = h(y_1 + y_2 + \dots + y_n),$$

або $D=h \cdot S$,

де $S = \sum_{i=1}^n y_i$;

n – кількість відрізків;

$h=(b-a)/n$ – крок інтегрування.

Алгоритм обчислення інтеграла показаний на рисунку 1.5.2.

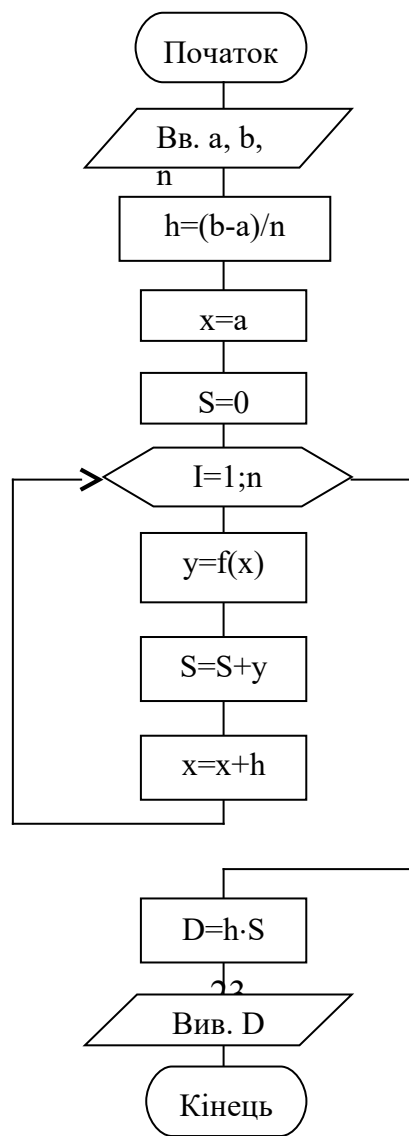


Рисунок 1.5.2

1.5.2 Метод трапецій

Функція $y=f(x)$, що інтегрується, апроксимується функціями першого порядку (кусково-лінійна апроксимація). Елементарні фігури являють собою трапеції (рисунок 1.5.3).

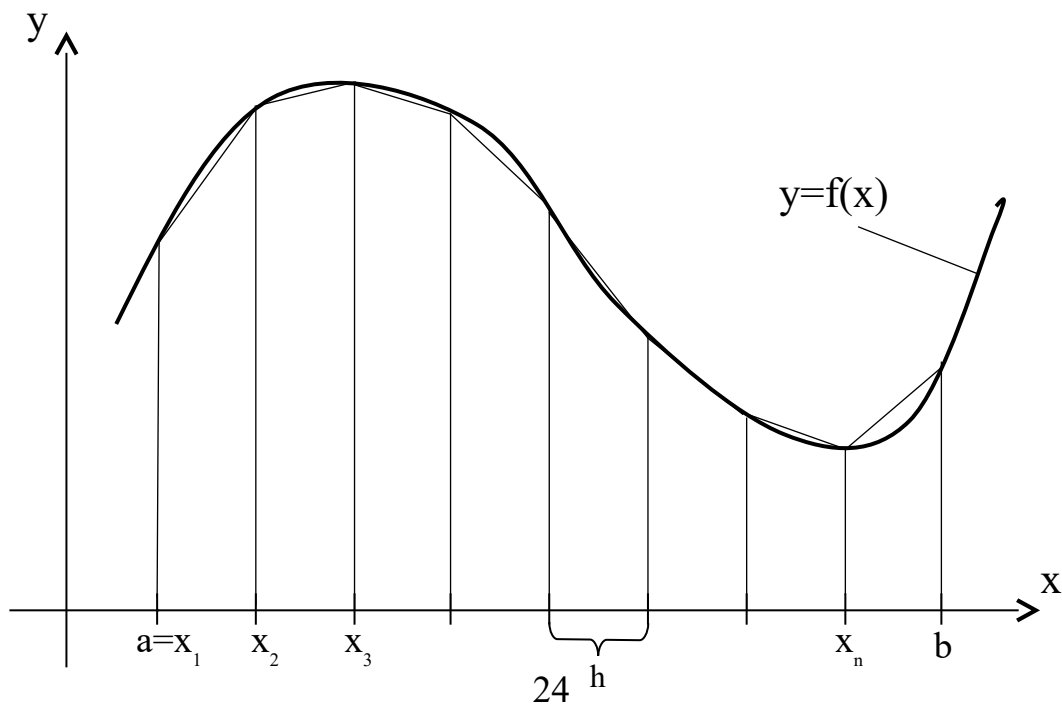


Рисунок 1.5.3

Наближене значення інтеграла D обчислюється як сума площ усіх трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} + h \cdot \frac{y_2 + y_3}{2} + \dots + h \cdot \frac{y_n + y_{n+1}}{2},$$

або, враховуючи що $y_1=f(a)$ і $y_{n+1}=f(b)$,

$$D = h \cdot [f(a)/2 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + f(b)/2].$$

Позначивши $S = \sum_{i=2}^n y_i$, одержимо

$$D = h \cdot [f(a)/2 + S + f(b)/2].$$

Метод трапецій є більш точним, ніж метод прямокутників, тому що апроксимуюча функція проходить ближче до функції, що інтегрується.

Алгоритм обчислення інтеграла показаний на рисунку 1.5.4.

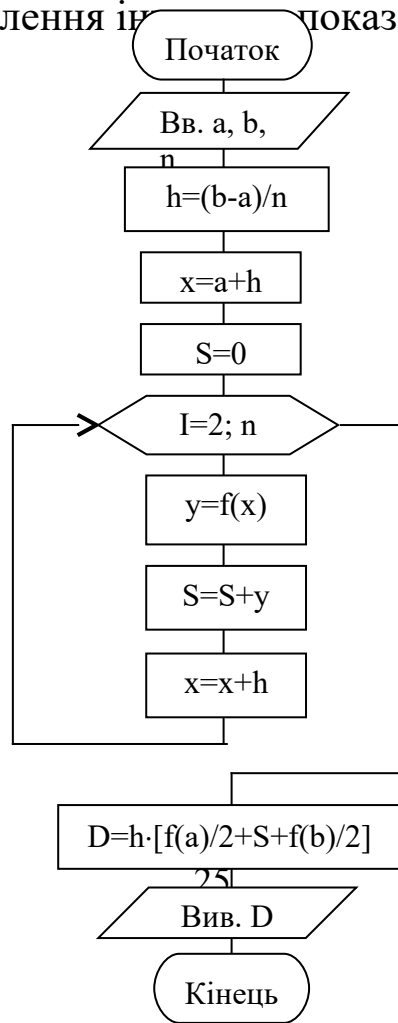


Рисунок 1.5.4

1.5.3 Метод Симпсона

Функція $y=f(x)$, що інтегрується, апроксимується функціями другого порядку – парабололами. Елементарні фігури являють собою криволінійні трапеції (рисунок 1.5.5). Число відрізків n має бути непарним.

Інтеграл приблизно обчислюється за формулою:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + 2y_3 + \dots + 4y_{n-1} + 2y_n + y_{n+1}).$$

З врахуванням того, що $y_1=f(a)$ і $y_{n+1}=f(b)$, а також

$$S_1=y_2+y_4+\dots+y_{n-1};$$

$$S_2=y_3+y_5+\dots+y_n,$$

одержимо такий вираз для обчислення інтеграла:

$$D = \frac{h}{3} \cdot [f(a) + 4S_1 + 2S_2 + f(b)].$$

Алгоритм показаний на рисунку 1.5.6.

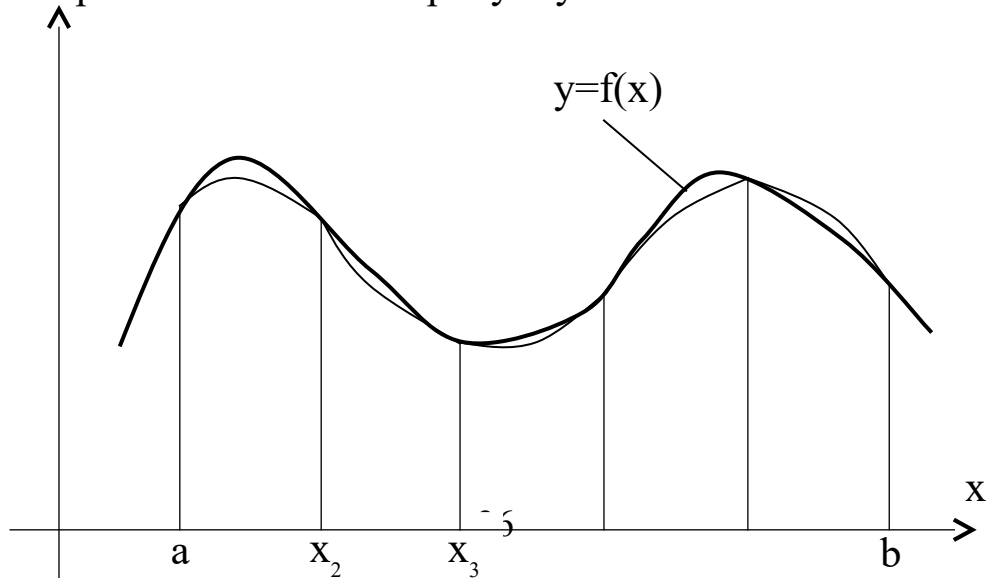


Рисунок 1.5.5

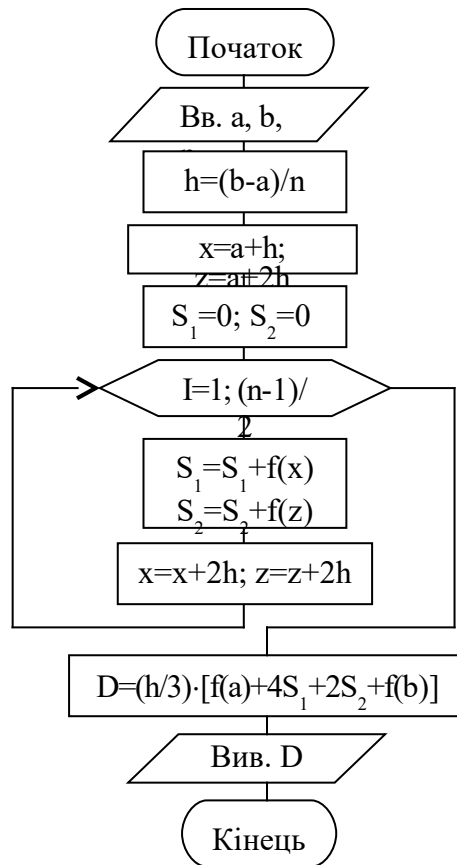


Рисунок 1.5.6

1.6 Математична модель і метод вирішення задачі оптимального управління запасами

У будь-якому виробничому процесі використовуються ресурси, постачання якими здійснює система матеріально-технічного забезпечення (МТЗ). Для нормальної безперебійної роботи виробництва на підприємстві необхідний запас ресурсів. Однією з основних задач в організації МТЗ є оптимальне управління запасами. Необхідність вирішення такої задачі обумовлена тим, що як занадто малий, так і занадто великий запаси недоцільні.

З одного боку, запас треба збільшувати, оскільки мають місце такі фактори:

- різна інтенсивність постачань і споживання;

- випадкові зміни попиту на продукцію й обсягів постачань ресурсів;

- непередбачені збої у виробничому процесі з причин, не зв'язаних з постачанням;

- збої в системі постачання;

- зміна кон'юнктури ринку;

- дискретність постачань і безперервність споживання.

У силу цих причин недостатній запас може призвести до вичерпання ресурсів і зриву виробничого процесу, що спричинить собою великі втрати.

З іншого боку, надмірно великий запас також призведе до втрат, тому що:

- збільшаться витрати на збереження ресурсу;

- виникнуть втрати за рахунок фізичного старіння ресурсу, тому що він буде довго зберігатися;

- при тривалому збереженні може відбутися моральне старіння ресурсу;

- грошові кошти, витрачені на придбання ресурсу, будуть виведені з обороту.

Задача оптимального управління запасами полягає у визначенні оптимальних моментів часу (періодичності) і обсягів постачань, що забезпечують поповнення запасів.

Як правило, системи МТЗ характеризуються:

- великою кількістю постачальників;

- великою номенклатурою споживаних ресурсів;

- складністю зв'язків між споживачами і постачальниками;

- наявністю змін у структурі МТЗ і номенклатурі ресурсів.

