

Министерство образования и науки Украины
Украинская государственная академия
железнодорожного транспорта

А.А. ЯРХО, Е.Е. СЧАСТНЫЙ, В.М. ЛЯЛЮК

ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

Учебное пособие

Часть I

Харьков 2007

УДК 532.51:533.6
ББК 22.253.3

Ярхо А.А., Счастный Е.Е., Лялюк В.М. Гидрогазодинамика
Учебное пособие. - Харьков: УкрГАЖТ. - Ч. 1. - 2007. - 236 с.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений железнодорожного транспорта специальности «Теплоэнергетика», а также и других ВУЗов и специальностей, которые изучают курс гидрогазодинамики или один из комплексных курсов гидрогазодинамического профиля.

ISBN 966-7593-66-5

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины как учебное пособие для студентов высших учебных заведений железнодорожного транспорта (№1.4/18-Г-144 от 30 мая 2006 г.)

Рецензенты:

профессора **Ю.А.Крашаница**,
В.В. Тюрев (НАУ Н.Е. Жуковского «ХАИ»),
Э.Г. Братута (НТУ «ХПИ»);
А.П.Нетюхайло (ХГТУСиА);
В.И. Мороз (УкрГАЖТ)

Под редакцией проф. А.А.Ярхо

© Ярхо А.А., Счастный Е.Е., Лялюк В.М. 2007
© Украинская государственная академия
железнодорожного транспорта, 2007

СОДЕРЖАНИЕ:

Предисловие	7
Раздел 1. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ	9
1.1. Гипотеза сплошности	9
1.2. Плотность и удельный вес жидкостей (газов)	10
1.3. Сжимаемость жидкостей (газов)	13
1.4. Температурное расширение жидкостей	17
1.5. Вязкость жидкостей (газов)	19
1.6. Парообразование	23
1.7. Капиллярность	25
1.8. Неньютоновские жидкости	26
1.9. Модели жидкости (газа)	26
Раздел 2. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА	28
2.1. Методы описания движения жидкости и газа	28
2.2. Разложение движения частицы жидкости (газа) на простейшие (теорема Коши – Гельмгольца)	33
2.3. Линия тока, траектория, струйка	38
2.4. Вихревые линии и трубки. Вихревой шнур. Вторая теорема Гельмгольца. Интенсивность вихревого шнура	42
2.5. Циркуляция скорости. Теорема Стокса	47
2.6. Потенциал скоростей	50
2.7. Виды движения жидкости (газа)	51
Раздел 3. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА	54
3.1. Силы, действующие на жидкость (газ)	54
3.2. Свойства напряжения поверхностных сил	56
3.3. Основные уравнения движения жидкости и газа	61
3.3.1. Уравнение неразрывности. Уравнение расхода	61
3.3.2. Уравнение количества движения и момента количества движения	68
3.3.3. Уравнение энергии	74

Раздел 4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТЕЙ	81
4.1. Сущность и значение теории подобия	81
4.2. Основные формулы подобия газодинамических явлений	86
4.3. Критерии подобия газодинамических явлений	89
4.3.1. Условие подобия по силам давления	90
4.3.2. Условие подобия по силам трения	93
4.3.3. Условие подобия по силам тяжести	96
4.3.4. Условие подобия по периодичности процессов	99
4.4. Определяющие и неопределяющие критерии подобия	101
4.5. Полное и частичное подобие	103
4.6. Автомодельность	104
4.7. Сущность теории размерностей. Формула размерности	106
4.8. Пример решения газодинамической задачи методом анализа размерностей	108
4.9. π - теорема теории размерностей	110
Раздел 5. ГИДРОГАЗОСТАТИКА	116
5.1. Свойства гидростатического давления	116
5.2. Уравнение газостатики в общем виде. Баротропное равновесие. Поверхности равного давления и их свойства	117
5.3. Уравнение гидростатики для случая абсолютного покоя несжимаемой капельной жидкости	121
5.4. Уравнение гидростатики для случая относительного покоя несжимаемой капельной жидкости	129
5.4.1. Покой жидкости в резервуаре, движущемся с постоянным ускорением	129
5.4.2. Покой жидкости в цилиндрическом резервуаре, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью	131

5.5. Газостатика атмосферы	137
5.5.1. Изотермическая атмосфера	137
5.5.2. Политропная атмосфера	139
5.6. Элементарный вывод основного уравнения гидростатики	142
5.7. Силы гидростатического давления, действующие на стенки резервуара	144
5.7.1. Силы гидростатического давления, действующие на плоские стенки	144
5.7.2. Центр давления	146
5.7.3. Силы гидростатического давления, действующие на криволинейные поверхности	147
Раздел 6. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПО ТРУБАМ И КАНАЛАМ	151
6.1. Режимы течения жидкости	151
6.2. Общие сведения о гидравлических сопротивлениях	154
6.3. Ламинарное течение жидкости в круглой цилиндрической трубе	155
6.4. Турбулентное движение жидкости в круглой цилиндрической трубе	161
6.4.1. Истинная, осредненная и средняя скорости ...	161
6.4.2. Структура турбулентного потока. Гладкие и шероховатые трубы	164
6.4.3. Потери напора на прямолинейных участках труб	166
6.5. Начальный участок течения	170
6.6. Течение в некруглых трубах	173
Раздел 7. МЕСТНЫЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ	175
7.1. Общие сведения	175
7.2. Внезапное расширение потока	176
7.3. Плавное расширение потока. Диффузор	180
7.4. Внезапное сужение потока	185
7.5. Плавное сужение потока	187

7.6. Внезапный поворот потока	189
7.7. Плавный поворот потока	190
7.8. Тройники	192
Раздел 8. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ	194
8.1. Истечение жидкости при постоянном избыточном напоре	195
8.2. Особенности истечения жидкости из внешнего цилиндрического насадка и диффузорного насадка с плавным входом	200
8.3. Истечение жидкости из отверстий и насадков при переменном напоре. Опорожнение емкостей	203
Раздел 9. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ	208
9.1. Гидравлический расчет простого трубопровода постоянного сечения	208
9.2. Три основные задачи гидравлического расчета простого трубопровода постоянного диаметра	212
9.3. Сифон	214
9.4. Последовательное соединение труб	217
9.5. Параллельное соединение труб	219
9.6. Разветвленный трубопровод	221
9.7. Сложный трубопровод	224
9.8. Гидравлический удар в трубах	225
Список литературы	236

ПРЕДИСЛОВИЕ

Гидрогазодинамика – это механика жидкости и газа, раздел механики, в котором изучают законы движения жидкости (газа), а также взаимодействие между жидкостью (газом) и обтекаемыми ею телами или ограничивающими ее поверхностями.

Обтекаемыми жидкостью (газом) телами могут быть, например, лопадки турбин, самолеты, корабли и т.п. Ограничивающими движение жидкости (газа) поверхностями или руслами могут быть, например, трубопроводы, каналы, русла рек, проточные части турбин, компрессоров и т.п.

Если при изучении законов движения жидкости (газа) особое внимание уделяют методам приложения этих законов для решения инженерных задач, то этот раздел механики жидкости и газа называют технической механикой жидкости и газа.

В учебных планах многих инженерных специальностей техническая механика жидкости и газа фигурирует как фундаментальная дисциплина общетехнического цикла. Эта дисциплина, которая имеет и другие названия: «Гидрогазодинамика», «Техническая гидромеханика» и т.п., является также основой для изучения ряда профилирующих дисциплин.

Настоящее учебное пособие написано по материалам лекций курса «Гидрогазодинамика», которые более 25 лет читал профессор А.А.Ярхо студентам теплоэнергетической специальности Харьковского института инженеров железнодорожного транспорта (УкрГАЗТ).

Учебное пособие состоит из двух частей. В первой части, состоящей из 9 разделов, излагаются кинематика и динамика жидкости и газа, основы теории подобия и размерностей, гидрогазостатика и изотермическое течение несжимаемой жидкости. Во второй части, которая состоит из 7 разделов, излагаются одномерное течение газа, течение газа со сверхзвуковой скоростью, течение газа по трубам и истечение из сопл, газовые струи, струйные аппараты, основы теории пограничного слоя и понятие о течении двухфазных и двухкомпонентных жидкостей.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам данного учебного пособия за высказанные замечания и пожелания: доктору технических наук, профессору Ю.А.Крашанице, заведующему кафедрой аэрогидродинамики Национального аэрокосмического университета им. Н.Е.Жуковского «ХАИ», доктору технических наук, профессору той же кафедры В.В.Тюреву, доктору технических наук, профессору кафедры «Теплотехника» Национального технического университета «ХПИ» Э.Г.Братуте, доктору технических наук, профессору кафедры ВКиГ Харьковского государственного технического университета строительства и архитектуры А.П.Нетюхайло, доктору технических наук, профессору В.И.Морозу, заведующему кафедрой механики проектирования машин Украинской государственной академии железнодорожного транспорта.

Раздел 1

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

1.1. Гипотеза сплошности

В гидрогазодинамике отвлекаются от молекулярного строения жидкостей и газов и рассматривают их как сплошную среду, непрерывно распределенную в пространстве.

Введение гипотезы сплошности среды с непрерывным распределением в ней физических величин (за исключением лишь некоторых «особых» точек, линий и поверхностей) облегчает изучение законов гидрогазодинамики, т.к. позволяет при исследовании движения жидкости и газа использовать аппарат непрерывных функций, дифференциальное и интегральное исчисления.

Основанием для принятия гипотезы сплошности среды является то обстоятельство, что результаты решения задач гидрогазодинамики, полученные при использовании этого допущения, в большинстве случаев хорошо согласуются с результатами опытов. Это и не удивительно, т.к. ничтожно малые объемы жидкости (газа) по сравнению с размерами русла, по которому она течет, или с размерами обтекаемых ею тел содержат миллиарды молекул (при температуре 0°C и давлении 760 мм рт. ст. в объеме, равном 1 см^3 любого газа, содержится $2,7 \cdot 10^{19}$ молекул) и к ним можно применить статистическое осреднение параметров, связанное с понятием сплошности среды. Например, движение такого маленького объема жидкости, который называют частицей жидкости, будет зависеть от движения всех молекул частицы в своей совокупности, а не от движения отдельно взятой молекулы и скорость частицы может быть определена как осредненное значение скоростей всех молекул, содержащихся в частице

$$\bar{V} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} \Delta m_i \cdot \bar{v}_i}{\sum_{i=1}^{i=N} \Delta m_i}, \quad (1.1)$$

где N – число молекул в частице;
 \vec{v}_i - вектор скорости молекулы;
 Δm_i - масса молекулы.

Таким образом, принимая гипотезу сплошности жидкости (газа), в дальнейшем под частицей жидкости будем понимать любой сколь угодно малый объем, к которому применимы такие кинематические понятия, как скорость и ускорение точки.

При движении жидкости (газа) расстояние между частицами может меняться, а значит, может происходить изменение формы любой части объема, заполненного жидкостью (газом). Следовательно, жидкость (газ) представляет собой сплошную деформируемую среду. Непрерывность деформирования любой части объема приводит к тому, что, например, замкнутая линия или замкнутая поверхность, состоящая из одних и тех же частиц во все время движения, непрерывно деформируясь, остаются все время замкнутыми.

В ряде случаев, например, когда рассматривается тонкая пленка жидкости или области очень резкого изменения параметров потока, а также достаточно сильно разреженные газы, недопустимо применять законы движения сплошной среды, а следует обращаться непосредственно к кинетической теории жидкости (газа).

1.2. Плотность и удельный вес жидкостей (газов)

Плотностью ρ называют массу жидкости (газа), заключенную в единице объема.

Для однородной жидкости

$$\rho = \frac{m}{w}, \quad (1.2)$$

где m – масса жидкости (газа) в объеме w .

Для неоднородной жидкости (газа) по формуле (1.2) определяется среднее значение плотности среды в объеме. Плотность в произвольной точке такой среды определяется по выражению

$$\rho = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta w}, \quad (1.3)$$

где Δm - масса жидкости (газа) в малом объеме Δw , включающем рассматриваемую точку, а предел берется при стягивании объема Δw к этой точке.

Размерность плотности

$$[\rho] = M \cdot L^{-3},$$

где M – размерность массы;
 L – размерность длины.

Единицами измерения плотности в системе СИ является килограмм на метр кубический ($\text{кг}/\text{м}^3$), в технической системе – килограмм-сила на секунду в квадрате поделенная на метр в четвертой степени ($\text{кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$).

Величина ν , обратная плотности

$$\nu = \frac{1}{\rho}, \quad (1.4)$$

называется удельным объемом и представляет собой объем, содержащий единицу массы.

Удельным весом γ называют вес единицы объема жидкости (газа).

Для однородной жидкости

$$\gamma = \frac{G}{w}, \quad (1.5)$$

где G – вес жидкости (газа) в объеме w .

Для неоднородной жидкости (газа) по формуле (1.5) определяется среднее значение удельного веса среды в объеме w . Удельный вес в произвольной точке такой среды определяется по выражению

$$\gamma = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta w}, \quad (1.6)$$

где ΔG - вес жидкости (газа) в малом объеме Δw , включающем рассматриваемую точку, а предел берется при стягивании объема Δw к этой точке.

Размерность удельного веса

$$[\gamma] = M \cdot T^{-2} \cdot L^{-2},$$

где M – размерность массы;
 T – размерность времени;
 L – размерность длины.

Единицами измерения удельного веса в системе СИ является ньютон на метр кубический (H/m^3) ($1H = 1 \frac{кг \cdot м}{с^2}$), в технической системе единиц – килограмм-сила на метр кубический ($кгс/м^3$).

Связь между удельным весом и плотностью, учитывая, что

$$\Delta G = \Delta m \cdot g = \rho \cdot \Delta w \cdot g,$$

имеет вид

$$\gamma = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta w} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\rho \cdot \Delta w \cdot g}{\Delta w} = \rho \cdot g. \quad (1.7)$$

Иногда вводят понятие относительной плотности жидкости δ , как отношение плотности данной жидкости $\rho_{ж}$ к плотности воды $\rho_{в}$ при $4^\circ C$ (при этой температуре вода имеет наибольшую плотность)

$$\delta = \frac{\rho_{ж}}{\rho_{в}}. \quad (1.8)$$

1.3. Сжимаемость жидкостей (газов)

Сжимаемость жидкостей (газов) – это свойство жидкостей (газов) изменять свой объем под действием давления. При этом будет изменяться плотность жидкостей (газов).

Связь между плотностью, температурой и давлением устанавливается, как известно, по уравнению состояния.

Сжимаемость среды количественно можно характеризовать, например, изотермическим коэффициентом объемного сжатия β_p , который представляет собой относительное изменение объема (следовательно и плотности) при изменении давления на единицу

$$\beta_p = -\frac{1}{w} \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_T \quad \text{или} \quad \beta_p = \left| \frac{1}{w} \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_T \right|. \quad (1.9)$$

Знак минус в формуле (1.9) или вторая форма записи, использующая символ модуля числа, позволяет представить β_p положительным числом.

Размерность β_p обратна размерности давления.

Если использовать конечные приращения, то приближенное значение β_p будет иметь вид

$$\beta_p \approx -\frac{1}{w_1} \left(\frac{w_2 - w_1}{p_2 - p_1} \right)_T, \quad (1.10)$$

где w_1 и w_2 – объем при давлении соответственно p_1 и p_2 , а индекс “Т” означает, что рассматривается сжатие (или расширение) при постоянной температуре (изотермическое сжатие).

Величина, обратная изотермическому коэффициенту объемного сжатия, называется изотермическим модулем упругости жидкости (газа)

$$E = \frac{1}{\beta_p} \cdot \quad (1.11)$$

Численное значение β_p , следовательно, и E зависит от температуры и давления жидкости (газа). Изотермический модуль упругости воды приведен в табл. 1.1. Для других жидкостей среднее значение E приведено в табл. 1.2.

Таблица 1.1

Изотермический модуль упругости воды

Температура, °С	Давление p, МПа				
	0,5	1,0	2,0	4,0	8,0
0	1890	1900	1920	1950	1980
5	1930	1950	1970	2010	2070
10	1950	1970	2010	2050	2120
15	1970	2000	2030	2090	2170
20	1980	2020	2060	2120	2220

Таблица 1.2

Средние значения изотермического модуля упругости
некоторых жидкостей

Жидкость	Изотермический модуль упругости E, Мпа
Вода	2060
Керосин	4464
Масло промышленное 20	1362
Масло промышленное 50	1473
Масло турбинное	1717
Ртуть	32373

Для капельных жидкостей при не очень большом изменении давления можно считать изотермический модуль упругости величиной постоянной, зависящей только от рода жидкости.

Большое значение модуля упругости капельных жидкостей, а значит, малая величина изотермического коэффициента сжатия, позволяет в ряде инженерных задач пренебречь сжимаемостью капельных жидкостей.

Для совершенных газов, для которых справедливо уравнение состояния Клайперона

$$p \cdot v = R \cdot T \quad \text{или} \quad p \cdot w = m \cdot R \cdot T, \quad (1.12)$$

где v – удельный объем – объем единицы массы, $v = \frac{w}{m}$.

Учитывая, что $T = \text{const}$, будем иметь

$$\beta_p = -\frac{1}{w} \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{p}, \quad (1.13)$$

Следовательно, изотермический коэффициент объемного сжатия совершенного газа представляется формулой

$$\beta_p = \frac{1}{p}, \quad (1.14)$$

а изотермический модуль упругости такого газа

$$E = p. \quad (1.15)$$

Из выражений (1.14) или (1.15) можно заключить о значительной сжимаемости газов.

Следует заметить, что газ можно сжимать не только при постоянной температуре, как было рассмотрено выше, но и, например, при постоянной энтропии.

Изоэнтروпийный коэффициент объемного сжатия будет иметь вид

$$\beta_p = -\frac{1}{w} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_s = -\frac{1}{v} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s = -\rho \cdot \left(\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial p} \right)_s. \quad (1.16)$$

где w , v , ρ – соответственно объем газа, удельный объем, массовая плотность, $v = \frac{w}{m}$, $\rho = \frac{1}{v}$.

Поскольку в изоэнтропийном процессе плотность зависит только от давления

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const} \quad (1.17)$$

($k = \frac{c_p}{c_v}$ – показатель изоэнтропы), то частную производную

$\left(\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial p} \right)_s$ можно заменить на полную производную $\left(\frac{d \frac{1}{\rho}}{dp} \right)_s$. Тогда

изоэнтропийный коэффициент объемного сжатия запишется

$$\beta_p = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{d\rho}{dp} \right)_s = \frac{1}{\rho \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s}.$$

В газе скорость распространения звука c происходит при постоянной энтропии и выражается формулой

$$c^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s = k \cdot \frac{p}{\rho}. \quad (1.18)$$

Тогда

$$\beta_p = \frac{1}{\rho \cdot c^2} \quad (1.19)$$

или

$$\beta_p = \frac{1}{k \cdot p}, \quad (1.20)$$

а изоэнтروпийный модуль упругости газа

$$E = k \cdot p$$

или

$$E = \rho \cdot c^2. \quad (1.21)$$

1.4. Температурное расширение жидкостей

Объем жидкостей (газов) изменяется не только при изменении давления, но и при постоянном давлении с изменением температуры. С повышением температуры объем жидкостей (газов) увеличивается, следовательно, их плотность уменьшается. Исключением является вода, объем которой с повышением температуры от 0 °С до 4 °С уменьшается, а при дальнейшем повышении температуры, как и у других жидкостей, – увеличивается.

Температурное расширение жидкостей (газов) количественно характеризуется коэффициентом температурного расширения β_t , который представляет собой относительное изменение объема (следовательно, и плотности) при изменении температуры на один градус

$$\beta_t = \frac{1}{w} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial T} \right)_p.$$

Размерность β_t обратна размерности температуры, т.е. град⁻¹.

Коэффициент β_t можно выразить приближенно, через конечные приращения объема и температуры

$$\beta_t \approx \frac{1}{w_1} \left(\frac{w_2 - w_1}{T_2 - T_1} \right)_p = \frac{1}{w_1} \left(\frac{w_2 - w_1}{t_2^0 - t_1^0} \right)_p, \quad (1.22)$$

где w_2 и w_1 – объемы при температуре соответственно T_2 (t_2^0) и T_1 (t_1^0). T и t^0 – температура по шкалам Кельвина и Цельсия, а индекс «р» означает, что рассматривается изменение объема при неизменном давлении (изобарический процесс).

Для большинства капельных жидкостей β_t с увеличением давления уменьшается; для воды с увеличением температуры β_t увеличивается, а с повышением давления в зависимости от температуры может увеличиваться или уменьшаться. Коэффициент температурного расширения воды приведен в табл. 1.3, а его значения для некоторых капельных жидкостей – в табл. 1.4.

Таблица 1.3

Коэффициент температурного расширения воды $\beta_t \cdot 10^4$, град⁻¹

Давление р, МПа	Температура t, °С				
	1...10	10...20	40...50	60...70	90...100
0,1	0,14	1,50	4,22	5,56	7,19
10	0,43	1,65	4,22	5,48	7,04
20	0,72	1,83	4,26	5,39	6,91
50	1,49	2,36	4,29	5,23	6,61
90	2,29	2,89	4,37	5,14	6,21

При изменении температуры и давления в небольших пределах коэффициент температурного расширения капельных жидкостей принимают постоянным.

Значения β_t некоторых капельных жидкостей
при температуре 20 °С и давлении 0,1 МПа

Жидкость	Коэффициент температурного расширения β_t , град ⁻¹
Вода	0,00015
Глицерин	0,00050
Нефть	0,00060
Ртуть	0,00018

Для совершенных газов, согласно уравнению состояния (1.12),

$$\beta_t = \frac{1}{w} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T}, \quad (1.23)$$

где T – температура по абсолютной шкале (шкала Кельвина).

1.5. Вязкость жидкостей (газов)

Вязкостью (внутренним трением) называют свойство жидкостей (газов) оказывать сопротивление относительному движению (сдвигу) слоев.

Это свойство, как и теплопроводность, обусловлено молекулярной структурой жидкостей (газов). Количественные закономерности, связанные с вязкостью и теплопроводностью, строго выводятся из кинетической теории совершенной жидкости (газа).

Приняв гипотезу сплошности, т.е. отвлекаясь от молекулярной структуры жидкостей, эти количественные закономерности вводятся, как некоторые физические законы, установленные, как правило, опытным путем или умозрительно. Так, И. Ньютон (1643-1727 г.г.) в работе «Математические начала натуральной философии» сформулировал закон о внутреннем трении в жидкостях (газах). Согласно закону трения Ньютона сила трения ΔT , возникающая между слоями прямолинейно

движущейся вязкой жидкости (рис. 1.1), действующая на площадку Δs , равна

$$\Delta T = \pm \mu \cdot \left(\frac{dv}{dy} \right)_{\text{ср}} \cdot \Delta s, \quad (1.24)$$

где μ - динамический коэффициент вязкости;

$\left(\frac{dv}{dy} \right)_{\text{ср}}$ - среднее значение на площадке Δs производной

от скорости по направлению, перпендикулярному к слоям жидкости, выражающая в рассматриваемом случае слоистого движения скорость деформации сдвига; знак «+» или «-» выбирается в зависимости от знака производной и направления силы ΔT .

Напряжение трения в произвольной точке рассматриваемого слоя вязкой жидкости определяется по выражению

$$\tau = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta s} = \pm \mu \frac{dv}{dy}, \quad (1.25)$$

где ΔT - сила, действующая на площадку Δs , включающую точку, к которой стягивается эта площадка.

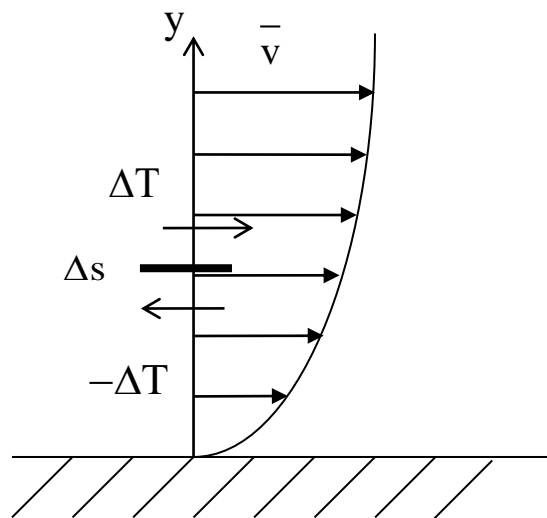


Рис. 1.1. К иллюстрации закона вязкого трения Ньютона

Численное значение динамического коэффициента вязкости зависит от рода жидкости, ее температуры и незначительно от давления. Зависимость μ от давления будет существенной лишь при относительно больших изменениях давления.

С повышением температуры капельных жидкостей их динамический коэффициент вязкости μ убывает, а у газов μ возрастает. Это объясняется особенностями молекулярной структуры капельных жидкостей и газов. У капельных жидкостей молекулы расположены достаточно близко друг от друга и между ними существуют силы взаимного притяжения, которые ослабевают с увеличением расстояния между молекулами при повышении температуры, в результате чего уменьшается сопротивление относительному сдвигу слоев. У газов хаотическое движение молекул приводит к обмену количеством движения и при сдвиге слоев порождает силу, препятствующую этому сдвигу. С повышением температуры интенсивность хаотического движения молекул возрастает (возрастает скорость молекул), что приводит к увеличению силы сопротивления относительному сдвигу слоев газа.

Динамический коэффициент вязкости имеет размерность

$$[\mu] = \left[\frac{\Delta T}{\Delta s \cdot \frac{dv}{dy}} \right] = M \cdot T^{-1} \cdot L^{-1}.$$

Единицей измерения динамического коэффициента вязкости в системе СИ является ньютон на секунду деленный на метр в квадрате ($\frac{Н \cdot с}{м^2}$), т.е. паскаль на секунду (Па·с), а в системе СГС – дина на секунду деленная на сантиметр в квадрате ($\frac{дин \cdot с}{см^2}$), т.е. пуаз (П).

Название «пуаз» связано с именем французского врача и физика Жана Луи Пуазейля (1799 - 1869 г.г.), установившего в опытах законы ламинарного (слоистого) течения жидкости в круглых трубах.

Т.к. $1 \text{ дин} = 10^{-5} \text{ Н}$, а $1 \text{ м}^2 = 10^4 \text{ см}^2$, то $1 \text{ П} = 0,1 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

В гидрогазодинамике наряду с динамическим коэффициентом вязкости μ используется кинематический коэффициент вязкости ν

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} . \quad (1.26)$$

Кинематическим этот коэффициент вязкости назван потому, что в размерности его не содержится размерности силы. Единица измерения кинематического коэффициента вязкости в системе СИ – метр квадратный на секунду ($\text{м}^2/\text{с}$), в системе СГС – сантиметр квадратный на секунду ($\text{см}^2/\text{с}$) = Ст (стокс). Сотая доля стокса называется сантистоксом (сСт). Название «стокс» связано с именем английского физика и математика Джорджа Стокса (1819 – 1903 г.г.) – автора важных исследований в математике и газодинамике.

На рис. 1.2 в качестве примера приведена зависимость кинематического коэффициента вязкости от температуры капельной жидкости (воды и машинного масла) и газа (воздуха).

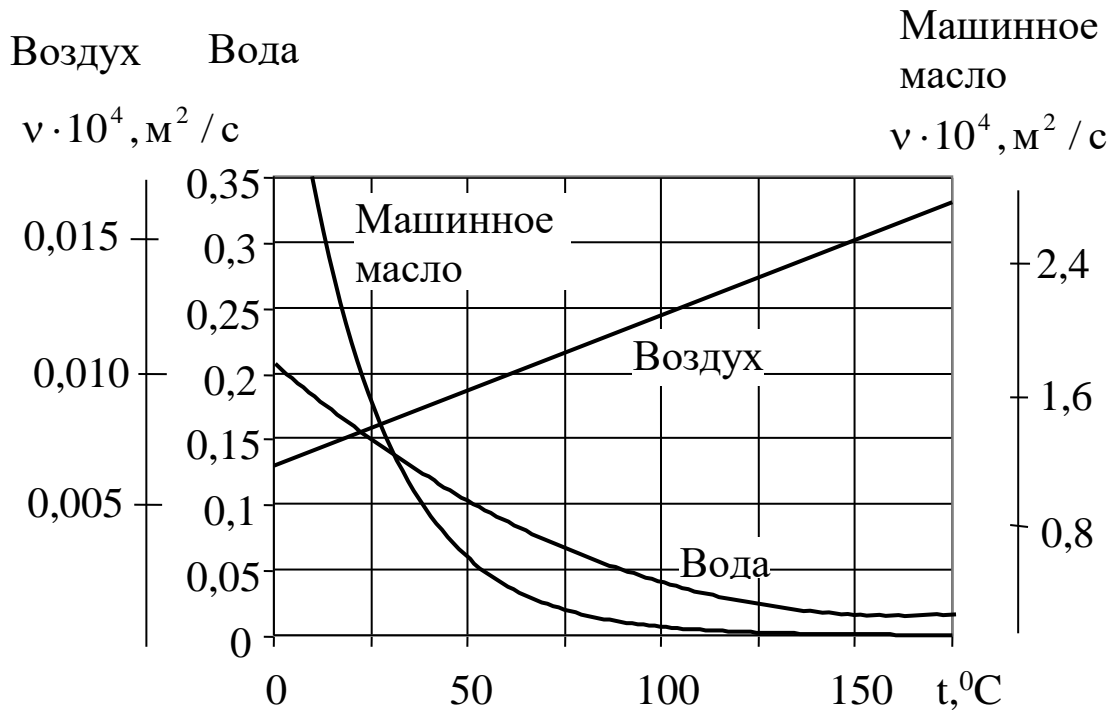


Рис. 1.2. Зависимость кинематического коэффициента вязкости жидкости и газа от температуры

1.6. Парообразование

Парообразование – это свойство капельных жидкостей изменять свое агрегатное состояние, т.е. превращаться в пар. Парообразование на поверхности капельных жидкостей называется испарением, а по всему объему – кипением. Переход пара в капельную жидкость называется конденсацией.

Кипение может наступать как в покое, так и в движущейся капельной жидкости при температуре кипения, зависящей от давления и рода жидкости, или при давлении насыщенного пара $p_{\text{нп}}$, значение которого зависит от температуры и рода жидкости.

В качестве примера в табл. 1.5 приведены значения давления насыщенных паров воды в зависимости от ее температуры.

Таблица 1.5

Давление насыщенных паров при различных температурах воды

$t, ^\circ\text{C}$	$p_{\text{нп}}, \text{МПа}$	$t, ^\circ\text{C}$	$p_{\text{нп}}, \text{МПа}$	$t, ^\circ\text{C}$	$p_{\text{нп}}, \text{МПа}$
0	0,0006	40	0,0075	80	0,0482
10	0,0012	50	0,0126	100	0,1033
20	0,0024	60	0,0202	125	0,2370
30	0,0043	70	0,0317	130	0,4850

С увеличением температуры давление насыщенных паров увеличивается у разных жидкостей в разной степени (рис.1.3).

В опытах установлено, что кипение капельных жидкостей обусловлено наличием растворенного в ней газа или пузырьков заземленного у стенок газа. Технические капельные жидкости всегда содержат растворенный или заземленный в виде пузырьков газ.

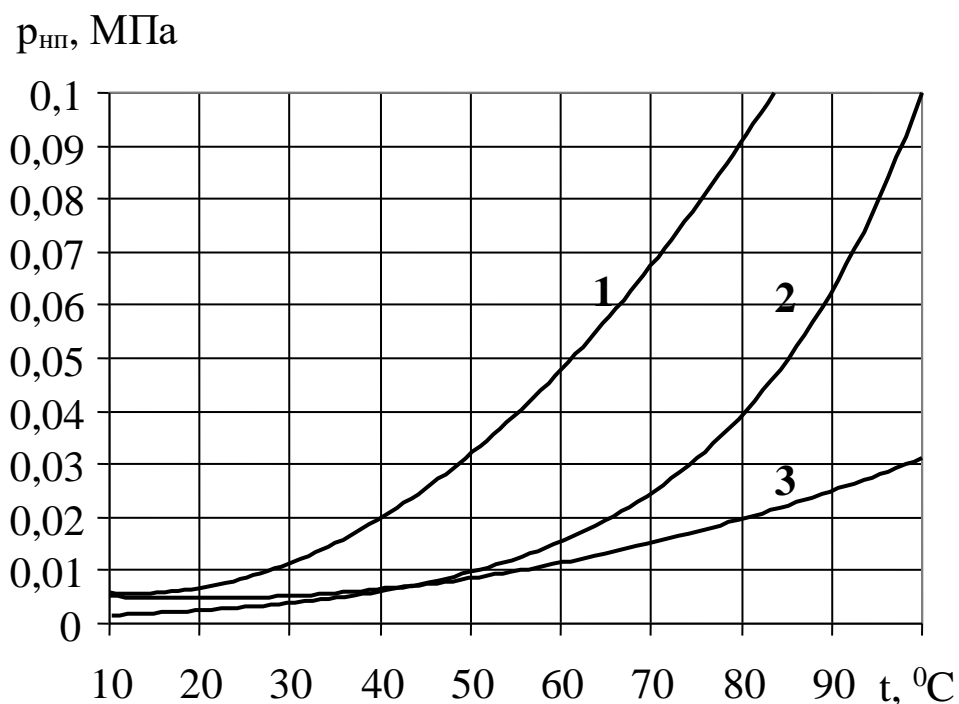


Рис. 1.3. Зависимость давления насыщенных паров $p_{нп}$ от температуры жидкостей:
1-спирт; 2-вода; 3-керосин

Если жидкость дегазирована, то она не будет кипеть даже при температуре, превосходящей температуру кипения, и будет находиться в так называемом перегретом состоянии. Дегазированная жидкость не кипит и при понижении давления ниже давления насыщенного пара.

Кипение капельной жидкости приводит к необходимости рассматривать двухфазную среду, более сложную, чем однофазная среда. При переходе через границы фаз свойства среды меняются скачкообразно, нарушается сплошность среды.

Кипение жидкости, а также выделение из жидкости растворенных в ней газов может наблюдаться в движущейся жидкости в тех местах, в которых по различным причинам (сужение потока, гидравлические сопротивления во всасывающих трубах насосных установок и др.) понижается давление до давления насыщенных паров этой жидкости при данной температуре или до так называемого критического давления, при котором начинается выделение из нее растворенных газов. Такое

местное нарушение сплошности течения и образование пузырьков пара и газа называется кавитацией.

Кавитация является нежелательным явлением, т.к. возникновение ее в трубопроводах приводит к значительному увеличению их гидравлического сопротивления. Возникновение кавитации в гидравлических машинах (насосах и гидротурбинах), а также на лопастях гребных винтов приводит к появлению вибрации и шума и резкому снижению коэффициента полезного действия машин. Кроме того, движущиеся вместе с жидкостью пузырьки пара и газа, попадая в область повышенного давления схлопываются (конденсируются), что приводит к местным ударам, т.е. значительному повышению давления в отдельных точках и разрушению материала твердых стенок (трубопроводов, рабочих колес гидромашин и др.), на которых схлопываются пузырьки пара и газа.

1.7. Капиллярность

Свободная поверхность капельной жидкости около стенок сосуда называется мениском. Если жидкость смачивает стенку, то мениск имеет вогнутую форму, а если не смачивает, то выпуклую. Форма мениска определяется силами взаимодействия молекул жидкости и стенок сосуда. Искривленная свободная поверхность оказывает на жидкость дополнительное давление, вызванное силами поверхностного натяжения. В результате в трубках малого диаметра (капиллярах) уровень жидкости поднимается (при смачивании) или снижается (при несмачивании) относительно уровня в сосуде (рис. 1.4) на Δh . Высоту капиллярного подъема жидкости в стеклянной трубке диаметром d можно определить для полусферического мениска по формуле

$$\Delta h = \frac{k}{d}, \quad (1.27)$$

где d – диаметр трубки, мм;

k – коэффициент, мм² (для воды +30; для ртути –10,1; для спирта +11,5).

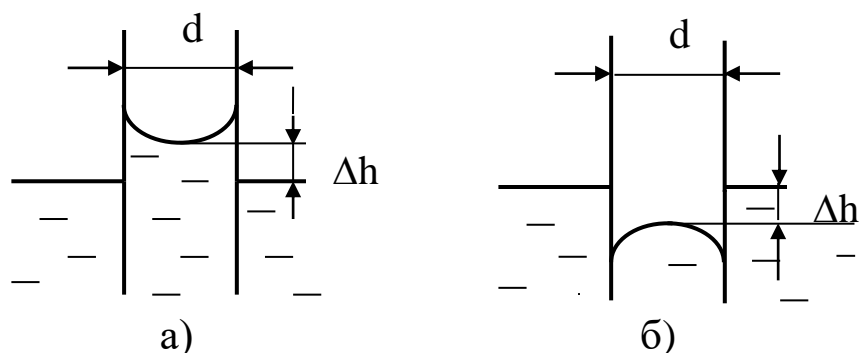


Рис.1.4. Уровень жидкости в стеклянных капиллярных трубках:
а) вода, б) ртуть

1.8. Неньютоновские жидкости

Неньютоновскими жидкостями называют жидкости, для которых закон трения Ньютона (1.25) не справедлив. К таким жидкостям относятся глинистые, известковые, цементные растворы, смазочные масла при температуре застывания, смолы и т.д.

Для неньютоновских жидкостей справедлив более сложный закон трения, например,

$$\tau = \tau_0 + \mu_{пл} \left(\frac{dv}{dy} \right)^m, \quad (1.28)$$

где τ_0 - начальное напряжение сдвига, после достижения которого жидкость приходит в движение;

$\mu_{пл}$ - коэффициент структурной или пластической вязкости;

m - число.

Значения τ_0 , $\mu_{пл}$ и m определяются для конкретной жидкости опытным путем.

1.9. Модели жидкости (газа)

Учет всех физических свойств реальной жидкости (газа) при решении конкретных задач не представляется возможным из-за непреодолимых математических трудностей, возникающих при описании движения такой среды. Однако во многих

практически важных случаях этого и не требуется. Пренебрежение некоторыми физическими свойствами реальной среды позволяет упростить задачу и получить либо аналитическое решение, либо применить численные методы решения, реализуемые на современных ПЭВМ.

Гипотетическая жидкость (газ), которая имеет не все физические свойства реальной среды, называется моделью жидкости (газа).

Наиболее простой моделью жидкости *является несжимаемая невязкая (идеальная) жидкость*. Уравнения, описывающие движение такой жидкости, в ряде случаев допускают решение в аналитическом виде, которое всегда представляет теоретический интерес, позволяет глубоко вникнуть в существо изучаемых явлений.

Другими, более сложными моделями жидкости (газа) являются:

- несжимаемая вязкая жидкость;
- сжимаемая невязкая жидкость;
- сжимаемая вязкая жидкость;
- двухфазная (многофазная) вязкая несжимаемая жидкость;
- электропроводная вязкая несжимаемая жидкость и т.д.

При теоретическом изучении газогидродинамических явлений, так же, как и при решении конкретных технических задач, выбирают модель жидкости (газа), имеющую те физические свойства, которые являются определяющими для рассматриваемого явления, т.е. существенно влияют на решение задачи. Например, если изучается движение капельной жидкости, то в большинстве случаев можно пренебречь ее сжимаемостью, т.е. полагать жидкость несжимаемой.

Модель несжимаемой (невязкой или вязкой) жидкости пригодна и при изучении движения газов с относительно небольшими скоростями (менее одной трети скорости распространения звука в рассматриваемом газе), поскольку в этом случае несущественно проявляется сжимаемость газов. При скоростях, порядка и более скорости звука в газе, сжимаемость настолько существенно влияет на характер газодинамических явлений, что ее учет оказывается даже более важным, чем учет вязкости газа.

Раздел 2

ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Кинематика жидкости и газа – это раздел гидрогазодинамики, в котором изучается движение только с геометрической точки зрения, а причины, вызывающие движение, в кинематике не рассматриваются.

2.1. Методы описания движения жидкости и газа

Описание движения жидкости (газа) может быть выполнено двумя методами, один из которых связан с именем Жозефа Луи Лагранжа (1736 - 1813 г.г.), а другой, получивший более широкое применение, с именем Леонарда Эйлера (1707 - 1783 г.г.).

В методе Лагранжа описывается движение жидкости путем описания движения отдельных частиц жидкости, как материальных точек, сплошь заполняющих рассматриваемый движущийся объем жидкости, так называемый жидкий объем.

Следовательно, в методе Лагранжа независимыми переменными при описании движения жидкости являются параметры, определяющие каждую точку жидкости, например, ее декартовы координаты x_0, y_0, z_0 в некоторый начальный момент времени t_0 и время t . Тогда закон движения любой частицы жидкости будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(x_0, y_0, z_0, t), \\ y &= f_2(x_0, y_0, z_0, t), \\ z &= f_3(x_0, y_0, z_0, t), \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

а в векторной форме

$$\bar{r} = f(\bar{r}_0, t), \quad (2.2)$$

где \bar{r}_0 - радиус-вектор частицы с координатами x_0, y_0, z_0 ,
 $\bar{r}_0 = \bar{r}_0(x_0, y_0, z_0)$.

Правые части (2.1) являются функциями четырех независимых переменных – начальных координат x_0, y_0, z_0 и времени t , так называемых переменных Лагранжа.

При фиксированных x_0, y_0, z_0 и переменном t функции (2.1) определяют закон движения данной фиксированной частицы жидкости.

Скорости частиц жидкости в *переменных Лагранжа* выразятся формулами

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial f_1(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t}, \\ v_y &= \frac{\partial f_2(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t}, \\ v_z &= \frac{\partial f_3(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

или в векторной форме

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}(r_0, t)}{\partial t}, \quad (2.4)$$

а ускорения – формулами

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \frac{\partial^2 f_1(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2}, \\ w_y &= \frac{\partial^2 f_2(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2}, \\ w_z &= \frac{\partial^2 f_3(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

или в векторной форме

$$\vec{w} = \frac{\partial^2 \vec{r}(r_0, t)}{\partial t^2}, \quad (2.6)$$

Плотность будет выражена формулой

$$\rho = f_4(x_0, y_0, z_0, t)$$

и т.д.

Несмотря на кажущуюся простоту, метод Лагранжа не получил широкого применения в гидрогазодинамике из-за сложности вида уравнений движения.

Более широкое применение, как упомянуто выше, получил метод описания движения жидкости, предложенный Эйлером. В методе Эйлера при описании движения жидкости наблюдают не за частицами жидкости, а за точками пространства, заполненного движущейся жидкостью, в которых в разные моменты времени находятся разные частицы жидкости. Таким образом, описание движения жидкости заключается в выражении скоростей частиц и других физических величин (ускорений, плотностей и т.д.), характеризующих движение, в функции от времени t и координат x, y, z точек пространства, т.е. в задании различных векторных и скалярных полей: поля скоростей, поля ускорений, поля плотностей и т.д. Четыре аргумента x, y, z и t называют *переменными Эйлера*.

Поле скоростей в переменных Эйлера задается в виде

$$\left. \begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z, t) \\ v_y &= f_2(x, y, z, t) \\ v_z &= f_3(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

или в векторной форме

$$\bar{v} = f(\bar{r}, t), \quad (2.8)$$

где \bar{r} - радиус-вектор точки пространства с координатами x, y, z .

Чтобы найти поле ускорений по заданному полю скоростей (2.7) или (2.8), нужно проследить за движением каждой индивидуальной жидкой частицы.

Поскольку координаты движущейся частицы являются функциями времени, проекции скорости на координатные оси будут сложными функциями времени.

$$\begin{aligned}v_x &= f_1[x(t), y(t), z(t), t], \\v_y &= f_2[x(t), y(t), z(t), t], \\v_z &= f_3[x(t), y(t), z(t), t].\end{aligned}$$

Проекции полного ускорения на координатные оси получаются дифференцированием по времени проекции скорости по правилу дифференцирования сложных функций

$$\begin{aligned}w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \\w_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \\w_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{dz}{dt}.\end{aligned}$$

Т.к. функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ представляют собой координаты движущейся частицы, то

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z.$$

Окончательно поле ускорений в координатной форме будет

$$\begin{aligned}w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\w_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\w_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{2.9}$$

или в векторной форме

$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \overline{v}}{\partial z}. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) можно записать в компактной форме, используя оператор Гамильтона

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k},$$

а именно

$$\overline{w} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + (\overline{v} \cdot \nabla) \overline{v}. \quad (2.11)$$

Первые слагаемые в правой части уравнений (2.9), (2.10), (2.11) – локальные производные – выражают изменение скорости с течением времени в фиксированной точке пространства, т.е. местное или локальное ускорение. Остальные слагаемые правых частей упомянутых уравнений – конвективные производные – выражают изменение скорости в пространстве в данный момент времени, т.е. конвективное ускорение, которое связано с перемещением (конвекцией) частиц жидкости.

Если движение жидкости *установившееся* (стационарное), т.е. такое, при котором в любой точке пространства скорость с течением времени не изменяется, то *локальное ускорение* будет равно нулю

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} = 0.$$

Если же жидкость движется, как одно целое, *поступательно*, т.е. скорости всех ее частиц в любой момент времени равны между собой, но могут изменяться с течением времени, то поле скоростей будет однородным, и *конвективное ускорение* будет равно нулю, а значит, в этом случае полное ускорение совпадает с локальным.

2.2. Разложение движения частицы жидкости (газа) на простейшие (теорема Коши – Гельмгольца)

Сложное движение жидкости (газа) можно представить в виде простых составляющих. А именно, *движение частицы жидкости (газа) за малый промежуток времени можно разложить на квазитвердое* со скоростью $\bar{v}_{к.т.}$ (поступательное вместе с произвольно выбранным полюсом и вращательное вокруг оси, проведенной через полюс) и *деформационное* со скоростью $\bar{v}_{деф}$ (связанное с изменением формы частицы)

$$\bar{v} = \bar{v}_{к.т.} + \bar{v}_{деф}.$$

Это утверждение составляет содержание теоремы Коши – Гельмгольца, доказательство которой приведено ниже.

Рассмотрим движение частицы твердого недеформируемого тела (рис. 2.1,а). Выберем какую-нибудь точку О с фиксированными координатами x_0, y_0, z_0 в качестве полюса и произвольную точку М с координатами x, y, z .

В кинематике абсолютно твердого тела показано, что разлагая движение на две составляющие: поступательную вместе с произвольно выбранной точкой О тела (полюсом) и вращательную вокруг мгновенной оси, проведенной через полюс, можно вектор скорости движения любой точки твердого тела в данный момент времени представить в виде векторной суммы

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_0) \quad (2.12)$$

или в проекции на оси координат

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \omega_y(z - z_0) - \omega_z(y - y_0), \\ v_y &= v_{0y} + \omega_z(x - x_0) - \omega_x(z - z_0), \\ v_z &= v_{0z} + \omega_x(y - y_0) - \omega_y(x - x_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

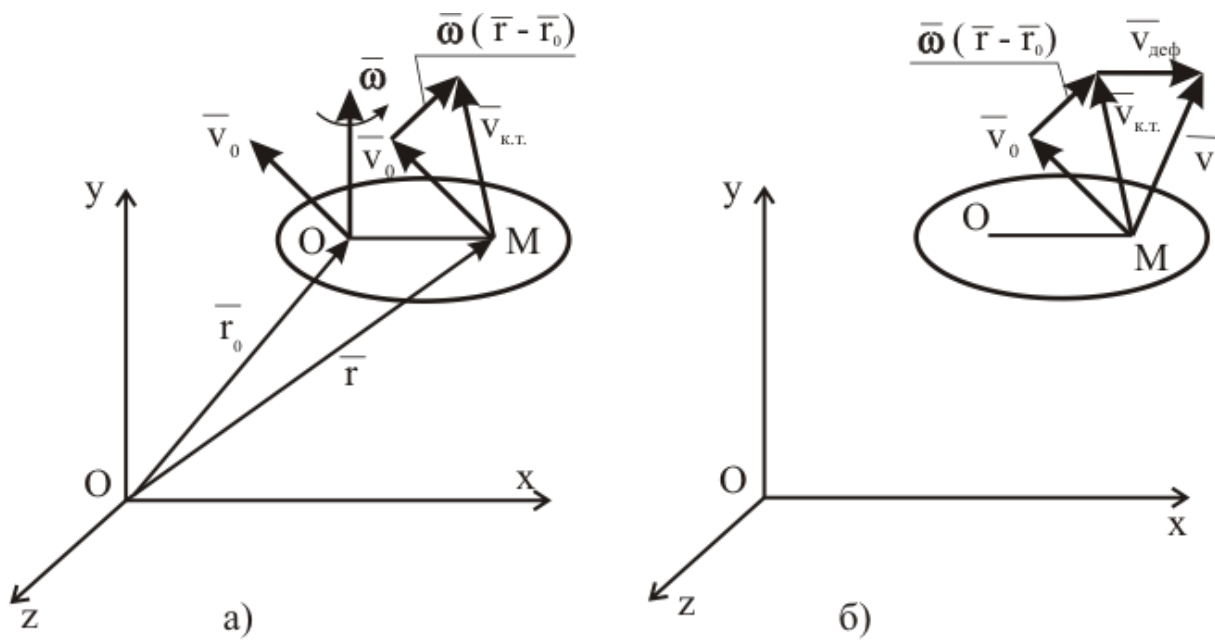


Рис.2.1 (а и б). Пояснительный чертеж к теореме Коши-Гельмгольца

На рис. 2.1 (а и б) обозначены:

\vec{v}_0 - вектор скорости движения полюса O с координатами (x_0, y_0, z_0) ;

$\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости вращения тела относительно мгновенной оси, проходящей через полюс O ;

$\vec{r} - \vec{r}_0$ - радиус-вектор, проведенный из полюса O в рассматриваемую точку тела $M(x, y, z)$, величина которого остается неизменной во время движения тела, по условию твердости (недеформируемости тела).

Поскольку в данный момент времени $\vec{v}_0(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$, $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ и $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ постоянные величины, независящие от выбора точки $M(x, y, z)$, то дифференцируя (2.13), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\omega_z, & \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \omega_y, \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \omega_z, & \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\omega_x, \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} &= -\omega_y, & \frac{\partial v_z}{\partial y} &= \omega_x, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Тогда поле скоростей абсолютно твердого тела (2.13) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_0 (z - z_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 (y - y_0), \\ v_y &= v_{0y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 (x - x_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)_0 (z - z_0), \\ v_z &= v_{0z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)_0 (y - y_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_0 (x - x_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Индекс «0» у скобок, содержащих производные, определяющие проекции угловой скорости, имеющие одинаковые значения во всех точках твердого тела, введен для удобства сравнения выражений при дальнейших выкладках.

Теперь рассмотрим поле скоростей жидкости в окрестностях той же точки О пространства (рис.2.1,б). Координаты, скорости и производные скоростей в этой точке будем отмечать также индексом «0».

Выражая проекции скорости произвольной точки М жидкой частицы через проекции скорости точки О (точка М находится в окрестностях точки О) по формуле Тейлора с точностью до малых величин второго и высших порядков, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_0 (z - z_0), \\ v_y &= v_{0y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} \right)_0 (z - z_0), \\ v_z &= v_{0z} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_0 (z - z_0). \end{aligned} \right\} (2.17)$$

Вычитая из поля скоростей (2.17) поле скоростей (2.16), которое было бы, если бы жидкая частица в начальный момент времени затвердела (скорость квазитвердого тела $\bar{v}_{к.т.}$), получим проекции скорости деформационного движения жидкой частицы $\bar{v}_{деф}$.

$$\left. \begin{aligned} v_{x \text{ деф}} &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_0 (y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_0 (z - z_0), \\ v_{y \text{ деф}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)_0 (y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)_0 (z - z_0), \\ v_{z \text{ деф}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)_0 (y - y_0) + \\ &+ \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_0 (z - z_0). \end{aligned} \right\} (2.18)$$

Можно показать, что в (2.18) члены $\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \right]_0$, $\left[\frac{\partial v_y}{\partial y} \right]_0$, $\left[\frac{\partial v_z}{\partial z} \right]_0$ представляют собой скорости относительного удлинения

проекций бесконечно малого отрезка OM (рис.2.1,б) на координатные оси Ox , Oy и Oz или, что тоже, скорости относительных удлинений бесконечно малых отрезков, расположенных соответственно по направлению осей Ox , Oy и Oz .

Члены

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_0, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_0, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)_0$$

равны половинам скоростей скашивания углов между отрезками соответственно Ox и Oy , Ox и Oz , Oz и Oy .

В векторной форме теорема Коши-Гельмгольца (или так называемая первая теорема Гельмгольца) записывается в виде

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \frac{1}{2} \text{rot } \bar{v} \times \delta \bar{r} + \bar{v}_{\text{деф}}, \quad (2.19)$$

где $\delta \bar{r}$ - бесконечно малый отрезок, $\delta \bar{r} = \bar{r} - \bar{r}_0$;

$\frac{1}{2} \text{rot } \bar{v}$ - половина вихря скорости, равная вектору

угловой скорости, $\frac{1}{2} \text{rot } \bar{v} = \bar{\omega}$;

$\bar{v}_{\text{деф}}$ - скорость деформационного движения.

Наглядно этот результат можно проиллюстрировать, рассматривая перемещение жидкой частицы в форме куба за малый промежуток времени. На рис.2.2 показана одна из граней куба.

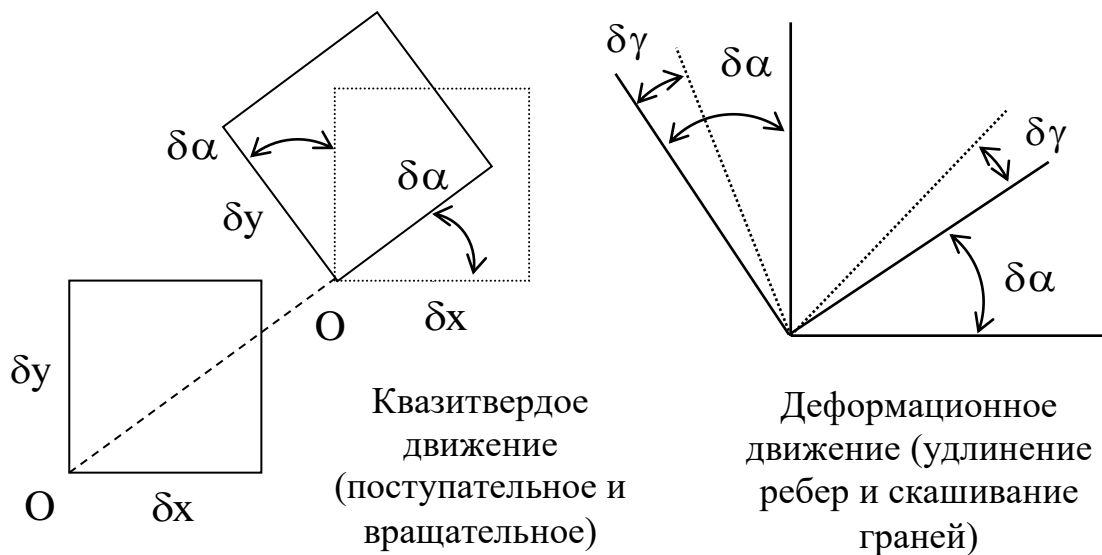


Рис. 2.2. Движение квазитвердой частицы и деформационное движение

2.3. Линия тока, траектория, струйка

Векторные линии поля мгновенных скоростей, т.е. линии, в каждой точке которых скорость в данный момент времени направлена по касательной к ним, называются **линиями тока** (рис. 2.3).

Линия тока дает наглядное представление о движении жидкости в данный момент времени.

Систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих семейство векторных линий поля скоростей, можно записать из условия, что элемент линии тока \vec{dr} , проекция которого на координатные оси dx , dy , dz , коллинеарен вектору скорости $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$, и значит, проекции этих векторов пропорциональны

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} \quad (2.20)$$

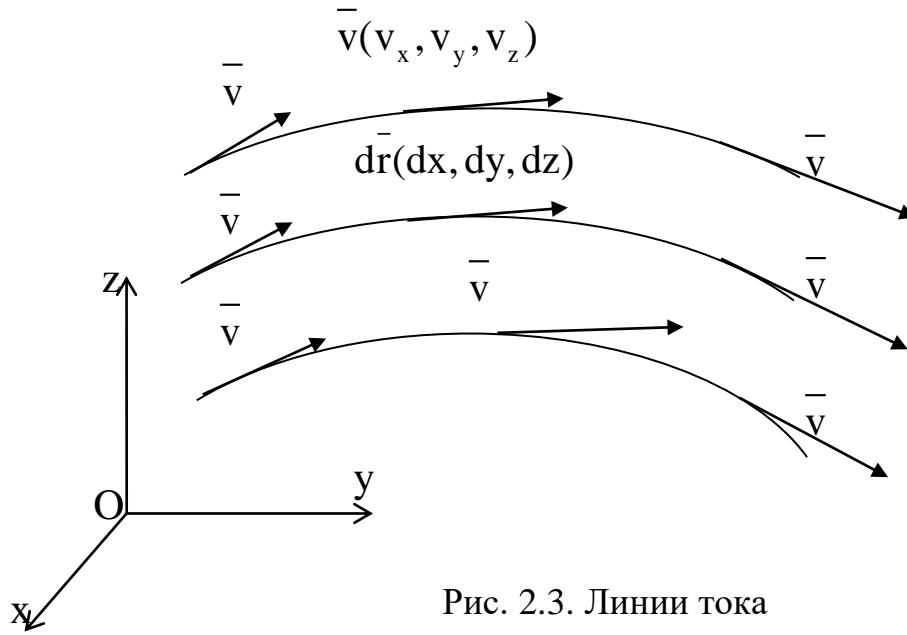


Рис. 2.3. Линии тока

В уравнениях (2.20), из которых два независимы, а третье является их следствием, время t следует рассматривать как фиксированный параметр, определяющий поле скоростей в данный момент времени.

Траекторией частицы называется линия, которую описывает в пространстве движущаяся частица жидкости с течением времени.

При установившемся движении, поскольку векторы скорости в каждой точке пространства с течением времени не изменяются, картина линий тока также с течением времени не изменяется. Следовательно, при установившемся движении линии тока будут совпадать с траекториями частиц жидкости.

Если же движение жидкости неустановившееся, то линии тока и траектории, вообще говоря, не совпадают. Этот факт можно наглядно проиллюстрировать, если начать следить за движением частицы жидкости M , которая в начальный момент времени t_0 находилась в точке A пространства, через которую в этот момент времени проходит линия тока (рис. 2.4).

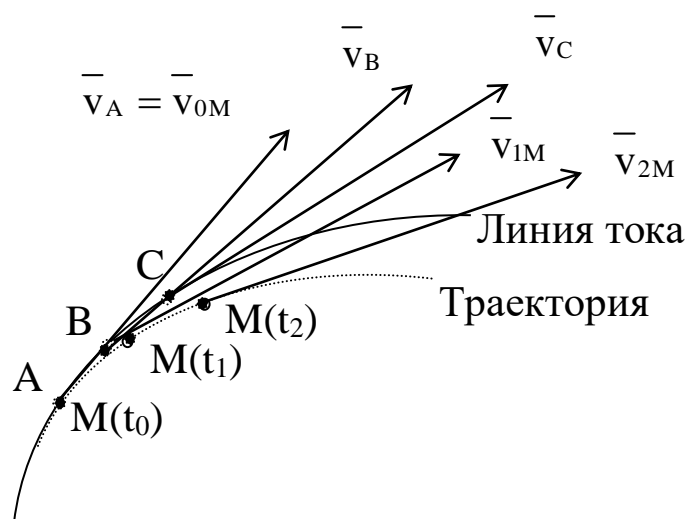


Рис.2.4. Линия тока и траектория движущейся частицы жидкости (газа)

За малый промежуток времени частица жидкости M переместится на малое расстояние в направлении скорости $\underline{v}_A = \underline{v}_{0M}$ и попадет в соседнюю точку пространства B . При неустановившемся движении в этот момент времени частица жидкости будет двигаться со скоростью \underline{v}_{1M} , отличной от той скорости \underline{v}_B , которая была у другой частицы, находившейся в этой точке пространства B в начальный момент времени. В следующий момент времени частица жидкости M переместится в направлении скорости \underline{v}_{1M} , ее траектория не совпадет с линией тока.

Из единственности решения уравнений (2.20) следует, что через каждую точку пространства, в которой скорость не обращается в нуль или бесконечность, т.е. за исключением особых точек, проходит только одна линия тока. Если бы линии тока пересекались в каких-либо точках пространства, то скорость в этих точках одновременно была бы касательной к этим линиям, что невозможно.

При установившемся движении вводят важное понятие – *струи*.

Струйкой называют часть жидкости, ограниченную трубчатой поверхностью, образованной траекториями частиц,

находившихся в некоторый момент времени на элементарном замкнутом контуре (рис. 2.5).

Элементарный замкнутый контур $d\ell$ ограничивает элементарную площадку ds .

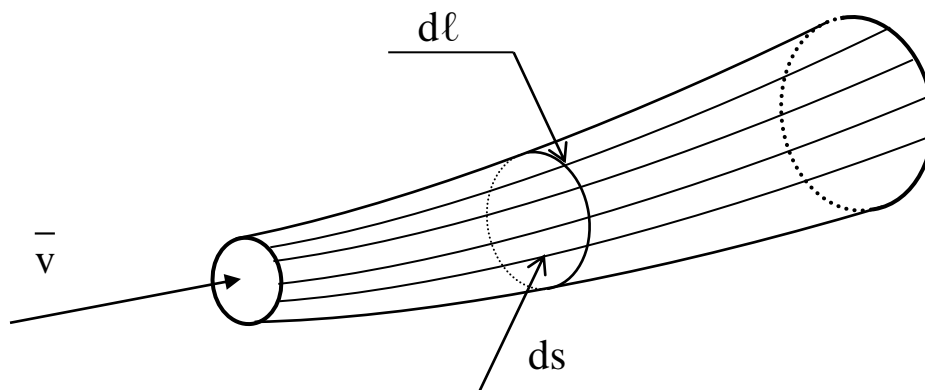


Рис.2.5. Струйка жидкости (газа)

В пределах поперечного сечения струйки, в силу его малости, распределение скоростей частиц жидкости принимают равномерным, а сечение струйки – плоским.

Поток конечных размеров можно рассматривать как совокупность струек.

Живым сечением или сечением потока называют поверхность, проведенную нормально к вектору скорости. В общем случае живые сечения криволинейны (рис. 2.6, а), а при параллельноструйном течении живое сечение будет плоским (рис. 2.6, б).

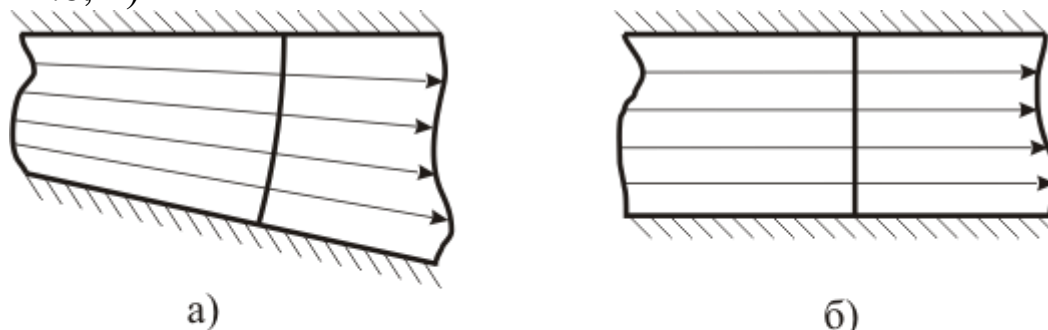


Рис.2.6. Живые сечения потока:
а) в диффузоре; б) в цилиндрической трубе

Живое сечение потока и сечение трубы (плоскость, проведенная нормально оси трубы) совпадают только при параллельноструйном течении жидкости и при полном заполнении ею сечения трубы.

Необходимым и достаточным условием существования живых сечений потока является, как это было указано профессором Казанского университета И.С.Громекой еще в 1881г., ортогональность вектора скорости и вектора вихря скорости: $\bar{v} \times \text{rot} \bar{v} = 0$ (как было отмечено выше, вектор вихря скорости равен удвоенному вектору угловой скорости вращения $\text{rot} \bar{v} = 2 \cdot \bar{\omega}$).

Примером движений, для которых выполняется это условие, является плоское движение жидкости, а также безвихревое движение, при котором в каждой точке потока $\text{rot} \bar{v} = 0$.

Живых сечений потока не существует при винтовом движении, когда вектор скорости параллелен вектору вихря скорости.

2.4. Вихревые линии и трубки. Вихревой шнур. Вторая теорема Гельмгольца. Интенсивность вихревого шнура

Векторные линии поля мгновенных угловых скоростей, т.е. линии, в каждой точке которых вектор угловой скорости в данный момент времени направлен по касательной к ним, называются **вихревыми линиями** (рис. 2.7).

Поверхность, образованная вихревыми линиями, проведенными в данный момент времени через точки замкнутого контура, представляет собой **вихревую трубку**, а жидкость, находящаяся внутри вихревой трубки, называется **вихревым шнуром**.

Свойство вихревого шнура и его количественную характеристику устанавливает **вторая теорема Гельмгольца: поток вихря скорости через любое сечение вихревого шнура в данный момент времени одинаков.**

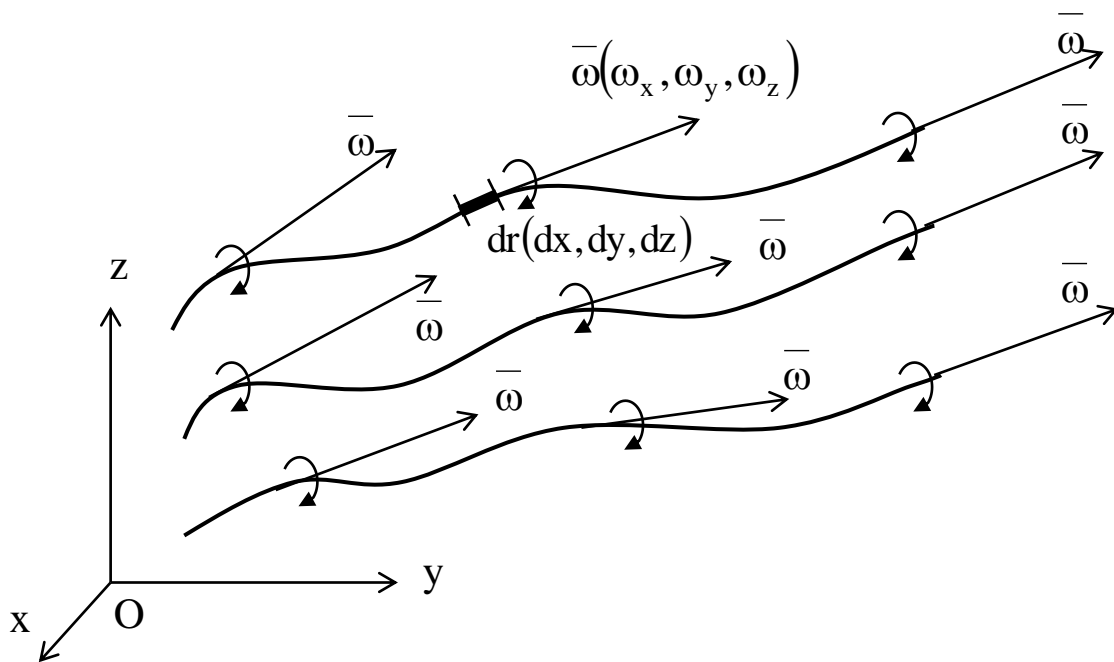


Рис.2.7. Вихревые линии

Понятие потока вектора \bar{A} через поверхность s вводится в векторном анализе при рассмотрении любого векторного поля $\bar{A}(x, y, z)$ и выражается поверхностным интегралом

$$\int_s \bar{A}_n \cdot ds = \int_s (A_x \cdot dy \cdot dz + A_y \cdot dx \cdot dz + A_z \cdot dx \cdot dy),$$

где A_n, A_x, A_y, A_z – проекции вектора \bar{A} соответственно на нормаль к поверхности и на координатные оси.

Отметим, что поток вектора через поверхность – скалярная величина.

Для поля скоростей частиц жидкости поток вектора скорости через поверхность равен объему жидкости, протекающей через эту поверхность в единицу времени.

Если поверхность s замкнута и ограничивает некоторый объем w , то согласно теореме Гаусса-Остроградского

$$\oint_S \vec{A}_n \cdot d\vec{s} = \int_W \operatorname{div} \vec{A} \cdot d\vec{w} . \quad (2.21)$$

Рассмотрим вихревой шнур (рис. 2.8).

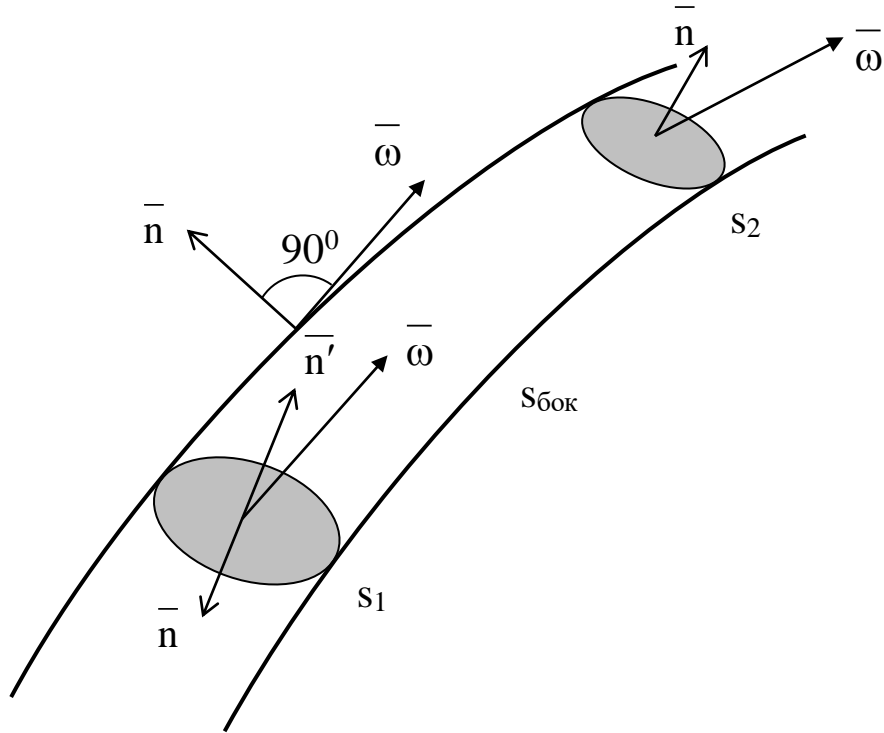


Рис.2.8. Вихревой шнур

Выделим двумя сечениями s_1 и s_2 некоторый произвольный объем вихревого шнура, боковая поверхность которого $s_{бок}$ ограничена контурами этих сечений. Поток вектора вихря $\operatorname{rot} \vec{v} = 2 \cdot \vec{\omega}$ через замкнутую поверхность, состоящую из s_1 , s_2 , $s_{бок}$, будет равен нулю, т.к. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} \equiv 0$ и, следовательно,

$$\oint_S 2 \cdot \vec{\omega}_n \cdot d\vec{s} = \int_W \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{w} = 0,$$

$$2 \cdot \oint_S \vec{\omega}_n \cdot d\vec{s} = 2 \cdot \oint_{s_1} \vec{\omega}_n \cdot d\vec{s} + 2 \cdot \oint_{s_2} \vec{\omega}_n \cdot d\vec{s} + 2 \cdot \oint_{s_{бок}} \vec{\omega}_n \cdot d\vec{s} = 0. \quad (2.22)$$

Поскольку на боковой поверхности вихревого шнура $\omega_n = 0$, то из (2.22) следует

$$\int_{S_1} \omega_n \cdot ds + \int_{S_2} \omega_n \cdot ds = 0,$$

или

$$\int_{S_2} \omega_n \cdot ds = - \int_{S_1} \omega_n \cdot ds. \quad (2.23)$$

Если в сечении S_1 ввести нормаль \bar{n}' в направлении вектора угловой скорости, то

$$\int_{S_1} \omega_{n'} \cdot ds = - \int_{S_1} \omega_n \cdot ds.$$

Тогда (2.23) можно записать

$$\int_{S_1} \omega_{n'} \cdot ds = \int_{S_2} \omega_n \cdot ds, \quad (2.24)$$

что доказывает вторую теорему Гельмгольца, которую можно сформулировать и так:

поток вектора угловой скорости через любое сечение вихревого шнура в данный момент времени одинаков.

Одинаковость потока вихря скорости (или угловой скорости) через любое сечение вихревого шнура дает основание принять поток вихря скорости (или угловой скорости) за меру ***интенсивности*** или ***напряжения вихревого шнура I***:

$$I = \int_S \text{rot}_n \bar{v} \cdot ds = 2 \int_S \omega_n \cdot ds.$$

Для элементарного вихревого шнура, когда в пределах сечения, проведенного нормально к вихревым линиям, вектор $\bar{\omega}$ можно считать постоянным, а сечения - плоскими

$$\Delta I = 2 \cdot \omega \cdot \Delta s = \text{const.}$$

Отсюда видно, что в меньших по площади сечениях вихревого шнура угловая скорость вращения частиц будет больше.

Следствием второй теоремы Гельмгольца является невозможность обрыва вихревого шнура внутри жидкости: концы его должны опираться либо на границы жидкости, либо существовать в виде колец (рис. 2.9). Воздушные вихри, смерчи, опираются на воду и облако или землю и облако.

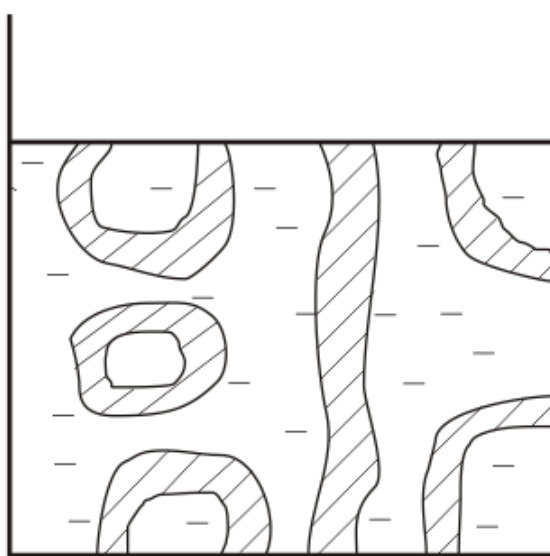


Рис.2.9. Вихревые шнуры в жидкости

Заметим, что утверждение теоремы Гельмгольца относится к данному моменту времени. Поэтому об изменении интенсивности вихревого шнура со временем можно судить, лишь рассматривая приложенные к жидкости силы и ее физические свойства.

Течения реальных жидкостей, ограниченные твердыми поверхностями (течения в трубках, каналах, проточных частях гидромашин и т.д.) всегда вихревые, причем в потоке наряду с элементарными вихревыми шнурами, непрерывно распределенными в области течения, могут иметь место крупные дискретные вихревые шнуры (например, при срыве потока с острых кромок).

2.5. Циркуляция скорости. Теорема Стокса

Для определения интенсивности вихревых шнуров, не поддающейся непосредственному измерению, установим связь между ней и распределением скоростей в жидкости (газе) в данный момент времени (полем мгновенных скоростей).

С этой целью сначала вспомним из векторного анализа понятие циркуляции вектора применительно к полю скоростей: циркуляцией скорости Γ по некоторой кривой АВ (рис.2.10) называется криволинейный интеграл вдоль этой кривой от скалярного произведения \vec{v} на $d\vec{\ell}$:

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B v_{\ell} \cdot d\ell = \int_A^B (v_x \cdot dx + v_y \cdot dy + v_z \cdot dz).$$

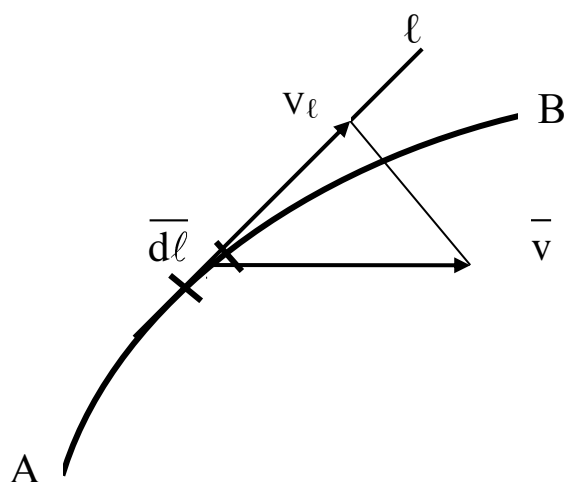


Рис. 2.10. К определению циркуляции скорости по некоторой кривой АВ

Циркуляция скорости является скалярной величиной, вычисляется по полю мгновенных скоростей, т.е. для данного момента времени. Если изменить направление при вычислении

циркуляции по кривой, то результат, очевидно, будет отличаться только знаком, т.е.

$$\int_A^B \mathbf{v}_\ell \cdot d\ell = - \int_B^A \mathbf{v}_\ell \cdot d\ell$$

или

$$\Gamma_{AB} = - \Gamma_{BA}.$$

Если кривая ℓ , по которой вычисляют циркуляцию, замкнута, то обычно выбирают за положительное направление обхода такое, чтобы поверхность, ограниченная контуром ℓ , оставалась слева (рис. 2.11).