За таких умов моделі оптимального управління запасами складні і не завжди можуть бути формалізовані. Тому на практиці найчастіше використовуються спрощені моделі, що дають змогу одержати практично корисні наближені рішення ціною не занадто великих витрат. При цьому можуть бути використані математичні методи із застосуванням ЕОМ.

Розглянемо спрощений варіант задачі управління запасами, коли в системі МТЗ є один постачальник і один споживач ресурсу. При цьому використовується один вид ресурсу. Для побудови математичної моделі введемо такі позначення:

L – інтенсивність постачання ресурсу (кількість ресурсу, що поставляється в одиницю часу);

M – інтенсивність споживання ресурсу (кількість ресурсу, що витрачається в одиницю часу);

Y – максимальний запас ресурсу на складі;

n – вартість збереження одиниці ресурсу в одиницю часу;

K – максимально припустимий дефіцит ресурсу;

p – вартість збитків унаслідок дефіциту одиниці ресурсу в одиницю часу;

S – вартість організації постачання;

T – період постачання;

C_T – витрати на управління запасами протягом періоду T .

Витрати C_T містять витрати на організацію постачання і збереження ресурсу, а також втрати внаслідок дефіциту ресурсу на складі. Якщо виразити C_T у вигляді функції, то в загальному випадку вона буде мати вигляд:

$$C_T = f(L, M, Y, n, K, p, S, T).$$

У даному випадку вважаємо, що величини L, M, n, K, p та S постійні. Тоді функція витрат C_T буде залежати тільки від Y і T , які є змінними, і задача полягає у тому, щоб знайти такі значення Y і T , при яких управління запасами буде оптимальним.

Для спрощення математичної моделі представимо процес постачання і споживання ресурсу як безперервний і лінійний (реально він дискретний і найчастіше нелінійний). Тоді динаміку зміни запасу ресурсу на складі протягом періоду T можна відобразити на графіку (рисунок 1.6.1).

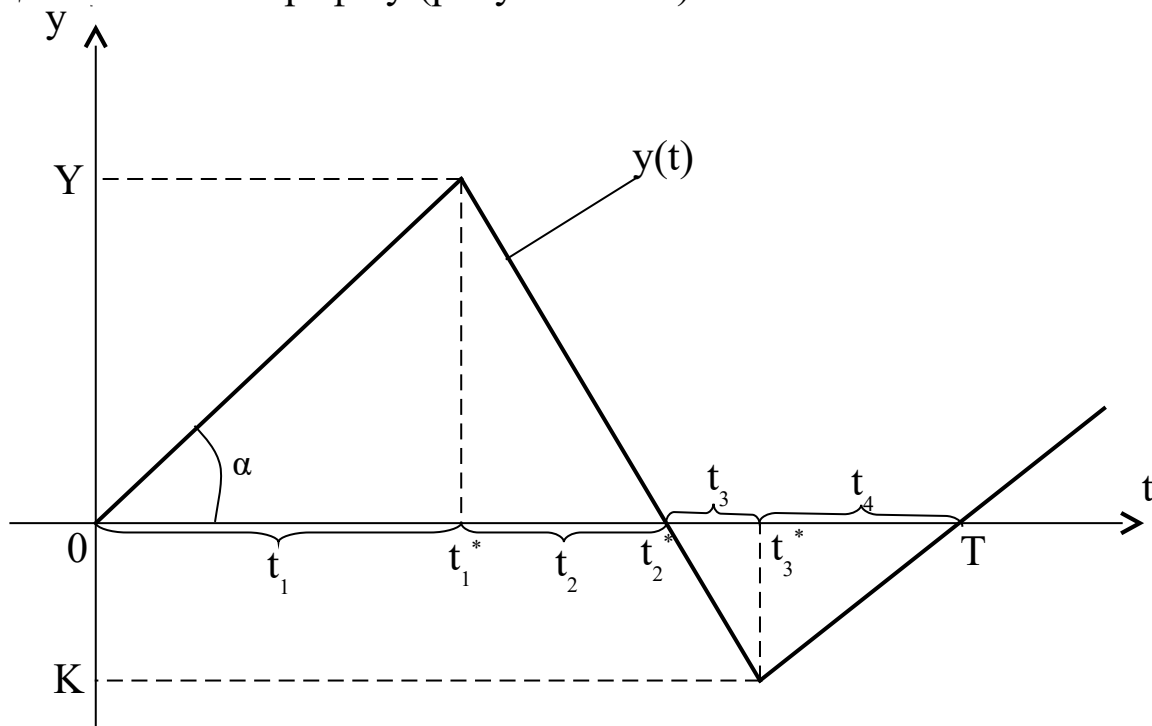


Рисунок 1.6.1

Функція $y(t)$ показує залежність запасу ресурсу на складі від часу.

На інтервалі t_1 йдуть постачання і споживання ресурсу, при цьому $L > M$.

На інтервалах t_2 і t_3 постачань немає, а відбувається тільки споживання ресурсу, при цьому на інтервалі t_3 запасу на складі вже немає, зростає дефіцит ресурсу і виробництво працює за рахунок запасу ресурсу, що міститься у виробничому приміщенні.

На інтервалі t_4 відновлюються постачання, але ресурс, що надходить, йде не на склад, а прямо у виробництво, за рахунок чого зменшується дефіцит.

Функція витрат C_T на періоді часу від 0 до T виражається формулою:

$$C_T = S + \int_0^T c(t) dt,$$

де $c(t)$ – частина витрат, що залежить від наявності запасу на складі.

З огляду на те, що $T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$, а також те, що витрати на інтервалах t_1 і t_2 містять у собі вартість збереження запасу ресурсу на складі, а на інтервалах t_3 і t_4 – втрати від дефіциту, одержимо такий вираз:

$$C_T = S + n \cdot \int_0^{t_1^*} y(t) dt + n \cdot \int_{t_1^*}^{t_2^*} y(t) dt + p \cdot \int_{t_2^*}^{t_3^*} y(t) dt + p \cdot \int_{t_3^*}^T y(t) dt. \quad (1.6.1)$$

Використовуючи геометричну інтерпретацію інтегралів як площ фігур (у даному випадку трикутників), вираз (1.6.1) набуде вигляду:

$$C_T = S + n \cdot 0,5 \cdot Y \cdot t_1 + n \cdot 0,5 \cdot Y \cdot t_2 + p \cdot 0,5 \cdot K \cdot t_3 + p \cdot 0,5 \cdot K \cdot t_4. \quad (1.6.2)$$

Інтервали t_1 , t_2 , t_3 і t_4 виражаються через L , M , Y і K таким чином.

На інтервалі t_1 виконуються такі співвідношення:

$$t_1 = \frac{Y}{\operatorname{tg} \alpha}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dt} = L - M.$$

Використовуючи ці, а також аналогічні співвідношення на інтервалах t_2 , t_3 і t_4 , одержимо вирази:

$$t_1 = \frac{Y}{L - M}; t_2 = \frac{Y}{M}; t_3 = \frac{K}{M}; t_4 = \frac{K}{L - M}. \quad (1.6.3)$$

Виходячи з цього:

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 &= \frac{LY}{M(L - M)}; \\ t_3 + t_4 &= \frac{LK}{M(L - M)}. \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

Позначивши $B = \frac{L}{M(L - M)}$, одержимо:

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 &= B \cdot Y; \\ t_3 + t_4 &= B \cdot K; \\ K &= \frac{T}{B} - Y. \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

З урахуванням виразів (1.6.3), (1.6.4) і (1.6.5) формула (1.6.2) після простих перетворень набуде вигляду:

$$C_T = S + \frac{Y^2 B(n + p)}{2} - pYT + \frac{pT^2}{2B}. \quad (1.6.6)$$

Якщо C_T поділити на T , то буде отримана формула визначення витрат на управління запасами в одиницю часу:

$$C = \frac{S}{T} + \frac{Y^2 B(n + p)}{2T} - pY + \frac{pT}{2B}. \quad (1.6.7)$$

У задачі визначення оптимального управління запасами величину C доцільно використовувати як критерій оптимізації.

Очевидно, що управління запасами буде оптимальним, якщо C буде мати мінімальне значення. Функція C залежить від двох змінних – T і Y , тому мінімум C можна знайти, вирішивши систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dC}{dT} = 0; \\ \frac{dC}{dY} = 0. \end{cases}$$

У результаті вирішення даної системи рівнянь одержимо формули оптимальних значень T і Y :

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{2S(1+n/p)}{Mn(1-M/L)}}; \\ Y &= \sqrt{\frac{2SM(1-M/L)}{n(1+n/p)}}. \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

Підставивши вираз (1.6.8) у (1.6.7), одержимо формулу мінімального значення C :

$$C = \sqrt{\frac{2SMn(1-M/L)}{1+n/p}}. \quad (1.6.9)$$

Дана задача може також бути вирішена з урахуванням стратегії управління. Стратегія управління – це сукупність правил і умов, що визначають специфіку управління запасами у виробничому процесі.

Розглянутий вище варіант задачі назвемо стратегією А. У цьому випадку в системі допускається дефіцит і постачання йдуть з інтенсивністю L .

Інші варіанти стратегії управління:

Стратегія В.

У системі допускається дефіцит, тобто $K > 0$. Постачання здійснюються дискретно, партіями розміром $Y+K$ на початку періоду постачання. Можна допустити, що постачання відбувається миттєво, тобто $L = \infty$. З урахуванням цих умов вирази (1.6.8), (1.6.9) будуть мати вигляд:

$$T = \sqrt{\frac{2S(1+n/p)}{Mn}}; Y = \sqrt{\frac{2SM}{n(1+n/p)}}; C = \sqrt{\frac{2SMn}{1+n/p}}.$$

Графік зміни запасу ресурсу на складі показано на рисунку 1.6.2.

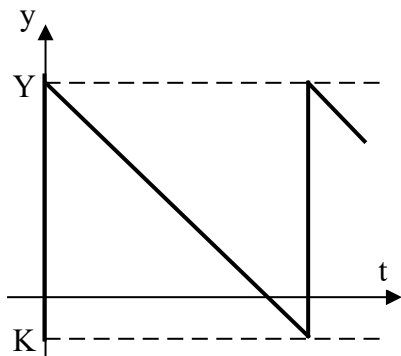


Рисунок 1.6.2

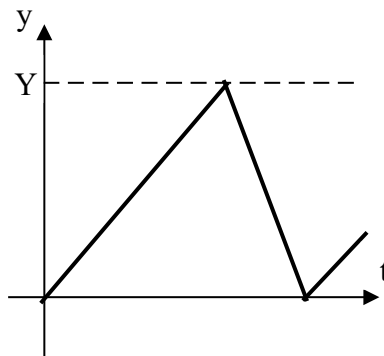


Рисунок 1.6.3

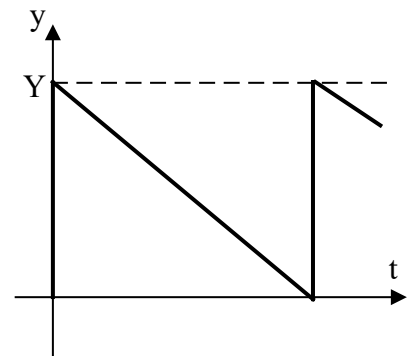


Рисунок 1.6.4

Стратегія С.

Неприпустимий дефіцит: $K=0$. Постачання йдуть з інтенсивністю L . Зрив постачань неприпустимий: $p=\infty$. Формули (1.6.8), (1.6.9) набудуть вигляду:

$$T = \sqrt{\frac{2S}{Mn(1 - M/L)}}; Y = \sqrt{\frac{2SM(1 - M/L)}{n}}; C = \sqrt{2SMn(1 - M/L)}.$$

Графік зміни запасу ресурсу на складі показано на рисунку 1.6.3.

Стратегія Д.

Неприпустимий зрив постачань: $p=\infty$. Неприпустимий дефіцит: $K=0$. Постачання здійснюються дискретно партіями розміром Y на початку періоду постачання: $L=\infty$. У цьому випадку:

$$T = \sqrt{\frac{2S}{Mn}}; Y = \sqrt{\frac{2SM}{n}}; C = \sqrt{2SMn}.$$

Графік зміни запасу ресурсу на складі показано на рисунку 1.6.4.

1.7 Статистичне моделювання систем

1.7.1 Загальні відомості

Під статистичним моделюванням прийнято розуміти побудову і дослідження математичної моделі, у якій поведінка

системи відображається з урахуванням впливу на систему випадкових факторів, найчастіше викликаних впливом зовнішнього середовища . Модель реалізується у вигляді алгоритму, що дає змогу на ЕОМ одержати статистичні дані про процеси, що відбуваються в системі.