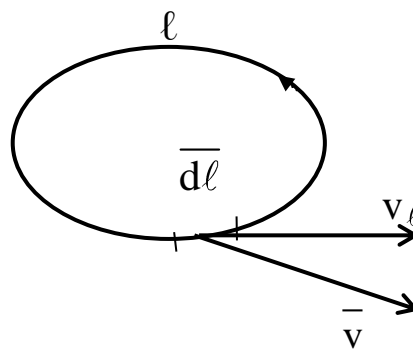


Рис. 2.11. К определению циркуляции скорости по замкнутому контуру

$$\Gamma_\ell = \oint_\ell \mathbf{v}_\ell \cdot d\ell = \oint_\ell \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{d\ell} = \oint_\ell (v_x \cdot dx + v_y \cdot dy + v_z \cdot dz). \quad (2.25)$$

Связь между циркуляцией скорости и интенсивностью вихревых шнуров устанавливается теоремой Стокса (1819 - 1903 г.г.). Эта теорема доказывается в векторном анализе, при этом не конкретизируется, какое непрерывное векторное поле

рассматривается. Если же рассматривать непрерывное поле скоростей в жидкости или газе, то теорему Стокса можно сформулировать следующим образом: *циркуляция скорости по замкнутому, не пересекающему себя контуру ℓ , который непрерывной деформацией может быть стянут в точку, не выходя за пределы жидкости, равна интенсивности вихревых шнуров (вихрей), пересекающих поверхность s , ограниченную этим контуром* (рис. 2.12).

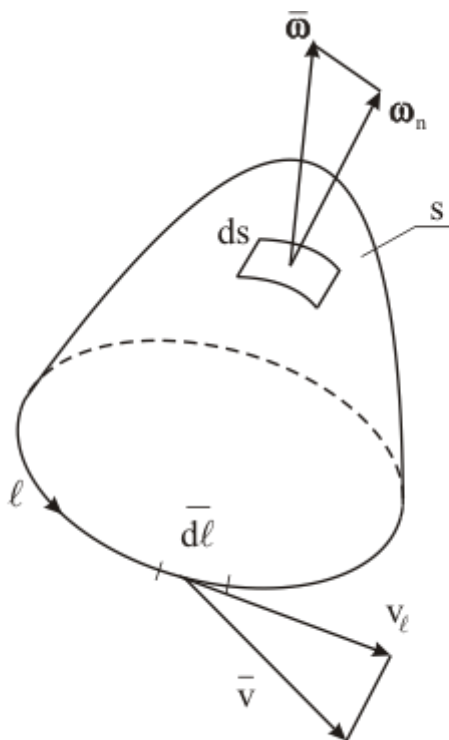


Рис.2.12. Иллюстрация к теореме Стокса

$$\oint_{\ell} \mathbf{v}_{\ell} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2 \int_s \boldsymbol{\omega}_n \cdot d\mathbf{s}.$$

Следовательно, циркуляция скорости может служить количественной мерой вихревого движения жидкости.

Если поток безвихревой (без вращения частиц), то циркуляция скорости по замкнутому контуру, который непрерывной деформацией может быть стянут в точку, не выходя за пределы жидкости, согласно теореме Стокса, будет равна нулю.

2.6. Потенциал скоростей

В безвихревом потоке угловая скорость вращения частиц равна нулю, т.е. $\bar{\omega} = 0$ или $\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = 0$. Тогда из (2.16) следует,

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (2.26)$$

Выражения (2.26), как известно из математического анализа, являются необходимым и достаточным условием того, что трехчлен $v_x \cdot dx + v_y \cdot dy + v_z \cdot dz$ будет полным дифференциалом некоторой функции $\varphi(x, y, z, t)$. Время t здесь следует рассматривать, как параметр, т.к. речь идет о любом, но фиксированном моменте времени. Приравнивая выражение полного дифференциала $d\varphi$ упомянутому трехчлену

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = v_x \cdot dx + v_y \cdot dy + v_z \cdot dz,$$

будем иметь

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (2.27)$$

или

$$\bar{v} = \text{grad } \varphi.$$

Вектор, равный градиенту некоторой скалярной функции, называется, как известно, потенциальным вектором. Поэтому функция $\varphi(x, y, z, t)$ называется **потенциалом** скоростей.

Следовательно, в безвихревом потоке существует потенциал скоростей, а безвихревое движение жидкости называют **потенциальным**.

Для описания безвихревого движения, т.е. для определения поля скоростей, достаточно знать одну скалярную функцию координат и времени – потенциал скоростей $\varphi(x, y, z, t)$, частные производные которой по любому направлению, в частности, по координатным осям, как отмечено выше, равны проекциям скорости на эти координатные направления. Для описания более сложного вихревого движения жидкости (газа) необходимо знать три скалярные функции $v_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$ и $v_z(x, y, z, t)$ – проекции вектора скорости $\vec{v}(x, y, z, t)$ жидкости (газа) на координатные оси.

2.7. Виды движения жидкости (газа)

Движение реальной (вязкой) жидкости (газа) трехмерное, вихревое и в общем случае неустановившееся (нестационарное). Параметры движения (скорость, ускорение, угловые скорости вращения частиц жидкости (газа), давление и т.д.) являются функциями трех координат точки x, y, z и времени t .

Сложность, а зачастую и невозможность решения задач о движении реальной жидкости (газа) по трубам и каналам (внутренняя задача) или об обтекании реальной жидкостью (газом) различных тел (внешняя задача) вынуждают либо прибегать к экспериментам, либо вводить упрощающие задачу предположения о физических свойствах жидкости (газа) и характере ее движения.

В гидрогазодинамике иногда вместо трехмерных рассматривают *двумерное* или *плоское движение*, при котором параметры движения зависят от двух координат x и y , а в плоскостях, перпендикулярных к оси z , т.е. в плоскостях, параллельных плоскости xOy , картина движения будет одинаковой – $\vec{v}(x, y, t)$. Такое упрощение обычно принимают, например, при рассмотрении задачи обтекания профиля лопатки турбины (рис. 2.13). К двумерным движениям относится также и асимметричное движение.

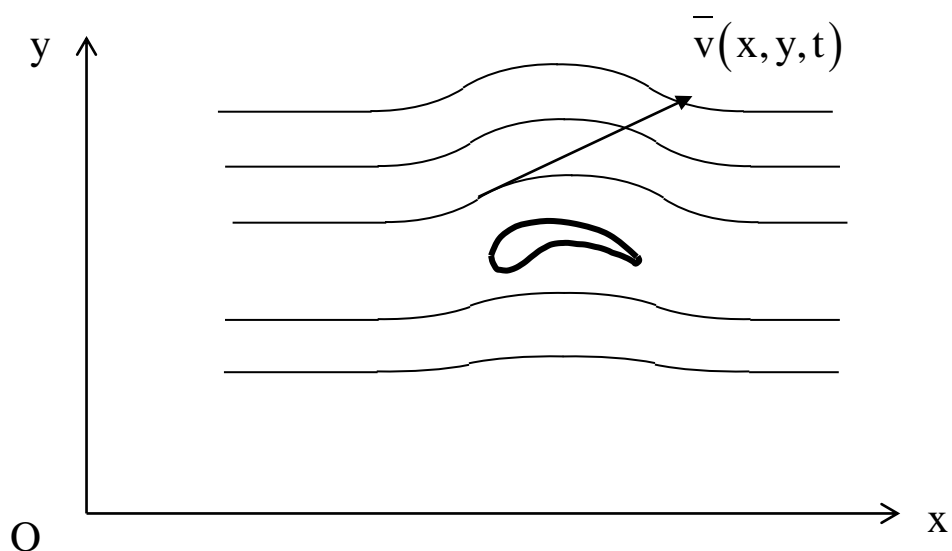


Рис. 2.13. Обтекание профиля лопатки турбины

Еще более простым видом движения жидкости (газа) является *одномерное* движение, при котором параметры движения зависят только от одной координаты x . Такое движение полагают при решении технических задач о движении жидкости (газа) по цилиндрическим трубам и каналам или по трубам и каналам со слабоизменяющейся площадью сечения по их длине (рис. 2.14).

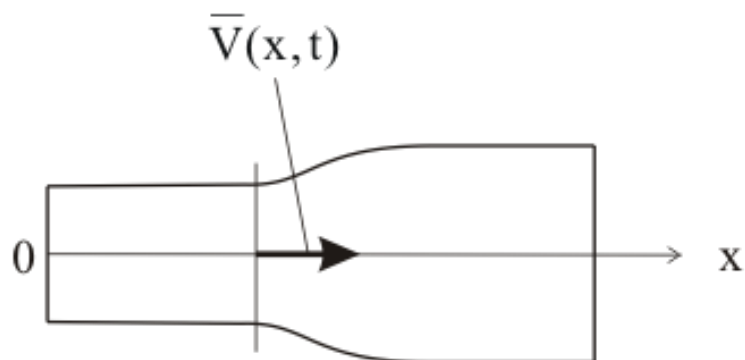


Рис.2.14. Движение жидкости (газа) по трубе

Если интенсивность вихрей в потоке жидкости (газа) слаба, то часто полагают такое движение безвихревым или потенциальным (п. 2.6).

В тех случаях, когда причины, вызывающие движение жидкости или газа с течением времени не изменяются, движение жидкости (газа) будет *установившимся или стационарным* (п. 2.1).

Простейшими примерами такого движения жидкости (газа) являются истечение жидкости из емкости при постоянном уровне в ней (рис. 2.15, а) или истечение газа из баллона в атмосферу при постоянном давлении в баллоне (рис. 2.15, б).

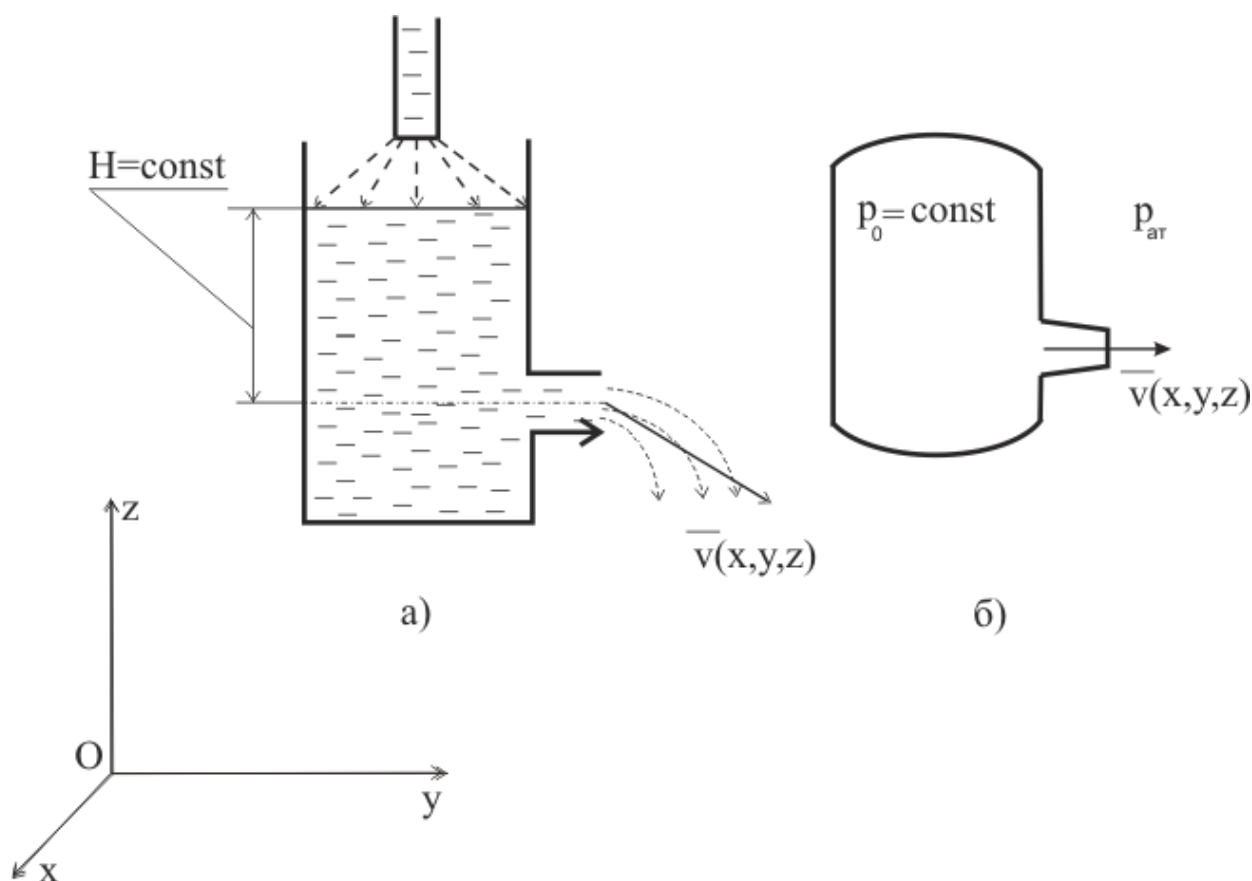


Рис.2.15. Истечение жидкости (газа) при постоянном напоре:
а) жидкости, б) газа

Раздел 3

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Уравнения, связывающие действующие на жидкость или газ внешние силы и вызываемые ими движения, получаются из законов сохранения массы, количества движения (импульсов), момента количества движения (момента импульса) и энергии.

Получение и решение этих уравнений составляет содержание раздела динамики жидкости и газа.

3.1. Силы, действующие на жидкость (газ)

Силы, действующие на жидкость или газ, разделяют на два класса: массовые или объемные, распределенные по всему рассматриваемому объему жидкости, и поверхностные силы, распределенные по поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем жидкости.

Массовые или объемные силы приложены ко всем частицам жидкости (газа), заполняющей некоторый объем. Эти силы пропорциональны массе частиц. Примерами массовых сил являются силы тяжести, электромагнитные силы, а также силы инерции, которые при рассмотрении движения в неинерциальных системах координат можно считать внешними силами.

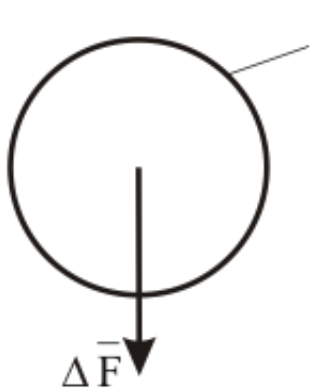


Рис.3.1. Массовая сила

Массовые силы характеризуют плотностью их распределения по объему или, что то же, силами, приходящимися на единицу массы (рис. 3.1).

$$\bar{J} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta m} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\rho \cdot \Delta w}, \quad (3.1)$$

где $\Delta \bar{F}$ - сила, действующая на массу Δm , заключенную в объеме Δw ;

\bar{J} - массовая сила, приходящаяся на единицу массы в точке, к которой стягивается объем Δw .

Как видно из выражения (3.1), плотность распределения массовых сил $\bar{J}(x, y, z, t)$ является однозначной векторной функцией координат и времени и представляет собой ускорение, вызываемое массовыми силами.

Если объем жидкости w конечный, то главный вектор массовых сил выражается векторным интегралом по этому объему $\int_w \bar{J} \cdot \rho \cdot dw$.

В частном случае, когда массовой силой является сила тяжести, плотность распределения этой силы является ускорением силы тяжести $\bar{g}(x, y, z)$.

Поверхностные силы приложены к частицам жидкости, находящимся на поверхности рассматриваемых объемов. Это силы взаимодействия соседних частиц жидкости или других тел, примыкающих снаружи к этой поверхности.

Поверхностные силы, аналогично массовым силам, характеризуют плотностью их распределения по поверхности рассматриваемых объемов, или, что то же, силами, приходящимися на единицу площади в каждой точке поверхности, т.е. векторами напряжений (рис. 3.2).

$$\bar{P}_n = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta s}, \quad (3.2)$$

где $\Delta \bar{R}$ - поверхностная сила, действующая на площадку Δs , ориентация которой в пространстве определяется ортом \bar{n} .

В общем случае вектор $\Delta \bar{R}$ направлен под некоторым углом к внешней нормали.

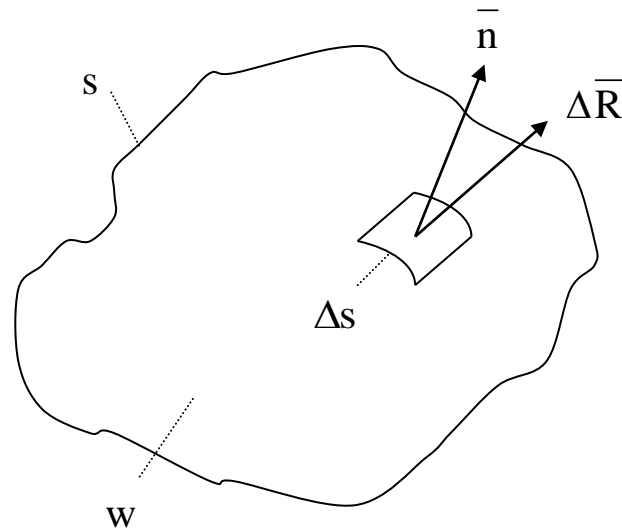


Рис. 3.2. Поверхностная сила

Вектор напряжения \overline{P}_n не является обычным вектором. Его величина в данной точке зависит от ориентации площадки Δs , т.е., если через данную точку провести одинаковые по величине, но разные по ориентации элементарные площадки Δs , то действующие на них векторы напряжения поверхностных сил \overline{P}_n будут различны. Поэтому в общем случае \overline{P}_n зависит от координат x, y, z точки центра площадки Δs , определяемой ортом внешней нормали \overline{n} и времени t . Такая физическая величина называется тензором.

Главный вектор поверхностных сил, распределенных по поверхности s , ограничивающей конечный объем жидкости, выражается векторным интегралом по этой поверхности

$$\overline{R} = \int_s \overline{P}_n \cdot ds. \quad (3.2)$$

3.2. Свойства напряжения поверхностных сил

Выделим в движущейся жидкости элементарную частицу в форме тетраэдра со взаимно ортогональными ребрами при вершине O и направим оси координат по ребрам тетраэдра (рис. 3.3).

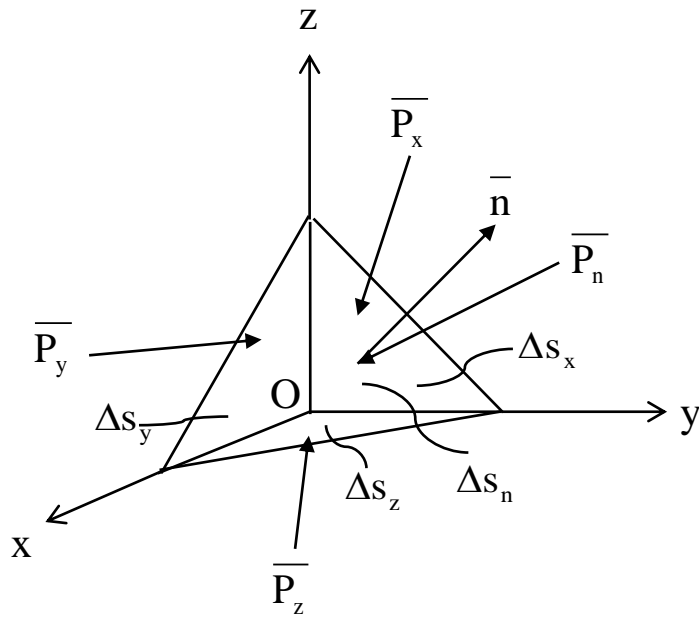


Рис. 3.3. Силы, действующие на элементарный тетраэдр

На гранях тетраэдра $\Delta s_n, \Delta s_x, \Delta s_y, \Delta s_z$ действуют векторы напряжений $\overline{P}_n, \overline{P}_x, \overline{P}_y, \overline{P}_z$. Отметим, что внешние нормали к площадкам $\Delta s_x, \Delta s_y, \Delta s_z$ направлены противоположно осям координат. Поэтому внешние стороны этих площадок (грани тетраэдра) оказываются отрицательными.

Запишем уравнение движения выделенной частицы, выражающее второй закон Ньютона, в векторной форме:

$$\rho \cdot \Delta w \cdot \frac{d\overline{v}}{dt} = \rho \cdot \Delta w \cdot \overline{J} + \overline{P}_n \cdot \Delta s_n - \overline{P}_x \cdot \Delta s_x - \overline{P}_y \cdot \Delta s_y - \overline{P}_z \cdot \Delta s_z, \quad (3.4)$$

где ρ - плотность жидкости;

Δw - объем элементарного тетраэдра;

\overline{v} - скорость центра масс тетраэдра;

\overline{J} - массовая сила, приходящаяся на единицу массы элементарного тетраэдра;

$\overline{P}_n \cdot \Delta s_n$, $-\overline{P}_x \cdot \Delta s_x$, $-\overline{P}_y \cdot \Delta s_y$, $-\overline{P}_z \cdot \Delta s_z$ - поверхностные силы, действующие на соответствующих гранях элементарного тетраэдра.

Разделив обе части уравнения (3.4) на Δs_n и устремив объем тетраэдра к нулю, стягивая его в точку О к началу координат, с учетом того, что

$$\lim_{\substack{\Delta s_n \rightarrow 0 \\ \Delta W \rightarrow 0}} \frac{\Delta W}{\Delta s_n} = 0 ; \quad \frac{\Delta s_x}{\Delta s_n} = \cos(n, x) ; \quad \frac{\Delta s_y}{\Delta s_n} = \cos(n, y) ;$$

$$\frac{\Delta s_z}{\Delta s_n} = \cos(n, z),$$

получим

$$\overline{P}_n = \overline{P}_x \cdot \cos(n, x) + \overline{P}_y \cdot \cos(n, y) + \overline{P}_z \cdot \cos(n, z). \quad (3.5)$$

Векторы напряжений на гранях тетраэдра $\Delta s_x, \Delta s_y, \Delta s_z$ $\overline{P}_x, \overline{P}_y, \overline{P}_z$ можно представить через их проекции на оси координат

$$\left. \begin{aligned} \overline{P}_x &= P_{xx} \cdot \bar{i} + P_{xy} \cdot \bar{j} + P_{xz} \cdot \bar{k}; \\ \overline{P}_y &= P_{yx} \cdot \bar{i} + P_{yy} \cdot \bar{j} + P_{yz} \cdot \bar{k}; \\ \overline{P}_z &= P_{zx} \cdot \bar{i} + P_{zy} \cdot \bar{j} + P_{zz} \cdot \bar{k}, \end{aligned} \right\} , \quad (3.6)$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - орты координатных осей.

Первый индекс проекций напряжений в выражениях (3.6) соответствует грани тетраэдра, на которой действует данное напряжение, а второй – оси, на которую оно проектируется.

Скалярные величины P_{xx}, P_{yy}, P_{zz} представляют собой нормальные напряжения, а $P_{xy}, P_{xz}, P_{yx}, P_{yz}, P_{zx}, P_{zy}$ – касательные напряжения, действующие на соответствующих гранях тетраэдра.

Обычно касательные напряжения в гидрогазодинамике обозначают буквой τ , т.е.

$$\begin{aligned} P_{xy} &= \tau_{xy}; P_{xz} = \tau_{xz}; \\ P_{yx} &= \tau_{yx}; P_{yz} = \tau_{yz}; \\ P_{zx} &= \tau_{zx}; P_{zy} = \tau_{zy}. \end{aligned}$$

Применяя теорему моментов к движению рассматриваемой элементарной частицы, можно доказать, что касательные напряжения обладают **свойством взаимности**

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad (3.7)$$

т.е. проекции напряжений, приложенных к двум взаимно перпендикулярным площадкам в любой точке сплошной среды, на ось, перпендикулярную к другой площадке, будут равны между собой.

В невязкой жидкости, а также в покоящейся так называемой ньютоновской жидкости, для которой справедлив закон трения Ньютона, предполагающий линейную связь между вязкостными напряжениями и скоростями деформаций, **касательные напряжения отсутствуют**. К таким жидкостям относятся: бензин, керосин, минеральные масла, спирт, вода, сжимаемые жидкости (газы) и другие жидкости, которые находят широкое применение в машиностроении, энергетике и строительстве.

При отсутствии касательных напряжений **нормальные напряжения не зависят от ориентации** площадок, на которые они действуют и представляют собой давление P в точке жидкости

$$P = P_{xx} = P_{yy} = P_{zz}. \quad (3.8)$$

Это второе свойство напряжений поверхностных сил легко доказать. Поскольку касательные напряжения отсутствуют, то вектор \overline{P}_n нормален к грани Δs_n , т.е.

$$\overline{P}_n = P_n \cdot \overline{n},$$

а его проекции на оси координат будут

$$P_{nx} = P_n \cdot (\bar{n} \cdot \bar{i}); P_{ny} = P_n \cdot (\bar{n} \cdot \bar{j}); P_{nz} = P_n \cdot (\bar{n} \cdot \bar{k}),$$

где $(\bar{n} \cdot \bar{i}); (\bar{n} \cdot \bar{j}); (\bar{n} \cdot \bar{k})$ - скалярные произведения орт нормали \bar{n} на орты, соответствующий оси координат.

Т.к. в рассматриваемом случае отсутствуют касательные напряжения, согласно (3.6)

$$\bar{P}_x = P_{xx} \cdot \bar{i}; \quad \bar{P}_y = P_{yy} \cdot \bar{j}; \quad \bar{P}_z = P_{zz} \cdot \bar{k},$$

то выражение (3.5) запишется в виде

$$\bar{P}_n = P_{xx} \cdot \cos(n, x) \cdot \bar{i} + P_{yy} \cdot \cos(n, y) \cdot \bar{j} + P_{zz} \cdot \cos(n, z) \cdot \bar{k}.$$

Отсюда следует, поскольку

$$\cos(n, x) = (\bar{n} \cdot \bar{i}); \quad \cos(n, y) = (\bar{n} \cdot \bar{j}); \quad \cos(n, z) = (\bar{n} \cdot \bar{k}),$$

то

$$\bar{P}_n = P_n \cdot \bar{n} = P_{xx} \cdot (\bar{n} \cdot \bar{i}) \cdot \bar{i} + P_{yy} \cdot (\bar{n} \cdot \bar{j}) \cdot \bar{j} + P_{zz} \cdot (\bar{n} \cdot \bar{k}) \cdot \bar{k}.$$

Умножая скалярно левую и правую часть на \bar{i} , затем на \bar{j} и \bar{k} , получим

$$P_n = P_{xx}; \quad P_n = P_{yy}; \quad P_n = P_{zz},$$

т.е.

$$P_n = P_{xx} = P_{yy} = P_{zz}.$$

Третье свойство напряжений поверхностных сил относится к давлению в технических капельных жидкостях,

которые, как следует из опытов, не воспринимают растягивающих усилий. Следовательно, нормальные напряжения – давление в этих жидкостях должны быть сжимающими, т.е. направленными по внутренним нормальям (внутрь рассматриваемых объемов).

3.3. Основные уравнения движения жидкости и газа

3.3.1. Уравнение неразрывности. Уравнение расхода

Уравнение неразрывности или сплошности представляет собой выражение закона сохранения массы в гидрогазодинамике. Согласно этому закону масса m любого индивидуального объема, то есть объема, состоящего из одних и тех же частиц жидкости (газа), будет оставаться неизменной при ее движении:

$$m = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{dm}{dt} = 0.$$

Масса жидкости (газа) в объеме W выражается интегралом

$$m = \int_W \rho \cdot dw,$$

где ρ - плотность жидкости.

Интегрирование производится по подвижному объему.

Закон сохранения массы для индивидуального объема можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \cdot dw = 0. \quad (3.9)$$

Поскольку при движении жидкости индивидуальный объем w изменяется со временем, покажем, как вычисляется производная по времени t от интеграла, в котором от t зависит не только подынтегральная функция $\rho(x, y, z, t)$, но и область интегрирования $w(t)$. На рис. 3.4 показано положение

движущегося индивидуального объема в два момента времени t и $t + \Delta t$.

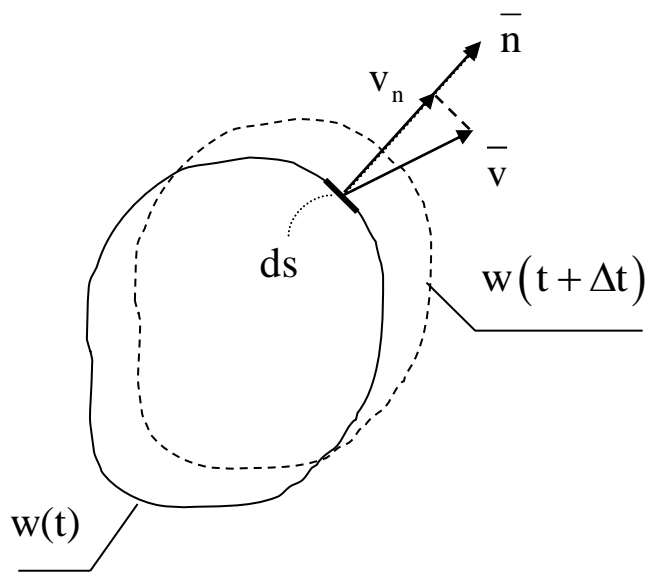


Рис. 3.4. Объемы жидкости в моменты времени t и $(t + \Delta t)$

По определению производной имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{w(t)} \rho(x, y, z, t) \cdot dw &= \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{w(t + \Delta t)} \rho(x, y, z, t + \Delta t) \cdot dw - \int_{w(t)} \rho(x, y, z, t) \cdot dw}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_A \rho(x, y, z, t + \Delta t) \cdot dw - \int_A \rho(x, y, z, t) \cdot dw + \int_B \rho(x, y, z, t + \Delta t) \cdot dw}{\Delta t} = \\ &= \int_A \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_B \rho(x, y, z, t + \Delta t) \cdot dw}{\Delta t}, \end{aligned}$$

где $A = w(t)$; $B = w(t + \Delta t) - w(t)$.

Поскольку интегрирование во втором слагаемом производится по разности между объемом рассматриваемой массы в моменты времени t и $t + \Delta t$, а эта разность объемов (рис. 3.4) состоит из элементарных цилиндров

$$dw = v_n \cdot \Delta t \cdot ds$$

(v_n - проекция вектора скорости \bar{v} на внешнюю нормаль к поверхности), то

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{w(t+\Delta t)-w(t)} \rho(x, y, z, t + \Delta t) \cdot dw}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_S \rho(x, y, z, t + \Delta t) \cdot v_n \cdot \Delta t \cdot ds}{\Delta t} = \\ &= \int_S \rho(x, y, z, t) \cdot v_n \cdot ds, \end{aligned}$$

где s – замкнутая поверхность, ограничивающая объем w .

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \int_w \rho(x, y, z, t) \cdot dw = \int_w \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t} \cdot dw + \int_S \rho(x, y, z, t) \cdot v_n \cdot ds. \quad (3.10)$$

Следовательно, согласно (3.9) и (3.10) уравнения неразрывности или уравнения сплошности, записанное в интегральной форме и справедливое для произвольного движения жидкости (газа), будет иметь вид

$$\int_w \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t} \cdot dw + \int_S \rho(x, y, z, t) \cdot v_n \cdot ds = 0. \quad (3.11)$$

По теореме Гаусса-Остроградского

$$\int_S \rho \cdot v_n \cdot ds = \int_w \operatorname{div}(\rho \cdot \bar{v}) \cdot dw$$

или в координатной форме

$$\int_S \rho \cdot \mathbf{v}_n \cdot d\mathbf{s} = \int_w \left(\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \right) dw.$$

Тогда (3.10) с учетом (3.9) запишется

$$\frac{d}{dt} \int_w \rho \cdot dw = \int_w \frac{\partial \rho}{\partial t} dw + \int_w \operatorname{div}(\rho \cdot \bar{\mathbf{v}}) \cdot dw = 0.$$

или

$$\int_w \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \bar{\mathbf{v}}) \right) dw = 0.$$

В силу произвольности объема w подынтегральная функция должна быть равна нулю. В результате получим дифференциальное уравнение неразрывности в векторной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \bar{\mathbf{v}}) = 0 \quad (3.11')$$

или в координатной форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11'')$$

При установившемся движении жидкости (газа), поскольку $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, уравнение неразрывности упрощается и в интегральной форме будет иметь вид

$$\int_S \rho(x, y, z, t) \cdot v_n \cdot ds = 0. \quad (3.12)$$

В случае течения жидкости (газа) по трубе (рис. 3.5) замкнутая поверхность s , ограничивающая объем некоторой массы жидкости, состоит из трех слагаемых

$$S = S_1 + S_B + S_2,$$

где s_1 и s_2 – произвольные сечения трубы;

s_B – непроницаемая поверхность трубы, на которой $v_n = 0$.

Тогда при установившемся движении

$$\int_S \rho \cdot v_n \cdot ds = - \int_{S_1} \rho \cdot v_n \cdot ds + \int_{S_B} \rho \cdot v_n \cdot ds + \int_{S_2} \rho \cdot v_n \cdot ds = 0. \quad (3.13)$$

Знак минус у первого интеграла в правой части (3.13) связан с тем, что внешняя нормаль к поверхности s_1 противоположно направлена к вектору скорости.

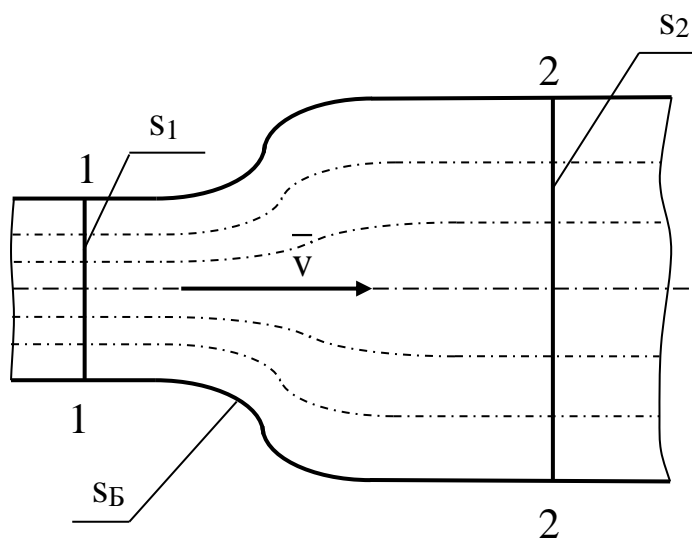


Рис. 3.5. К выводу уравнения неразрывности

Второй интеграл в (3.13) равен нулю, т.к. на стенке трубы $v_n = 0$. В результате получим уравнение неразрывности для установившегося течения жидкости по трубе

$$\int_{S_1} \rho \cdot v_n \cdot ds = \int_{S_2} \rho \cdot v_n \cdot ds. \quad (3.14)$$

В таком виде записанное уравнение неразрывности (сплошности) называют **уравнением массового расхода**. Массовый расход – это масса жидкости (газа), протекающей через сечение трубы в единицу времени.

Если s_1 и s_2 не сечения трубы, а **живые сечения потока**, т.е. согласно определению этого понятия, поверхности, нормальные к вектору скорости в каждой точке этих поверхностей (рис.3.6), то $v_n = v$.

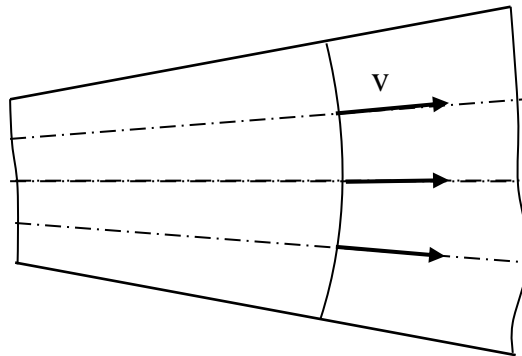


Рис. 3.6. Распределение скорости в диффузоре

Следовательно, для живых сечений потока уравнение (3.14) будет иметь вид

$$\int_{S_1} \rho \cdot v \cdot ds = \int_{S_2} \rho \cdot v \cdot ds. \quad (3.15)$$

Если в пределах каждого сечения потока плотность жидкости принять постоянной, то, вынося ее за знак интеграла в уравнении (3.15), получим

$$\rho_1 \int_{S_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \rho_2 \int_{S_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.16)$$

Интеграл $\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ выражает объем жидкости, протекающей через сечение потока в единицу времени, т.е. объемный расход жидкости Q_0 .

Массовый расход Q_m и объемный расход Q_0 связаны очевидной зависимостью

$$Q_m = \rho \cdot Q_0.$$

Введем среднюю скорость в живом сечении потока по выражению

$$v_{\text{н\ddot{o}}} = \frac{\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}}{S} = \frac{Q_0}{S}. \quad (3.17)$$

Тогда объемный расход

$$Q_0 = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = v_{\text{н\ddot{o}}} \cdot S. \quad (3.18)$$

Следовательно, средняя скорость v_{cp} в живом сечении потока – это такая условная постоянная по сечению скорость, приписываемая всем частицам жидкости в данном сечении, при которой объемный расход жидкости будет совпадать с действительным (реальным) объемным расходом. На рис. 3.7 изображено реальное распределение скоростей и средняя скорость в сечении потока с параллельно струйным течением жидкости, т.е. в том месте, где живое сечение потока – плоская поверхность S .

С учетом введенного понятия средней скорости **уравнение массового расхода** (3.16) примет вид

$$\rho_1 \cdot v_{1cp} \cdot S_1 = \rho_2 \cdot v_{2cp} \cdot S_2, \quad (3.19)$$

а для **несжимаемой жидкости** ($\rho = \text{const}$) это уравнение после сокращения на ρ превращается в уравнение объемного расхода

$$v_{1cp} \cdot S_1 = v_{2cp} \cdot S_2, \quad (3.20)$$

Различные формы уравнения неразрывности (уравнения расхода), полученные выше, справедливы как для невязкой, так и для вязкой (реальной) жидкости (газа).

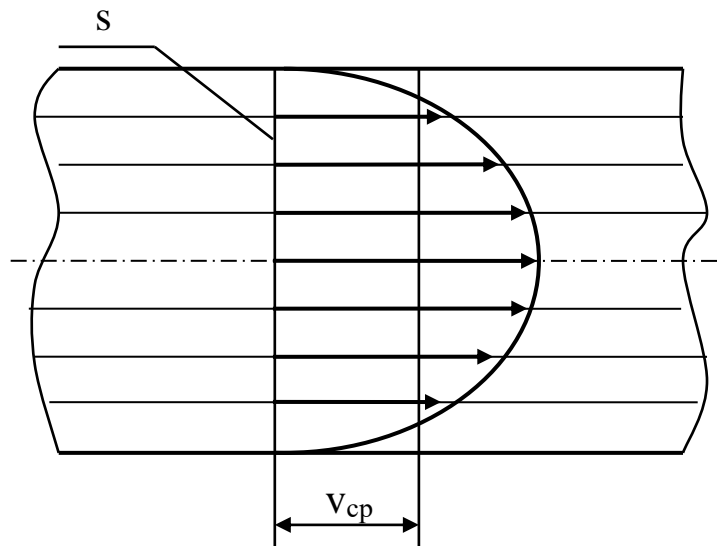


Рис. 3.7. Распределение скоростей в плоском живом сечении потока

3.3.2. Уравнение количества движения и момента количества движения

Интегральная форма уравнения движения жидкости (газа) получается из закона количества движения:

производная по времени главного вектора количества движения некоторой массы жидкости (газа) равна главному

вектору внешних массовых и поверхностных сил, действующих на эту массу (рис. 3.8).

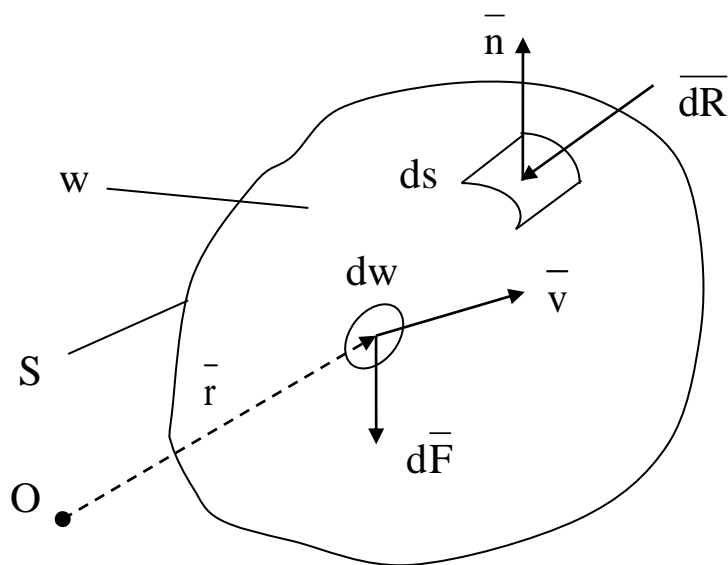


Рис. 3.8. Элементарные поверхностные и массовые силы

Главный вектор количества движения массы жидкости (газа), заключенной в объеме w , ограниченном поверхностью s , равен векторному интегралу от количества движения элементарных масс $\vec{v} \cdot dm = \vec{v} \cdot \rho \cdot dw$

$$\vec{K} = \int_w \rho \cdot \vec{v} \cdot dw .$$

Главные векторы \vec{F} внешних массовых и \vec{R} поверхностных сил выражаются векторными интегралами

$$\vec{F} = \int_w \rho \cdot \vec{J} \cdot dw; \quad \vec{R} = \int_s \vec{P}_n \cdot ds,$$

поскольку $d\vec{F} = \rho \cdot \vec{J} \cdot dw$ и $d\vec{R} = \vec{P}_n \cdot ds$ (см. п. 3.3.1).

Тогда, согласно закону количества движения, уравнение движения жидкости (газа) в интегральной форме будет иметь вид

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{F} + \bar{R}$$

или

$$\frac{d}{dt} \int_w \rho \cdot \bar{v} \cdot dw = \int_w \rho \cdot \bar{J} \cdot dw + \int_s \bar{P}_n \cdot ds. \quad (3.21)$$

В частном случае, при установившемся движении жидкости (газа) по трубе уравнение (3.21) можно записать через параметры жидкости (газа) в сечениях трубы.

Рассмотрим массу жидкости (газа) в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью s , образованной двумя плоскими сечениями потока 1-1, 2-2 и поверхностью трубы (рис. 3.9).

$$s = s_1 + s_2 + s_B.$$

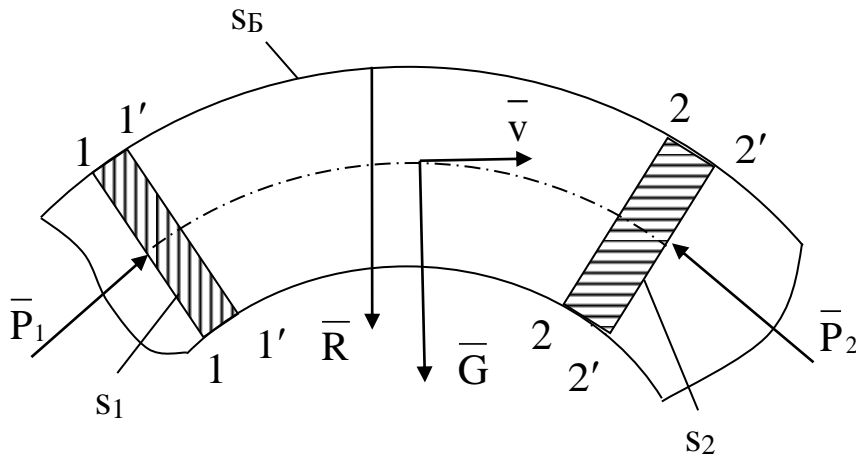


Рис. 3.9. К выводу уравнения количества движения

За малый промежуток времени Δt рассматриваемая масса жидкости (газа) переместится в соседнее положение 1' - 1', 2' - 2'. Производную по времени от количества движения этой массы можно записать в виде

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{w(t)}^{w(t+\Delta t)} \rho \cdot \bar{v} \cdot dw - \int_{w(t)} \rho \cdot \bar{v} \cdot dw}{\Delta t}. \quad (3.22)$$

При установившемся движении количество движения массы, заключенной между сечениями 1' - 2 не изменится. Поэтому разность интегралов в правой части (3.22) можно определить по разности количеств движения массы, заключенной в объемах 2 - 2' и 1 - 1'. Если предположить массовую плотность в пределах сечений потока постоянной, а элементы объемов 2 - 2' и 1 - 1' записать так же, как и в п. 3.3

$$dw = v_n \cdot ds \cdot \Delta t,$$

то

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{w(t+\Delta t)} \rho \cdot \bar{v} \cdot dw - \int_{w(t)} \rho \cdot \bar{v} \cdot dw}{\Delta t} = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{w(2-2')} \rho \cdot \bar{v} \cdot dw - \int_{w(1-1')} \rho \cdot \bar{v} \cdot dw}{\Delta t} = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho_2 \int_{s_2} \bar{v} \cdot v_n \cdot ds \cdot \Delta t - \rho_1 \int_{s_1} \bar{v} \cdot v_n \cdot ds \cdot \Delta t}{\Delta t} = \\ & = \rho_2 \int_{s_2} \bar{v} \cdot v_n \cdot ds - \rho_1 \int_{s_1} \bar{v} \cdot v_n \cdot ds. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Поскольку сечения s_1 и s_2 – плоские, то $v_n = v$ и (3.22) с учетом (3.23) будет иметь вид

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \rho_2 \int_{s_2} \bar{v} \cdot v \cdot ds - \rho_1 \int_{s_1} \bar{v} \cdot v \cdot ds. \quad (3.24)$$

Если в сечениях s_1 и s_2 вместо истинного распределения скоростей ввести среднюю по сечению скорость v_{cp} по выражению (3.17), то введя обозначение

$$\alpha_k = \frac{\int v^2 \cdot ds}{v_{cp}^2 \cdot S} \quad (3.25)$$

для плоского сечения, в котором векторы истинных скоростей коллинеарны (параллельны), получим выражение количества движения массы жидкости (газа), протекающей через плоское сечение в единицу времени

$$\rho \int_S \bar{v} \cdot v \cdot ds = \alpha_k \cdot \rho \cdot \bar{v}_{cp} \cdot v_{cp} \cdot S.$$

Коэффициент α_k называется коэффициентом количества движения или коэффициентом Буссинеска. Он выражает, как видно из (3.25), отношение количества движения, вычисленное по истинному распределению скоростей, к количеству движения, вычисленному по средней скорости. В случае равномерного распределения скоростей по сечению $\alpha_k=1$, в действительности $\alpha_k > 1$ и тем ближе его значение к единице, чем меньше реальное (истинное) распределение скоростей по сечению отличается от равномерного.

Теперь уравнение (3.24) можно записать проще

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \alpha_{k2} \cdot \rho_2 \cdot \bar{v}_{2cp} \cdot v_{2cp} \cdot S_2 - \alpha_{k1} \cdot \rho_1 \cdot \bar{v}_{1cp} \cdot v_{1cp} \cdot S_1$$

и уравнение количества движения в интегральной форме (3.21) при установившемся движении жидкости (газа) по трубе (рис. 3.9) будет иметь вид

$$\alpha_{k2} \cdot \rho_2 \cdot \bar{v}_{2cp} \cdot v_{2cp} \cdot S_2 - \alpha_{k1} \cdot \rho_1 \cdot \bar{v}_{1cp} \cdot v_{1cp} \cdot S_1 = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{R} + \bar{G}, \quad (3.26)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{P}_1 &= \int_{S_1} \bar{P}_n \cdot ds; \quad \bar{P}_2 = \int_{S_2} \bar{P}_n \cdot ds; \\ \bar{R} &= \int_{S_A} \bar{P}_n \cdot ds; \quad \bar{G} = \int_W \rho \cdot \bar{J} \cdot dw.\end{aligned}$$

Если массовой силой является \bar{G} - вес жидкости (газа) в объеме, ограниченном поверхностью $s = s_1 + s_2 + s_B$, то $\bar{J} = \bar{g}$. Поверхностная сила \bar{R} - это реакция стенок трубы. Следовательно, поток жидкости (газа) при движении по трубе действует на трубу с силой, противоположной реакции стенок.

Уравнение (3.26) позволяет довольно просто решать задачи определения величины и направления сил, с которыми установившийся напорный поток жидкости (газа) в трубе воздействует на ее стенки.

Уравнение момента количества движения получается из закона о моменте количества движения: производная по времени главного момента количества движения некоторой массы жидкости (газа) относительно выбранной точки O равна сумме моментов внешних массовых и поверхностных сил, действующих на эту массу (рис. 3.8) относительно той же точки

$$\frac{d}{dt} \int_W \bar{r} \times \rho \cdot \bar{v} \cdot dw = \int_W \bar{r} \times \rho \cdot \bar{J} \cdot dw + \int_S \bar{r} \times \bar{P}_n \cdot ds, \quad (3.27)$$

где \bar{r} - радиус-вектор центров масс объемов dw относительно выбранной точки O .

Уравнение момента количества движения (3.27) позволяет установить свойство взаимности касательных напряжений, о котором говорилось выше. Если же это свойство касательных напряжений доказано, то уравнение момента количества движения нового уравнения динамики не дает, а приводит к тождеству.

3.3.3. Уравнение энергии

Уравнений неразрывности, количества движения и моментов количества движения не достаточно для решения задач о движении жидкости (газа) с совершением механической работы, теплообменом с внешней средой и превращением механической энергии в теплоту.

Поэтому к вышеперечисленным уравнениям нужно добавить уравнение баланса энергии, вытекающее из закона сохранения энергии:

изменение полной энергии рассматриваемой массы жидкости (газа) за некоторый промежуток времени равно сумме работ массовых и поверхностных сил, приложенных к этой массе, сложенной с притоком теплоты, подведенной к ней за тот же промежуток времени (рис. 3.10).

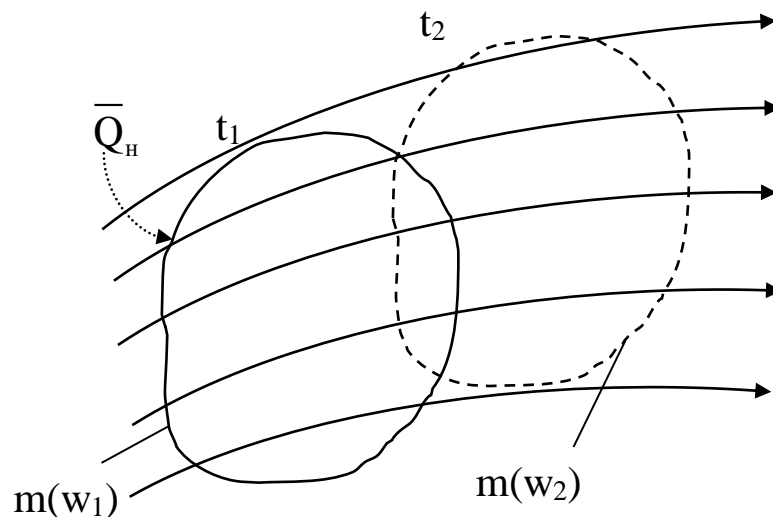


Рис. 3.10. Иллюстрация уравнения энергии

Уравнение баланса энергии:

$$\dot{Y}_2 - \dot{Y}_1 = A + Q_i, \quad (3.28)$$

где \mathcal{E}_2 и \mathcal{E}_1 – полная энергия рассматриваемой массы в конечный t_2 и начальный t_1 моменты времени;

A – сумма работ массовых и поверхностных сил, приложенных к этой массе при перемещении ее за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, $A = A_{\text{мас.}} + A_{\text{пов.}}$;

Q_i – количество теплоты, подведенное через поверхность, ограничивающую рассматриваемую массу за тот же промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ *).

Полная энергия этой массы жидкости (газа) \mathcal{E} состоит из кинетической энергии $\mathcal{E}_{\text{кин}}$

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \int_w \rho \cdot v^2 \cdot dw$$

и внутренней энергии U

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{кин}} + U.$$

Полагая в дальнейшем движущийся газ совершенным, т.е., что молекулярное движение в нем сводится к абсолютно упругому соударению таких малых по величине молекул, что их вращением можно пренебречь, выразим внутреннюю энергию для газа через произведение теплоемкости при постоянном объеме C_v на абсолютную температуру T

$$U = \tilde{N}_v \cdot T, \quad (3.29)$$

а для несжимаемой жидкости

$$U = \tilde{N} \cdot T, \quad (3.29')$$

где C – теплоемкость несжимаемой жидкости.

*) количество теплоты, выделяющейся в жидкости (газе) в результате работы сил внутреннего трения, равно этой работе, поэтому они взаимно уничтожаются и не входят в уравнение энергии

В частном случае, при установившемся движении жидкости (газа) по трубе в поле сил тяжести уравнение энергии (3.28) можно записать через параметры жидкости (газа) в сечениях трубы.

Рассмотрим массу жидкости (газа) в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью s , образованной двумя плоскими сечениями потока 1 – 1, 2 – 2 и поверхностью трубы s_B (рис. 3.11)

$$S = S_1 + S_2 + S_B.$$

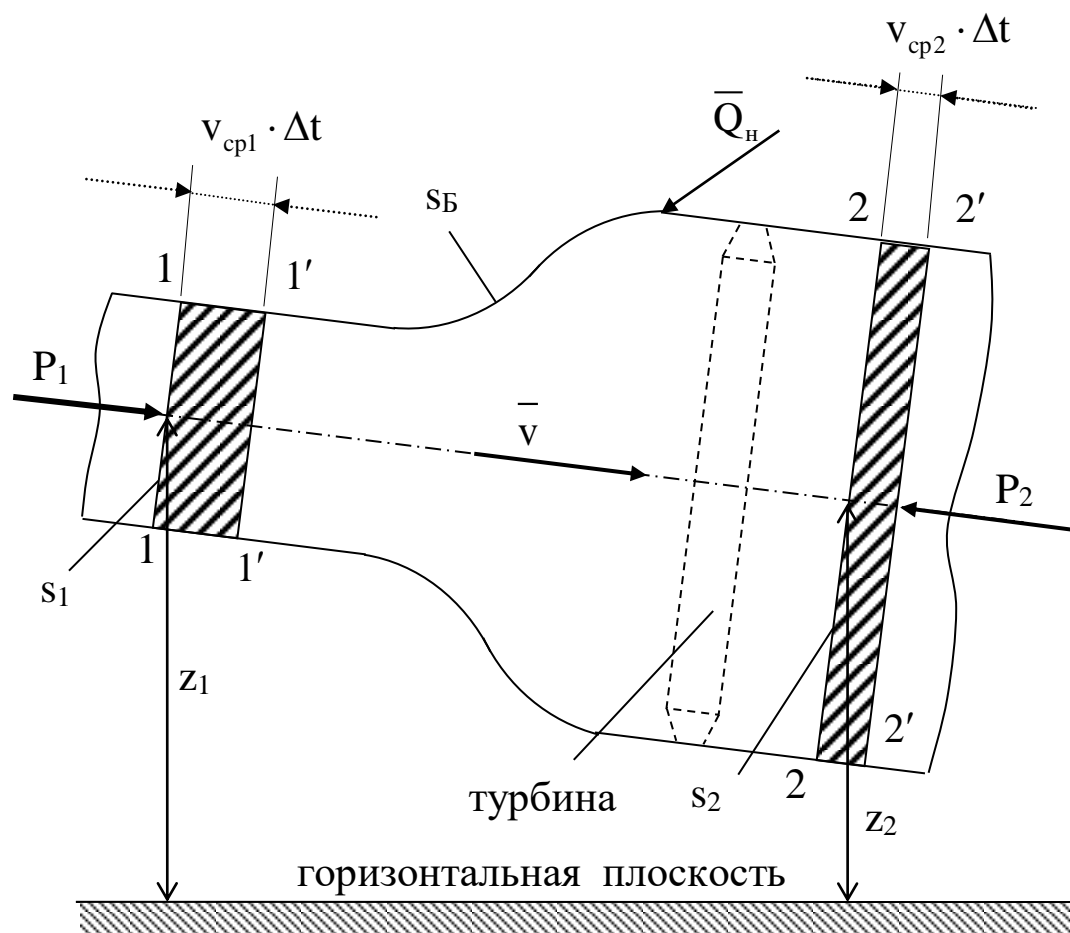


Рис. 3.11. К выводу уравнения энергии при установившемся движении жидкости (газа) по трубе

За малый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ рассматриваемая масса жидкости (газа) переместится в соседнее положение $1' - 1', 2' - 2'$.

При установившемся движении полная энергия массы жидкости (газа), заключенной между сечениями $1' - 1', 2 - 2$, не изменяется. Поэтому разность полных энергий в левой части

(3.28) можно определить по разности полных энергий одинаковых масс, заключенных в объемах $2-2'$ и $1-1'$. Если считать массовую плотность в пределах сечений потока постоянной, то массу элементарных объемов $2-2'$ и $1-1'$ можно, согласно (3.19), записать

$$\Delta m = \rho_1 \cdot v_{1cp} \cdot s_1 \cdot \Delta t = \rho_2 \cdot v_{2cp} \cdot s_2 \cdot \Delta t. \quad (3.30)$$

Кинетическую энергию массы жидкости (газа) в объемах $1-1'$ и $2-2'$ можно выразить через среднюю скорость в сечениях с поправочным коэффициентом α_3

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_{1кин} &= \frac{1}{2} \int_{w_{1-1'}} \rho \cdot v^2 \cdot dw = \alpha_{31} \cdot \rho_1 \cdot v_{1cp} \cdot s_1 \cdot \Delta t \cdot \frac{v_{1cp}^2}{2} \\ \mathcal{E}_{2кин} &= \frac{1}{2} \int_{w_{2-2'}} \rho \cdot v^2 \cdot dw = \alpha_{32} \cdot \rho_2 \cdot v_{2cp} \cdot s_2 \cdot \Delta t \cdot \frac{v_{2cp}^2}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (3.31)$$

Коэффициент α_3 называется коэффициентом кинетической энергии или коэффициентом Кориолиса. Этот безразмерный коэффициент выражает отношение кинетической энергии в сечении потока, вычисленной по истинному распределению скоростей в сечении, к кинетической энергии, вычисленной по средней скорости. Действительно, из (3.31) следует

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{2} \int_w \rho \cdot v^2 \cdot dw}{\frac{1}{2} \rho \cdot v_{cp} \cdot s \cdot \Delta t \cdot v_{cp}^2}.$$

Поскольку для плоских сечений $dw = v \cdot ds \cdot \Delta t$, то после сокращений на 2, ρ , Δt получим более простое выражение для коэффициента α_3

$$\alpha_3 = \frac{\int v^3 \cdot ds}{v_{cp}^3 \cdot s}. \quad (3.32)$$

Если бы распределение скоростей по сечению было равномерным, то $\alpha_s = 1$. В действительности $\alpha_s > 1$.

Работа поверхностных сил сводится к работе сил давления, действующих на поверхностях s_1 и s_2

$$A_{\text{пов}} = p_1 \cdot v_{1\text{cp}} \cdot s_1 \cdot \Delta t - p_2 \cdot v_{2\text{cp}} \cdot s_2 \cdot \Delta t. \quad (3.33)$$

На боковой поверхности s_B (поверхности трубы) работа поверхностных сил равна нулю, т.к. в реальной жидкости, где действуют давление и трение, нет перемещения жидкости, а в идеальной жидкости, где действует только давление, нормальное к поверхности в каждой точке, поверхностные силы нормальны к перемещению частиц жидкости (газа).

Работа массовых сил в поле сил тяжести определяется по разности потенциальных энергий положения рассматриваемой массы в начальном и конечном состояниях относительно некоторой горизонтальной плоскости

$$A_{\text{мас}} = g \cdot \rho_1 \cdot v_{1\text{cp}} \cdot s_1 \cdot \Delta t \cdot z_1 - g \cdot \rho_2 \cdot v_{2\text{cp}} \cdot s_2 \cdot \Delta t \cdot z_2. \quad (3.34)$$

Теперь уравнение энергии (3.28) для газа на основании (3.29), (3.31), (3.33) и (3.34) можно записать

$$\begin{aligned} & \alpha_{s2} \cdot \rho_2 \cdot v_{2\text{cp}} \cdot s_2 \cdot \Delta t \cdot \frac{v_{2\text{cp}}^2}{2} + C_v \cdot T_2 - \left(\alpha_{s1} \cdot \rho_1 \cdot v_{1\text{cp}} \cdot s_1 \cdot \Delta t \cdot \frac{v_{1\text{cp}}^2}{2} + C_v \cdot T_1 \right) = \\ & = p_1 \cdot s_1 \cdot v_{1\text{cp}} \cdot \Delta t - p_2 \cdot s_2 \cdot v_{2\text{cp}} \cdot \Delta t + g \cdot \rho_1 \cdot s_1 \cdot v_{1\text{cp}} \cdot \Delta t \cdot z_1 - \\ & \quad - g \cdot \rho_2 \cdot s_2 \cdot v_{2\text{cp}} \cdot \Delta t \cdot z_2 + Q_H, \end{aligned}$$

или после сокращения на массу Δm , согласно (3.30), получим уравнение энергии, отнесенное к единице массы

$$\begin{aligned} & \alpha_{s2} \cdot \frac{v_{2\text{cp}}^2}{2} + c_v \cdot T_2 - \left(\alpha_{s1} \cdot \frac{v_{1\text{cp}}^2}{2} + c_v \cdot T_1 \right) = \\ & = \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} + g \cdot z_1 - g \cdot z_2 + q_H, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\text{где } q_n = \frac{Q_n}{\Delta m};$$

c_v - теплоемкость при постоянном объеме, отнесенная к единице массы.

Если в процессе перемещения жидкость (газ) совершает работу, называемую технической $\ell_{\text{тех}}$, например, вращает турбину, то эту работу следует вычесть из правой части уравнения энергии (3.35), т.к. она уменьшает энергию жидкости (газа) в конечном положении. Следовательно, уравнение энергии, отнесенное к единице массы, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{э}2} \cdot \frac{v_{2\text{ср}}^2}{2} + c_v \cdot T_2 - \left(\alpha_{\text{э}1} \cdot \frac{v_{1\text{ср}}^2}{2} + c_v \cdot T_1 \right) = \\ = \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} + g \cdot z_1 - g \cdot z_2 + q_n - \ell_{\text{тех}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

или

$$g \cdot z_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + c_v \cdot T_1 + \alpha_{\text{э}1} \cdot \frac{v_{1\text{ср}}^2}{2} = g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + c_v \cdot T_2 + \alpha_{\text{э}2} \cdot \frac{v_{2\text{ср}}^2}{2} - q_n + \ell_{\text{тех}} \quad (3.37)$$

Здесь индексы “1” и “2” относятся к параметрам жидкости (газа) в сечениях 1 – 1 и 2 – 2; q – количество теплоты, подведенное к единице массы извне между сечениями 1 – 1 и 2 – 2; $\ell_{\text{тех}}$ – работа, совершенная единицей массы жидкости (газа) при ее движении.

Уравнение энергии (3.37) справедливо как для идеальной, так и для реальной жидкости (газа).

В частных случаях уравнение энергии (3.37) имеет более простой вид. Например, при движении газа по трубам можно пренебречь работой массовых сил. Тогда уравнение энергии для газа будет иметь вид

$$\frac{p_1}{\rho_1} + c_v \cdot T_1 + \alpha_{\text{э}1} \cdot \frac{v_{1\text{ср}}^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_2} + c_v \cdot T_2 + \alpha_{\text{э}2} \cdot \frac{v_{2\text{ср}}^2}{2} - q_n + \ell_{\text{тех}}. \quad (3.38)$$

При изотермическом движении вязкой несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, $T_1 = T_2$. Если жидкость не совершает работы, то $\ell_{\text{тех}} = 0$. Если через стенки трубы извне не подводится теплота ($q_n=0$), то выделяющаяся теплота в результате внутреннего трения должна быть отведена через стенки трубы. Чтобы имело место изотермическое движение, то в правую часть уравнения (3.37) необходимо добавить $+q_{\text{дис}}$ (диссипативная теплота трения). Тогда уравнение энергии (3.37) при изотермическом течении вязкой несжимаемой жидкости будет иметь вид

$$g \cdot z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \alpha_{\varepsilon 1} \cdot \frac{v_{1\text{cp}}^2}{2} = g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \alpha_{\varepsilon 2} \cdot \frac{v_{2\text{cp}}^2}{2} + q_{\text{дис}}. \quad (3.39)$$

В идеальной (невязкой) жидкости отсутствует внутреннее трение, следовательно, $q_{\text{дис}}=0$ и уравнение баланса энергии (3.39) превращается в уравнение сохранения механической энергии единицы массы жидкости

$$g \cdot z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \alpha_{\varepsilon 1} \cdot \frac{v_{1\text{cp}}^2}{2} = g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \alpha_{\varepsilon 2} \cdot \frac{v_{2\text{cp}}^2}{2}. \quad (3.40)$$

Уравнение (3.39) называют уравнением Бернулли для вязкой жидкости, а (3.40) – для невязкой жидкости.

Система уравнений (3.11), (3.21), (3.27) и (3.28) является основными уравнениями движения жидкости (газа). Для установившегося движения жидкости (газа) по трубе эта система уравнений, записанная для двух произвольных плоских сечений, имеет более простой вид (3.19), (3.26) и (3.37).

Для решения конкретных задач упомянутые системы уравнений должны быть дополнены в общем случае выражениями для напряжений поверхностных сил, уравнением состояния, зависимостью вязкости от параметров состояния жидкости (газа), начальными и граничными условиями.

Раздел 4

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТЕЙ

4.1. Сущность и значение теории подобия

При создании новых объектов в энергетике, авиационной и ракетной технике, судостроении и т.д. сталкиваются с необходимостью решения сложных гидрогазодинамических задач. Сложность этих явлений во многих случаях не позволяет даже описать движение жидкости (газа) системой уравнений с необходимой точностью. Тогда приходится прибегать к экспериментальным исследованиям. Результаты экспериментальных исследований используются также для оценки точности приближенных методов решения рассматриваемых задач.

В большинстве случаев эксперименты проводят на моделях в специальных лабораторных условиях, т.к. не всегда возможно и целесообразно проводить опыты в натуральных условиях. Различают *физическое, аналоговое и математическое моделирование* гидрогазодинамических явлений.

Физическим моделированием называют исследование какого-либо объекта или гидрогазодинамического явления на моделях, имеющих одну и ту же физическую природу, что и натуральный объект. Например, моделирование натурального потока газа в каналах потоком такого же или другого газа.

Аналоговым моделированием называют исследование какого-либо объекта или гидрогазодинамического явления на моделях другой физической природы, если оба разных явления описываются одинаковыми уравнениями и краевыми условиями. Например, в методе электрогидродинамической аналогии (ЭГДА) поля плоского безвихревого движения несжимаемой жидкости и электрического тока в плоском проводнике описываются одним и тем же уравнением Лапласа: вектору скорости потока жидкости соответствует вектор плотности электрического тока, а условия на твердой границе потока жидкости соответствуют условиям на изолирующей границе в плоском проводнике и т.п.

Математическим моделированием называют исследование какого-либо объекта или гидрогазодинамического

явления на аналоговых или цифровых вычислительных машинах (ПЭВМ), если рассматриваемые задачи описываются математически достаточно надежно, но аналитическое решение уравнений сложно или вообще невозможно.

Остановимся более подробно на физическом моделировании гидрогазодинамических явлений.

Теоретической основой физического моделирования является теория подобия. Можно дать следующее определение физического подобия явлений: *два явления называются физически подобными, если характеризующие их однородные физические величины (например, силы давления, силы трения, скорости и т.п.) находятся в одинаковом отношении в любых сходственных пространственно-временных точках.*

Это отношение для различных физических величин, например, для скоростей, сил, линейных размеров, и т.д. может быть различным. Таким образом, если имеет место физическое подобие двух явлений, то по характеристикам одного можно определить характеристики другого простым умножением на соответствующее число – коэффициент подобия. Физическое подобие можно рассматривать, как обобщение геометрического подобия.

Впервые некоторые положения учения о подобии были высказаны еще Ньютоном в 1686 г. Большой вклад в разработку теории и методов подобия был сделан Ж.Бертраном, Л.Федерманом, М.В.Кирпичевым, А.А.Гухманом, Т.А.Афанасьевой – Эренфест, Л.И.Седовым и др.

При моделировании гидрогазодинамических явлений возникают два вопроса:

1. При каких условиях явления в опыте и натуре будут подобными?

2. Каким образом можно перенести результаты эксперимента с модели на натуре, если соблюдено подобие явлений в опыте и в натуре?

Прежде, чем ответить на эти вопросы, необходимо подробнее остановиться на понятии о подобии гидрогазодинамических явлений.

Поскольку механические явления, связанные с движением жидкости или газа по руслам (трубопроводам, каналам и т.п.) или

с обтеканием тел, характеризуются, во-первых, формой русл или формой обтекаемых тел, во-вторых, распределением в пространстве скоростей и ускорений всех частиц жидкости (газа) и, в-третьих, силовым взаимодействием между жидкостью (газом) и соприкасающимися с нею поверхностями твердых тел, то для соблюдения гидрогазодинамического подобия явлений в опыте и натуре необходимо, чтобы модели были **геометрически подобны** натурному объекту и чтобы имело место **кинематическое и динамическое** подобие этих явлений. Если же движение жидкости (газа) сопровождается теплообменом, то необходимо еще подобие полей температур в опыте и натуре.

Модель называется геометрически подобной натуре, если отношение любых сходственных линейных размеров модели и природы будут одинаковыми, т.е.

$$\frac{\ell'}{\ell} = k_{\ell}, \quad (4.1)$$

где ℓ' - любой линейный размер, относящийся к модели ^{2*)};
 ℓ - сходственный линейный размер, относящийся к натуре.

Явления в опыте и натуре называются **кинематически подобными**, если при наличии геометрического подобия картин течения жидкости (картин линий тока) будет одинаковым отношение промежутков времени, за которые частицы жидкости в опыте и натуре проходят любые сходственные отрезки пути, т.е.

$$\frac{t'}{t} = k_t, \quad (4.2)$$

где t' - промежуток времени, за который частица жидкости в опыте пройдет отрезок пути ℓ' ;
 t - промежуток времени, за который частица жидкости в натуре пройдет сходственный отрезок пути ℓ .

^{2*)} В этой главе штрихи будем относить к модели

Следовательно, при наличии кинематического подобия явлений в опыте и в природе в любых сходственных точках вектора скоростей, а также вектора ускорений частиц жидкости будут коллинеарны. При этом отношение величин скоростей в любых сходственных точках в опыте и в природе будет одинаковым, отношение величин ускорений в этих точках также будет одинаковым. Действительно, если имеет место кинематическое подобие, то из (4.1) и (4.2) следует, что

$$\frac{\ell'}{\ell} \cdot \frac{t}{t'} = \frac{k_\ell}{k_t}.$$

Т.к. под ℓ' и ℓ можно подразумевать сходственные малые отрезки пути, которые проходят частицы жидкости в опыте и в природе за пропорционально малые промежутки времени, то

$$\Delta \ell' = v' \cdot \Delta t' \quad \text{и} \quad \Delta \ell = v \cdot \Delta t,$$

отсюда

$$\frac{\Delta \ell' \cdot \Delta t}{\Delta \ell \cdot \Delta t'} = \frac{v'}{v} = k_v, \quad k_v = \frac{k_\ell}{k_t}, \quad (4.3)$$

где v' - величина скорости в некоторой точке в опыте;
 v - величина скорости в сходственной точке в природе.

Рассматривая ускорения в сходственных точках в опыте и в природе, заметим, что отношение величин ускорений $\frac{j'}{j}$ равно отношению величин проекций этих ускорений, например, на нормаль к траекториям движения частиц жидкости $\frac{j'_n}{j_n}$. Значит,

$$\frac{j'}{j} = \frac{j'_n}{j_n},$$

но

$$j'_n = \frac{v'^2}{r'}, \quad j_n = \frac{v^2}{r},$$

где r' и r – радиусы кривизны траекторий в сходственных точках опыта и природы.

Отсюда

$$\frac{j'_n}{j_n} = \frac{v'^2 \cdot r}{r' \cdot v^2}.$$

Т.к. имеет место геометрическое подобие

$$\frac{r'}{r} = \frac{\ell'}{\ell},$$

то

$$\frac{j'}{j} = \frac{j'_n}{j_n} = \frac{v'^2}{v^2} \cdot \frac{\ell}{\ell'} = k_j, \quad k_j = \frac{k_v^2}{k_\ell} = \frac{k_\ell}{k_t^2}. \quad (4.4)$$

Это же можно было бы показать, рассматривая отношение величин проекций ускорения на касательную к траекториям движения частиц. Наглядный пример кинематического подобия явлений представляет демонстрация одного и того же кинофильма на разных по величине экранах, как с одинаковой, так и с разной скоростью движения лент в кинопроекторном аппарате.

Явления в опыте и в природе называются *динамически подобными*, если силы любой одной и той же природы (силы давления, трения и тяжести), действующие на любые сходственные элементарные объемы жидкости в опыте и в природе, а также равнодействующие этих сил параллельны и пропорциональны друг другу, т.е. их отношение одинаково

$$\frac{\Delta R'}{\Delta R} = k_R, \quad (4.5)$$

где $\Delta R'$ - величина силы, действующей на элементарный объем жидкости в опыте;

ΔR - величина силы, действующей на сходственный элементарный объем жидкости в натуре.

Из определения динамического подобия следует, что для любых сходственных конечных объемов жидкости справедливо выражение

$$\frac{R'}{R} = \frac{|\sum \Delta \bar{R}'|}{|\sum \Delta \bar{R}|} = \frac{\Delta R'}{\Delta R} = k_R, \quad (4.5')$$

где R' и R – соответственно величины главных векторов систем сил, действующих на любые сходственные конечные объемы жидкости в опыте и в натуре.

Равенства (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) и (4.5') определяют подобие гидрогазодинамических явлений в опыте и в натуре.

4.2. Основные формулы подобия гидрогазодинамических явлений

Рассмотрим два подобных гидрогазодинамических явления в опыте и в натуре.

Величины сил, действующих на сходственные элементарные объемы жидкости в опыте и в натуре, по закону движения центра масс можно выразить следующим образом:

$$\Delta R' = \Delta m' \cdot j', \quad \Delta R = \Delta m \cdot j,$$

где $\Delta m'$ и Δm - массы сходственных объемов жидкости;
 j' и j – величины ускорений центров масс этих объемов.

Массы сходственных объемов жидкости $\Delta m'$ и Δm можно представить в виде

$$\Delta m' = \rho' \cdot A \cdot \Delta \ell'^3 \quad \text{и} \quad \Delta m = \rho \cdot A \cdot \Delta \ell^3,$$

где ρ' и ρ - массовые плотности в сходственных точках рассматриваемых объемов жидкости;

$\Delta \ell'$ и $\Delta \ell$ - сходственные линейные размеры;

A - безразмерный коэффициент формы выделенных объемов, величина которого зависит от выбранного характерного линейного размера и формы объемов.

Например, если форма выделенных объемов - шаровая, $\Delta \ell'$ и $\Delta \ell$ - радиусы шаров, то $A = \frac{4}{3}\pi$, т.к. объем шара - $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.

Тогда отношение величин сил $\frac{\Delta R'}{\Delta R}$ будет иметь вид

$$\frac{\Delta R'}{\Delta R} = \frac{\rho' \cdot \Delta \ell'^3 \cdot j'}{\rho \cdot \Delta \ell^3 \cdot j} = k_R.$$

Заменяя отношение величин ускорений $\frac{j'}{j}$ по выражению (4.4)

$$\frac{j'}{j} = \frac{v'^2 \cdot \ell}{v^2 \cdot \ell'}$$

и замечая, что

$$\frac{\Delta \ell'^3}{\Delta \ell^3} = \frac{\ell'^3}{\ell^3},$$

получим

$$\frac{\Delta R'}{\Delta R} = \frac{\rho' \cdot \ell'^2 \cdot v'^2}{\rho \cdot \ell^2 \cdot v^2} = k_R \quad (4.5'')$$

или, согласно (4.5'),

$$\frac{R'}{R} = \frac{\rho' \cdot \ell'^2 \cdot v'^2}{\rho \cdot \ell^2 \cdot v^2} = k_R, \quad (4.5''')$$

откуда

$$\frac{R'}{\rho' \cdot \ell'^2 \cdot v'^2} = \frac{R}{\rho \cdot \ell^2 \cdot v^2} = Ne. \quad (4.6)$$

Таким образом, при наличии подобия гидрогазодинамических явлений в опыте и в природе **безразмерное число Ne** , подсчитанное для любых двух сходственных объемов жидкости, будет иметь одно и то же значение. Число Ne называют **силовым числом Ньютона**.

Можно считать, что R' и R – величины главных векторов систем сил, действующих на обтекаемые жидкостью твердые тела или сходственные поверхности в опыте и в природе, т.к. согласно третьему закону Ньютона, силы, действующие на обтекающую твердое тело жидкость, равны по величине, но противоположны по направлению силам, действующим на обтекаемое тело.

В выражении (4.6) вместо ℓ^2 можно вводить какую-нибудь характерную площадь тела s . Например, при изучении обтекания осесимметричных тел в аэродинамике вводят площадь поперечного сечения тела.