Статистичне моделювання застосовується в таких галузях:

1 Дослідження стохастичних систем

Стохастичними називаються системи, на поведінку яких можуть діяти випадкові впливи зовнішнього середовища , у результаті чого вхідні і вихідні величини , а також внутрішні характеристики або параметри системи змінюються випадковим чином.

2 Вирішення детермінованих задач

Зміст використання статистичного моделювання для вирішення детермінованих задач полягає в тому, що в детерміновану задачу навмисно вводиться елемент випадковості або детермінована система заміняється еквівалентною їй стохастичною системою. До таких задач належать різні інженерні, проектні і наукові задачі, наприклад, оптимізаційні задачі, вирішення яких детермінованим (аналітичним) шляхом є або досить складним, або неможливим. Використання статистичної моделі детермінованої задачі дозволяє одержати наближене рішення , цілком достатнє для практичних цілей.

У процесі статистичного моделювання проводиться серія випробувань з моделлю, у результаті яких визначаються безлічі окремих значень досліджуваних величин . При досить великій кількості випробувань отримані результати здобувають статистичну стійкість, що дозволяє виявити закономірності функціонування системи й одержати досить точні оцінки досліджуваних величин. При цьому як характеристики приймаються не окремі значення величин, а їхні математичні сподівання:

$$m_x = \lim_{n \rightarrow \infty} [(\sum_{i=1}^n x_i) / n]$$

де x_i – окреме значення випадкової величини;

n – число випробувань.

1.7.2 Моделювання випадкових величин

Для статистичного моделювання систем на ЕОМ є необхідним формування значень випадкових величин. Це робиться за допомогою генераторів випадкових чисел.

Існують три методи генерації випадкових чисел: апаратний, табличний і алгоритмічний.

Апаратний метод полягає в тому, що випадкові числа виробляються спеціальним електронним пристроєм, приєднаним до ЕОМ як зовнішній пристрій. Джерелом випадкових чисел є який-небудь природний фізичний процес, найчастіше електромагнітної природи, що має випадковий характер (рисунок 1.7.1).



Рисунок 1.7.1 – Апаратний метод генерації випадкових чисел

Як фізичний процес використовуються шуми в електронних приладах, явища розпаду радіоактивних елементів і ін.

Переваги даного методу:

- запас чисел не обмежений;
- не вимагає витрати часу на обчислення і пам'яті ЕОМ.

Недоліки :

- нестабільність фізичного процесу;
- неможливість відтворення послідовності випадкових чисел;
- необхідність спеціального пристрою.

Табличний метод полягає в тому, що випадкові числа, отримані яким-небудь способом, записуються в пам'ять ЕОМ у вигляді масиву і потім шляхом звертання до масиву використовуються при формуванні випадкової величини.

Перевагою є можливість багаторазового відтворення однієї і тієї ж послідовності чисел.

До недоліків слід віднести обмеженість запасу чисел, а також великий обсяг пам'яті для їхнього збереження.

Однак найчастіше використовується алгоритмічний числовий метод, коли випадкові числа генеруються в ЕОМ за допомогою спеціальних алгоритмів. Стандартні програми (функції), що генерують випадкові числа, є практично в усіх мовах програмування. У мові BASIC – функція RND, у мові C ++ – функції rand і random.

Переваги алгоритмічного методу:

- стабільність генерації випадкових чисел;
- не вимагає багато пам'яті ЕОМ;
- не використовує спеціальні зовнішні пристрої .

До недоліків належать помітні витрати машинного часу, а також те, що числа, які генеруються, є не суто випадковими, а псевдовипадковими (близькими до випадкових), тому що існує алгоритм їхньої генерації. Для генерації випадкових чисел алгоритму в принципі бути не може.

1.8 Числові методи вирішення трансцендентних рівнянь

1.8.1 Загальні відомості

Трансцендентні рівняння являють собою один з видів нелінійних рівнянь. Нелійними називаються рівняння з одним невідомим виду $f(x)=0$, якщо $f(x)$ не є лінійна функція. Нелінійні рівняння бувають двох видів: алгебраїчні і трансцендентні.

Рівняння є алгебраїчним, якщо $f(x)$ є алгебраїчною функцією, тобто має вигляд степеневого полінома, наприклад:

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0,$$

де A, B, C, D, E – постійні коефіцієнти.

Якщо $f(x)$ не є алгебраїчною функцією, то таке рівняння називається трансцендентним.

Вирішення трансцендентного рівняння полягає у знаходженні його коренів, тобто таких значень x , при яких $f(x)=0$.

У більшості випадків цю задачу неможливо вирішити аналітичним шляхом, який дозволяє визначити загальну формулу точного обчислення коренів, тому на практиці використовують тільки числові методи, що дають можливість знайти наближені значення коренів із заданою точністю.

Числові методи вирішення трансцендентних рівнянь складаються з двох основних етапів: відділення коренів, тобто знаходження достатньо малих інтервалів, або відрізків на осі x , у яких містяться корені, і уточнення коренів, тобто обчислення їх із заданою точністю.

1.8.2 Відділення корнів

Найпростіший метод відділення корнів засновано на такій теоремі: якщо значення неперервної функції $f(x)$ на кінцях відрізка $[a, b]$, $x \in [a, b]$, мають різні знаки, то всередині цього відрізка знаходиться хоча би один корінь рівняння $f(x)=0$ (рисунок 1.8.1). Очевидно, що при цьому графік функції $f(x)$ буде перетинати вісь x і $f(a) \cdot f(b) < 0$.

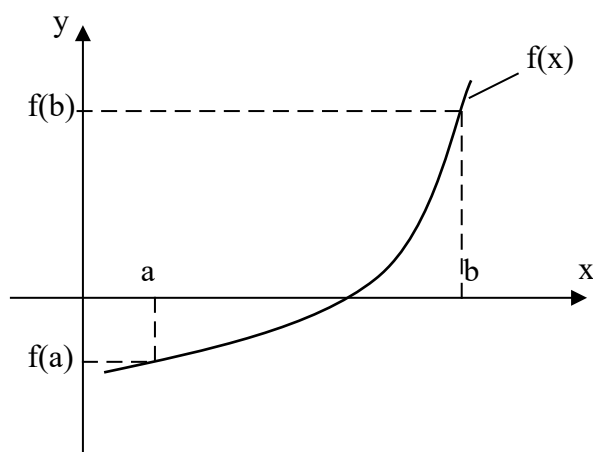


Рисунок 1.8.1

Заданий інтервал $[a, b]$ розбивається на відрізки рівної довжини h . Алгоритм відділення корнів являє собою послідовний перебір усіх відрізків. При цьому на кожному

відрізку обчислюються значення $f(x)$ на його кінцях, тобто значення $f(x)$ обчислюються, починаючи з точки $x=a$, з кроком h до кінця інтервалу $x=b$. Якщо якась пара сусідніх значень $f(x)$ буде мати різні знаки, що визначається перевіркою знака їх добутку, то даний відрізок містить корінь. Схема алгоритму подана на рисунку 1.8.2.

В алгоритмі також використані такі позначення: n – кількість відрізків, F_l – значення функції на початку відрізка, F_p – значення функції на кінці відрізка, k – номер кореня.

Результат обчислень розглянутим алгоритмом залежить від величини кроку h . Якщо h буде занадто великим – більше, ніж відстань між якими-небудь двома сусідніми коренями, то деякі корені можуть бути пропущені. Тому крок треба задавати достатньо малим.

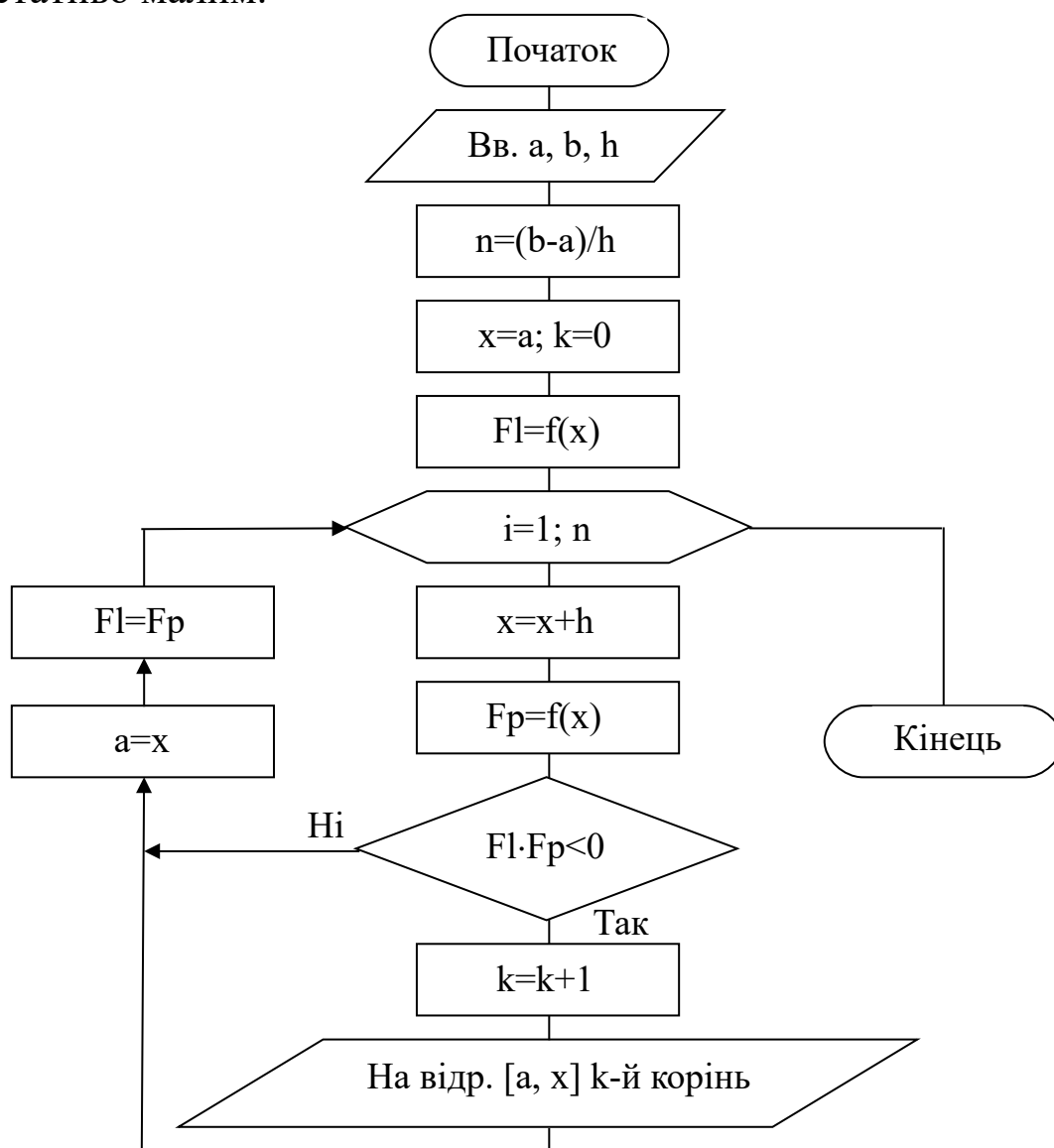


Рисунок 1.8.2

1.8.3 Уточнення коренів

При необхідності обчислення коренів трансцендентного рівняння з високою точністю використовуються числові методи уточнення коренів, наприклад такі як: метод половинного ділення, метод Ньютона, метод хорд, комбінований метод, метод простої ітерації.

Розглянемо метод половинного ділення, який є одним з найбільш простих та ефективних методів.

Якщо відомо, що на відрізку $[a, b]$ міститься корінь, то цей відрізок ділиться навпіл і обчислюється його середина – $c = (a+b)/2$. Далі, якщо $f(c) = 0$, то c є корінь рівняння, а якщо $f(c) \neq 0$, то з двох відрізків $[a, c]$ і $[c, b]$ вибирається той, на кінцях якого функція $f(x)$ має різні знаки. Цей відрізок знову ділиться навпіл і таким же способом визначається, у якій його половині міститься корінь (рисунок 1.8.3). Процес ділення відрізків навпіл продовжується доти, поки довжина відрізка, який містить корінь, не стане менше заданої точності ϵ . Після цього за значення кореня приймається середина відрізка.