Система сил давления и трения, действующих на каждый элемент поверхности тела, обтекаемого жидкостью (газом) в общем случае приводится к силе (главному вектору) и паре сил, момент которой называется главным моментом. Величина главного момента зависит от выбора точки – центра приведения данной системы сил. Найдем отношение величин главных моментов относительно сходственных точек, центров приведения системы сил, в опыте и в природе при наличии гидрогазодинамического подобия

$$\frac{M'}{M} = \frac{R' \cdot h'}{R \cdot h} = k_M,$$

где M' и M – соответственно величины главных моментов системы сил, действующих на сходственные объемы жидкости (или обтекаемые поверхности) в опыте и в натуре;
 R' и R – главные векторы этой системы сил;
 h' и h – плечи этих сил относительно выбранных сходственных точек приведения этих сил в опыте и в натуре.

Замечая, что

$$\frac{h'}{h} = \frac{\ell'}{\ell} = k_\ell,$$

и используя равенство (4.5'''), получим

$$\frac{M'}{M} = \frac{\rho' \cdot \ell'^3 \cdot v'^2}{\rho \cdot \ell^3 \cdot v^2} = k_M, \quad (4.7)$$

откуда

$$\frac{M'}{\rho' \cdot \ell'^3 \cdot v'^2} = \frac{M}{\rho \cdot \ell^3 \cdot v^2} = Ne_M. \quad (4.8)$$

Таким образом, при наличии гидрогазодинамического подобия в опыте и натуре безразмерное число Ne_M - **моментное число Ньютона**, подсчитанное для модели и натурального объекта, будет иметь одно и то же значение.

4.3. Критерии подобия гидрогазодинамических явлений

Выведем необходимые условия подобия гидрогазодинамических явлений в опыте и натуре при течении жидкости или газа по руслам (трубопроводам, каналам и т.п.) или при обтекании тел потоком жидкости или газа.

Если предположить, что имеет место подобие гидрогазодинамических явлений в опыте и натуре, то, как

указано в п.4.1, для сил любой природы, действующих на сходственные элементы жидкости (газа), а также для равнодействующих сил или для главных векторов сил, если система сил приводится к силе и паре, справедливы равенства (4.5) и (4.5"). В левую часть выражения (4.5") можно подставлять вместо величин равнодействующих сил величины сил одной и той же природы, действующих на сходственные элементы жидкости (газа) в опыте и натуре

$$\frac{\Delta R'}{\Delta R} = \frac{\Delta P'}{\Delta P} = \frac{\Delta T'_{тр}}{\Delta T_{тр}} = \frac{\Delta G'}{\Delta G} = \frac{\rho' \cdot \ell'^2 \cdot v'^2}{\rho \cdot \ell^2 \cdot v^2}, \quad (4.9)$$

где $\Delta R'$ и ΔR - величины равнодействующих сил давления, трения и тяжести;

$\Delta P'$ и ΔP - величины сил давления;

$\Delta T'_{тр}$ и $\Delta T_{тр}$ - величины сил трения;

$\Delta G'$ и ΔG - величины сил тяжести (массовых сил).

Используя выражение (4.9), можно получить необходимые условия подобия гидрогазодинамических явлений в тех гипотетических случаях, когда в опыте и натуре действуют только силы давления или только силы трения, или, наконец, только силы тяжести. Каждое такое условие подобия в действительности, когда в жидкости (газе) одновременно действуют силы давления, трения и тяжести, будет лишь **частичным условием подобия**. Для выполнения полного гидрогазодинамического подобия явлений необходимо, чтобы выполнялись все частичные условия подобия.

4.3.1. Условие подобия по силам давления

Допустим, что в жидкости (газе) действуют только силы давления и имеет место подобие гидрогазодинамических явлений в опыте и натуре, тогда по выражению (4.9) отношение сил давления, действующих на любые сходственные элементы

поверхностей в опыте и натуре, можно выразить следующим образом:

$$\frac{\Delta P'}{\Delta P} = \frac{\rho' \cdot \ell'^2 \cdot v'^2}{\rho \cdot \ell^2 \cdot v^2}.$$

Т.к.

$$\Delta P' = p' \cdot \Delta s', \quad \Delta P = p \cdot \Delta s,$$

где p' и p – давление в сходственных точках в опыте и натуре;

$\Delta s'$ и Δs - площади сходственных элементов поверхностей в опыте и натуре;

то

$$\frac{p' \cdot \Delta s'}{p \cdot \Delta s} = \frac{\rho' \cdot \ell'^2 \cdot v'^2}{\rho \cdot \ell^2 \cdot v^2}.$$

Из условия геометрического подобия следует, что

$$\frac{\Delta s'}{\Delta s} = \frac{\Delta \ell'^2}{\Delta \ell^2} = \frac{\ell'^2}{\ell^2}.$$

Значит

$$\frac{p' \cdot \ell'^2}{p \cdot \ell^2} = \frac{\rho' \cdot \ell'^2 \cdot v'^2}{\rho \cdot \ell^2 \cdot v^2}$$

или

$$\frac{p'}{\rho' \cdot v'^2} = \frac{p}{\rho \cdot v^2} = k_p = Eu \quad (4.10)$$

Это безразмерное отношение называется **числом Эйлера**.

Таким образом, если имеет место подобие в опыте и натуре, то безразмерное число Эйлера, подсчитанное для любых двух сходственных точек, будет иметь одно и то же значение.

В случае течения сжимаемой жидкости (газа) число Эйлера может быть записано в другом виде. Учитывая, что

$$k \frac{p}{\rho} = c^2,$$

где $k = \frac{c_p}{c_v}$ - показатель адиабаты (изоэнтропы);

c – скорость звука;

получим

$$\frac{c'^2}{k' \cdot v'^2} = \frac{c^2}{k \cdot v^2}$$

или

$$\frac{k' \cdot v'^2}{c'^2} = \frac{k \cdot v^2}{c^2}.$$

Отношение местной скорости течения газа к местной скорости звука называется **числом Маха M** .

Таким образом, другой вид необходимого условия подобия по силам давления в сжимаемой жидкости (газе)

$$k' \cdot M'^2 = k \cdot M^2. \quad (4.11)$$

Если в опыте и натуре одна и та же сжимаемая жидкость (газ), т.е. $k' = k$, то необходимым условием подобия по силам давления будет равенство чисел Маха

$$M' = M. \quad (4.12)$$

Условия (4.11) и (4.12) называют также условиями подобия по сжимаемости среды (жидкости).

4.3.2. Условие подобия по силам трения

Допустим, что в жидкости (газе) действуют только силы трения. Если движение ламинарное (слоистое), то в жидкости (газе) действуют силы так называемого вязкого трения, которые определяются по формуле Ньютона, выражающей закон внутреннего трения в жидкости (газе)

$$\Delta T'_{\text{тр}} = \mu' \cdot \frac{dv'}{dn'} \cdot \Delta s', \quad \Delta T_{\text{тр}} = \mu \cdot \frac{dv}{dn} \cdot \Delta s,$$

где $\Delta T'_{\text{тр}}$ и $\Delta T_{\text{тр}}$ - силы трения, действующие на любые сходственные элементы поверхностей в опыте и натуре;

μ' и μ - динамические коэффициенты вязкости в сходственных точках в опыте и натуре;

$\frac{dv'}{dn'}$ и $\frac{dv}{dn}$ - градиенты скорости по нормали к сходственным элементам поверхностей в опыте и натуре;

$\Delta s'$ и Δs - площади сходственных поверхностей в опыте и натуре.

$$\frac{\Delta T'_{\text{тр}}}{\Delta T_{\text{тр}}} = \frac{\mu' \cdot \frac{dv'}{dn'} \cdot \Delta s'}{\mu \cdot \frac{dv}{dn} \cdot \Delta s}.$$

Т.к. мы полагаем, что имеет место подобие гидрогазодинамических явлений в опыте и натуре, то

$$\frac{\frac{dv'}{dn'}}{\frac{dv}{dn}} = \frac{dv' \cdot dn}{dv \cdot dn'} = \frac{v' \cdot \ell}{v \cdot \ell'}$$

и

$$\frac{\Delta s'}{\Delta s} = \frac{\Delta l'^2}{\Delta l^2} = \frac{l'^2}{l^2},$$

следовательно,

$$\frac{\Delta T'_{\text{тр}}}{\Delta T_{\text{тр}}} = \frac{\mu' \cdot v' \cdot l'}{\mu \cdot v \cdot l}.$$

По выражению (4.9)

$$\frac{\Delta T'_{\text{тр}}}{\Delta T_{\text{тр}}} = \frac{\rho' \cdot l'^2 \cdot v'^2}{\rho \cdot l^2 \cdot v^2},$$

значит

$$\frac{\mu' \cdot v' \cdot l'}{\mu \cdot v \cdot l} = \frac{\rho' \cdot l'^2 \cdot v'^2}{\rho \cdot l^2 \cdot v^2}.$$

Тогда

$$\frac{\rho' \cdot l' \cdot v'}{\mu'} = \frac{\rho \cdot l \cdot v}{\mu} = \text{const} = \text{Re}. \quad (4.13)$$

Это безразмерное выражение называют **числом Рейнольдса**.

Таким образом, если имеет место **подобие по силам вязкого трения** в опыте и натуре, то безразмерные числа Рейнольдса, подсчитанные для любых двух сходственных точек, будут иметь одно и то же значение.

Следовательно, **число Рейнольдса является критерием подобия по вязкости жидкости (газа)**.

При турбулентном движении в жидкости и газе, кроме сил вязкого трения, действуют силы так называемого турбулентного трения. Они являются следствием переноса количества движения в результате перемешивания частиц жидкости (газа). Если имеет место подобие по силам турбулентного трения в опыте и натуре, то, как показывают исследования, безразмерное число,

называемое степенью турбулентности потока ε , подсчитанное для любых двух сходственных точек, будет иметь одно и то же значение

$$\varepsilon' = \varepsilon. \quad (4.14)$$

Степень турбулентности потока (число ε) является критерием подобия по турбулентности потока.

Степенью турбулентности ε в данной точке потока называют отношение средней квадратичной пульсационной скорости $\sqrt{v_{\text{пд}}'^2}$ к осредненной скорости потока $v_{\text{оср}}$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{v_{\text{пд}}'^2}}{v_{\text{оср}}}.$$

На рис. 4.1 приведена характерная картина изменения истинной скорости с течением времени в некоторой точке турбулентного потока.

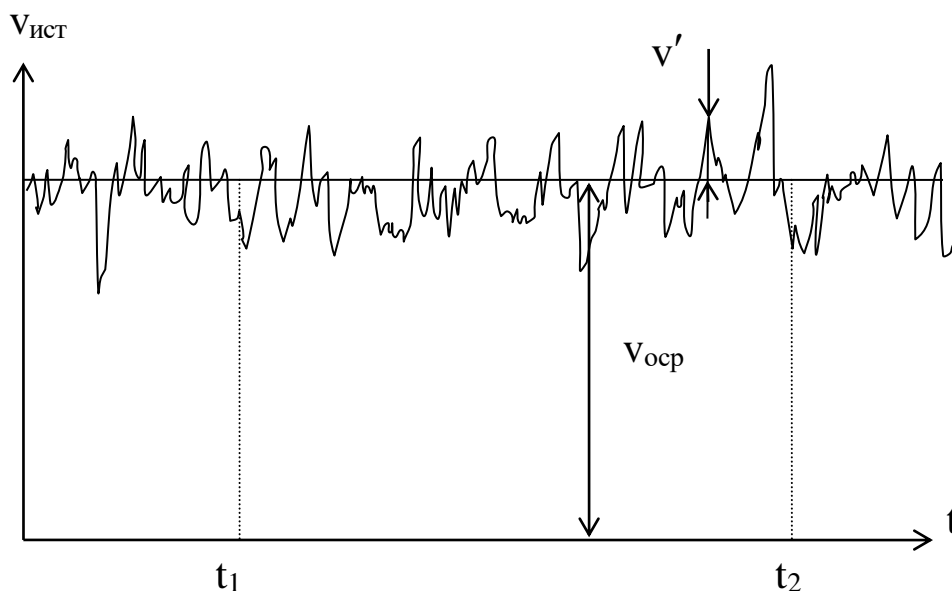


Рис. 4.1. Изменение истинной скорости с течением времени в некоторой точке турбулентного потока

Такой график скорости может быть получен с помощью малоинерционного прибора, фиксирующего величину «мгновенной» скорости.

Как видно из графика, величина истинной скорости $v_{ист}$ в данной точке колеблется около значения осредненной скорости $v_{оср}$. Поэтому средняя величина пульсационной скорости равна нулю. За меру величины пульсации v' принимают ее среднюю квадратичную величину

$$\sqrt{v_{\text{н\ddot{o}}}^{\prime 2}} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v'^2 \cdot dt}.$$

Осредненная скорость определяется по формуле

$$v_{\text{оср}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v_{\text{н\ddot{o}}} \cdot dt.$$

Следовательно, степень турбулентности в данной точке потока выражается отношением

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{v_{\text{оср}}^{\prime 2}}}{v_{\text{оср}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v'^2 \cdot dt}}{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v_{\text{н\ddot{o}}} \cdot dt}.$$

4.3.3. Условие подобия по силам тяжести

Допустим, что рассматриваются движения жидкости со свободной поверхностью, на форму которой существенно влияют силы тяжести. Такой случай имеет место, например, при изучении обтекания корпуса корабля или подводной лодки, движущейся вблизи свободной поверхности воды с постоянной скоростью. Величины сил тяжести, действующие на

сходственные элементарные объемы жидкости в опыте и натуре, можно выразить следующим образом:

$$\Delta G' = \gamma' \cdot \Delta w' = g' \cdot \rho' \cdot \Delta w', \quad \Delta G = \gamma \cdot \Delta w = g \cdot \rho \cdot \Delta w,$$

где γ' и γ , ρ' и ρ , g' и g – соответственно, удельные веса, массовые плотности и ускорения массовых сил (сил тяжести) в сходственных точках опыта и природы;

$\Delta w'$ и Δw - сходственные элементарные объемы жидкости.

Тогда

$$\frac{\Delta G'}{\Delta G} = \frac{g' \cdot \rho' \cdot \Delta w'}{g \cdot \rho \cdot \Delta w}$$

и, согласно выражению (4.9),

$$\frac{g' \cdot \rho' \cdot \Delta w'}{g \cdot \rho \cdot \Delta w} = \frac{\rho' \cdot \ell'^2 \cdot v'^2}{\rho \cdot \ell^2 \cdot v^2}.$$

Из условия геометрического подобия

$$\frac{\Delta w'}{\Delta w} = \frac{\Delta \ell'^3}{\Delta \ell^3} = \frac{\ell'^3}{\ell^3},$$

следовательно,

$$\frac{g' \cdot \rho' \cdot \ell'^3}{g \cdot \rho \cdot \ell^3} = \frac{\rho' \cdot \ell'^2 \cdot v'^2}{\rho \cdot \ell^2 \cdot v^2},$$

откуда

$$\frac{v'^2}{g' \cdot \ell'} = \frac{v^2}{g \cdot \ell} = \text{const} = \text{Fr}. \quad (4.15)$$

Это безразмерное отношение называется **числом Фруда**.

Если имеет место подобие по силам тяжести в опыте и натуре, то безразмерное число Фруда, подсчитанное для любых двух сходственных точек, будет иметь одно и то же значение.

Число Фруда является критерием подобия по весомости жидкости.

Итак, предположив, что соблюдается подобие гидрогазодинамических явлений в опыте и натуре при установившемся (стационарном) течении жидкости (газа) по трубам, каналам, проточным частям насосов, турбин или при обтекании жидкостью (газом) твердых тел (лопаток турбин, корпусов кораблей, самолетов, ракет и т.п.), мы получили **необходимые условия подобия** отдельно по силам давления, трения и тяжести. В действительности же в жидкости (газе) эти силы действуют одновременно. Очевидно, что необходимыми условиями подобия в этом реальном случае будет одновременное выполнение всех вышеуказанных равенств в любых двух сходственных точках в опыте и натуре

$$\left. \begin{aligned} k' \cdot M'^2 &= k \cdot M^2 & \text{или} & & M' &= M & (\text{при } k' = k) \\ Re' &= Re \\ \varepsilon' &= \varepsilon \\ Fr' &= Fr \end{aligned} \right\}. \quad (4.16)$$

Для установления **достаточных условий подобия**, т.е. тех условий, при выполнении которых будет иметь место подобие гидрогазодинамических явлений, следовало бы обратиться к рассмотрению уравнений, описывающих движение жидкости (газа) с граничными и начальными условиями, соответствующими данной конкретной задаче. Записав эти уравнения, граничные и начальные условия в безразмерном виде, автоматически получим достаточные критерии подобия в виде безразмерных чисел – коэффициентов при безразмерных членах уравнений, граничных и начальных условиях.

Равенства (4.16) оказываются не только необходимыми, но и достаточными критериями подобия для случая установившегося движения жидкости (газа) в трубопроводах и каналах одинаковой

формы или обтекания геометрически подобных тел, одинаково ориентированных по отношению к набегающему (невозмущенному) потоку при отсутствии теплообмена.

Если принять какие-либо ограничения, например, считать жидкость невесомой, то в условия подобия (4.16) не войдет равенство $Fr' = Fr$, и наоборот, если ввести меньше ограничений, то условий подобия (4.16) окажется недостаточно.

4.3.4. Условие подобия по периодичности процессов

Допустим, что имеют место периодически повторяющиеся процессы (вращение ротора турбины или компрессора, колебания лопаток турбины и т.п.), то для соблюдения подобия явлений в опыте и натуре добавляется условие, учитывающее периодичность происходящих явлений.

Условие подобия по периодичности явлений является частным случаем кинематического подобия. Следовательно,

$$\frac{t'}{t} = \frac{T'}{T}, \quad (4.17)$$

где t' и t – промежутки времени, за которое частицы жидкости (газа) проходят сходственные отрезки пути ℓ' и ℓ в опыте и натуре;

T' и T – периоды явлений в опыте и натуре.

Поскольку

$$t' = \frac{\ell'}{v'}, \quad t = \frac{\ell}{v}, \quad T' = \frac{1}{n'_s}, \quad T = \frac{1}{n_s},$$

то (4.17) можно записать

$$\frac{\ell'}{v'} \cdot \frac{v}{\ell} = \frac{n_s}{n'_s},$$

откуда

$$\frac{v'}{\ell' \cdot n'_s} = \frac{v}{\ell \cdot n_s} = \text{const} = Sh, \quad (4.17')$$

где v' и v – величины скоростей в любых двух сходственных пространственно-временных точках опыта и природы;

l' и l – сходственные линейные размеры;

n'_s и n_s – частоты периодического процесса в опыте и натуре (частота вращения ротора турбины, колебаний лопаток и т.п.).

Безразмерное число Sh называется *числом Струхалия*.

Всякий механический или физический фактор, влияющий на характер протекающих процессов или происходящих явлений, приводит в результате его учета к соответствующему критерию подобия.

Обычно сравнение критериев подобия в опыте и натуре проводится по средним в сечении потока параметрам жидкости (газа), если рассматривается течение в трубопроводах, или по параметрам в набегающем невозмущенном потоке, если рассматривается обтекание тел. В качестве сходственных линейных размеров выбирают в зависимости от рассматриваемого течения жидкости (газа) диаметр трубы, диаметр ротора турбины или компрессора, хорду лопатки и т.п.

На рис.4.2 приведены примеры течения жидкости (газа): $v_{ср}$ – средняя скорость в сечении трубы диаметром d ; v – скорость невозмущенного потока; b – хорда профиля лопатки.

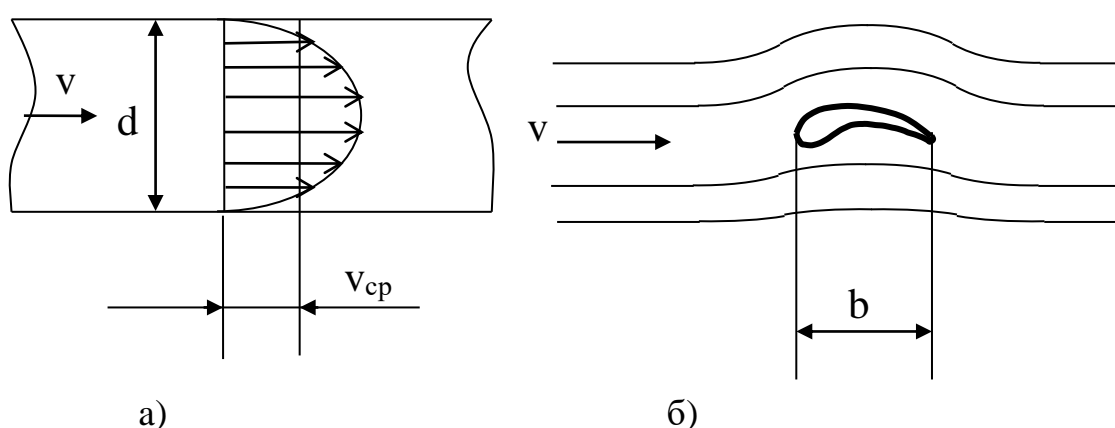


Рис. 4.2. К выбору характерных линейных размеров при течении жидкости (газа):

а) по трубе диаметра d ; б) при обтекании профиля лопатки

4.4. Определяющие и неопределяющие критерии подобия

Различают *определяющие критерии подобия*, равенство которых в опыте и натуре обеспечивает выполнение подобия гидрогазодинамических явлений, и *неопределяющие критерии подобия*, равенство которых в опыте и натуре автоматически выполняется в подобных гидрогазодинамических явлениях.

Рассмотрим в качестве примера изотермическое движение вязкого газа по геометрически подобным каналам переменного сечения при малых числах Маха (рис. 4.3).

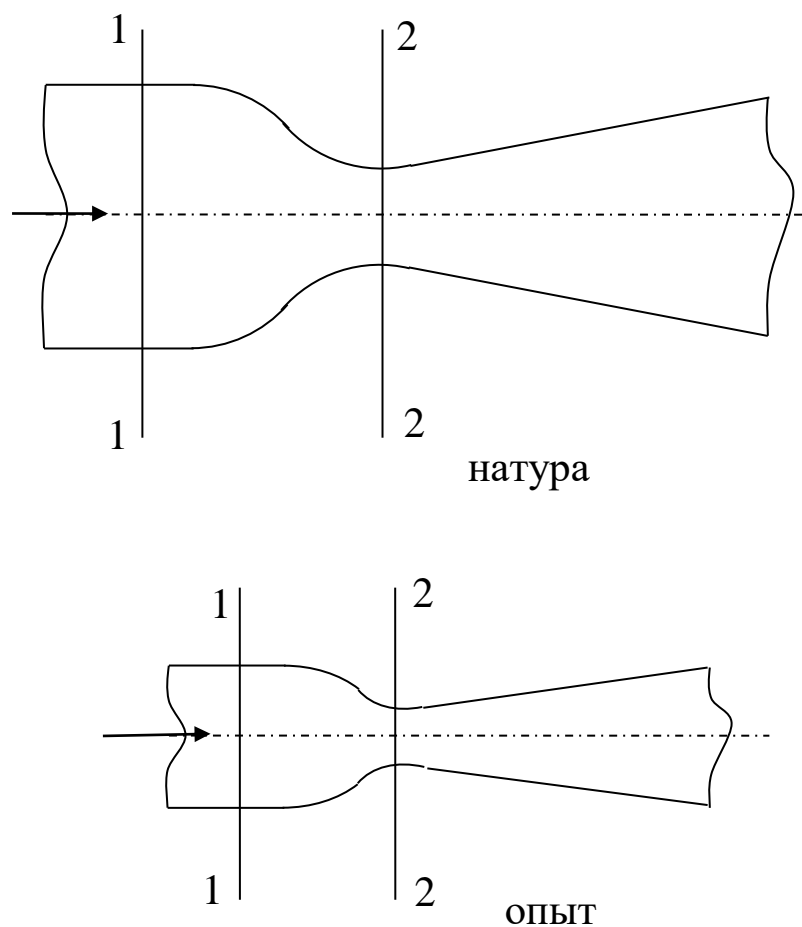


Рис. 4.3. Изотермическое движение жидкости (газа) по геометрически подобным каналам

В этом случае газ можно считать несжимаемым, $\rho = \text{const}$. Определяющим критерием подобия в этих двух геометрически подобных потоках будет *число Рейнольдса*. Согласно уравнению

Бернулли (3.39), записанному для единицы массы для двух сечений каждого потока при $z_1 = z_2$ и $q_{\text{дис}} = \zeta \frac{v_2^2}{2}$,

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + \zeta \cdot \frac{v_2^2}{2},$$

где ζ - безразмерный коэффициент сопротивления.

Откуда

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot v_1^2} = \left(\frac{v_2^2}{2 \cdot v_1^2} + \frac{\zeta}{2} \cdot \frac{v_2^2}{v_1^2} - \frac{1}{2} \right).$$

Из уравнения массового расхода следует

$$\rho \cdot v_1 \cdot s_1 = \rho \cdot v_2 \cdot s_2 \quad (\rho = \text{const}),$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{s_1}{s_2},$$

где s_1 и s_2 – площади в сходственных сечениях потоков.

Окончательно

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot v_1^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot (1 + \zeta) - \frac{1}{2}.$$

Поскольку ζ является в рассматриваемом случае функцией только числа Рейнольдса, определяющего критерия подобия, то ζ в этих потоках будут одинаковыми. Также одинаковы $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ в сходственных сечениях в силу геометрического подобия. Следовательно, числа Эйлера $Eu = \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot v_1^2}$ автоматически будут

одинаковыми в этих двух подобных потоках. Значит, число Эйлера Eu будет **неопределяющим** критерием подобия.

Таким образом, неопределяющие критерии подобия являются функциями определяющих критериев подобия. Так называемые критериальные уравнения иллюстрируют это утверждение. Например, критериальное уравнение гидравлического сопротивления при установившемся (стационарном) режиме неизотермического движения несжимаемой вязкой жидкости (газа) по трубопроводу

$$Eu = f(Re, Pr, Gr),$$

где Re - число Рейнольдса, $Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\mu}$;

Pr - число Прандтля, $Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda}$;

Gr - число Грасгофа, $Gr = \frac{g \cdot d^3}{\nu^2} \cdot \beta_t \cdot (t_{ст}^0 - t_{ж}^0)$;

ρ - массовая плотность;

μ - динамический коэффициент вязкости;

ν - кинематический коэффициент вязкости;

λ - коэффициент теплопроводности;

c_p - удельная массовая теплоемкость при постоянном давлении;

d - диаметр трубопровода;

β_t - коэффициент температурного расширения;

$t_{ст}^0$ - температура стенки трубы;

$t_{ж}^0$ - температура жидкости (газа).

4.5. Полное и частичное подобие

Подобие двух явлений называется **полным**, если отношение **всех** однородных физических величин, характеризующих эти явления, в любых сходственных пространственно-временных точках одинаково. Если же это условие соблюдается не для всех однородных физических величин, то подобие называется **неполным или частичным**.

Полное подобие гидрогазодинамических явлений будет в том случае, если имеет место геометрическое подобие и все критерии подобия в опыте будут иметь те же значения, что и в натуре.

Осуществить полное подобие гидрогазодинамических явлений в опытах и натуре невозможно из-за противоречивых требований для выполнения равенства всех критериев подобия. Так, например, если модель в опыте меньшего размера, чем

натурный объект, то, чтобы числа $Fr = \frac{v}{g \cdot \ell}$ в опыте и натуре

были одинаковыми, нужно в опыте иметь во столько же раз меньшую скорость течения жидкости (газа). А чтобы

одновременно были одинаковыми числа $Re = \frac{\rho \cdot v \cdot \ell}{\mu}$, скорость в

опыте должна быть больше.

Таким образом, можно утверждать, что всякое гидрогазодинамическое явление *полностью подобно самому себе*.

Как показала практика, во многих случаях можно ограничиться неполными или частичными подобиями.

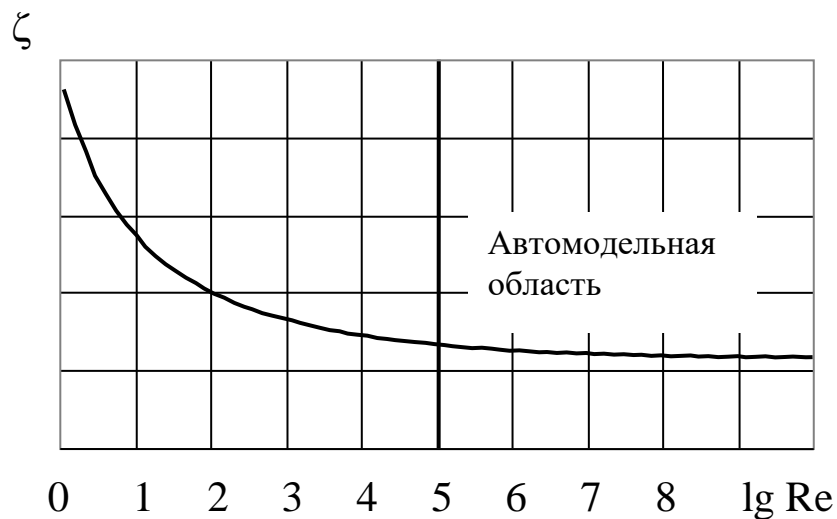
Например, если моделируется установившееся течение жидкости (газа) по трубам или каналам без теплообмена, достаточно соблюдения равенства двух критериев подобия – числа Рейнольдса Re и числа Маха M , поскольку преобладающее влияние на характер гидрогазодинамических явлений в рассматриваемом случае будет оказывать только вязкость и сжимаемость газа. А если и сжимаемость газа незначительна или течет капельная, практически несжимаемая жидкость, то критерием подобия будет лишь число Рейнольдса Re .

4.6. Автоподобность

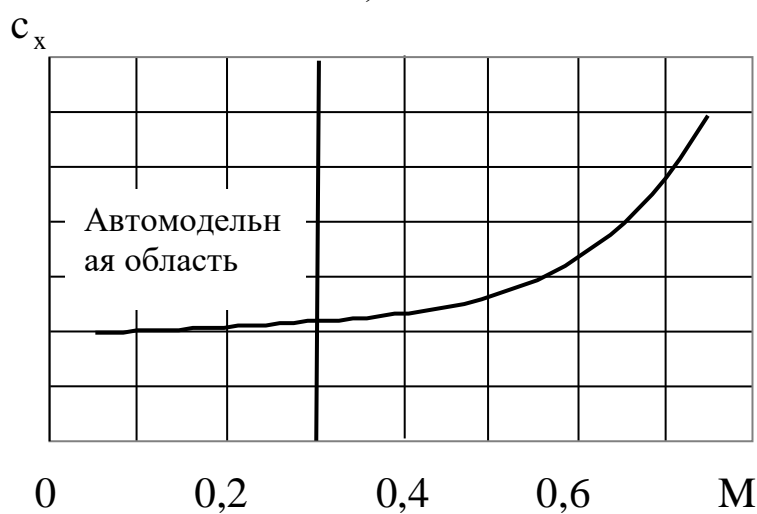
Если какой-нибудь безразмерный параметр, например, коэффициент сопротивления трубопровода или канала, зависящий, вообще говоря, от конкретного критерия подобия в каком-либо диапазоне изменения последнего, постоянен или

почти постоянен, то говорят, что этот коэффициент находится в автомодельной области по этому критерию подобия (рис.4.4).

На рис. 4.4 показана автомодельная область по числу Рейнольдса Re для коэффициента сопротивления трубопровода и автомодельная область по числу Маха M для коэффициента сопротивления лопатки турбины.



а)



б)

Рис. 4.4. Автомодельные области:

- а) для коэффициента сопротивления ζ по Рейнольдсу;
- б) для коэффициента сопротивления профиля лопатки турбины c_x по числу Маха

4.7. Сущность теории размерностей. Формула размерности

Физическая величина – это характеристика физического объекта. Физические величины бывают *размерные и безразмерные*.

Численное значение *размерной* величины зависит от принятой системы единиц физических величин. Примером размерной величины являются скорость, сила, энергия и т.п.

Численное значение *безразмерной* величины не зависит от принятой системы единиц физических величин. Примером безразмерной величины является отношение двух размерных величин одинаковой размерности: длины окружности к ее диаметру π , газовой постоянной к теплоемкости газа $\frac{R}{c_p}$ и т.п.

Единицей физической величины называют физическую величину, которой условно присвоено числовое значение, равное 1 (единице).

Системой единиц физических величин называют совокупность основных и производных единиц физических величин.

Основные единицы физических величин выбираются из тех соображений, чтобы, во-первых, их размерности были независимыми и, во-вторых, чтобы размерности других, производных единиц могли быть выражены через размерности основных единиц по уравнениям связи. Уравнения связи выражают физические законы, вид которых не зависит от выбора системы единиц.

Так, в действующей в настоящее время Международной системе единиц СИ в качестве основных гидрогазодинамических единиц физических величин приняты: единица длины ℓ (метр); единица массы m (килограмм); единица времени t (секунда); единица температуры K (градус Кельвина).

Размерности этих основных единиц принято обозначать символами L, M, T, θ :

$$[\ell] = L, [m] = M, [t] = T, [K] = \theta. \quad (4.18)$$

В общем случае размерность любой физической величины выражается по **формуле размерности**, предложенной Фурье, который впервые применил теорию размерности и подобия к физическим задачам. Формула размерности имеет вид степенного одночлена, составленного из произведений символов основных физических величин в различных степенях

$$[X] = L^a \cdot M^b \cdot T^c \cdot \theta^d, \quad (4.19)$$

где $[X]$ - размерность величины X ;

a, b, c, d – целые или дробные положительные или отрицательные вещественные числа.

Формула размерности основной физической величины совпадает с ее символом, как показано выше (4.18).

С размерностями можно производить действия умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. Действия сложения и вычитания размерностей не имеют смысла.

Заметим, что в качестве основных единиц физических величин можно выбрать и другие, правда, менее удобные единицы с независимой размерностью. Например, можно выбрать в качестве основных единиц физических величин скорость v , ускорение j , плотность ρ и температуру K . Тогда размерности массы m , длины ℓ и времени t будут зависимыми. Действительно, размерности массы, длины и времени будут иметь вид

$$[m] = \frac{[\rho] \cdot [v]^6}{[j]^3}, \quad [\ell] = \frac{[v]^2}{[j]}, \quad [t] = \frac{[v]}{[j]}.$$

В технической системе единиц в качестве основных механических единиц физических величин выбраны единицы силы (килограмм), единицы длины (метр) и единицы времени (секунда). В этой системе единица массы является производной единицей, а размерность массы – зависимой размерностью. По формуле Ньютона сила, приложенная к центру масс тела, равна

массе тела, умноженной на ускорение центра масс. Размерность массы в технической системе запишется в символах

$$[m] = F \cdot L^{-1} \cdot T^2,$$

где F – размерность силы;
 L – размерность длины;
 T – размерность времени.

4.8. Пример решения гидрогазодинамической задачи методом анализа размерностей

Рассмотрим задачу об истечении капельной жидкости из большого сосуда через насадок. Уровень жидкости в сосуде поддерживается постоянным (рис. 4.5).

Требуется определить массовый расход жидкости, т.е. количество массы жидкости, вытекающей из сосуда в единицу времени.

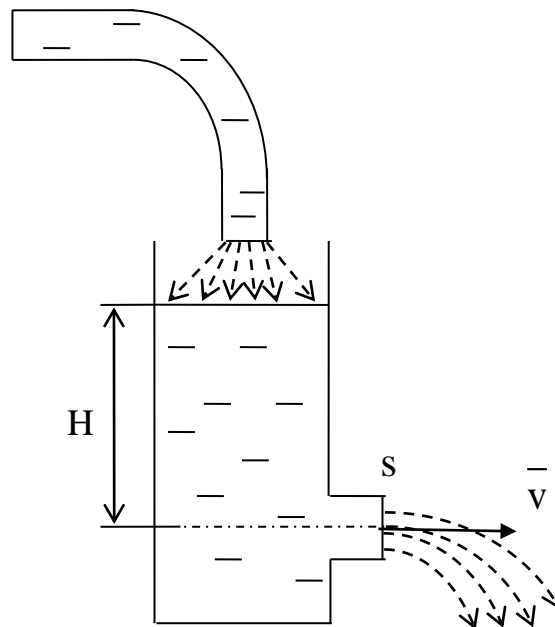


Рис. 4.5. Истечение капельной жидкости из сосуда через насадок при $H = \text{const}$

Из физических соображений можно предположить, что массовый расход $\frac{dm}{dt}$ (m - масса жидкости, вытекающей из сосуда за время t) пропорционален площади насадка s и зависит от высоты уровня жидкости в сосуде над насадком H , плотности жидкости ρ и ускорения силы тяжести g . Тогда

$$\frac{dm}{dt} = s \cdot f(H, \rho, g). \quad (4.20)$$

Поставленная задача свелась к определению функции $f(H, \rho, g)$.

Размерность $\left[\frac{dm}{dt} / s \right]$ можно представить через размерности новых единиц $[H], [\rho], [g]$ в виде степенного одночлена, согласно формуле размерности, аналогичной (4.19),

$$\left[\frac{dm}{dt} / s \right] = [H]^a \cdot [\rho]^b \cdot [g]^c \quad (4.21)$$

или в символической записи, согласно обозначениям размерностей

$$\left[\frac{dm}{dt} / s \right] = M \cdot T^{-1} \cdot L^{-2}, \quad [H] = L, \quad [\rho] = M \cdot L^{-3}, \quad [g] = L \cdot T^{-2},$$

в виде

$$M \cdot T^{-1} \cdot L^{-2} = L^a \cdot M^b \cdot L^{-3 \cdot b} \cdot L^c \cdot T^{-2 \cdot c}.$$

Сравнивая показатели степеней основных единиц левой и правой части равенства, получим

$$1 = b; \quad -1 = -2 \cdot c; \quad -2 = a - 3 \cdot b + c.$$

Отсюда

$$b = 1; \quad c = \frac{1}{2}; \quad a = \frac{1}{2}.$$

Искомая функция $f(H, \rho, g)$ может быть записана в виде

$$f(H, \rho, g) = C \cdot H^{\frac{1}{2}} \cdot \rho \cdot g^{\frac{1}{2}},$$

где C – безразмерное число, которое можно определить из опыта.

Окончательно (4.20) запишется в виде

$$\frac{dm}{dt} = C \cdot \rho \cdot s \cdot \sqrt{g \cdot H}, \quad (4.22)$$

что совпадает с теоретическим решением поставленной задачи, в предположении отсутствия трения. При этом в теоретической формуле $C = \sqrt{2}$.

4.9. π - теорема теории размерностей

На примере, рассмотренном в предыдущем пункте, было показано, как при переходе к новой системе единиц физических величин можно достаточно просто установить формулу физической зависимости.

Обратимся к общему случаю функциональной зависимости между физическими величинами, вид которой не зависит от выбранной системы единиц физических величин

$$A = f(A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n). \quad (4.23)$$

Допустим, что первые k аргументов ($k \leq n$) A_1, A_2, \dots, A_k имеют независимые размерности. Тогда размерность функции A и размерности остальных $(n - k)$ аргументов $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$ можно выразить через размерности первых k аргументов, если их выбрать в качестве основных единиц физических величин.