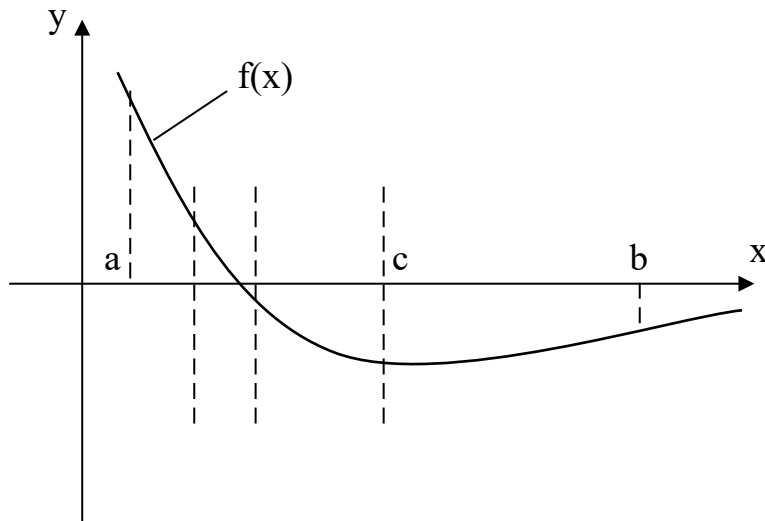


Рисунок 1.8.3

Алгоритм методу половинного ділення показано на рисунку 1.8.4.

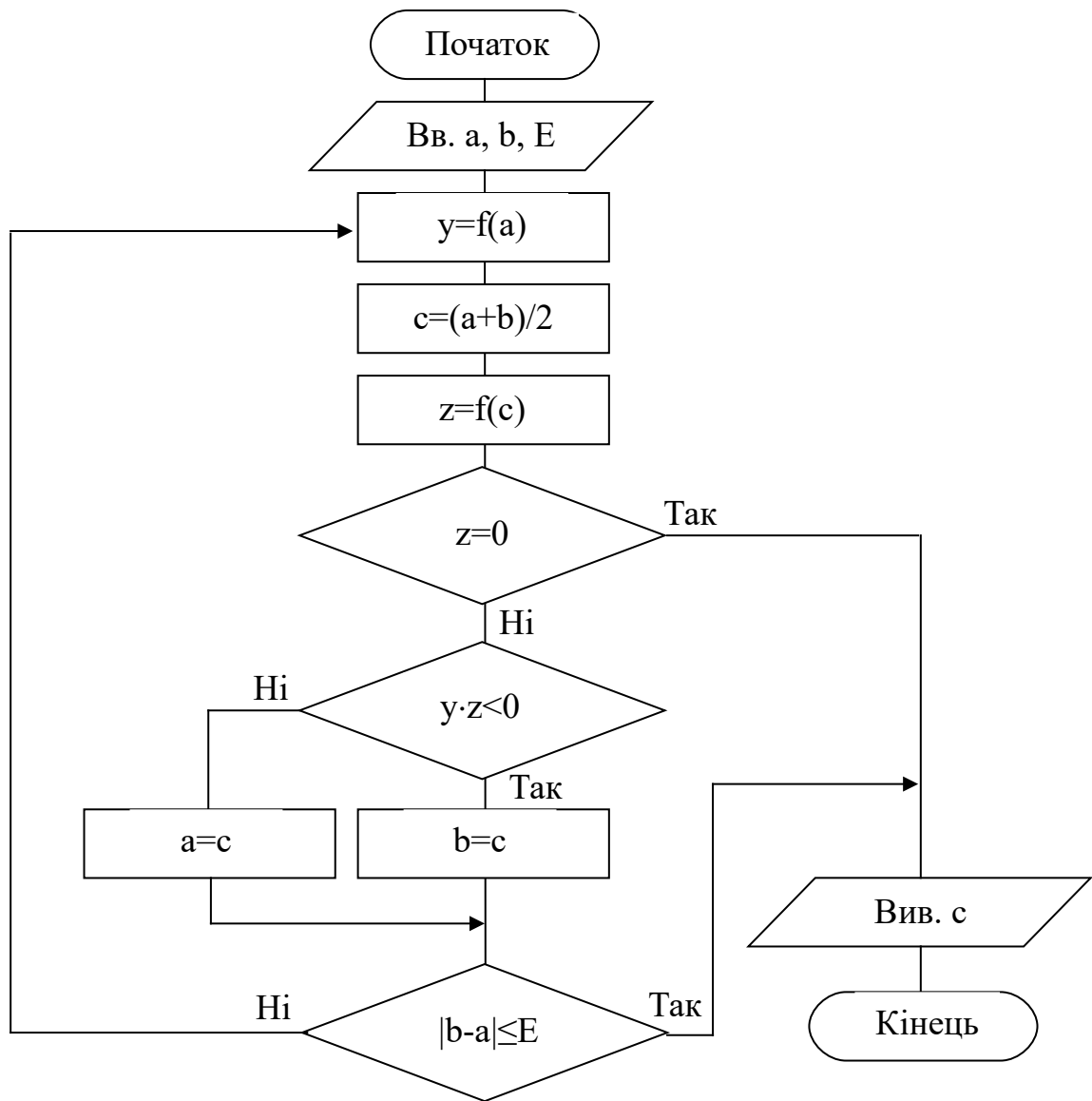


Рисунок 1.8.4

Таким чином, цей метод являє собою ітераційний процес, у якому корінь визначається шляхом послідовних наближень.

2 ЧИСЛОВІ МЕТОДИ У ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ

2.1 Основні поняття теорії оптимізації і математична модель задачі оптимізації

У практиці проектування технічних систем, дослідження і моделювання систем, керування технологічними й економічними процесами часто зустрічаються задачі, коли з безлічі варіантів необхідно вибрати найкращий за яким-небудь показником варіант. Процес знаходження такого варіанта називається оптимізацією.

До таких задач, наприклад, належать:

- визначення найкоротшого шляху між двома пунктами;
- розподіл ресурсів між підприємствами;
- вибір маршруту в транспортній мережі ;
- вибір параметрів технічної системи;
- розміщення елементів електронної схеми на платі й ін.

Оптимізувати можна як систему, так і процес.

Показник, за яким здійснюється оптимізація, називається критерієм оптимізації. Як критерій вибирається, як правило, найбільш важлива в розглянутій задачі характеристика системи або процесу, що оптимізуються. Зміст критерію полягає в тому, що звичайно це або виграш (корисний ефект, прибуток) і в цьому випадку його необхідно максимізувати, або програш (витрати, штраф, втрати) і тоді його потрібно мінімізувати.

Величина критерію виражається числовим значенням і може бути обчислена або виміряна. При цьому кожному варіантові, аналізованому в процесі оптимізації, відповідає певне значення критерію оптимізації.

Варіант, при якому критерій досягає мінімального або максимального значення, називається оптимальним .

Математична модель оптимізації – це задача оптимізації, сформульована в математичному вигляді .

Критерій виражається у вигляді функції, що залежить від визначених параметрів або характеристик, значення яких можуть змінюватися в процесі оптимізації. Така функція називається функцією мети, або цільовою функцією, а параметри, від яких вона залежить, – змінними оптимізації.

Математична модель оптимізації в загальному вигляді має такий вигляд.

Цільова функція W прямує до мінімуму або максимуму:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min (\max),$$

де x_1, x_2, \dots, x_n – змінні оптимізації;

при виконанні обмежень:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

...

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

При цьому $m < n$.

Зміст обмежень полягає в тому, що перемінні оптимізації можуть набувати не будь-які значення, а тільки такі, для яких виконується система обмежень.

Сукупність значень x_1, x_2, \dots, x_n , що задовольняє обмеження, називається припустимим рішенням.

Сукупність припустимих рішень називається областю, або безліччю припустимих рішень.

Припустиме рішення, для якого W досягає екстремуму, називається оптимальним рішенням.

Цільова функція може мати один або багато екстремумів. У першому випадку вона називається однокстремальною, а у другому – багатокстремальною. Екстремуми багатокстремальної функції називаються локальними екстремумами, а той з них, що відповідає оптимальному рішенням, – глобальним екстремумом.

Таким чином, задача оптимізації у найзагальнішому вигляді полягає у тому, щоб знайти оптимальне рішення x_1, x_2, \dots, x_n , яке звертає у максимум або мінімум цільову функцію W .

Залежно від специфіки задачі, виду цільової функції й обмежень існують різні методи вирішення таких задач, об'єднані під загальною назвою – методи математичного програмування. До них належать, наприклад, такі методи, як лінійне програмування, квадратичне програмування, динамічне програмування та ін.

2.2 Метод динамічного програмування

2.2.1 Загальна характеристика методу

Метод динамічного програмування призначений для пошуку оптимальних рішень у задачах оптимізації процесів, що складаються з певного числа етапів (кроків), які послідовно здійснюються один за іншим. У таких задачах у загальному випадку необхідно знайти оптимальний процес здійснення ряду певних дій, спрямованих на досягнення якоїсь мети.

Прикладами подібних задач можуть бути:

- планування діяльності групи промислових підприємств протягом ряду років;
- переміщення транспортного засобу з одного пункту в інший через ряд проміжних пунктів;
- здійснення низки заходів щодо підвищення надійності проектованої технічної системи;
- розробка нового виду техніки тощо.

В усіх цих задачах існує показник, за яким оцінюється ефективність усього процесу, або критерій оптимізації. Позначимо його через W .

Процес, що оптимізується, складається з окремих кроків, отже, загальний виграш (програш) може бути представлений, як сума виграшів (програшів) на окремих кроках:

$$W = \sum_{i=1}^m w_i,$$

де w_i – виграш (програш) на i -му кроці;

m – число кроків.

Така властивість критерію W називається адитивністю, а сам критерій адитивним.

Оптимізація багатокрокового процесу є операцією, що управляється, у ході якої ми можемо вибрати якісь параметри або шляхи, що впливають на хід і результат процесу. При цьому на кожному кроці приймається певне рішення, від якого залежить як значення w_i , так і значення W . Процедуру вибору рішення на кожному кроці назвемо управлінням. Математично крокове

управління може бути відображено в загальному випадку деякою величиною x_i , $i=1, 2, \dots, m$, що залежно від специфіки задачі може мати вигляд перемінної, функції, вектора тощо. Сукупність крокових управлінь являє собою управління усім процесом:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Оскільки W залежить від x , то завдання полягає в тому, щоб знайти таке управління x , при якому W досягає максимуму:

$$W^* = \max_x \{W(x)\},$$

або мінімуму:

$$W^* = \min_x \{W(x)\}.$$

Управління x , при якому досягається екстремум критерію W , називається оптимальним. Позначимо його x^* .

Оскільки управління x складається з m крокових управлінь x_i , то кожне x_i також має бути оптимальним.

Ця задача вирішується методом динамічного програмування, в основу якого покладений принцип оптимальності Беллмана, що у застосуванні до даної задачі полягає в тому, що якщо управління на кожному кроці оптимальне, то і управління в цілому також оптимальне, тобто:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*);$$

$$W^* = W(x^*) = \sum_{i=1}^m w_i(x_i^*).$$

Таким чином, необхідно знайти оптимальні крокові управління x_1^* , x_2^* , ..., x_m^* і тоді їхня сукупність дасть загальний оптимум.

Основна складність задачі полягає в тому, що кроки розглянутого процесу не існують окремо самі по собі, а взаємозв'язані один з одним і кожний попередній крок впливає на наступні. Тому для визначення оптимального крокового управління x_i^* необхідно врахувати не тільки виграш (програш) на даному i -му кроці, але і наслідок, що це управління зробить на всі наступні кроки.

Вирішення задачі методом динамічного програмування містить два основних етапи:

1 Оптимізація кроків, при цьому визначаються умовно-оптимальні управління для кожного кроку.

2 Оптимізація процесу в цілому, при цьому з оптимальних кроків складається оптимальний процес шляхом вибору оптимальних управлінь з умовно-оптимальних.

Процес, що оптимізується, має початок і кінець. Очевидно, що якщо покрокову оптимізацію починати з початку, тобто з першого кроку, то практично неможливо визначити наслідок, що цей крок зробить на всі наступні кроки. Виявилось, що набагато простіше зробити навпаки: оптимізувати кроки у зворотному порядку, рухаючись від кінця до початку. Діючи так, можна легко визначити наслідок кожного кроку і знайти умовно-оптимальні управління. І далі, на другому етапі, рухаючись уже від початку до кінця, з умовно-оптимальних управлінь вибираються оптимальні, тобто визначається $x^*=(x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_m)$. У цьому полягає ідея методу динамічного програмування.

2.2.2 Визначення шляху мінімальної вартості методом динамічного програмування

Розглянемо метод динамічного програмування на прикладі вирішення задачі визначення шляху найменшої вартості між двома точками. При цьому шлях від початкової точки П до кінцевої К проходить через ряд проміжних точок. Наприклад, задані 20 точок, що в абстрагованому вигляді можна розташувати таким чином (рисунок 2.2.1):

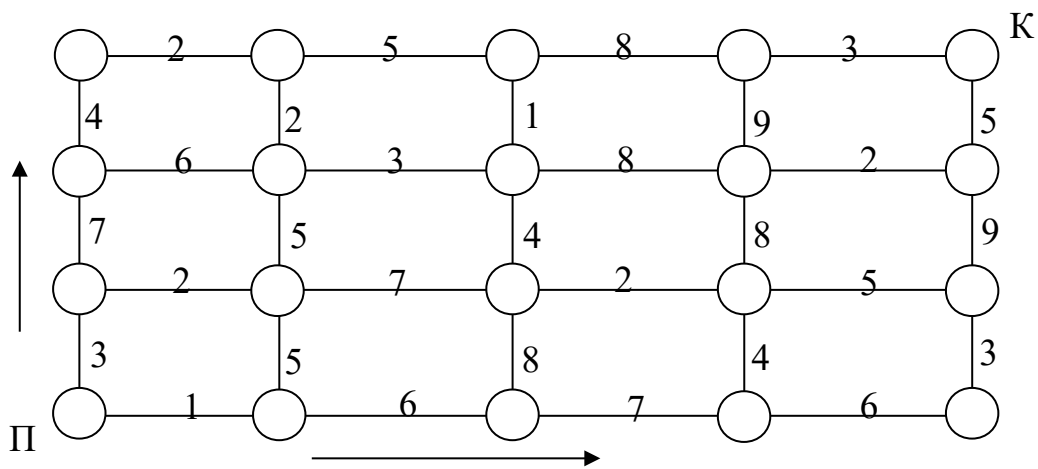


Рисунок 2.2.1

Відома вартість шляху між сусідніми точками, вона показана у вигляді чисел на лініях, що з'єднують точки. Ліва нижня точка є початковою, а права верхня – кінцевою. Шлях складається з кроків – відрізків ліній, що з'єднують суміжні точки.

Рухатися по шляху можна тільки нагору і вправо. Таким чином весь шлях буде складатися із семи кроків: три вертикальних і чотири горизонтальних. Необхідно знайти таку послідовність кроків, вартість якої буде мінімальною.

Оптимізацію кроків починаємо з кінця. У колах, що позначають точки, будемо записувати вартість оптимального шляху з даної точки в кінцеву. Оскільки точки розташовані у вигляді матриці, то зручно позначити їх номерами рядка і стовпця, у яких вони розташовані (рисунок 2.2.2).

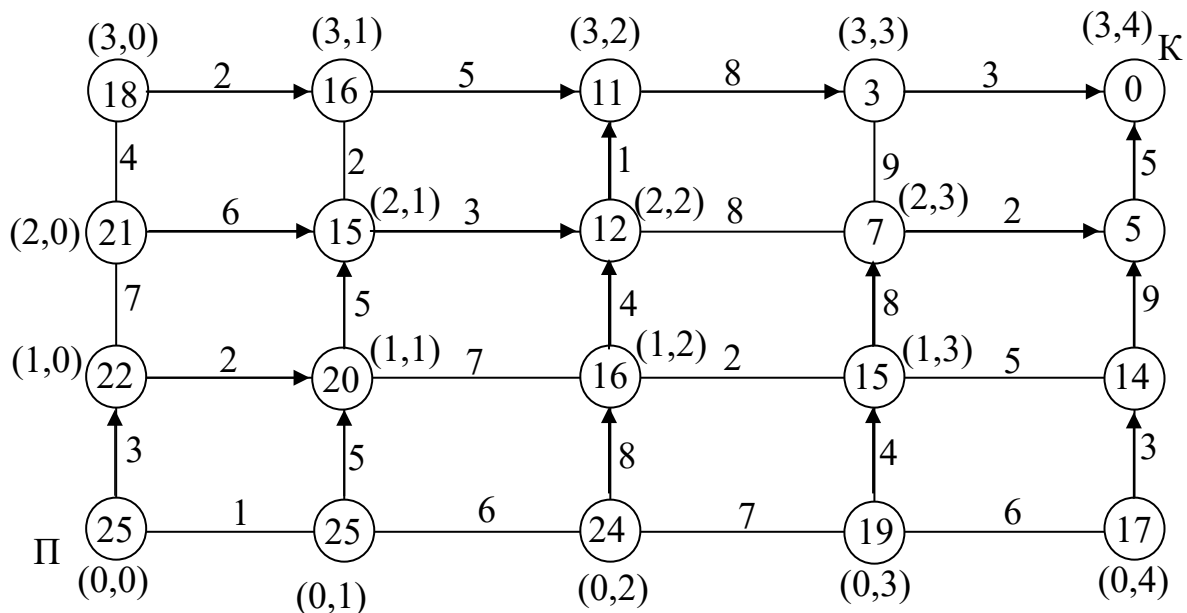


Рисунок 2.2.2

У кінцевій точці (3,4) записуємо нуль, тому що вартість шляху з цієї точки в саму себе дорівнює нулю. Далі переходимо до точки (3,3). З цієї точки в кінцеву є єдиний шлях – крок вправо, його вартість дорівнює 3, цей крок і буде оптимальним. Записуємо 3 у точці (3,3) і позначаємо оптимальний крок стрілкою. Наступна точка (3,2), з неї шлях у кінцеву точку також єдиний – крок вправо до точки (3,3) плюс крок від точки (3,3) до точки (3,4). Вартість оптимального шляху з точки (3,3) у кінцеву точку відома і дорівнює 3, отже, вартість оптимального шляху від

точки (3,2) до кінцевої точки дорівнює вартості шляху від точки (3,3) до точки (3,4) плюс вартість кроку з точки (3,2) у точку (3,3), тобто $3+8=11$. Записуємо в точці (3,2) 11 і позначаємо стрілкою оптимальний крок. Аналогічно визначаються оптимальні кроки і вартості шляху для всіх точок, що розташовані у верхньому рядку. Для точок, розташованих у крайньому правому стовпці, дії аналогічні, тому що для них існує єдиний шлях у кінцеву точку, що складається з вертикальних кроків нагору.

Для інших точок шлях у кінцеву точку не є єдиним, тому що з них можна робити два кроки – нагору або вправо. Очевидно, що оптимальним буде крок, при якому вартість шляху до кінцевої точки буде меншою. Наприклад, із точки (2,3) можна рухатися через точку (2,4) і через точку (3,3). У першому випадку вартість шляху складає $2+5=7$, а в другому – $9+3=12$, отже, оптимальним є крок вправо. Позначаємо цей крок стрілкою, а в точці (2,3) записуємо 7.

Аналогічно визначаються оптимальні кроки і вартості шляху для всіх інших точок. На рисунку 2.2.2 показано результат оптимізації всіх кроків.

Далі з оптимальних кроків складаємо оптимальний шлях, рухаючись по стрілках з початкової точки в кінцеву (рисунок 2.2.3).

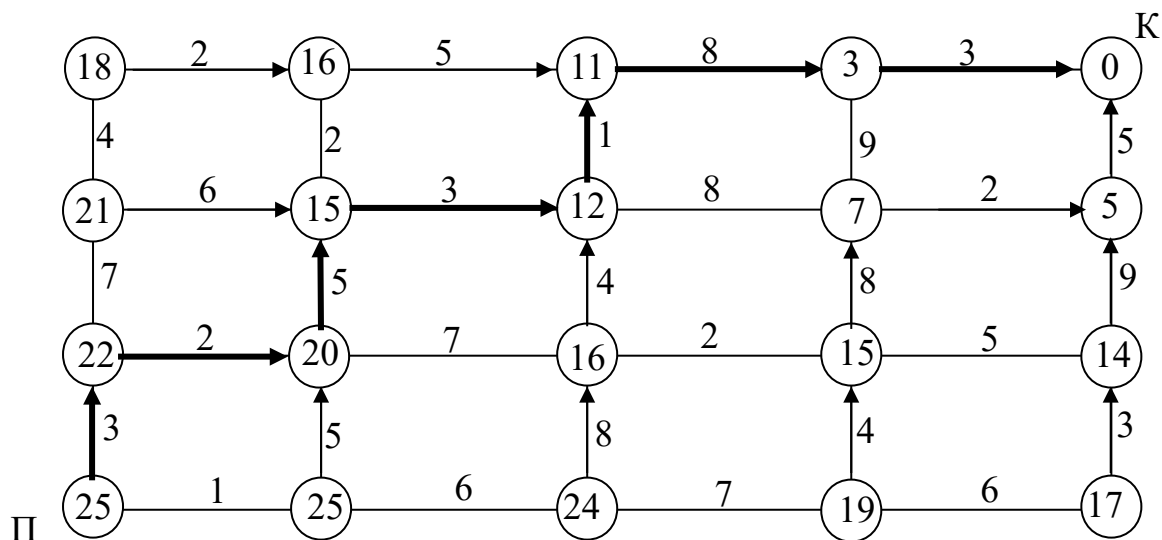


Рисунок 2.2.3

Для запису вищевикладених дій у вигляді алгоритму введемо позначення:

- $a(i, j)$ – вартість горизонтального кроку;
- $b(i, j)$ – вартість вертикального кроку;
- $c(i, j)$ – вартість оптимального шляху з точки (i, j) до кінця.

Ці величини зручно представити у вигляді двовимірних масивів: a – розміром 4 на 4, b – розміром 3 на 5 і c – розміром 4 на 5. Вхідними даними є масиви a і b . Нумерацію рядків і стовпців у цих масивах починаємо з нуля, рухаючись від початкової точки до кінцевої. Алгоритм показаний на рисунках 2.2.4, 2.2.5.