Формулы размерности физических величин, как отмечено в п.4.7, имеют вид степенных одночленов, составленных из

основных физических величин. В рассматриваемом случае эти формулы, записанные через новые размерности единиц физических величин, будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} [A] &= [A_1]^{a_1} \cdot [A_2]^{a_2} \dots [A_k]^{a_k}, \\ [A_{k+1}] &= [A_1]^{b_1} \cdot [A_2]^{b_2} \dots [A_k]^{b_k}, \\ &\dots\dots\dots \\ [A_n] &= [A_1]^{c_1} \cdot [A_2]^{c_2} \dots [A_k]^{c_k} \end{aligned} \right\}, \quad (4.24)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k, c_1, c_2, \dots, c_k$ – целые или дробные, положительные или отрицательные вещественные числа.

Поскольку величины A_1, A_2, \dots, A_k приняты за новые единицы физических величин, их значение в этой системе единиц равно единице. Изменяются также числовые значения остальных величин $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$.

В новой системе единиц физических величин числовые значения безразмерных $(n - k + 1)$ величин будут соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} \pi &= \frac{A}{A_1^{a_1} \cdot A_2^{a_2} \dots A_k^{a_k}}, \\ \pi_1 &= \frac{A_{k+1}}{A_1^{b_1} \cdot A_2^{b_2} \dots A_k^{b_k}}, \\ &\dots\dots\dots \\ \pi_{n-k} &= \frac{A_n}{A_1^{c_1} \cdot A_2^{c_2} \dots A_k^{c_k}} \end{aligned} \right\}. \quad (4.25)$$

Тогда выражение (4.23), если $n < k$, примет вид

$$\pi = f(1, 1, \dots, 1, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}). \quad (4.26)$$

Если $n = k$, то правая часть (4.26) будет просто постоянной величиной.

Вышеизложенное составляет содержание π - *теоремы теории размерностей: независимую от выбора единиц физических величин функциональную зависимость между $n + 1$ размерными величинами, из которых k величин имеют независимые размерности, можно преобразовать в функциональную зависимость между $n + 1 - k$ безразмерными величинами.*

Следовательно, физическое выражение между размерными величинами (4.23) может быть преобразовано в выражение (4.26) между безразмерными величинами.

Таким образом, применение π - теоремы теории размерностей, *во-первых*, позволяет упростить физические зависимости, т.к. в них сокращается число аргументов (вместо n размерных аргументов в исходной зависимости, $n - k$ безразмерных аргументов в преобразованной зависимости). *Во-вторых*, из зависимости (4.26) следует, что не отдельные размерные физические величины влияют на результат опыта, а только безразмерные комбинации, составленные из этих размерных величин.

Очевидно, что применение π - теоремы, а именно, составление безразмерных аргументов, требует от исследователя определенной физической интуиции, чтобы в исходной задаче выбрать те размерные аргументы, которые являются существенными для рассматриваемого физического явления.

Приведем пример применения π - теоремы теории размерностей для решения задачи об определении падения давления на единицу длины трубы $\frac{\Delta p}{\ell}$ при установившемся изотермическом течении несжимаемой вязкой жидкости по цилиндрической трубе (рис. 4.6).

Можно предположить, что $\frac{\Delta p}{\ell}$ зависит от: v – средней по сечению трубы скорости; d - диаметра трубы; Δ - абсолютной шероховатости стенки трубы; ρ - плотности жидкости; μ - динамического коэффициента вязкости, т.е.

$$\frac{\Delta p}{\ell} = f(v, d, \Delta, \rho, \mu). \quad (4.27)$$

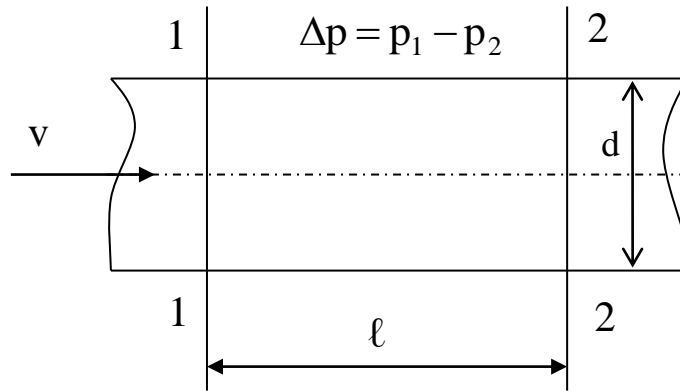


Рис. 4.6. Установившееся изотермическое течение несжимаемой вязкой жидкости по цилиндрической трубе

Размерности входящих в это выражение величин в системе СИ:

$$\left[\frac{\Delta p}{\ell} \right] = M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}; \quad [v] = L \cdot T^{-1}; \quad [d] = L; \quad (4.28)$$

$$[\Delta] = L; \quad [\rho] = M \cdot L^{-3}; \quad [\mu] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$$

Независимые размерности имеют только три физические величины. Выберем их, например, v , d , ρ в качестве новых основных единиц физических величин. Тогда, согласно (4.25)

$$\pi = \frac{\Delta p / \ell}{v^{a_1} \cdot d^{a_2} \cdot \rho^{a_3}}, \quad \pi_1 = \frac{\Delta}{v^{b_1} \cdot d^{b_2} \cdot \rho^{b_3}}, \quad \pi_3 = \frac{\mu}{v^{c_1} \cdot d^{c_2} \cdot \rho^{c_3}}$$

Показатели степеней a_i, b_i, c_i найдем, приравняв размерности числителей размерностям знаменателей. Учитывая (4.28), будем иметь

$$M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2} = L^{a_1} \cdot T^{-a_1} \cdot L^{a_2} \cdot M^{a_3} \cdot L^{-3a_3},$$

$$L = L^{b_1} \cdot T^{-b_1} \cdot L^{b_2} \cdot M^{b_3} \cdot L^{-3b_3},$$

$$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1} = L^{c_1} \cdot T^{-c_1} \cdot L^{c_2} \cdot M^{c_3} \cdot L^{-3c_3}.$$

Показатели степеней определяются из следующих уравнений:

$$1 = a_3, \quad -2 = a_1 + a_2 - 3 \cdot a_3, \quad -2 = -a_1,$$

$$1 = b_1 + b_2 - 3 \cdot b_3, \quad 0 = b_1, \quad 0 = b_3,$$

$$1 = c_3, \quad -1 = c_1 + c_2 - 3 \cdot c_3, \quad -1 = -c_1,$$

откуда

$$a_1 = 2, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 1,$$

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 0,$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 1.$$

Тогда

$$\pi = \frac{\Delta p / \ell}{v^2 \cdot d \cdot \rho}, \quad \pi_1 = \frac{\Delta}{d}, \quad \pi_2 = \frac{\mu}{v \cdot d \cdot \rho} = \frac{1}{\text{Re}}.$$

Следовательно, выражение (4.27) в безразмерном виде, согласно (4.26), запишется

$$\frac{\Delta p \cdot d}{\ell \cdot v^2 \cdot \rho} = f\left(\frac{1}{\text{Re}}, \frac{\Delta}{d}\right) \quad (4.29)$$

или

$$\Delta p = f \left(\frac{1}{\text{Re}}, \frac{\Delta}{d} \right) \cdot \frac{\ell}{d} \cdot v^2 \cdot \rho. \quad (4.30)$$

Умножая правую часть равенства (4.30) на $\frac{2}{2}$, получим

$$\Delta p = 2 \cdot f \left(\frac{1}{\text{Re}}, \frac{\Delta}{d} \right) \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2}.$$

Обозначая безразмерную функцию $2 \cdot f \left(\frac{1}{\text{Re}}, \frac{\Delta}{d} \right) = \lambda$, где λ называется гидравлическим коэффициентом трения, получим известную формулу потерь на трение Дарси – Вейсбаха

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2}. \quad (4.31)$$

Значение коэффициента гидравлических потерь на трение определяют из опытов.

Из приведенного примера видно, как, применив π -теорему размерностей к рассматриваемой задаче, получили связь (4.29) между определяющим критерием подобия числом Рейнольдса Re и неопределяющим критерием подобия числом

$$\text{Эйлера } \text{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho \cdot v^2}.$$

Раздел 5

ГИДРОГАЗОСТАТИКА

Гидрогазостатика – раздел гидрогазодинамики. В этом разделе изучают законы, которым подчиняются жидкости (газы), находящиеся в покое.

Покой жидкости (газа) – это такое ее состояние, при котором отсутствует перемещение частиц жидкости (газа) по отношению друг к другу. Если при этом частицы жидкости (газа) не перемещаются относительно Земли, то такой покой называют «абсолютным», в противном случае – относительным. Например, относительный покой имеет место, когда резервуар с жидкостью перемещается относительно Земли, а жидкость относительно резервуара находится в покое.

В покоящейся, так называемой ньютоновской жидкости, для которой справедлив закон трения Ньютона, предполагающий линейную связь между вязкостными напряжениями и скоростями деформаций, *касательные напряжения отсутствуют* (см.п.1.5). К таким жидкостям, отличающимся легкой подвижностью, относятся бензин, керосин, минеральные масла, спирт, вода, сжимаемые жидкости (газы) и другие жидкости, которые широко применяются в машиностроении, энергетике и строительстве. В таких покоящихся жидкостях имеют место только нормальные напряжения, которые называются *гидростатическим давлением*.

Два свойства нормальных напряжений при отсутствии касательных напряжений, или, иными словами, два свойства гидростатического давления были доказаны в главе 3 (п.3.2).

5.1. Свойства гидростатического давления

1-е свойство: гидростатическое давление p в технических капельных жидкостях, а также в газах, в каждой точке поверхности, ограничивающей объем жидкости (газа), направлено внутрь объема (по внутренней нормали);

2-е свойство: гидростатическое давление в точке жидкости не зависит от ориентации элементарной площадки, воспринимающей давление, т.е. давление p – скалярная величина. Численное значение давления зависит от координат точки.

5.2. Уравнение гидрогазостатики в общем виде. Баротропное равновесие. Поверхности равного давления и их свойства

Уравнение гидрогазостатики (скорость $\bar{v} = 0$) в интегральной форме имеет вид (глава 3, п.3.3.2)

$$\int_w \rho \cdot \bar{J} \cdot dw + \int_S \bar{p}_n \cdot ds = 0, \quad (5.1)$$

где \bar{J} – массовая сила, приходящаяся на единицу массы;
 ρ – массовая плотность;
 w – объем жидкости;
 \bar{p}_n – вектор нормального напряжения в покоящейся жидкости, $\bar{p}_n = -p \cdot \bar{n}$;
 p – гидростатическое давление;
 \bar{n} – орт внешней нормали элемента поверхности s , ограничивающей объем w .

Второе слагаемое уравнения гидрогазостатики (5.1) можно записать, используя формулы векторного анализа, следующим образом:

$$\int_S \bar{p}_n \cdot ds = - \int_S p \cdot \bar{n} \cdot ds = - \int_w \text{grad } p \cdot dw.$$

Тогда уравнение гидростатики в интегральной форме (5.1) будет иметь вид

$$\int_w \rho \cdot \bar{J} \cdot dw = - \int_w \text{grad } p \cdot dw = 0$$

или

$$\int_w (\rho \cdot \bar{J} - \text{grad } p) \cdot dw = 0. \quad (5.2)$$

Поскольку уравнение (5.2) справедливо для любого объема w , то из равенства нулю интеграла следует равенство нулю подынтегрального выражения.

$$\begin{aligned} \rho \cdot \bar{J} - \text{grad } p &= 0 \\ \rho \cdot \bar{J} &= \text{grad } p. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) устанавливает лишь одну связь между двумя неизвестными величинами p и ρ . Поэтому необходимо еще одно уравнение, чтобы система уравнений гидрогазостатики была определенной. Таким вторым уравнением может быть условие $\rho = \text{const}$ либо условие баротропного равновесия, при котором плотность является функцией только давления

$$\rho = f(p). \quad (5.4)$$

Это имеет место, например, когда жидкость (газ) несжимаемая

$$\rho = \text{const}$$

или равновесие политропное

$$\rho = \text{const} \cdot p^{\frac{1}{n}},$$

где n – число (показатель) политропы.

Из дифференциального уравнения гидрогазостатики (5.3) и дополнительной связи между p и ρ (5.4) можно сделать вывод, что в жидкости (газе), у которой плотность постоянная ($\rho = \text{const}$) или равновесие газа политропное ($\rho = \text{const} \cdot p^{1/n}$), при котором плотность является функцией только давления, покой возможен только в поле потенциальных массовых сил.

Действительно, поскольку согласно (5.3) и (5.4),

$$\bar{J} = \frac{1}{\rho(p)} \cdot \text{grad } p, \quad (5.5)$$

то, вводя функцию давления

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}, \quad (5.6)$$

будем иметь

$$\text{grad } P(p) = \frac{dP}{dp} \cdot \text{grad } p = \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p,$$

следовательно,

$$\bar{J} = \text{grad } P, \quad (5.7)$$

т.е. единичная массовая сила \bar{J} равна градиенту скалярной функции P . Значит, как следует из векторного анализа, если ввести скалярную функцию U (или $-\Pi$), отличающуюся от функции P на постоянную, то

$$\bar{J} = -\text{grad } \Pi = \text{grad } U,$$

и проекции вектора \bar{J} на координатные оси

$$J_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad J_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad J_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Функция U называется силовой функцией, а функция Π , отличающаяся от U знаком ($U = -\Pi$), называется потенциалом массовых сил.

Уравнение гидрогазостатики (5.3) можно теперь записать в форме

$$\text{grad } U = \text{grad } P,$$

откуда после интегрирования следует, что в покоящейся несжимаемой жидкости или при баротропном равновесии газа во всех точках объема выполняется равенство

$$U = P + \text{const} . \quad (5.8)$$

Поскольку при баротропном равновесии газа, как сказано выше, плотность является функцией только давления $\rho = f(p)$, то поверхности равного давления, $p = \text{const}$ – изобары, совпадают с поверхностями равной плотности, $\rho = \text{const}$ – изостерами.

Поверхности равного давления в покоящейся жидкости обладают следующими двумя свойствами.

1-е свойство: различные поверхности равного давления не имеют общих точек, т.е. они не пересекаются и не касаются. В противном случае в этих точках было бы различное давление, что невозможно.

2-е свойство: вектор массовой силы \bar{J} нормален к поверхности равного давления в каждой ее точке (рис. 5.1).

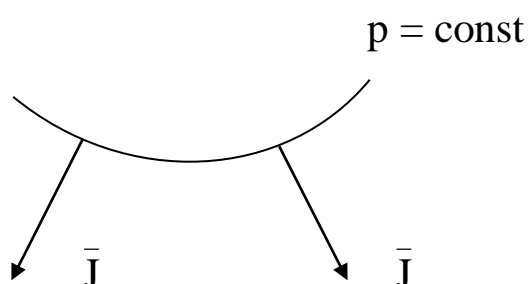


Рис. 5.1. К иллюстрации второго свойства
равного давления

Это свойство вытекает из дифференциального уравнения гидрогазостатики (5.7). Вектор \bar{J} совпадает по направлению с градиентом давления $\text{grad } p$, который нормален к поверхности равного давления, что следует из свойств градиента функции. Значит, и вектор массовой силы \bar{J} нормален к поверхности равного давления.

2-е свойство поверхностей равного давления также следует из простых рассуждений. Действительно, если вектор массовой

силы не был бы нормален к поверхности равного давления, то раскладывая его на нормальную и касательную составляющие, пришли бы к выводу, что касательная составляющая массовой силы вызвала бы перемещение частиц жидкости вдоль поверхности равного давления, т.е. нарушился бы покой жидкости.

5.3. Уравнение гидростатики для случая абсолютного покоя несжимаемой капельной жидкости

В случае абсолютного покоя несжимаемой капельной жидкости в поле силы тяжести расположим координатную плоскость xOy горизонтально, а ось z направим вертикально вверх (рис. 5.2).

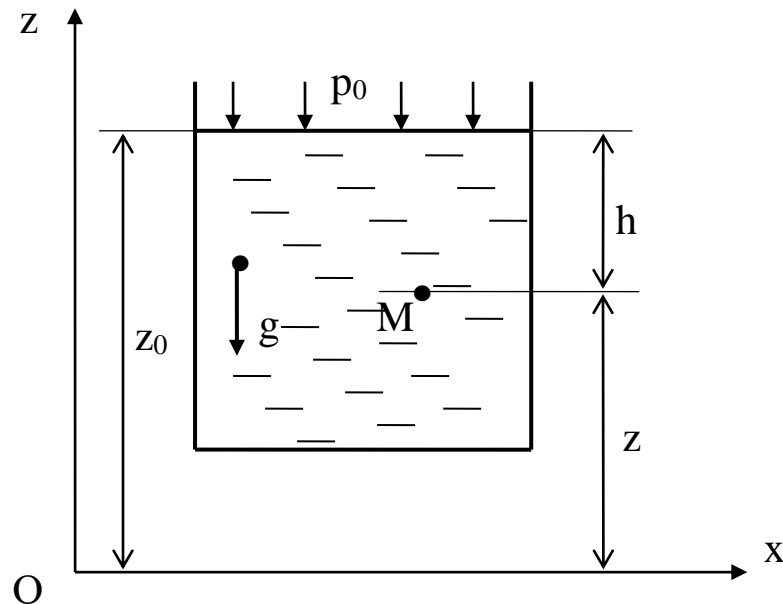


Рис. 5.2. К выводу основного уравнения гидростатики

Поскольку действующая на жидкость массовая сила - только сила тяжести, то при выбранной системе координат проекции единичной массовой силы на оси координат будут равны

$$J_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad J_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad J_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -g.$$

Из этих выражений следует, что силовая функция U является функцией одной координаты z . Значит,

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{dU}{dz} = -g,$$

$$U = -g \cdot z + C_1, \quad (5.9)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

В несжимаемой жидкости плотность ρ постоянна ($\rho = \text{const}$) и

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} + C_2, \quad (5.10)$$

где C_2 – произвольная постоянная.

Подставляя (5.9) и (5.10) в (5.8), получим **уравнение гидростатики для случая абсолютного покоя несжимаемой жидкости в поле силы тяжести.**

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} + g \cdot z &= \text{const} \\ p + \rho \cdot g \cdot z &= \text{const}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Отсюда следует, что гидростатическое давление в рассматриваемом случае линейно зависит от вертикальной координаты и в любой горизонтальной плоскости $z = \text{const}$ оно одно и то же. Т.е. поверхности равного давления – горизонтальные плоскости.

Для определения постоянной в уравнениях (5.11) необходимо знать давление в какой-либо точке жидкости. Например, если на свободной поверхности $z = z_0$ (рис.5.2) известно давление $p = p_0$, то уравнение (5.11) примет вид

$$\frac{p}{\rho} + g \cdot z = \frac{p_0}{\rho} + g \cdot z_0 \quad (5.12)$$

$$p + \rho \cdot g \cdot z = p_0 + \rho \cdot g \cdot z_0.$$

Т.к. $z_0 - z = h$ (рис. 5.2), то последнее уравнение (5.12) можно записать в виде

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h, \quad (5.13)$$

где h – расстояние от свободной поверхности до точки M , в которой определяется давление.

Заметим, что p и p_0 можно считать как абсолютными давлениями, отсчитываемыми от абсолютного нуля в соответствующих точках, так и избыточными давлениями в этих точках $p_{\text{изб}} = p - p_{\text{ат}}$ и $p_{0\text{изб}} = p_0 - p_{\text{ат}}$, отсчитываемыми от атмосферного давления, поскольку при вычитании из правой и левой части (5.13) $p_{\text{ат}}$ равенство не изменится.

Второе слагаемое (5.13) $\rho \cdot g \cdot h$ – давление веса столба данной жидкости высотой h или, короче, **весовое давление**. Оно совпадает с избыточным давлением в точке M только в том случае, когда $p_0 = p_{\text{ат}}$.

Из уравнения гидростатики (5.13) следует, что давление на свободной поверхности p_0 передается во все точки покоящейся жидкости без изменений. Этот факт известен в физике под названием закона Паскаля.

На рис. 5.3, для иллюстрации, показано распределение гидростатического давления по стенкам сосуда, заполненного жидкостью плотности ρ до высоты H (напомним, что в каждой точке стенки давление направлено по нормали к стенке).

Уравнение гидростатики в случае абсолютного покоя несжимаемой жидкости называют основным уравнением гидростатики.

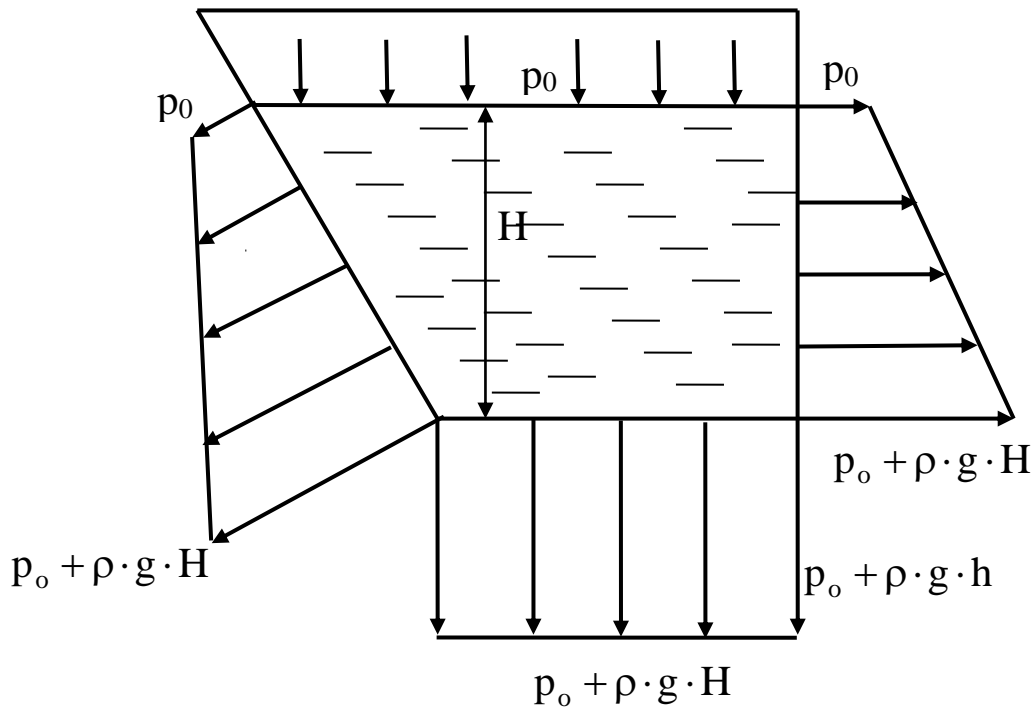


Рис. 5.3. Распределение гидростатического давления по стенкам сосуда

Уравнение гидростатики (5.12), если разделить все члены на g в первой записи или на $\rho \cdot g$ во второй записи, можно представить в виде

$$\frac{p}{\rho \cdot g} + z = \frac{p_0}{\rho \cdot g} + z_0 \quad (5.14)$$

$$\frac{p - p_{\text{атм}}}{\rho \cdot g} + z = \frac{p_0 - p_{\text{атм}}}{\rho \cdot g} + z_0.$$

Каждый член уравнения (5.14) имеет размерность длины, что позволяет, как показано на рис. 5.4, дать наглядную геометрическую иллюстрацию уравнения гидростатики в двух случаях, когда на свободной поверхности давление больше (рис. 5.4, а) и меньше (рис. 5.4, б) атмосферного.

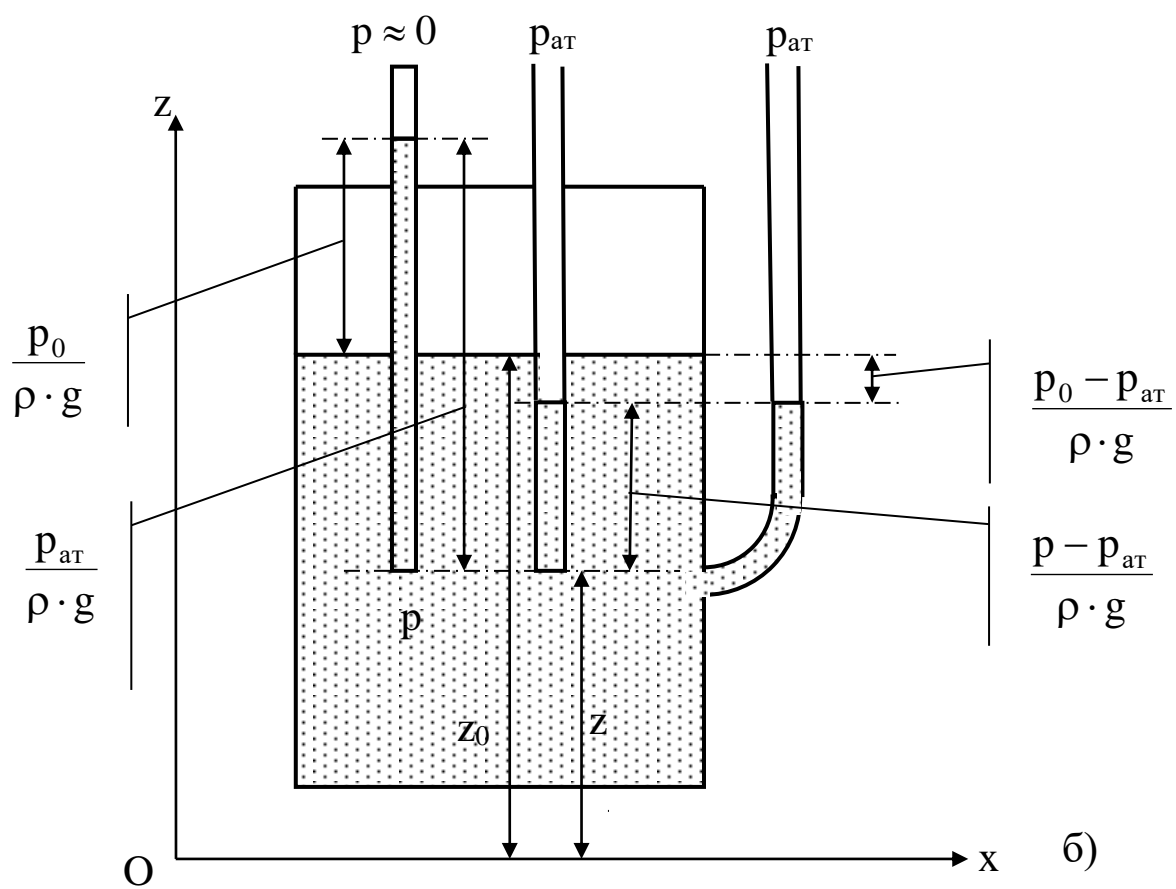
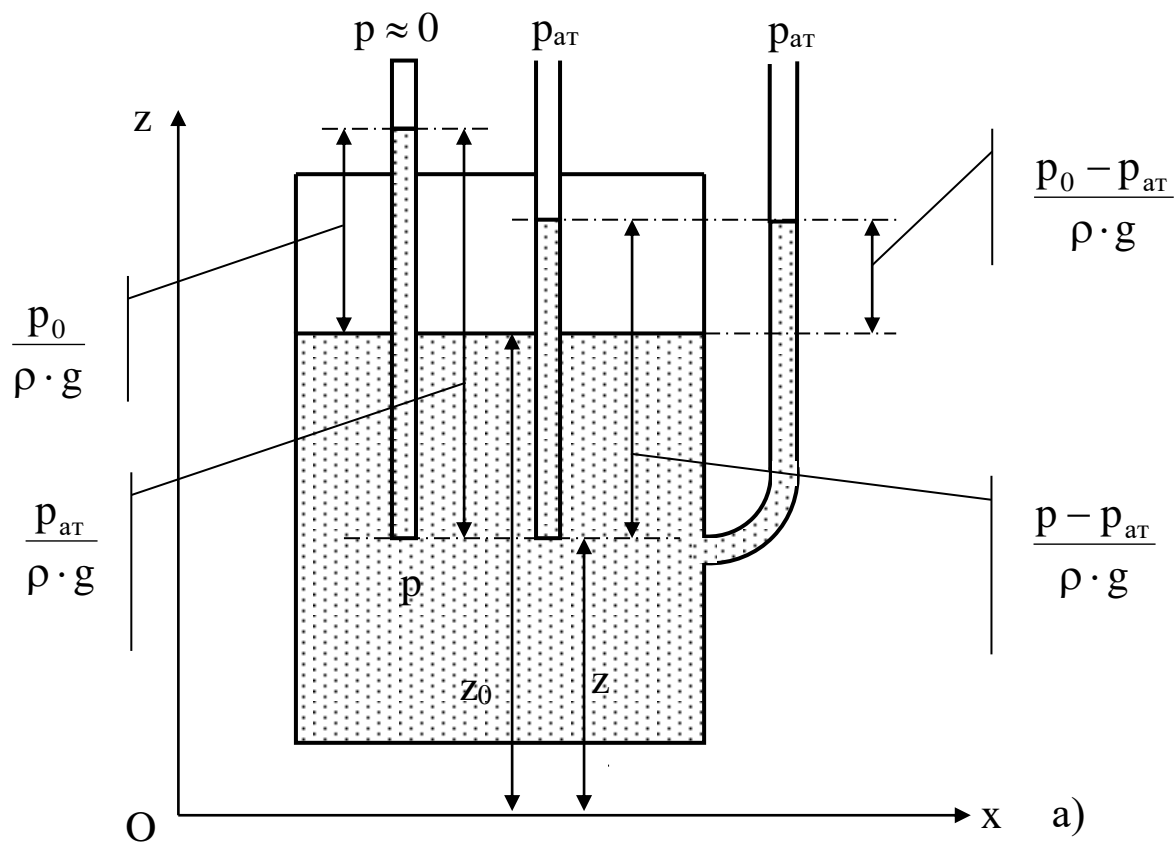


Рис.5.4. Уровни жидкости в пьезометрах и манометрах

Высота столба в трубке, из которой удален воздух, называется приведенной высотой $h_{пр} = \frac{p}{\rho \cdot g}$ (здесь p – абсолютное давление в данной точке жидкости).

Высота столба в трубке, открытой в атмосферу, называется пьезометрической высотой $h_{п} = \frac{p - p_{ат}}{\rho \cdot g}$, в соответствии с этим такая трубка называется пьезометром (рис. 5.4, а). Числитель $h_{п}$, как отмечалось выше, называется избыточным давлением $p_{изб} = p - p_{ат}$ в этой точке жидкости.

Если в данной точке жидкости давление меньше атмосферного (такое состояние называют вакуумом), то вместо избыточного давления вводится понятие вакуумметрического давления $p_{вак} = p_{ат} - p$, чтобы относительное давление выражалось положительным числом.

Следовательно, $p_{изб} = - p_{вак}$.

Высота $h_{вак} = \frac{p_{ат} - p}{\rho \cdot g}$ называется вакуумметрической (рис. 5.4, б).

На рис. 5.5 показаны пьезометрическая и вакуумметрическая высоты для газа, давление которого выше (рис. 5.5, а) и ниже (рис. 5.5, б) атмосферного.

U-образная трубка с жидкостью плотностью ρ в первом случае называется жидкостным манометром, а во втором – жидкостным вакуумметром. По U-образному манометру определяют давление в метрах (сантиметрах, миллиметрах) столба рабочей жидкости, т.е. жидкости манометра.

Уравнение гидростатики (5.12) или (5.14) справедливо для любого положения горизонтальной координатной плоскости xOy (рис. 5.4). Эту горизонтальную плоскость называют плоскостью сравнения геометрических высот z , а саму геометрическую высоту называют еще нивелирной высотой.

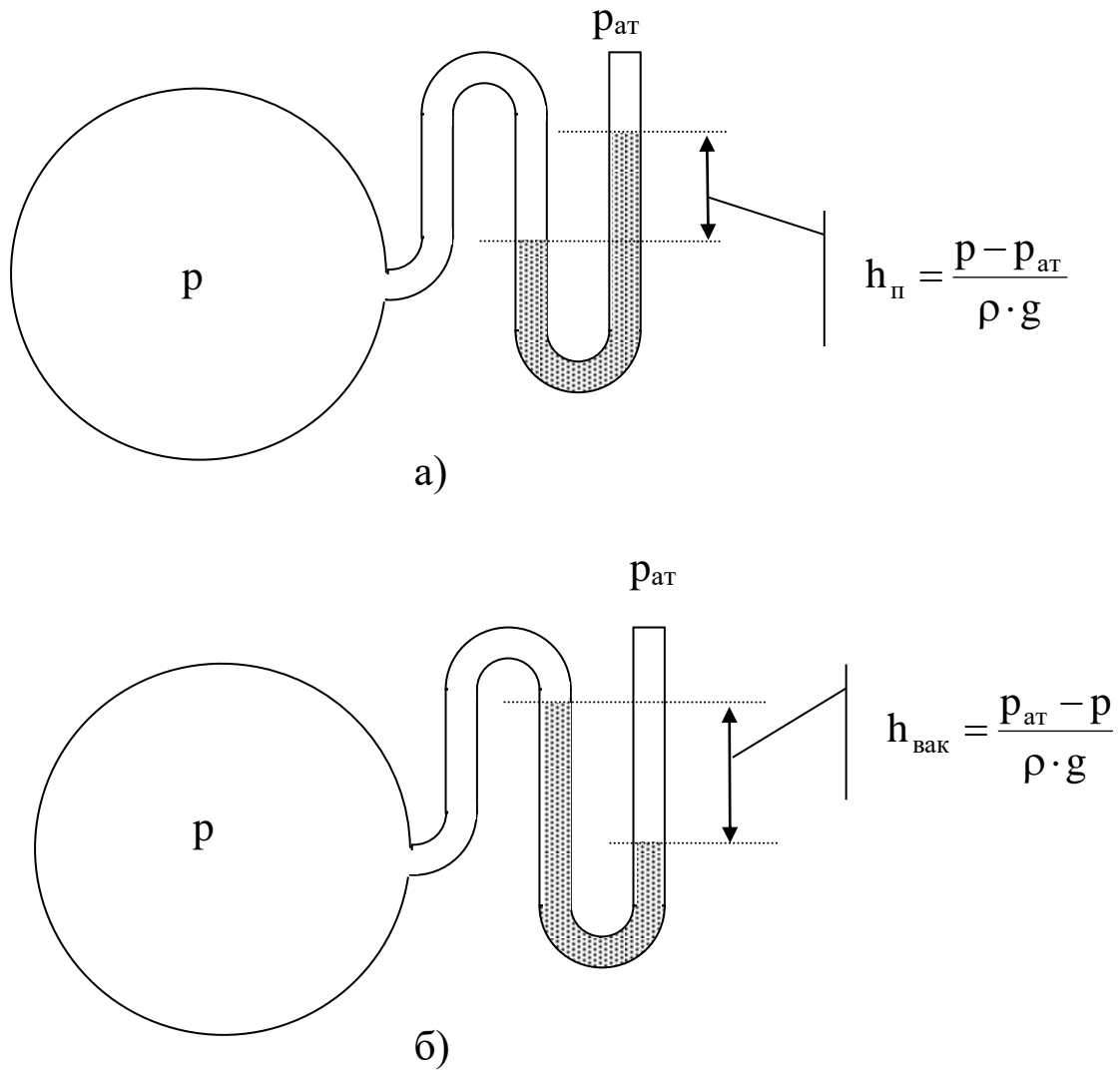


Рис. 5.5. Давление газа в емкостях:
 а) при $p > p_{\text{ат}}$; б) при $p < p_{\text{ат}}$

Величину $H_{\text{ст}} = z + \frac{p}{\rho \cdot g}$, где p – абсолютное давление, называют гидростатическим напором, а $H_{\text{п}} = z + \frac{p - p_{\text{ат}}}{\rho \cdot g}$ – пьезометрическим напором. Из уравнения гидростатики (5.14) следует, что $H_{\text{ст}}$ и $H_{\text{п}}$ постоянны для всех точек однородной покоящейся жидкости, принадлежащей одному и тому же объему. Одним и тем же объемом однородной жидкости называется объем этой покоящейся жидкости, две любые точки

которого можно соединить непрерывной линией, не выходя за пределы объема. На рис. 5.6 показаны точки жидкости, находящейся на горизонтальной плоскости и принадлежащие или не принадлежащие одному и тому же объему покоящейся жидкости.

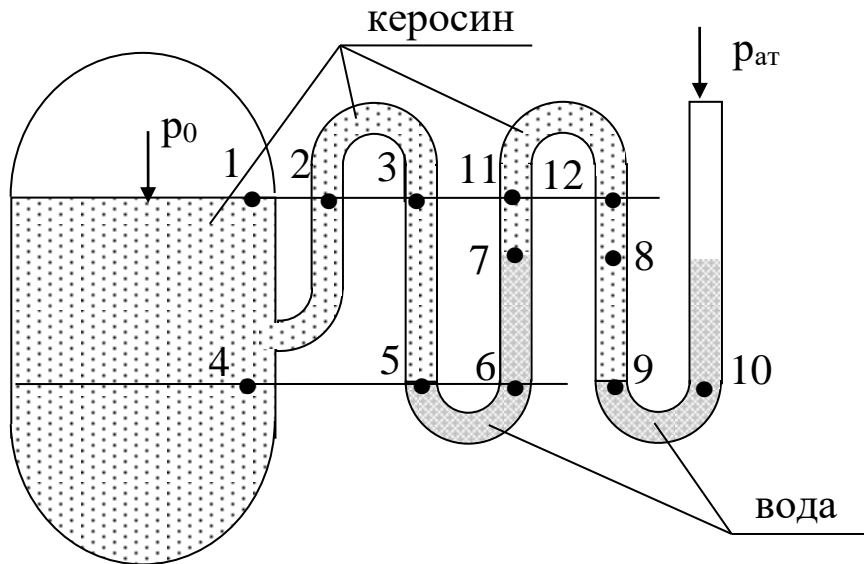


Рис. 5.6. Иллюстрация жидкости, принадлежащей и не принадлежащей одному и тому же объему

Например, точки 1, 2 и 3 принадлежат одному и тому же объему керосина и в них давление одно и то же. Точки 11 и 12 находятся в керосине, лежат в той же горизонтальной плоскости, но не принадлежат тому же объему, т.к. их нельзя соединить непрерывной линией с точками 1, 2 и 3, не выходя из керосина. Поэтому давление в точках 1, 2 и 3 одно и то же, но отличается от давления в точках 11 и 12. Аналогично рассуждая, можно утверждать, что точки 4 и 5 принадлежат одному и тому же объему керосина. Точки 5 и 6 принадлежат одному и тому же объему воды (т.к. точка 5 находится на поверхности раздела керосин-вода и ее можно отнести с одинаковым основанием к керосину и к воде). Поэтому в точках 4, 5 и 6 одно и то же давление. В точках 9 и 10 также одинаковое давление, т.к. они принадлежат одному и тому же объему воды.