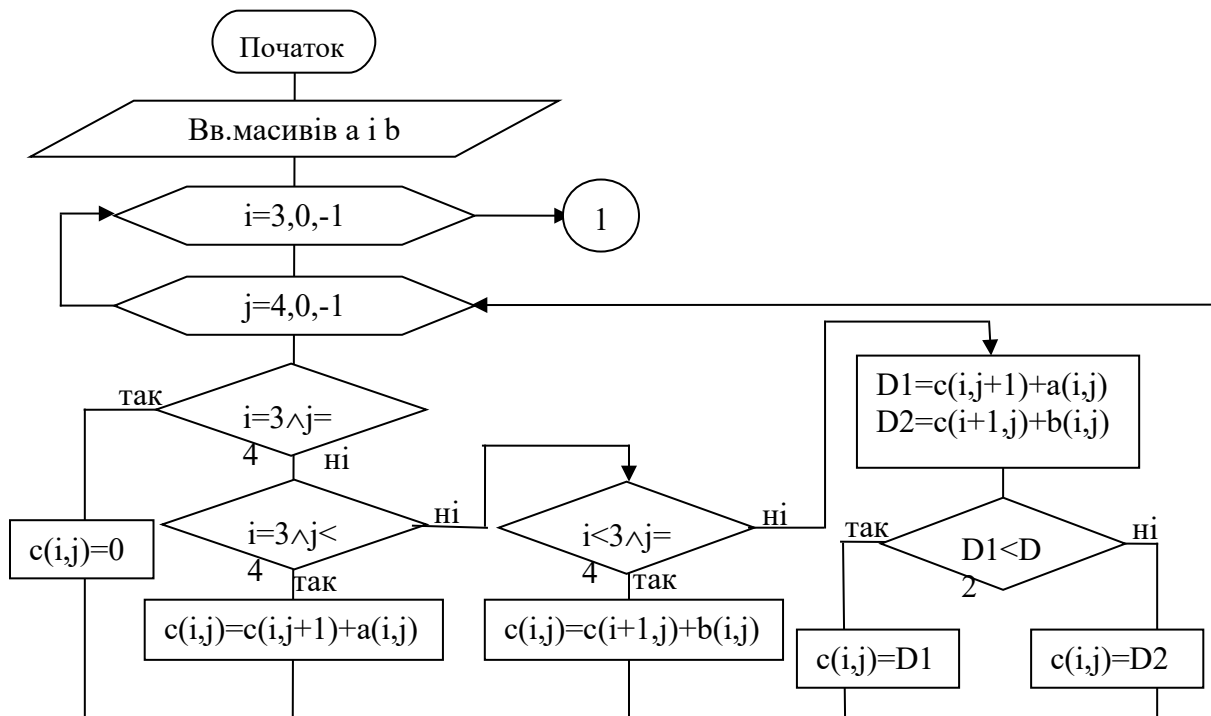


Рисунок 2.2.4 – Алгоритм оптимізації кроків та обчислення $c(i, j)$

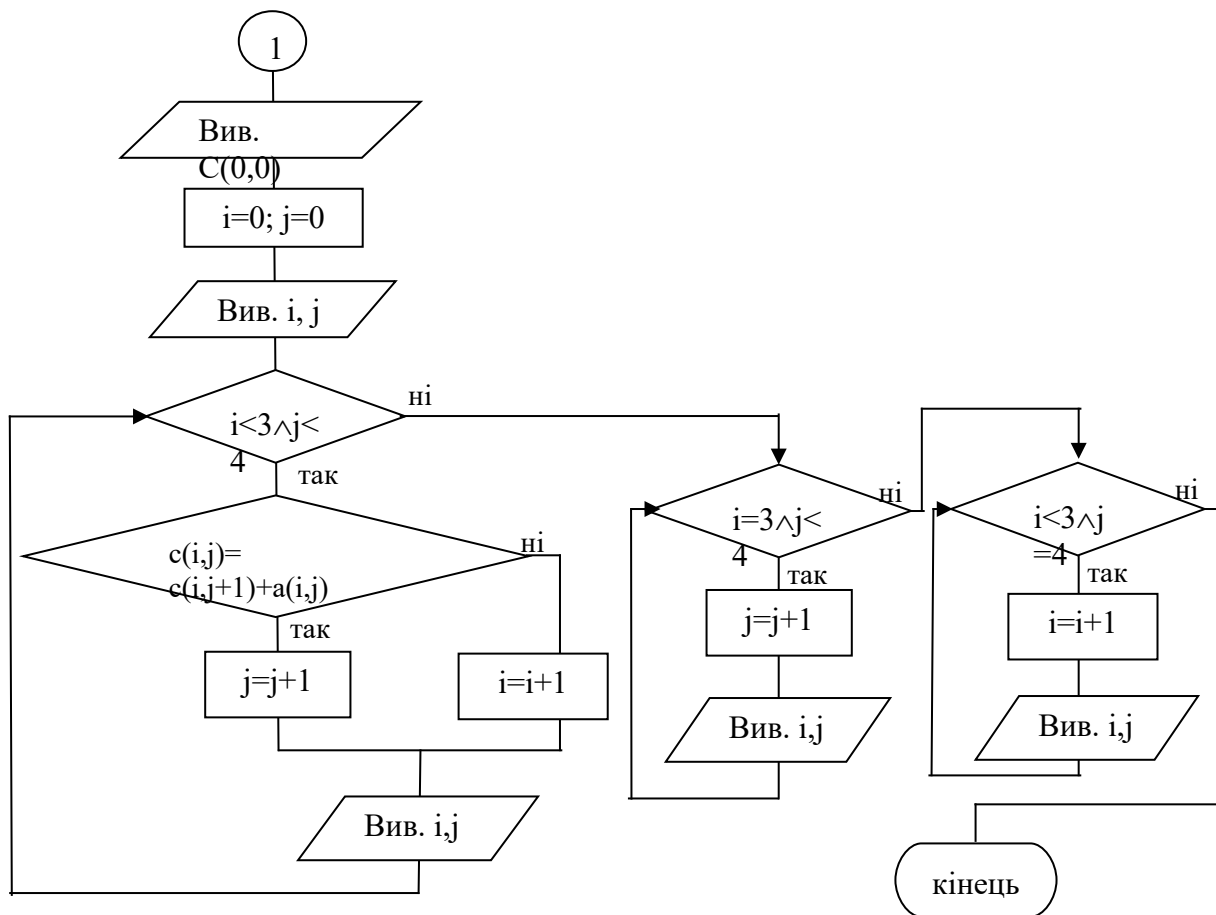


Рисунок 2.2.5 – Алгоритм визначення оптимального шляху

2.3 Методи визначення екстремуму функції однієї змінної

2.3.1 Метод простого перебору

У найпростішому випадку, коли цільова функція $f(x)$ залежить тільки від однієї змінної і вимоги до точності обчислень та витрат часу на обчислення не дуже високі, використовується метод простого перебору значень $f(x)$ у заданому інтервалі $x \in [a, b]$.

Розглянемо алгоритм визначення максимуму $f(x)$ та відповідного йому оптимального значення $x - x_{opt}$. Спочатку обчислюється значення $f(a)$, яке приймається за максимум, а $x=a$ – за x_{opt} . Далі за допомогою циклу, у якому x змінюється з деяким кроком h , послідовно обчислюються усі наступні значення $f(x)$ і порівнюються з максимальним. Якщо якийсь значення $f(x)$ буде більше максимального, то воно стає максимальним. Алгоритм показано на рисунку 2.3.1.

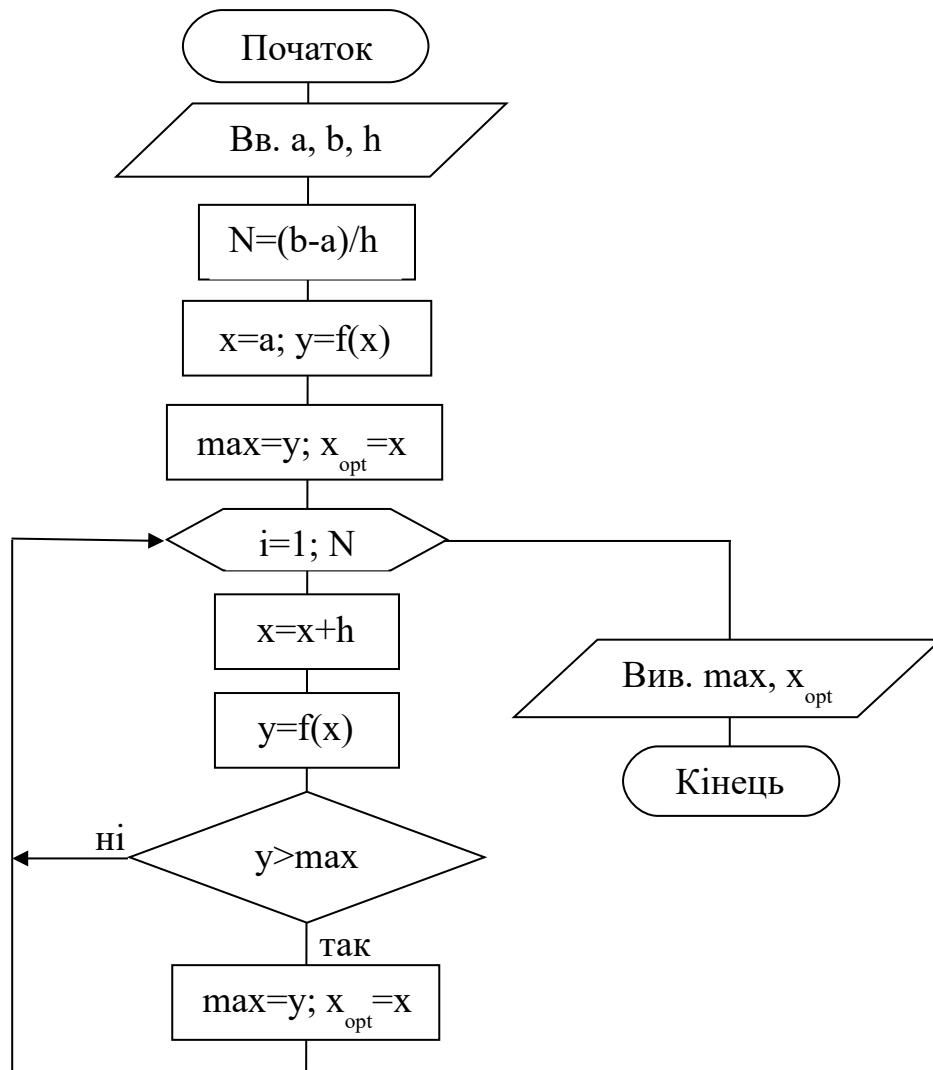


Рисунок 2.3.1

Очевидно, що метод простого перебору дозволяє знайти наближені значення max та x_{opt} , які не завжди будуть збігатися з точними, але достатньо близькі до них. Для підвищення точності треба зменшити крок h , при цьому збільшиться обсяг обчислень.

2.3.2 Метод випадкового пошуку (метод Монте-Карло)

Для вирішення задач оптимізації одержали поширення алгоритми, засновані на методі статистичних випробувань, який називається ще методом випадкового пошуку або методом Монте-Карло. Сутність даного методу полягає в тому, що в процес пошуку оптимального рішення включається елемент випадковості або гри. При цьому аналізовані варіанти

генеруються не за якимось визначеним алгоритмом, а випадковим чином, подібно до того, як у грі черговий хід визначається числом, що випадає при киданні кісток. При вирішенні таких задач на ЕОМ випадковий пошук реалізується за допомогою генераторів випадкових чисел.

У загальному випадку задача оптимізації полягає у визначенні значень змінних x_1, x_2, \dots, x_n , для яких цільова функція $W=F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ досягає максимуму або мінімуму при виконанні відповідних обмежень. При вирішенні даної задачі методом Монте-Карло значення x_1, x_2, \dots, x_n задаються випадковим чином. Доцільність використання випадкового пошуку обумовлена тим, що при кількості змінних $n > 3$ число варіантів величезне, а складність генерації варіантів зростає зі збільшенням n і тому вирішити таку задачу простим перебором варіантів практично неможливо. Практика показала, що метод Монте-Карло в таких випадках дає рішення, досить близьке до оптимального.

Розглянемо аналогічну задачу з однією змінною x . Необхідно знайти значення x , при якому цільова функція $y=f(x)$ досягає максимуму:

$$y=f(x) \rightarrow \max \text{ при } x \in [x_n, x_k] ,$$

де x_n – початкове значення x ;

x_k – кінцеве значення x .

Вирішення задачі методом Монте-Карло полягає в такому:

1 У заданому інтервалі $[x_n, x_k]$ генеруються випадкові значення змінної x . Число таких значень N задається заздалегідь.

2 Для кожного значення x обчислюється $f(x)$.

3 Кожне наступне значення $f(x)$ порівнюється з попереднім, і запам'ятовується максимальне з них, а також значення x , що відповідає максимальному $f(x)$.

Алгоритм вирішення даної задачі подано на рисунку 2.3.2.

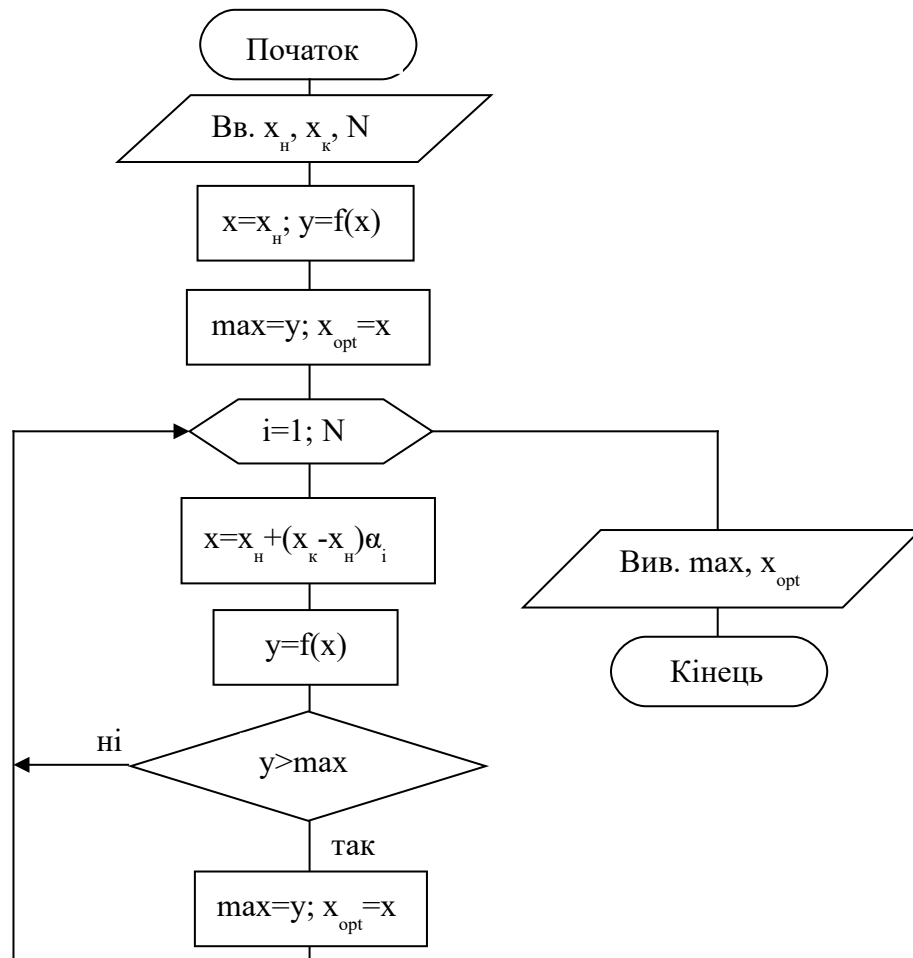


Рисунок 2.3.2

У даному алгоритмі, крім вищевказаних, використовуються також такі позначення:

\max – максимальне значення y ;

α_i – випадкове число в діапазоні від 0 до 1, завдяки цьому випадкові значення x завжди потрапляють у заданий інтервал;

x_{opt} – оптимальне значення x , для якого $y = \max$.

При реалізації алгоритму мовами програмування можуть бути використані стандартні функції генерації випадкових чисел.

2.3.3 Метод золотого перерізу

При моделюванні систем зустрічаються випадки, коли математична модель використовується для управління якимось процесом у режимі реального часу і оптимальне рішення необхідно визначати дуже швидко, практично миттєво, особливо,

якщо процес відбувається з високою швидкістю. У таких випадках основною вимогою до методу є мінімум часу обчислень, тому використання таких методів, як простий перебір або випадковий пошук недоцільно. Для вирішення таких задач отримали поширення методи пошуку екстремуму функції, побудовані на звуженні інтервалу невизначеності шляхом симетричного ділення відрізка, що містить екстремум, відносно його середини, сутність яких полягає у такому:

- на інтервалі $[a, b]$ певним способом задаються дві точки x_1 та x_2 , розміщені симетрично відносно середини інтервалу (рисунок 2.3.3);

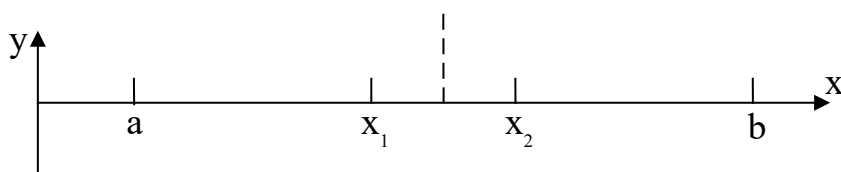


Рисунок 2.3.3

- у точках x_1 та x_2 обчислюються значення $f(x)$ і порівнюються одне з одним;

- з відрізків $[a, x_1]$ та $[x_2, b]$ відкидається той, який не містить екстремум;

- для відрізка, який містить екстремум, тобто $[a, x_2]$ або $[x_1, b]$, процедура ділення повторюється доти, поки довжина цього відрізка не досягне заданої точності ε , після чого за точку екстремуму приймається середина відрізка.

Методи, що розглядаються, можуть бути використані тільки для унімодальних функцій. Розглянемо умови унімодальності для задачі пошуку мінімуму $f(x)$.

Функція $f(x)$ називається унімодальною на інтервалі $[a, b]$, якщо виконуються такі умови:

- на інтервалі $[a, b]$ є тільки одна точка мінімуму x^* , $f(x^*) = \min(f(x)), x \in [a, b]$;

- для будь-яких двох точок $x_1, x_2 \in [a, b]$ виконуються співвідношення:

якщо $x^* \leq x_1 \leq x_2$, то $f(x^*) \leq f(x_1) \leq f(x_2)$ і $\min(f(x))$ міститься на відрізку $[a, x_2]$ (рисунок 2.3.4);

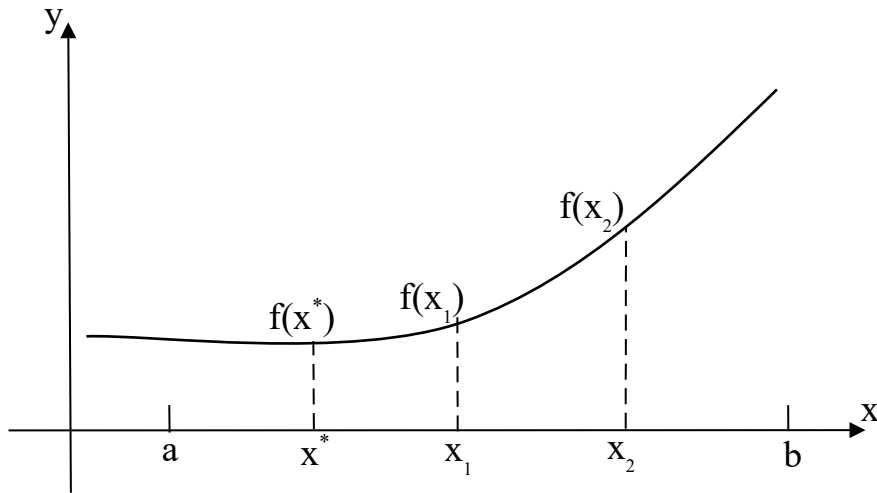
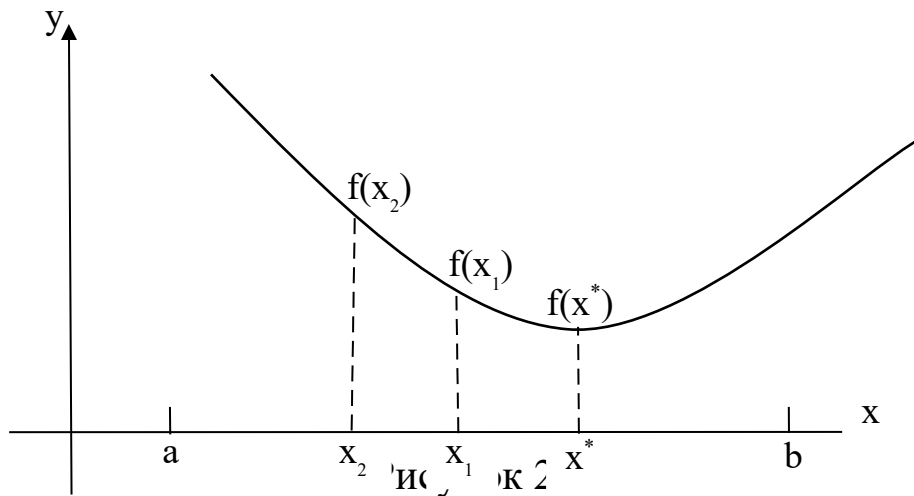


Рисунок 2.3.4

якщо $x^* \geq x_1 \geq x_2$, то $f(x^*) \leq f(x_1) \leq f(x_2)$ і $\min(f(x))$ міститься на відрізку $[x_2, b]$ (рисунок 2.3.5).



Таким чином, унімодальна функція монотонна з обох сторін від точки мінімуму.

Одним з методів, де використовується симетричне ділення відрізка, є метод золотого перерізу, у якому точки x_1 та x_2 ділять інтервал $[a, b]$ у співвідношенні золотого перерізу.

Золотим перерізом називається таке ділення відрізка на дві частини, при якому весь відрізок відноситься до більшої частини так само, як більша частина до меншої (рисунок 2.3.6).

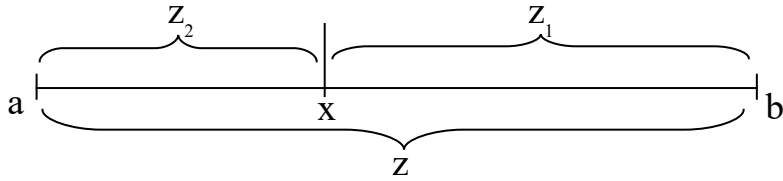


Рисунок 2.3.6

Тобто точка x ділить відрізок $[a, b]$ у співвідношенні золотого перерізу, якщо $\frac{z}{z_1} = \frac{z_1}{z_2}$. З цього виходить, що $z_1^2 = z \cdot z_2$. Вважаючи, що $z = z_1 + z_2$, - $z_1^2 = z_1 \cdot z_2 + z_2^2$. Поділивши це рівняння на z_1^2 та виконавши прості перетворення, одержимо рівняння:

$$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 + \frac{z_2}{z_1} - 1 = 0.$$

Позначимо $\tau = \frac{z_2}{z_1}$. Тоді рівняння набуде вигляду:

$$\tau^2 + \tau - 1 = 0.$$

Додатний корінь цього рівняння обчислюється як

$$\tau = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,618034.$$

Це число є співвідношенням золотого перерізу. Одним із його властивостей є те, що якщо відрізок $[a, b]$ (рисунок 2.3.3) точка x_1 ділить у співвідношенні золотого перерізу, то симетрична їй точка x_2 ділить відрізок $[x_1, b]$ також у співвідношенні золотого перерізу. Аналогічно точка x_1 ділить у співвідношенні золотого перерізу відрізок $[a, x_2]$. Таким чином, на кожному кроці ділення відрізка, крім першого, можна обчислювати $f(x)$ тільки в одній точці: x_1 або x_2 , а значення $f(x)$ у другій точці береться з попереднього кроку, де воно вже було обчислено. За рахунок цього зменшується обсяг та час обчислень. Алгоритм методу золотого перерізу подано на рисунку 2.3.7.

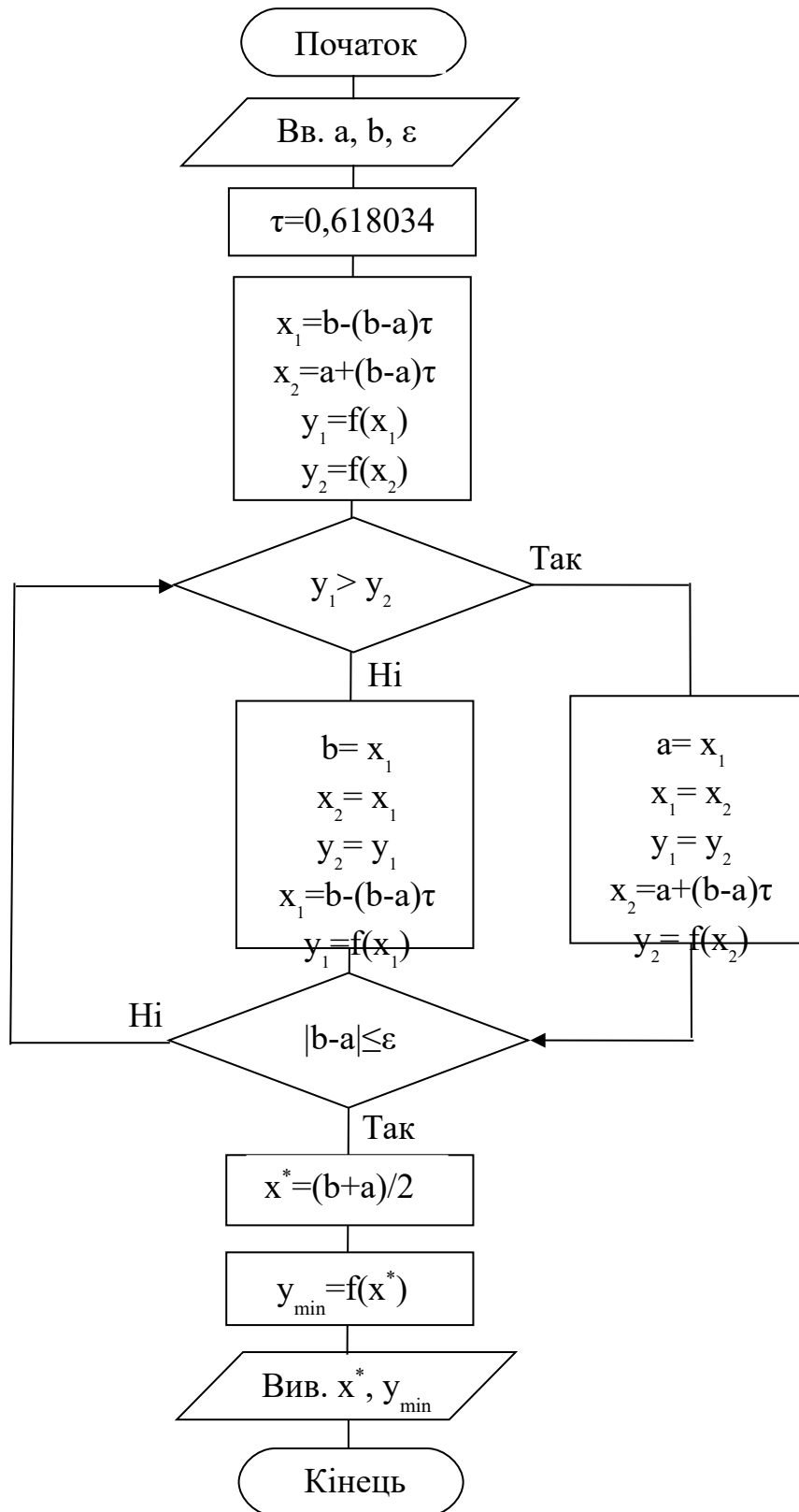


Рисунок 2.3.7

2.4 Лінійне програмування

Лінійним програмуванням називається розділ математичного програмування, що вивчає математичні моделі і методи вирішення задачі визначення екстремуму лінійної цільової функції з лінійними обмеженнями.