5.4. Уравнение гидростатики для случая относительного покоя несжимаемой капельной жидкости

Рассмотрим два случая относительного покоя несжимаемой капельной жидкости, с которыми встречаются на практике:

- покой жидкости по отношению к резервуару, движущемуся с постоянным ускорением, т.е. прямолинейно равноускоренно;
- покой жидкости по отношению к резервуару, вращающемуся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью.

В обоих случаях, рассматривая покой жидкости по отношению к движущемуся с ускорением резервуару, т.е. покой по отношению к неинерциальной системе координат, следует к массовой силе тяжести добавить силы инерции переносного движения (см. п. 5.2).

5.4.1. Покой жидкости в резервуаре, движущемся с постоянным ускорением

Рассмотрим движение резервуара с ускорением $\vec{a} = \text{const}$ вдоль прямой, составляющей угол α с горизонтом (рис.5.7).

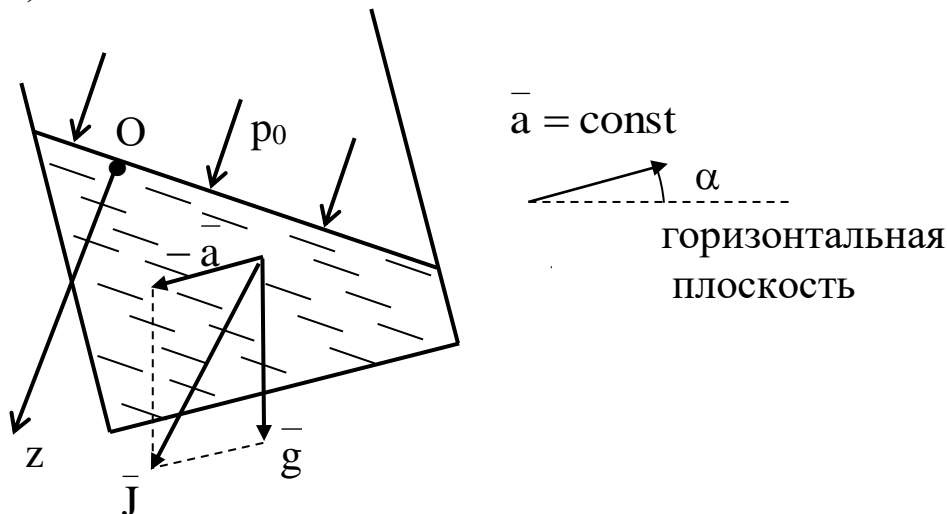


Рис. 5.7. К выводу уравнения гидростатики для случая относительного покоя жидкости в резервуаре, движущемся с постоянным ускорением

Предполагая покой жидкости в резервуаре, т.е. покой жидкости по отношению к системе координат, связанной с сосудом, к массовой силе тяжести, действующей на жидкость, следует добавить силу инерции переносного движения. Суммарная массовая сила \bar{J} , действующая на единицу массы жидкости в любой точке

$$\bar{J} = \bar{g} + (-\bar{a}), \quad (5.15)$$

где \bar{g} – вектор единичной массовой силы тяжести (вектор ускорения силы тяжести);
 $-\bar{a}$ – вектор единичной силы инерции переносного движения.

Покажем, что поле массовых сил \bar{J} потенциальное, и, следовательно, в рассматриваемом движении резервуара с жидкостью покой возможен. Поскольку векторы \bar{J} образуют поле параллельных векторов, то, согласно второму свойству поверхностей равного давления, эти поверхности являются плоскостями, нормальными к вектору \bar{J} .

Расположим координатную плоскость xOy на свободной поверхности плоскости равного давления p_0 , а ось z направим так, как показано на рис.5.7. Тогда, предполагая поле массовых сил \bar{J} потенциальным, т.е., что существует силовая функция U , будем иметь

$$J_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 0; \quad J_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 0; \quad J_z = \frac{\partial U}{\partial z} = J. \quad (5.16)$$

Из выражений (5.16) следует, что силовая функция U является функцией одной координаты z . Значит,

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{dU}{dz} = J, \quad (5.17)$$

$$U = J \cdot z + C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Следовательно, предположение о том, что поле массовых сил в данном случае потенциальное, справедливо, силовая функция имеет вид (5.17).

В несжимаемой жидкости, как показано в п. 5.3,

$$P = \frac{p}{\rho} + C_2, \quad (5.18)$$

где C_2 – произвольная постоянная.

Подставляя (5.17) и (5.18) в (5.8), получим уравнение гидростатики для случая относительного покоя жидкости в резервуаре, движущемся прямолинейно и равноускоренно, т.е. с постоянным ускорением $\bar{a} = \text{const}$

$$\bar{J} \cdot \bar{z} = \frac{p}{\rho} + \text{const}. \quad (5.19)$$

Постоянную в уравнении (5.19) определим из условий на свободной поверхности жидкости (рис.5.7): при $z = 0$ давление $p = p_0$. Уравнение гидростатики примет вид

$$p = p_0 + \rho \cdot \bar{J} \cdot \bar{z}, \quad (5.20)$$

где \bar{J} – определяется по выражению (5.15), а z отсчитывается от свободной поверхности, т.е. по направлению вектора \bar{J} (рис. 5.7).

При $\bar{a} = 0$ уравнение (5.20) примет вид (5.13) – уравнения гидростатики для случая абсолютного покоя.

5.4.2. Покой жидкости в цилиндрическом резервуаре, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью

Выберем систему координат, связанную с резервуаром следующим образом: координатную плоскость xOy расположим в горизонтальной плоскости дна резервуара, а ось z направим вертикально вверх, как показано на рис. 5.8 (H_0 – уровень жидкости в резервуаре до начала вращения).

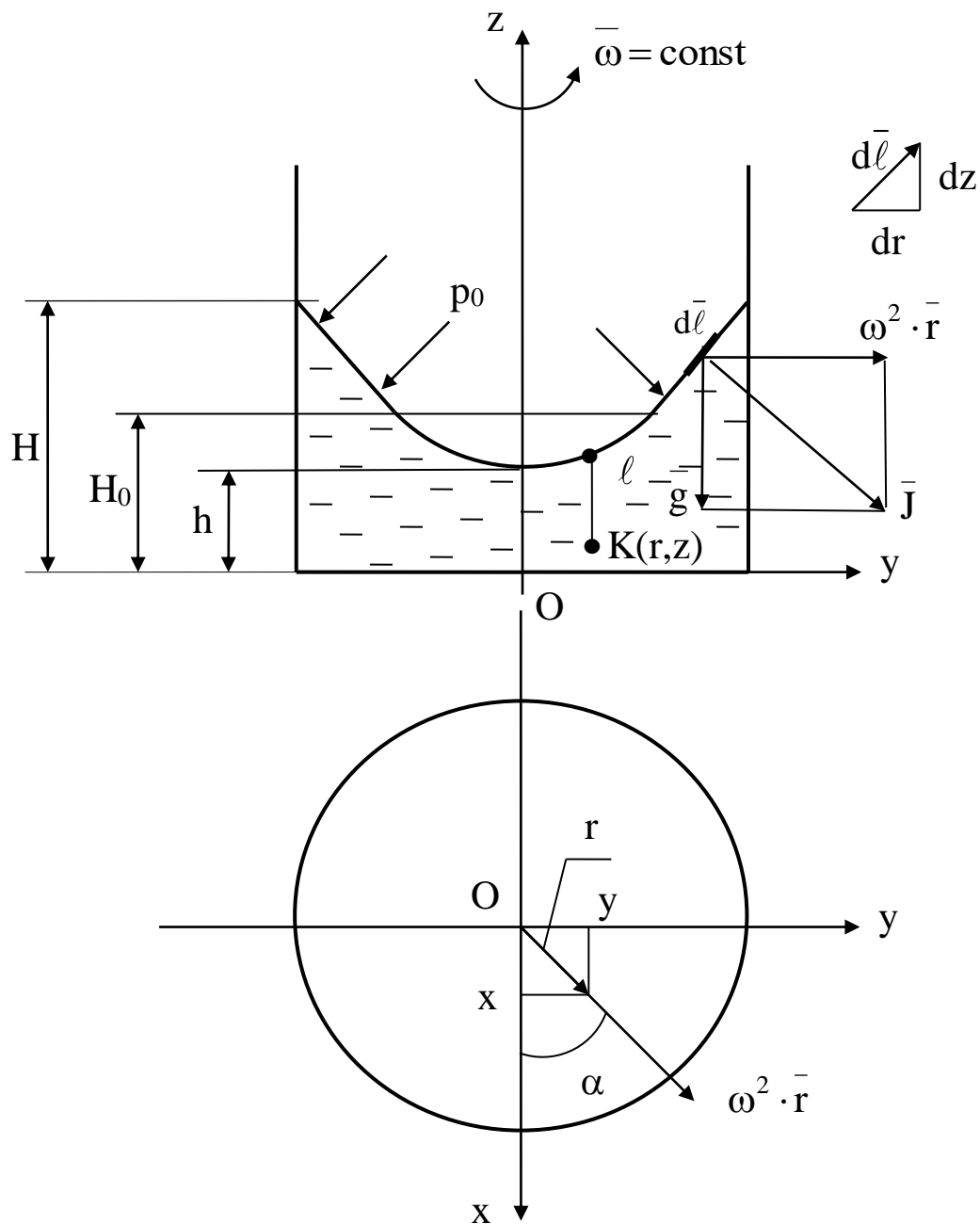


Рис. 5.8. К выводу уравнения гидростатики для случая относительного покоя жидкости в резервуаре, вращающемся относительно вертикальной оси с постоянной угловой скоростью

Предполагая покой жидкости относительно резервуара, к массовой силе тяжести, действующей на жидкость, следует добавить центробежную силу инерции переносного движения.

Суммарная массовая сила \bar{J} , действующая на единицу массы жидкости, будет

$$\bar{J} = \bar{g} + \omega^2 \cdot \bar{r}, \quad (5.21)$$

где \bar{g} – вектор единичной массовой силы тяжести (вектор ускорения силы тяжести);

$\omega^2 \cdot \bar{r}$ – вектор единичной центробежной силы инерции переносного движения;

ω – величина угловой скорости вращения резервуара с жидкостью вокруг вертикальной оси;

\bar{r} – расстояние рассматриваемой точки жидкости до вертикальной оси вращения.

Покажем, что и в этом случае движения резервуара с жидкостью поле массовых сил \bar{J} потенциальное и, следовательно, относительный покой жидкости возможен.

Предполагая существующей силовую функцию, будем иметь

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 \cdot r \cdot \cos \alpha = \omega^2 \cdot r \cdot \frac{x}{r} = \omega^2 \cdot x; \\ J_y &= \frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 \cdot r \cdot \sin \alpha = \omega^2 \cdot r \cdot \frac{y}{r} = \omega^2 \cdot y; \\ J_z &= \frac{\partial U}{\partial z} = -g. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Полный дифференциал силовой функции по определению

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz,$$

т.е.

$$\begin{aligned} dU &= \omega^2 \cdot x \cdot dx + \omega^2 \cdot y \cdot dy - g \cdot dz = \\ &= \omega^2 \cdot d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) - g \cdot dz \end{aligned}$$

или

$$dU = \omega^2 \cdot d\left(\frac{r^2}{2}\right) - g \cdot dz.$$

Интегрируя, получим

$$U = \omega^2 \cdot \frac{r^2}{2} - g \cdot z + C_1, \quad (5.23)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Следовательно, предположение, что поле массовых сил потенциальное, справедливо, силовая функция имеет вид (5.23).

Подставляя (5.23) в (5.8) и учитывая, что в несжимаемой жидкости $P = \frac{p}{\rho}$, получим

$$\omega^2 \cdot \frac{r^2}{2} - g \cdot z = \frac{p}{\rho} + C_2$$

или

$$p = \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r^2}{2} - \rho \cdot g \cdot z + C_3. \quad (5.24)$$

Постоянную в уравнении (5.24) определим из условия на свободной поверхности жидкости (рис.5.8): при $r = 0$ и $z = h$ давление $p = p_0$. Уравнение гидростатики для рассматриваемого случая относительного покоя будет иметь вид

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot (h - z) + \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r^2}{2}. \quad (5.25)$$

Это уравнение позволяет установить форму поверхностей равного давления, например, свободной поверхности жидкости.

Полагая $p = p_0$ и обозначая координату свободной поверхности z_0 , получим

$$p_0 = p_0 + \rho \cdot g \cdot (h - z_0) + \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r^2}{2},$$

откуда

$$z_0 = h + \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g}. \quad (5.26)$$

Уравнение свободной поверхности (5.26) представляет собой уравнение параболоида вращения, вершина которого расположена в точке $z_0 = h$ (рис. 5.8). Аналогично, полагая в уравнении (5.25) давление p равным другой постоянной p_i ($p_i > p_0$), получим уравнения семейства поверхностей равного давления (изобарических поверхностей) – уравнения коаксиальных параболоидов вращения.

Уравнение гидростатики (5.25) можно записать в виде

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot \left(h - z + \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g} \right), \quad (5.27)$$

где выражение в скобке представляет собой расстояние l от свободной поверхности до точки К с координатами r, z (рис. 5.8). Тогда уравнение гидростатики может быть записано, как и в случае абсолютного покоя,

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot l. \quad (5.28)$$

На рис. 5.9 изображено распределение давления по стенкам резервуара в рассматриваемом случае относительного покоя.

Связь между высотой поднятия жидкости у стенок резервуара H , уровнем жидкости до вращения сосуда H_0 и h можно найти из равенства объема жидкости до вращения и при вращении резервуара с жидкостью

$$(H-h) \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2} = (H_0-h) \cdot \pi \cdot R^2,$$

откуда

$$h = 2 \cdot H_0 - H.$$

Уравнение гидростатики, как видно из вышеизложенного, связывает давление в двух точках покоящейся жидкости. Если известны координаты точек и давление в одной из них, то по уравнению гидростатики можно определить давление в другой точке жидкости.

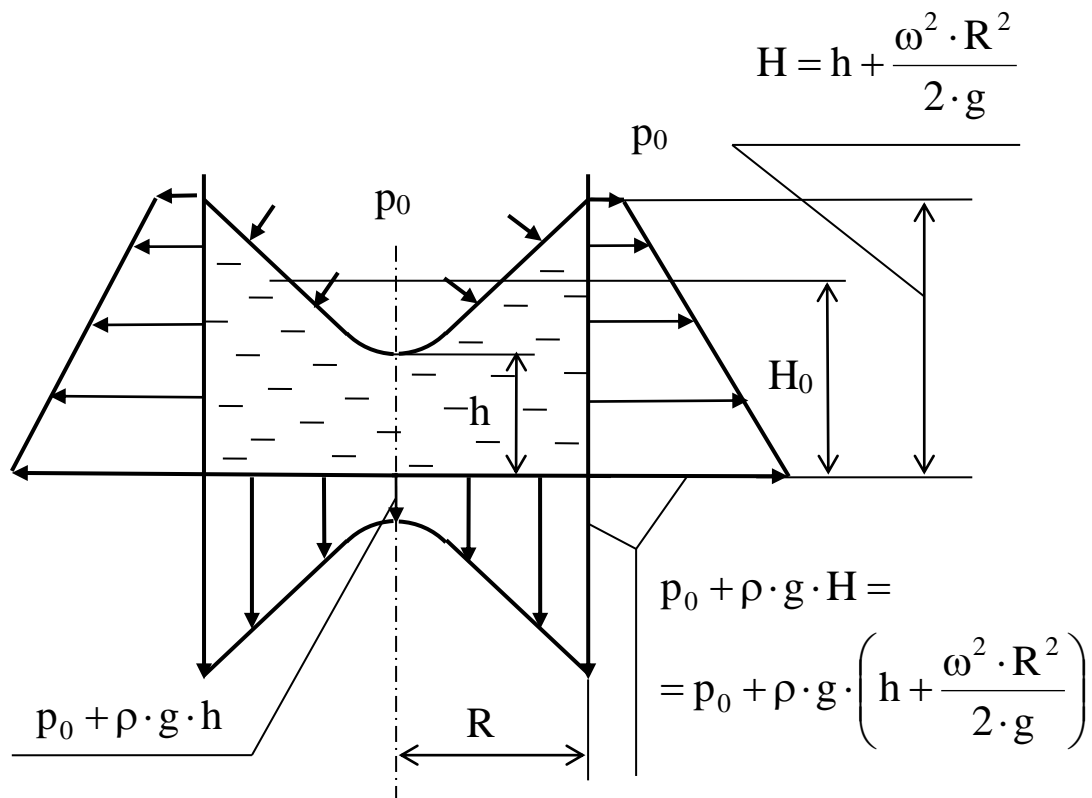


Рис. 5.9. Распределение гидростатического давления по стенкам резервуара с жидкостью при его вращении вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью

5.5. Газостатика атмосферы

5.5.1. Изотермическая атмосфера

Положим, что воздух имеет постоянную температуру T и находится в состоянии равновесия под действием силы тяжести. Такая атмосфера, удовлетворяющая условию $T = \text{const}$, называется *изотермической*. Рассмотрим условия ее покоя.

Уравнение равновесия в общем виде

$$U = P + \text{const} ,$$

где P определяется выражением (5.6). В дифференциальном виде уравнение равновесия можно записать

$$dU = \frac{dp}{\rho} . \quad (5.29)$$

Направим координатную ось z вверх, нормально к поверхности земли. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{dU}{dz} = -g,$$

откуда

$$dU = -g \cdot dz .$$

Уравнение (5.29) примет вид

$$-g \cdot dz = \frac{dp}{\rho} , \quad (5.30)$$

где плотность ρ связана с давлением p и абсолютной температурой T уравнением состояния идеальных газов

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T, \quad (5.31)$$

где R – газовая постоянная.

Отсюда

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T}. \quad (5.32)$$

Подставляя в (5.30) выражение ρ (5.32), получим

$$-g \cdot dz = R \cdot T \cdot \frac{dp}{p}, \quad (5.33)$$

откуда, интегрируя, найдем

$$-g \cdot z = R \cdot T \cdot \ln p + C. \quad (5.34)$$

Для определения постоянной C необходимо знать значение давления p на какой-либо высоте z . Положим, что при $z = 0$ давление $p = p_0$. Тогда из (5.34)

$$R \cdot T \cdot \ln p_0 + C = 0,$$

откуда

$$C = -R \cdot T \cdot \ln p_0.$$

Теперь (5.34) можно записать

$$-g \cdot z = R \cdot T \cdot (\ln p - \ln p_0)$$

или

$$z = \frac{R \cdot T}{g} \cdot \ln \frac{p_0}{p}. \quad (5.35)$$

Следовательно,

$$\frac{p_0}{p} = e^{\frac{g \cdot z}{R \cdot T}}.$$

Поскольку при изотермическом процессе

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p}{\rho},$$

то

$$\frac{p_0}{p} = \frac{\rho_0}{\rho} = e^{\frac{g \cdot z}{R \cdot T}}. \quad (5.36)$$

Эти соотношения позволяют определять давление p и плотность ρ воздуха при изотермическом покое на любой высоте z , если известны значения этих величин у поверхности земли.

5.5.2. Политропная атмосфера

Рассмотрим также покой атмосферного воздуха в случае, когда его температура убывает с высотой по линейному закону, подчиняясь зависимости

$$T = T_0 - a \cdot z, \quad (5.37)$$

где T_0 – абсолютная температура у поверхности земли ($z = 0$);

a – положительный постоянный коэффициент, определяющий быстроту убывания температуры с высотой.

Атмосфера, удовлетворяющая условию (5.37), называется политропной, т.к. в этом случае, как показано ниже, между давлением и плотностью существует связь, выражаемая уравнением политропы.

Подставляя значение T из уравнения (5.37) в (5.31), будем иметь

$$\rho = \frac{p}{R \cdot (T_0 - a \cdot z)}. \quad (5.38)$$

При этом уравнение (5.30) легко приводится к такому виду:

$$-\frac{g \cdot dz}{R \cdot (T_0 - a \cdot z)} = \frac{dp}{p}. \quad (5.39)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{g}{a \cdot R} \cdot \ln(T_0 - a \cdot z) = \ln p + C, \quad (5.40)$$

где постоянная C находится из того условия, что при $z = 0$ давление $p = p_0$, следовательно,

$$C = \frac{g}{a \cdot R} \cdot \ln T_0 - \ln p_0. \quad (5.41)$$

С учетом (5.41) интеграл (5.40) запишется

$$\frac{g}{a \cdot R} \cdot \ln(T_0 - a \cdot z) = \ln p + \frac{g}{a \cdot R} \cdot \ln T_0 - \ln p_0,$$

откуда

$$\frac{g}{a \cdot R} \cdot \ln \left(1 - \frac{a}{T_0} \cdot z \right) = \ln \frac{p}{p_0}. \quad (5.42)$$

Из (5.42) выразим $\frac{p}{p_0}$:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{a}{T_0} \cdot z \right)^{\frac{g}{a \cdot R}}. \quad (5.43)$$

Таким оказывается закон изменения давления с высотой в случае политропной атмосферы.

Найдем теперь изменение плотности воздуха с высотой.

Согласно уравнению состояния

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T,$$

соответственно,

$$\frac{p_0}{\rho_0} = R \cdot T_0.$$

Отсюда

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho \cdot T}{\rho_0 \cdot T_0}$$

или

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \left(1 - \frac{a}{T_0} \cdot z \right). \quad (5.44)$$

Из (5.43) следует

$$1 - \frac{a}{T_0} \cdot z = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{a \cdot R}{g}}. \quad (5.45)$$

Подставляя (5.45) в (5.44), получим

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{a \cdot R}{g}}$$

или

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)^{1 - \frac{a \cdot R}{g}} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

откуда

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{1 - \frac{a \cdot R}{g}}}. \quad (5.46)$$

Обозначая

$$\frac{1}{1 - \frac{a \cdot R}{g}} = n,$$

получим уравнение политропы

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n. \quad (5.47)$$

Для тропосферы, простирающейся от поверхности земли до высоты примерно в 11 км, численное значение показателя n примерно равно 1,2.

5.6. Элементарный вывод основного уравнения гидростатики

Из изложенного в п.5.2, при заданном движении резервуара с жидкостью, можно было заранее предсказать, возможен ли покой жидкости. А именно, если массовые силы, действующие на жидкость, потенциальны, то покой возможен. В п.п. 5.3 и 5.4 рассмотрены эти случаи покоя жидкости и для них выведено уравнение гидростатики.

Уравнение гидростатики для случаев абсолютного покоя (п. 5.3) и двух случаев относительного покоя (п.п. 5.4.1 и 5.4.2) можно вывести проще.

Покажем простой вывод уравнения гидростатики для случая абсолютного покоя. В этом случае массовые силы – силы тяжести – направлены вертикально вниз. Поверхности равного давления, нормальные к массовым силам – горизонтальные

плоскости. Выделим объем жидкости в форме цилиндра (рис. 5.10) с вертикальными образующими $h=z_0-z$ и горизонтальными торцами площадью s .

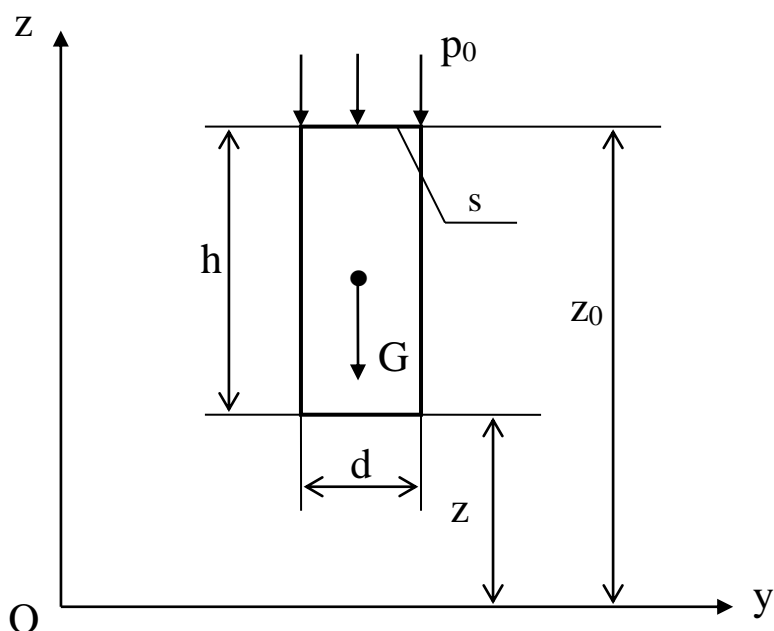


Рис. 5.10. К элементарному выводу основного уравнения гидростатики

Поскольку жидкость находится в покое, то уравнение равновесия сил, действующих на выделенный объем жидкости, в проекции на вертикальную ось Oz будет иметь вид

$$p_0 \cdot s + G = p \cdot s. \quad (5.48)$$

Поскольку

$$G = \rho \cdot g \cdot h \cdot s,$$

то уравнение (5.48) примет вид

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h, \quad (5.49)$$

где ρ – массовая плотность;
 g – ускорение силы тяжести;
 $h = z_0 - z$.

Тогда

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho \cdot g}. \quad (5.50)$$

Уравнение (5.49) или (5.50) называется, как отмечалось выше, основным уравнением гидростатики.

5.7. Силы гидростатического давления, действующие на стенки резервуара

Уравнение гидростатики позволяет определять силы давления, действующие на стенки резервуара.

5.7.1. Силы гидростатического давления, действующие на плоские стенки

Определим силу гидростатического давления, действующую на участок плоской стенки площадью s (рис. 5.11).

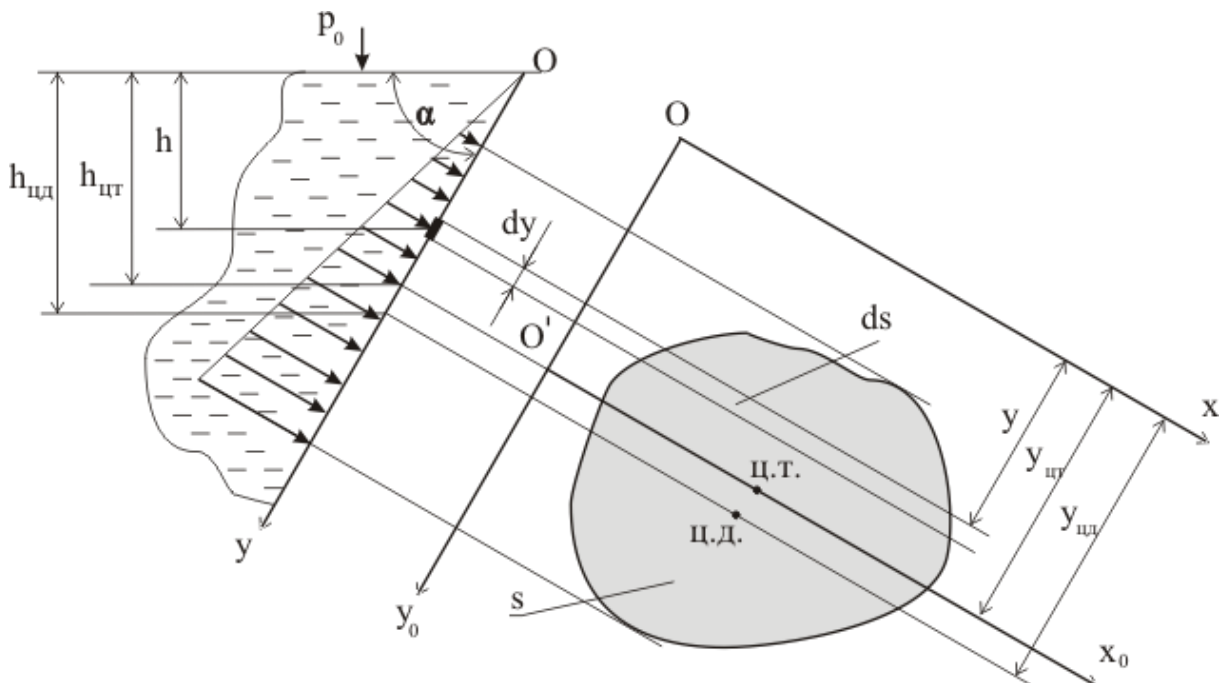


Рис.5.11. К определению силы гидростатического давления жидкости на плоскую стенку

Согласно уравнению гидростатики давление в любой точке поверхности определяется по выражению (5.49)

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h,$$

где в данном случае

$$h = y \cdot \sin \alpha. \quad (5.51)$$

Искомая сила

$$D = \int_S (p_0 + \rho \cdot g \cdot y \cdot \sin \alpha) \cdot ds$$

или

$$D = \int_S p_0 \cdot ds + \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \int_S y \cdot ds. \quad (5.52)$$

В последнем выражении $\int_S y \cdot ds$ представляет собой статический момент площади s относительно оси Ox . Как известно,

$$\int_S y \cdot ds = y_{\text{ц.т.}} \cdot s, \quad (5.53)$$

где $y_{\text{ц.т.}}$ – ордината центра тяжести площади.

Окончательно

$$P = p_0 \cdot s + \rho \cdot g \cdot y_{\text{ц.т.}} \cdot \sin \alpha \cdot s \quad (5.54)$$

или с учетом (5.51)

$$P = p_0 \cdot s + \rho \cdot g \cdot h_{\text{ц.т.}} \cdot s. \quad (5.55)$$

Второе слагаемое в (5.55) представляет собой силу весового давления жидкости на плоскую стенку площадью s . Распределение весового давления показано на рис.5.11.

5.7.2. Центр давления

Центром давления называется точка пересечения линии действия силы давления с плоскостью стенки. Для определения координаты центра давления воспользуемся известным фактом из курса теоретической механики: момент равнодействующей силы равен сумме моментов составляющих сил. Поскольку давление p_0 на свободной поверхности передается во все точки площади s без изменения, то центр давления части силы P , а именно, $p_0 \cdot s$ совпадает с центром тяжести площади s . Поэтому будем искать центр давления силы весового давления на стенку $\rho \cdot g \cdot y_{ц.т.} \cdot \sin \alpha \cdot s$.

Составим уравнения моментов относительно оси Ox силы весового давления и ее составляющих

$$\rho \cdot g \cdot y_{\ddot{o}.\ddot{o}.} \cdot \sin \alpha \cdot s \cdot y_{\ddot{o}..\ddot{a}.} = \int_s \rho \cdot g \cdot y \cdot \sin \alpha \cdot y \cdot ds, \quad (5.56)$$

откуда после сокращения на $\rho \cdot g \cdot \sin \alpha$ получим

$$y_{\ddot{o}..\ddot{a}.} \cdot s \cdot y_{\ddot{o}..\ddot{a}.} = \int_s y^2 \cdot ds. \quad (5.57)$$

В последнем выражении интеграл справа является моментом инерции J_x площади s относительно оси Ox .

Известно, что момент инерции J_x площади s относительно оси Ox связан с моментом инерции J_{x_0} этой площади относительно центральной оси $O'x_0$ (проходящей через центр тяжести площади параллельно оси Ox) следующим соотношением:

$$J_x = J_{x_0} + a^2 \cdot s, \quad (5.58)$$

где a – расстояние между осями Ox и $O'x_0$.

В нашем случае

$$a = y_{ц.т.},$$

поэтому

$$J_x = J_{x_0} + y_{ц.т.}^2 \cdot s. \quad (5.59)$$

Следовательно, из (5.57)

$$y_{\ddot{o}..\ddot{a}.} = \frac{\int y^2 \cdot ds}{y_{\ddot{o}..\ddot{d}.} \cdot s} = \frac{J_{x_0} + y_{\ddot{o}..\ddot{d}.}^2 \cdot s}{y_{\ddot{o}..\ddot{d}.} \cdot s},$$

откуда

$$y_{ц.д.} = y_{ц.т.} + \frac{J_{x_0}}{y_{ц.т.} \cdot s}. \quad (5.60)$$

Как видно из (5.60), ордината центра давления силы весового давления расположена ниже ординаты центра тяжести.

В общем случае, когда площадь s не симметрична относительно оси Oy , следует аналогично определять координату $x_{ц.д.}$. Ось Oy_0 проходит через центр тяжести площади параллельно оси Oy .

5.7.3. Силы гидростатического давления, действующие на криволинейные поверхности

Если поверхность стенок резервуара криволинейная, то силу гидростатического давления, действующую на нее (рис. 5.12), можно определить по выражению

$$\bar{D} = \int_s p \cdot \bar{n} \cdot ds, \quad (5.61)$$

где \underline{p} – давление;
 \bar{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности;
 s – площадь поверхности стенки резервуара.

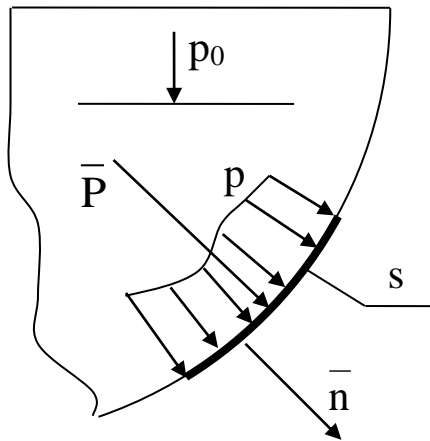


Рис. 5.12. К определению силы гидростатического давления \bar{P} на криволинейную стенку резервуара

Операции интегрирования (5.61) при определении силы \bar{P} можно избежать, если находить горизонтальную $P_{\bar{a}}$ и вертикальную $P_{\bar{b}}$ составляющие силы следующим образом.

Горизонтальная составляющая $P_{\bar{a}}$ силы \bar{P} . Выделим объем жидкости в форме цилиндра с горизонтальными образующими, левый торец которого является проекцией участка стенки s на вертикальную плоскость s_b , а правый торец – выделенный участок стенки s (рис. 5.13).

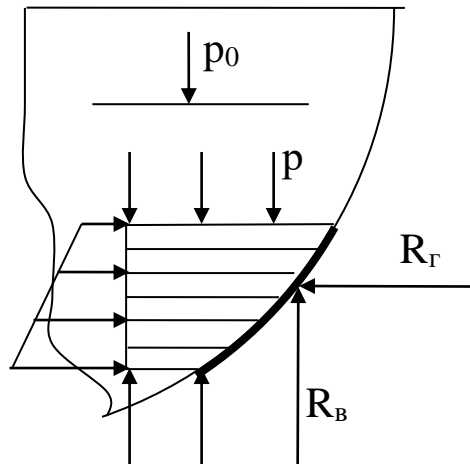


Рис. 5.13. К определению горизонтальной составляющей $P_{\hat{a}}$ силы \bar{P}

Поскольку выделенный объем жидкости находится в покое, силы, действующие на него, уравновешены. Спроектируем все силы на горизонтальную ось.

$$(p_0 + \rho \cdot g \cdot h_{\text{ц.т.}}) \cdot s_{\text{в}} - R_{\text{г}} = 0, \quad (5.62)$$

где первое слагаемое в (5.62) – сила давления, действующая на плоскую поверхность – левый торец выделенного объема в форме цилиндра, а $R_{\text{г}}$ – горизонтальная составляющая реакции стенки, численно равная горизонтальной составляющей силы давления $P_{\hat{a}}$; $h_{\text{ц.т.}}$ – расстояние центра тяжести площади $s_{\text{в}}$ относительно свободной поверхности.

Следовательно,

$$P_{\hat{a}} = (p_0 + \rho \cdot g \cdot h_{\text{о.о.}}) \cdot s_{\hat{a}}. \quad (5.63)$$

Сила $P_{\hat{a}}$ приложена в центре давления площади $s_{\text{в}}$.

Вертикальная составляющая $P_{\hat{a}}$ силы \bar{P} . Для нахождения вертикальной составляющей $P_{\hat{a}}$ силы \bar{P} выделим объем жидкости в форме цилиндра с вертикальными образующими (рис. 5.14).

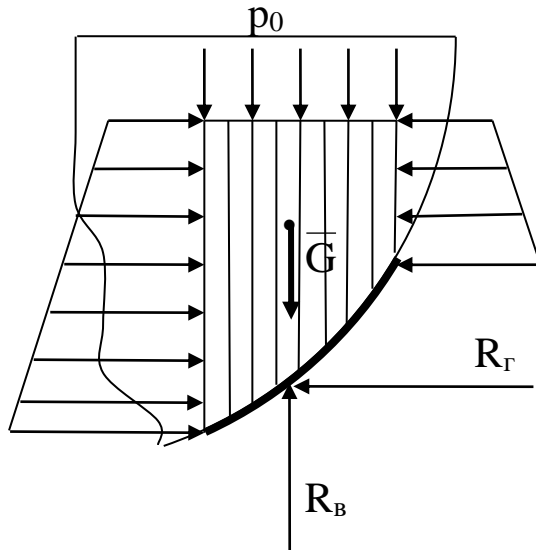


Рис.5.14. К определению вертикальной составляющей $P_{\hat{a}}$ силы \bar{P}

Верхний торец выделенного объема цилиндра представляет собой проекцию площади s на горизонтальную плоскость (свободную поверхность жидкости) s_{Γ} , а нижний торец - рассматриваемый участок криволинейной поверхности стенки резервуара s . Поскольку выделенный объем находится в покое, силы, действующие на него, уравновешены.

Спроектируем все силы на вертикальную ось

$$p_0 \cdot s_{\Gamma} + G - R_{\text{В}} = 0, \quad (5.64)$$

где первое слагаемое – сила давления, действующая на плоский верхний торец выделенного объема в форме цилиндра, а $R_{\text{В}}$ – вертикальная составляющая реакции стенки, численно равная вертикальной составляющей силы давления $P_{\hat{a}}$. G – вес жидкости в выделенном объеме.

Следовательно,

$$P_{\hat{a}} = p_0 \cdot s_{\hat{a}} + G. \quad (5.65)$$

Таким образом величина силы P будет равна

$$P = |\bar{P}| = \sqrt{P_{\hat{a}}^2 + P_{\hat{a}}^2}. \quad (5.66)$$

Раздел 6 УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПО ТРУБАМ И КАНАЛАМ

В этом разделе рассматривается установившееся изотермическое течение несжимаемой жидкости. Полученные в нем результаты пригодны для решения задач, связанных с течением реальной капельной жидкости, в силу ее слабой сжимаемости, а также для газа, когда его сжимаемостью можно пренебречь.

6.1. Режимы течения жидкости

Разные законы сопротивления движению жидкости в трубах, обнаруженные на практике, были объяснены после того, как в конце XIX в. Осборн Рейнольдс опытным путем установил наличие двух характерных режимов течения жидкости: слоистого (ламинарного) и беспорядочного (турбулентного).

При ламинарном движении вихри (вращающиеся частицы жидкости) движутся вдоль слоев, а при турбулентном движении – слои разрушаются, и вихри беспорядочно перемещаются вдоль и поперек потока.