Основна задача лінійного програмування формулюється таким способом:

Знайти значення змінних x_1, x_2, \dots, x_n , що задовольняли би умови

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.4.1)$$

де $m < n$, і звертали б у максимум (мінімум) цільову функцію

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min), \quad (2.4.2)$$

за умови, що

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (2.4.3)$$

Умови (2.4.1), які називають ще обмеженнями, можуть мати вигляд нерівностей, наприклад

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1.$$

У цьому випадку задача також може бути зведена до основної стандартної форми шляхом введення нових змінних таким чином:

- перетворимо умову так, щоб у правій частині нерівності стояв нуль:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 \geq 0;$$

- позначимо ліву частину нерівності через y_1 :

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_1;$$

- введемо y_1 як нову змінну в умову (2.4.3):

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, y_1 \geq 0.$$

Те, що y_l не входить у цільову функцію L , не має значення, – можна вважати, що вона входить, але з нульовим коефіцієнтом.

Вираз (2.4.1) являє собою систему лінійних рівнянь, що можуть бути лінійно незалежними або лінійно залежними одне від одного.

Рівняння лінійно незалежні, якщо жодне з них не можна одержати з інших шляхом лінійних перетворень, тобто за допомогою арифметичних операцій множення на які-небудь коефіцієнти і підсумовування.

Наприклад, рівняння

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

лінійно незалежні. Якщо з 1-го рівняння відняти 2-ге, то одержимо рівняння $2x_1 + x_2 = 4$, що буде лінійно залежним від перших двох. Отже, усі три рівняння не є лінійно незалежними.

Якщо в системі (2.4.1) з m рівнянь які-небудь r лінійно незалежні ($r < m$), то доведено, що таку систему рівнянь завжди можна вирішити щодо якихось r змінних, які називаються базисними, і виразити їх через інші $n-r$ змінних, які називаються вільними.

Якщо, наприклад, x_1, x_2, \dots, x_r – базисні змінні, то інші змінні $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ – вільні і, отже, базисні змінні можна виразити через вільні таким чином:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{1r+1}x_{r+1} + \alpha_{1r+2}x_{r+2} + \dots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1; \\ x_2 &= \alpha_{2r+1}x_{r+1} + \alpha_{2r+2}x_{r+2} + \dots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2; \\ &\dots \\ x_r &= \alpha_{rr+1}x_{r+1} + \alpha_{rr+2}x_{r+2} + \dots + \alpha_{rn}x_n + \beta_r; \end{aligned}$$

Розглянута задача в загальному випадку має незліченну безліч рішень, якщо умови (2.4.1) сумісні, тобто не суперечать одне одному. При некоректно сформульованих умовах задача може взагалі не мати рішень в області невід'ємних значень x_i .

Припустимим рішенням називається сукупність значень x_1, x_2, \dots, x_n , що задовольняють обмеження (2.4.1) і умови (2.4.3).

Сукупність припустимих рішень утворює область припустимих рішень (ОПР).

Оптимальним є припустиме рішення, що звертає в максимум (мінімум) цільову функцію L .

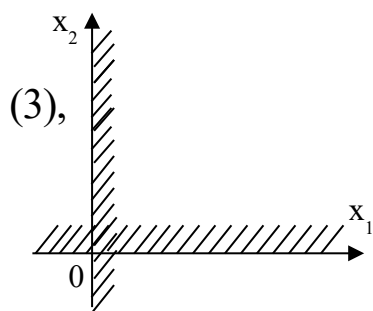
Максимум L завжди можна перетворити в мінімум, замінивши знак L на протилежний.

Для аналізу задачі припустимо, що всі m умов лінійно незалежні і $n-m=2$, тобто число змінних на 2 більше числа рівнянь. Тоді систему (2.4.1) можна вирішити відносно m базисних змінних і виразити їх через дві вільні змінні, що залишилися. Якщо прийняти, що вільні змінні – це x_1 і x_2 , то

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3; \\ x_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4; \\ \dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n. \end{array} \right. \quad (2.4.4)$$

Таким чином, вхідна система (2.4.1) перетворена в систему (2.4.4), яка також містить m рівнянь.

Модель задачі добре ілюструється за допомогою геометричної інтерпретації. Якщо зобразити x_1 і x_2 у вигляді осей координат (рисунок 2.4.1), то очевидно, що, відповідно до умов невід'ємності змінних



(3),

припустимі значення x_1 і x_2 можуть розташовуватися тільки вище осі x_1 і праворуч осі x_2 (показано штрихуванням), тобто осі координат $0x_1$ і $0x_2$ обмежують область припустимих рішень.

Рисунок 2.4.1

Оскільки базисні змінні виражаються через вільні, то вирішити задачу можна, варіюючи тільки вільні змінні в межах ОПР.

Інші границі ОПР визначаються виразами (2.4.4), кожне з яких обмежує ОПР. Так, якщо в першому рівнянні системи (2.4.4) прийняти, що $x_3=0$, то одержимо рівняння прямої лінії в системі координат (x_1, x_2) :

$$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0.$$

На цій прямій $x_3=0$, по одну сторону від неї $x_3>0$, по іншу – $x_3<0$. Ця пряма є ще однією границею ОПР.

Проробивши аналогічні побудови з усіма іншими рівняннями системи (2.4.4), одержимо сукупність прямих, що обмежують ОНР. Тоді ОНР буде являти собою багатокутник на площині, у якому для всіх змінних виконуються умови невід'ємності. На рисунку 2.4.2 показаний приклад, у якому для кожної прямої штрихуванням позначена область позитивних значень відповідної змінної і число змінних дорівнює 7.

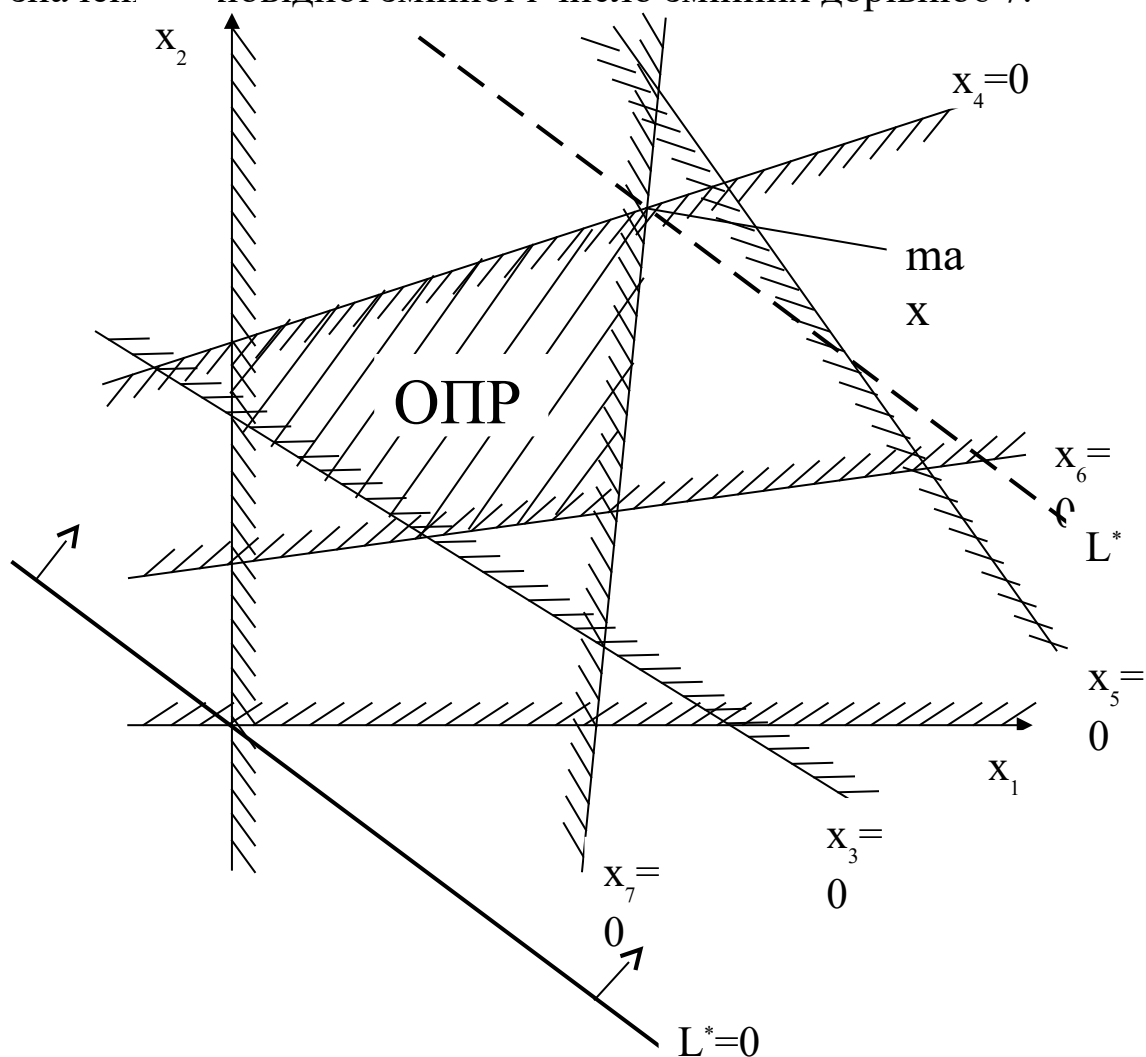


Рисунок 2.4.2

Одна з точок ОНР є оптимальним рішенням. Щоб пояснити, де вона розташована, відобразимо цільову функцію L у розглянутій нами системі координат. Якщо підставити значення змінних (2.4.4) у вираз L , то L буде виражена через вільні змінні x_1 і x_2 і після приведення подібних членів набуде вигляду:

$$L = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_0.$$

Вільний член γ_0 можна відкинути, тому що він не впливає на положення екстремуму L , і замість L розглядати функцію

$$L^* = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2.$$

Прийнявши $L^* = 0$, одержимо:

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0,$$

тобто рівняння прямої, що проходить через початок координат (рисунок 2.4.2). Ця пряма називається опорною прямою. Якщо L^* додавати якісь значення, то вона буде переміщатися по площині паралельно самій собі: в одну сторону L^* буде зростати, в іншу – убувати. Якщо, наприклад, стрілками показати напрямок, у якому L^* зростає (рисунок 2.4.2), то очевидно, що максимум L^* буде міститися в одній з вершин багатокутника ОПР.

Таким чином, оптимальне рішення, якщо воно існує, досягається в одній з вершин ОПР, тобто в точці, де не менше двох змінних дорівнюють нулю.

Аналогічне правило справедливе і для більш загального випадку, коли $n - m > 2$. Якщо $n - m = k$, то оптимальне рішення досягається там, де не менш k змінних дорівнюють нулю, а інші невід'ємні.

При $k = 3$ ОПР являє собою багатогранник у тривимірному просторі, кожне рівняння базисної змінної – площина в цьому просторі, а оптимальне рішення знаходиться в одній з вершин багатогранника ОПР.

При $k > 3$ геометрично відобразити ОПР не можна, тому що рівняння базисних змінних будуть являти собою гіперплощини в k -вимірному просторі.

Вершини таких багатокутників або багатогранників називаються опорними точками, а відповідні їм рішення – опорними рішеннями.

Більшість методів рішення задачі лінійного програмування засновані на послідовному наближенні до оптимуму шляхом пошуку і аналізу опорних точок.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Вычислительная техника и программирование / Под ред. А.В. Петрова. – М.: Высшая школа, 1990.
- 2 Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высшая школа, 1996.
- 3 Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1972.

4 Маликов В.Т., Кветный Р.Н. Вычислительные методы и применение ЭВМ. – К.: Вища школа, 1989.

5 Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1987.

6 Бахвалов Н.А. Численные методы. – М.: Наука, 1975.

7 Болотов О.Б. Конспект лекцій з дисципліни «Математичні методи та моделі у розрахунках на ЕОМ». – Харків: УкрДАЗТ, 2006.

8 Данько М.І., Меркулов В.С. та ін. Математичні методи та моделі у розрахунках на ЕОМ: Навч. посібник. – Харків: УкрДАЗТ, 2008.