Рейнольдс проводил опыты на простом приборе, схема которого представлена на рис. 6.1.

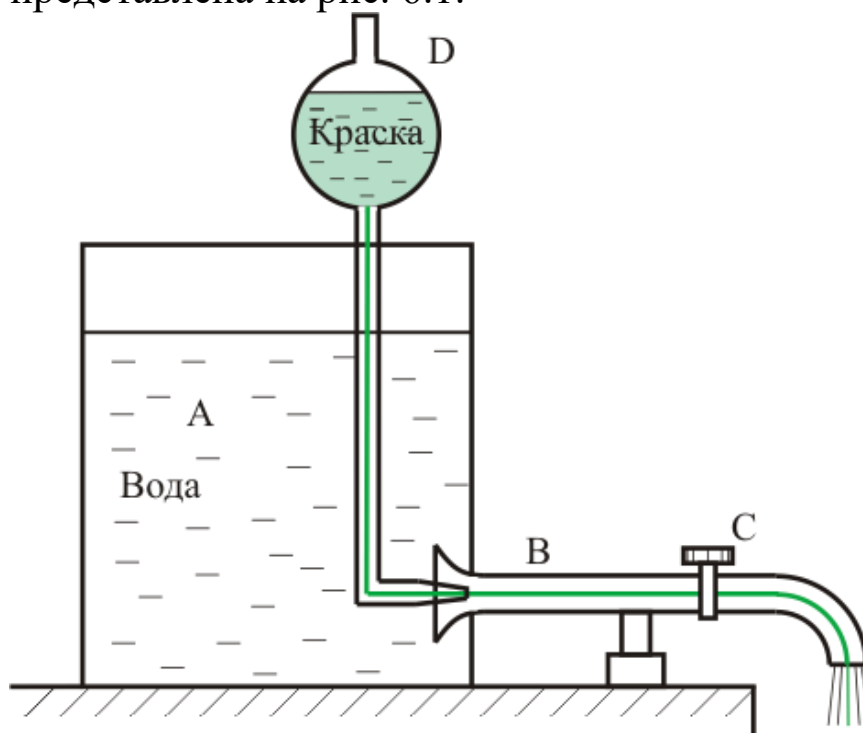


Рис.6.1. Схема прибора Рейнольдса

Жидкость из бака А поступает в стеклянную круглую трубу В и вытекает в атмосферу через кран С. В трубу В по тонкой трубке из бачка D поступает окрашенная та же жидкость, что и в баке А.

С помощью крана С регулируется скорость течения в трубе В. По поведению окрашенной струйки можно судить о характере течения жидкости в трубе В.

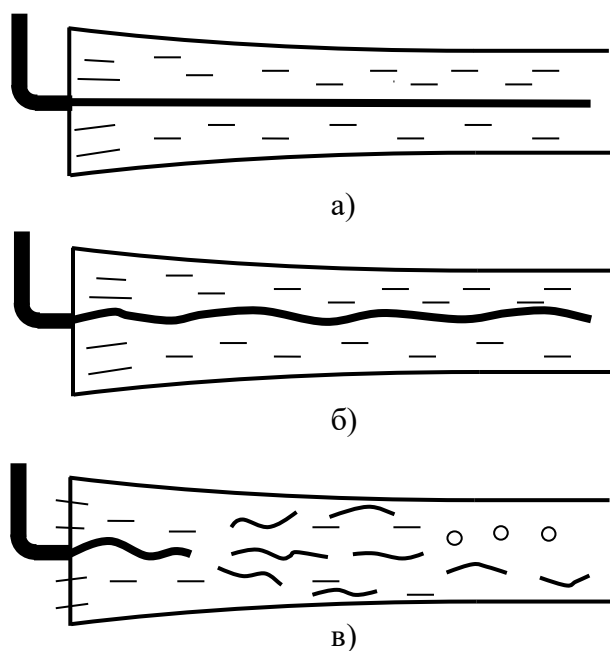


Рис. 6.2. Режимы течения жидкости в трубе:
 а) ламинарное (слоистое);
 б) переходное;
 в) турбулентное

Оказывается, что при малых скоростях течения окрашенная струйка не смешивается с окружающей ее жидкостью (рис. 6.2, а).

При увеличении скорости течения струйка искривляется и принимает волнообразную форму (рис. 6.2, б). При дальнейшем увеличении скорости течения за некоторое ее критическое значение струйка вблизи от входа размывается, и жидкость в трубе В оказывается равномерно окрашенной по всему объему трубы (рис.6.2, в).

Разрушение окрашенной струйки и перемешивание частиц жидкости указывает на наличие в трубе В особого типа течения, при котором

вращающиеся частицы жидкости (вихри) совершают сложные индивидуальные движения.

Упорядоченное, слоистое течение жидкости (рис. 6.2, а), наблюдаемое при малых скоростях течения, называется **ламинарным**. Второй же тип течения (рис. 6.2, в) называется **турбулентным**. При турбулентном течении наблюдаются пульсации скорости, как по величине, так и по направлению, в

каждой точке турбулентного потока. Турбулентное течение, строго говоря, является всегда неустановившимся.

Поскольку структура ламинарного и турбулентного потоков различна, различным будет и сопротивление течению жидкости в этих двух случаях. Поэтому важно знать, когда и при каких условиях будет иметь место тот или иной тип течения жидкости.

Проводя исследования с трубами различного диаметра и с разного рода жидкостями, Рейнольдс установил, что характер течения жидкости определяется, вообще говоря, не скоростью течения, а безразмерным числом $\frac{v \cdot d}{\nu}$, названным в его честь числом Рейнольдса.

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu}, \quad (6.1)$$

где v – средняя скорость течения жидкости в трубе (3.17);

d – диаметр трубы;

ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Было установлено, что если $Re < 2300$, то течение в круглой трубе будет ламинарным. Если же $Re > 4000$, то движение в трубе будет турбулентным. При значениях чисел Рейнольдса 2300 – 4000 наблюдается переходный режим течения от ламинарного к турбулентному.

В лабораторных условиях при отсутствии внешних возмущений в гладких трубах удавалось наблюдать ламинарное течение при $Re = 50000$ и более. Однако такое ламинарное течение было неустойчивым и при незначительных возмущениях переходило в режим турбулентного течения.

На практике всегда имеют место внешние возмущения, и принято считать, что если $Re \leq 2300$, течение жидкости в круглой трубе будет устойчивым ламинарным, а при $Re > 2300$ – турбулентным. Число Рейнольдса $Re_{кр} = 2300$ называется критическим числом Рейнольдса.

Для круглой трубы, если выразить среднюю скорость через объемный расход Q

$$v = \frac{Q}{\pi \cdot d^2 / 4}, \quad (6.2)$$

то число Рейнольдса можно записать в виде

$$Re = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d \cdot v}. \quad (6.3)$$

Учитывая, что кинематический коэффициент вязкости $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ (1.26), где μ – динамический коэффициент вязкости, число Рейнольдса можно записать в следующем виде:

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\mu} \quad (6.4)$$

или

$$Re = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q}{\pi \cdot d \cdot \mu}. \quad (6.5)$$

6.2. Общие сведения о гидравлических сопротивлениях

Гидравлические сопротивления приводят к уменьшению энергии потока при течении жидкости (газа) по трубам и каналам. Принято разделять гидравлические сопротивления на сопротивления на прямолинейных участках труб и каналов – **сопротивления трения**, и сопротивления, связанные с деформацией потока на коротких участках труб и каналов – **местные сопротивления**.

Общее гидравлическое сопротивление на некотором участке трубы или канала при совокупном действии трения и деформации потока определяют по принципу суперпозиции простым суммированием этих двух видов гидравлических сопротивлений.

Потери удельной энергии (напора) выражаются в системе СИ в следующих единицах:

- для энергии единицы массы в метрах квадратных деленных на секунду в квадрате ($\text{м}^2 / \text{с}^2$);

- для энергии единицы объема в паскалях ($\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$);

- для энергии единицы веса в метрах (м).

Если местные сопротивления, вызывающие деформацию потока (дроссель, фильтр, кран и т.п.), расположены близко друг от друга так, что имеет место взаимное влияние одного местного сопротивления на другое, то их рассматривают как единое местное сопротивление.

Величину потерь удельной энергии (потерь энергии единицы веса, массы или объема) на *трение* при ламинарном движении можно определить по теоретической формуле (п.6.3), а при турбулентном движении, поскольку нет строгой теории турбулентного движения, по эмпирическим или полуэмпирическим формулам (п.6.4).

Потери удельной энергии в *местных сопротивлениях* определяются, за некоторым исключением, по эмпирическим формулам как при ламинарном, так и при турбулентном движении жидкости или газа (п.6.5).

6.3. Ламинарное течение жидкости в круглой цилиндрической трубе

Рассмотрим установившееся ламинарное течение на участке трубы ℓ радиуса r_0 вдали от входа в нее (рис.6.3). Найдем распределение скорости по сечению трубы, выражение объемного расхода и потери удельной энергии на вязкое трение.

Выделим цилиндрический объем жидкости радиуса r и длиной образующей ℓ . Поскольку установившееся движение в цилиндрической трубе будет равномерным, то силы, действующие на выделенный объем, будут уравновешенными. Спроектируем эти силы на ось трубы.

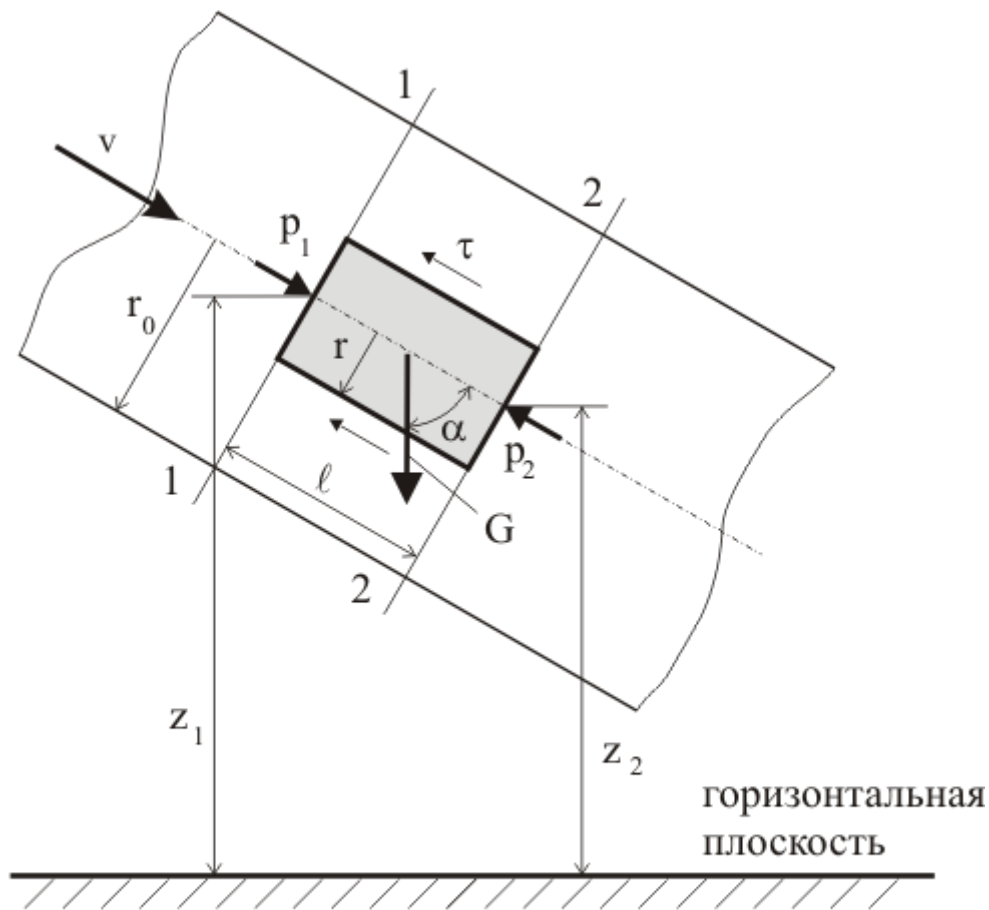


Рис.6.3. К выводу распределения скорости ламинарного течения в цилиндрической трубе

$$p_1 \cdot \pi \cdot r^2 + G \cdot \cos \alpha - 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \tau - p_2 \cdot \pi \cdot r^2 = 0 \quad (6.6)$$

где p_1 , p_2 – давления в центрах торцов выделенного цилиндрического объема жидкости;

$2 \cdot \pi \cdot r \cdot l$ – площадь боковой поверхности выделенного цилиндра;

G – вес выделенного цилиндра жидкости,

$$G = \gamma \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l = g \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l;$$

$$\cos \alpha = \frac{z_1 - z_2}{l};$$

τ – напряжение вязкого трения (1.25), $\tau = -\mu \frac{dv}{dr}$;

μ – динамический коэффициент вязкости.

Уравнение (6.6) запишется

$$p_1 \cdot \pi \cdot r^2 + g \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \ell \frac{z_1 - z_2}{\ell} + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \ell \cdot \mu \frac{dv}{dr} - p_2 \cdot \pi \cdot r^2 = 0$$

или

$$p_1 \cdot r + g \cdot \rho \cdot r \cdot (z_1 - z_2) + 2 \cdot \ell \cdot \mu \frac{dv}{dr} - p_2 \cdot r = 0,$$

откуда

$$dv = - \frac{(g \cdot \rho \cdot z_1 + p_1) - (g \cdot \rho \cdot z_2 + p_2)}{2 \cdot \mu \cdot \ell} \cdot r \cdot dr. \quad (6.7)$$

Интегрируя уравнение (6.7), получим

$$v = - \frac{(g \cdot \rho \cdot z_1 + p_1) - (g \cdot \rho \cdot z_2 + p_2)}{2 \cdot \mu \cdot \ell} \cdot \frac{r^2}{2} + C.$$

Обозначив $p_{\text{тр}} = (g \cdot \rho \cdot z_1 + p_1) - (g \cdot \rho \cdot z_2 + p_2)$ и определив постоянную C из условия, что при $r = r_0$ (на стенке трубы) скорость $v = 0$, окончательно будем иметь **профиль скоростей при ламинарном движении в круглой цилиндрической трубе**

$$v = \frac{p_{\text{тр}}}{4 \cdot \mu \cdot \ell} (r_0^2 - r^2). \quad (6.8)$$

Как видно из выражения (6.8), максимальная скорость в сечении трубы будет при $r = 0$, т.е. на оси трубы

$$v_{\text{max}} = \frac{p_{\text{тр}}}{4 \cdot \mu \cdot \ell} \cdot r_0^2. \quad (6.8^1)$$

Зная профиль скоростей, легко найти выражение для объемного расхода жидкости. Рассмотрим поперечное сечение трубы (рис. 6.4).

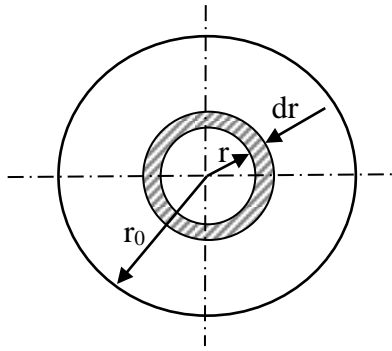


Рис. 6.4. К определению объемного расхода жидкости

Выражение объемного расхода через площадь кольца шириной dr запишется в виде

$$dQ = v \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr, \quad (6.9)$$

а через сечение трубы радиусом r_0 – в виде

$$Q = \int_0^{r_0} v \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = \int_0^{r_0} \frac{P_{\text{тр}}}{4 \cdot \mu \cdot \ell} (r_0^2 - r^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr. \quad (6.10)$$

Из (6.10) следует окончательное выражение для объемного расхода

$$Q = \frac{P_{\text{тр}}}{8 \cdot \mu \cdot \ell} \cdot \pi \cdot r_0^4. \quad (6.11)$$

Средняя скорость в сечении трубы

$$v_{\text{ср}} = \frac{Q}{s} = \frac{Q}{\pi \cdot r_0^2}$$

или, согласно (6.11),

$$v_{\text{ср}} = \frac{P_{\text{тр}}}{8 \cdot \mu \cdot \ell} \cdot r_0^2. \quad (6.12)$$

В рассматриваемом случае ламинарного течения жидкости в круглой цилиндрической трубе

$$v_{\text{cp}} = \frac{1}{2} v_{\text{max}}. \quad (6.13)$$

Найдем выражение потерь удельной энергии на трение. Эти потери, отнесенные к единице массы, запишутся как разность полных удельных энергий в сечениях потока 1 – 1 и 2 – 2 (рис. 6.3). Согласно уравнению энергии (3.39) потери удельной энергии равны диссипативной теплоте трения $q_{\text{дис}}$. Поскольку в сечениях 1 – 1 и 2 – 2 $v_{1\text{cp}} = v_{2\text{cp}}$ и $\alpha_{\text{э}1} = \alpha_{\text{э}2}$, то

$$g \cdot z_1 + \frac{p_1}{\rho} - \left(g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) = q_{\text{дис}},$$

где $q_{\text{дис}} = \frac{p_{\text{тр}}}{\rho}$.

Выражая $p_{\text{тр}}$ из соотношения (6.11) для объемного расхода, получим

$$p_{\text{тр}} = \frac{8 \cdot \mu \cdot \ell \cdot Q}{\pi \cdot r_0^4}$$

или

$$p_{\text{тр}} = \frac{128 \cdot \mu \cdot \ell \cdot Q}{\pi \cdot d_0^4}. \quad (6.15)$$

Потери энергии на единицу веса жидкости

$$h_{\text{тр}} = \frac{p_{\text{тр}}}{\rho \cdot g} = \frac{128 \cdot \mu \cdot \ell \cdot Q}{\rho \cdot g \cdot \pi \cdot d_0^4}. \quad (6.16)$$

Подставляя в формулу (6.16) значение Q , выраженное через v_{cp} ,

$$Q = v_{\text{cp}} \cdot \frac{\pi \cdot d_0^2}{4}$$

получим

$$h_{\text{тр}} = \frac{32 \cdot \mu \cdot \ell \cdot v_{\text{ср}}}{\rho \cdot g \cdot d_0^2}. \quad (6.17)$$

На рис. 6.5 представлен график зависимости потери напора на трение от расхода или средней скорости (6.16, 6.17) при ламинарном течении в трубе.

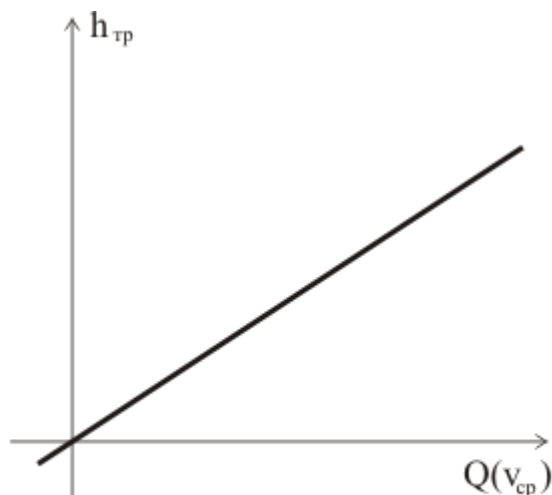


Рис.6.5. Зависимость потери напора на трение от расхода

Впервые большинство из приведенных выше выражений было получено экспериментальным путем французским врачом Пуазейлем, изучавшим течение крови в сосудах. Опытная установка представляла собой набор тонких стеклянных трубок, по которым текла вода.

Заметим, что формула (6.15) может быть использована для экспериментального определения динамического коэффициента вязкости μ .

Из выражений для профиля скоростей в сечении трубы (6.8) и средней скорости (6.12) найдем значение коэффициента кинетической энергии α_3 (3.22)

$$\alpha_3 = \frac{\int v^3 \cdot ds}{v_{\text{ср}}^3 \cdot s} = \frac{\int_0^{r_0} v^3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr}{v_{\text{ср}} \cdot \pi \cdot r_0^2},$$

$$\alpha_3 = \frac{\int_0^{r_0} \frac{P_{\text{тр}}}{4 \cdot \mu \cdot \ell} (r_0^2 - r^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr}{\frac{P_{\text{тр}}}{8 \cdot \mu \cdot \ell} \cdot r_0^2 \cdot \pi \cdot r_0^2} = 2. \quad (6.18)$$

Согласно эмпирической формуле Дарси – Вейсбаха, потери энергии на трение на единицу веса жидкости

$$h_{\text{тр}} = \lambda \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \frac{v_{\text{ср}}^2}{2 \cdot g}, \quad (6.19)$$

где λ – коэффициент трения, определяемый опытным путем.

Поскольку при ламинарном течении жидкости эти потери на трение получены теоретическим путем (6.17), то, сравнивая выражения (6.17) и (6.19), получим значение коэффициента трения λ при ламинарном движении

$$\lambda = \frac{64 \cdot \mu}{\rho \cdot v_{\text{ср}} \cdot d} = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (6.20)$$

6.4. Турбулентное движение жидкости в круглой цилиндрической трубе

6.4.1. Истинная, осредненная и средняя скорости

При турбулентном движении вследствие беспорядочного перемещения частиц жидкости наблюдаются высокочастотные колебания скорости с малой амплитудой. Траектории частиц жидкости, в разные моменты времени проходящих через любую точку пространства, например, точку А (рис. 6.6), будут различны.

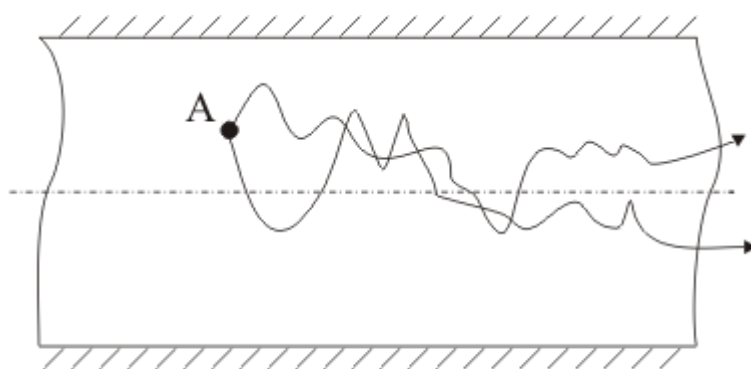


Рис.6.6. Траектории частиц, проходящих через данную точку пространства в разные моменты времени при турбулентном движении

полученные с помощью термоанемометра.

Истинная или мгновенная скорость в этой точке А может быть установлена опытным путем тем точнее, чем меньше инерционность измерительной аппаратуры. На рис.6.7 представлены графики изменения скорости со временем в точке А,

Осредненную по времени скорость

$$v_{\text{оср}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v_{\text{ист}} dt \quad (6.21)$$

будут фиксировать измерительные приборы, применяемые в технике, которые в силу их инерционности не успевают регистрировать высокочастотные пульсации.

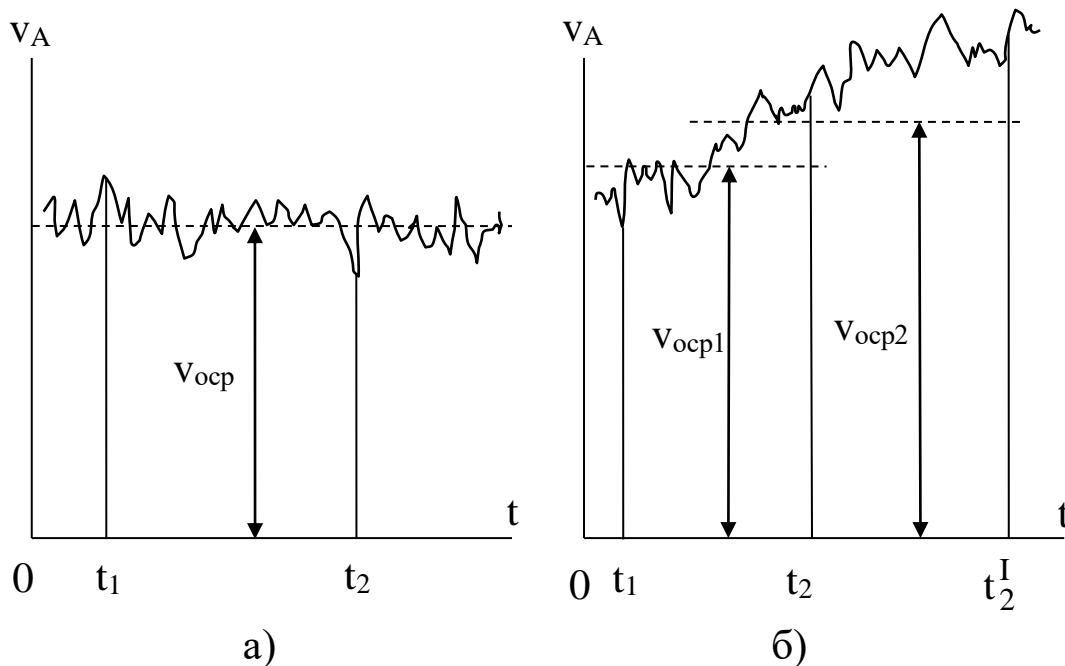


Рис.6.7. К иллюстрации осредненной скорости при турбулентном движении:
а) установившемся; б) неустойчивом

Истинная скорость непрерывно изменяется со временем $\left(\frac{\partial v_{\text{ист}}}{\partial t} \neq 0\right)$, следовательно, турбулентное движение — **неустановившееся**. Однако если величина осредненной скорости не будет зависеть от интервала осреднения, то такое турбулентное движение на практике считают установившимся (рис. 6.7, а). На рис. 6.7, б показано изменение осредненной скорости при неустойчивом (практически) турбулентном движении.

Средняя скорость при турбулентном движении жидкости в круглой трубе определяется по известному выражению

$$v_{cp} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2}, \quad (6.22)$$

где Q – объемный расход жидкости, $Q = \int_S v_{\text{ист}} \cdot ds$.

На рис. 6.8 показано распределение в сечении трубы истинной скорости в некоторый момент времени, осредненной скорости и средней скорости.

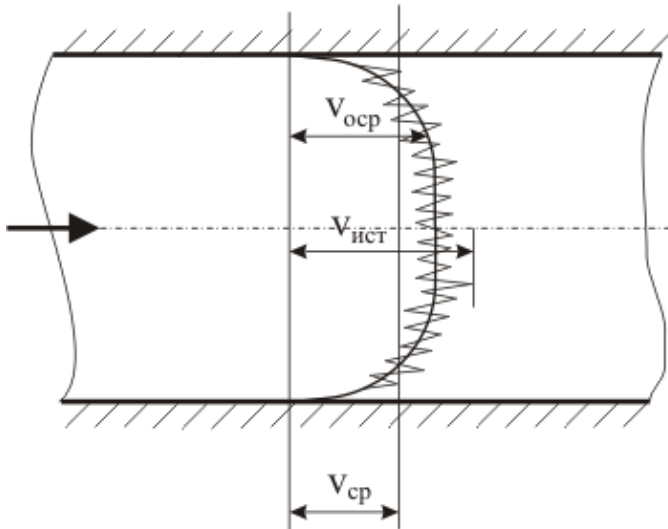


Рис.6.8. Распределение в сечении трубы истинной, осредненной и средней скорости турбулентного движения

На рис. 6.9 представлено для сравнения распределение осредненной скорости в случае турбулентного и ламинарного движения при одном и том же объемном расходе или, что то же, при одной и той же средней скорости в сечении трубы.

Поскольку осредненная скорость при турбулентном движении лишь в тонком пристенном слое заметно отличается от средней скорости, то коэффициент кинетической энергии α_3 (3.22) будет мало отличаться от единицы. В практических задачах его полагают равным единице

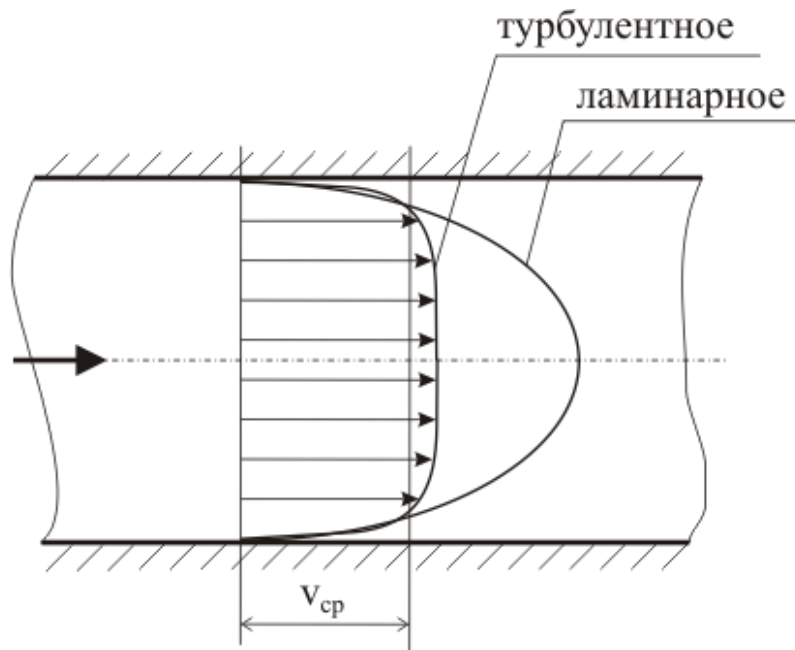


Рис.6.9. Распределение осредненной скорости при ламинарном и турбулентном движении при $Q = \text{const}$

$$\alpha_3 = \frac{\int v_{\text{оср}}^3 ds}{v_{\text{ср}}^3 \cdot s} \approx 1. \quad (6.23)$$

6.4.2. Структура турбулентного потока. Гладкие и шероховатые трубы

При турбулентном движении в тонком слое вблизи твердых стенок наблюдается ламинарный характер движения. Поскольку твердые (непроницаемые) стенки оказывают успокаивающее воздействие на турбулентный поток, то в первом приближении турбулентное течение в трубе можно представить в виде тонкого пристенного ламинарного слоя и турбулентного ядра (рис. 6.10).

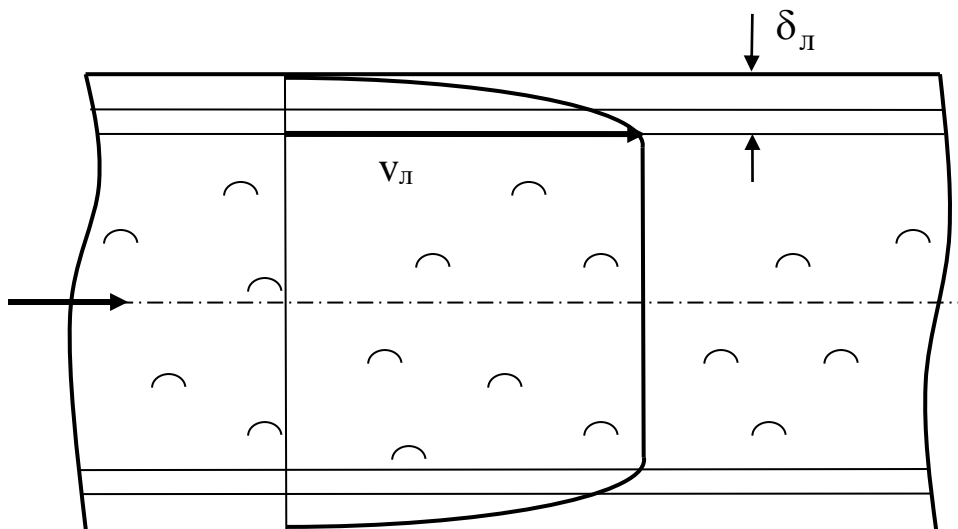


Рис. 6.10. Пристенный ламинарный слой при турбулентном течении в трубе

Как было установлено в опытах

$$\frac{v_L \cdot \delta_L}{\nu} = \text{const} . \quad (6.24)$$

Следовательно, с увеличением расхода жидкости в трубе растёт $v_{л}$ и уменьшается толщина пристенного ламинарного слоя $\delta_{л}$.

В табл. 6.1 представлены значения относительной толщины ламинарного пристенного слоя $\frac{\delta_{л}}{r_0}$ (r_0 – радиус трубы) в зависимости от числа Рейнольдса Re и коэффициента трения λ , полученные на основании теоретических и опытных данных.

Таблица 6.1

Относительная толщина ламинарного пристенного слоя

Re	4000	12000	60000	180000	840000
λ	0,04	0,03	0,02	0,016	0,012
$\frac{\delta_{л}}{r_0}$	0,082	0,031	0,0077	0,0029	0,00071

При ламинарном течении шероховатость стенок трубы не влияет на трение. Поэтому в зависимости от соотношения толщины пристенного ламинарного слоя и высоты бугорков шероховатости стенки трубы разделяют на гидравлически гладкие $\left(\frac{\delta_{л}}{\Delta} \gg 1\right)$, шероховатые $\left(\frac{\delta_{л}}{\Delta} \approx 1\right)$ и вполне шероховатые $\left(\frac{\delta_{л}}{\Delta} \ll 1\right)$, рис. 6.11. Здесь Δ – высота бугорков шероховатости.

В гладких трубах коэффициент трения λ зависит только от числа Рейнольдса Re . С увеличением числа Рейнольдса λ уменьшается. В шероховатых трубах коэффициент трения λ зависит как от числа Рейнольдса Re , так и от относительной шероховатости трубы $\frac{\Delta}{d}$ (d – диаметр трубы). Во вполне

шероховатых трубах коэффициент трения λ зависит только от относительной шероховатости стенок трубы $\frac{\Delta}{d}$.

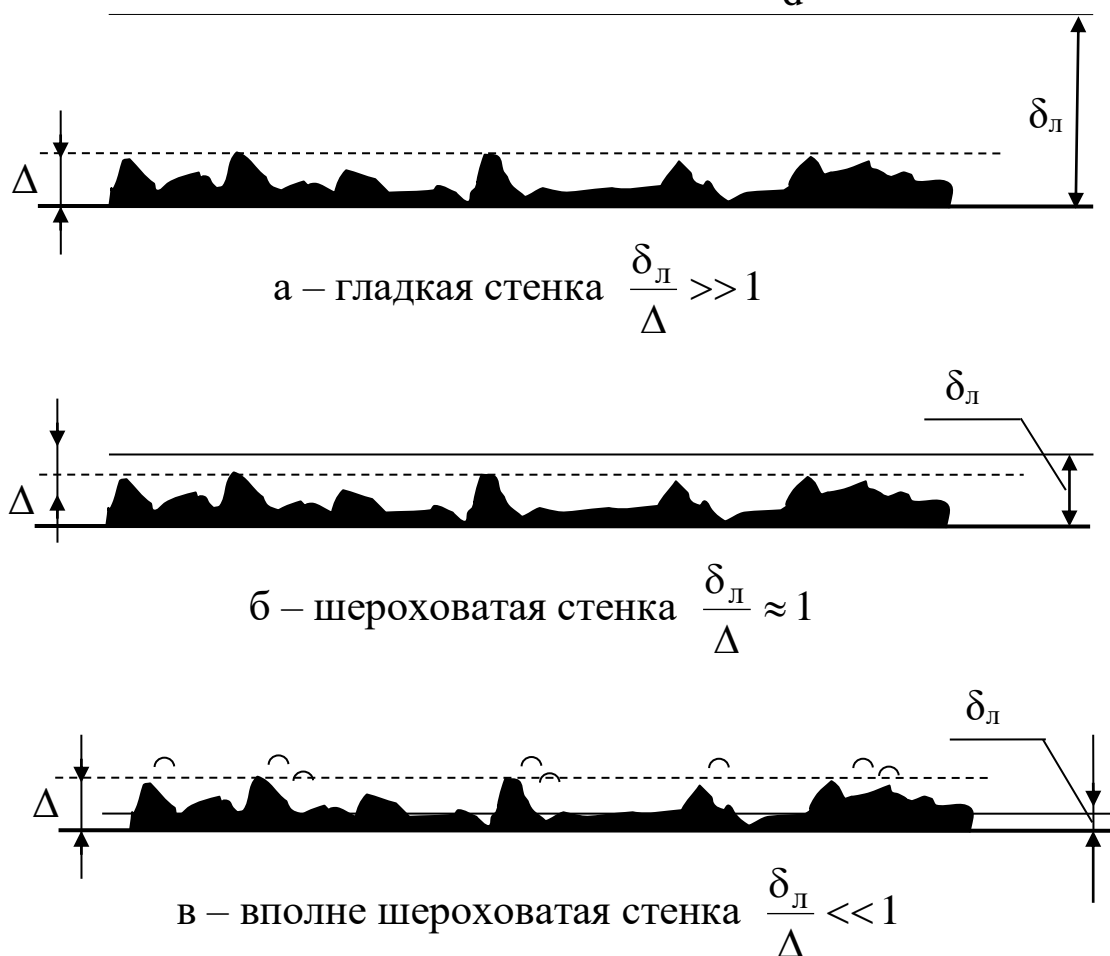


Рис. 6.11. К классификации шероховатости стенок трубы

6.4.3. Потери напора на прямолинейных участках труб

Потери механической энергии при турбулентном движении жидкости обусловлены работой потока против сил трения. На прямолинейных участках цилиндрических труб круглого сечения при установившемся изотермическом турбулентном движении потери удельной (на единицу веса жидкости) энергии на трение – потери напора можно определить по формуле Дарси – Вейсбаха

$$h_{тр} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v_{ср}^2}{2 \cdot g},$$

где $h_{\text{тр}}$ – потери энергии на трение, приходящиеся на единицу веса жидкости;

ℓ – длина участка трубы;

d – диаметр трубы;

$v_{\text{ср}}$ – средняя скорость в сечении трубы, $v_{\text{ср}} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2}$;

Q – объемный расход;

λ – безразмерный коэффициент трения.

Численное значение коэффициента λ определяется по эмпирическим или полуэмпирическим формулам в связи с отсутствием строгой теории турбулентного движения.

Таких формул достаточно много. Каждая из них аппроксимирует результаты опытов в определенном диапазоне чисел Рейнольдса Re и относительной шероховатости стенок трубы $\frac{\Delta}{d}$.

Одна из первых формул была предложена в начале XX ст. Блазиусом для гладких труб при $4 \cdot 10^3 < Re < 10^5$

$$\lambda = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}}. \quad (6.25)$$

В 1946 г. П.К.Конаковым предложена полуэмпирическая формула для гладких труб в более широком диапазоне чисел Рейнольдса $4 \cdot 10^3 < Re < 3 \cdot 10^6$

$$\lambda = \frac{1}{(1,8 \cdot \lg Re - 1,5)^2}. \quad (6.26)$$

А.Д.Альтшуль предложил универсальную формулу, пригодную для гладких и шероховатых труб,

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{68}{Re} + \frac{\Delta_э}{d} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (6.27)$$

где $\Delta_э$ – высота бугорков шероховатости стенок трубы, эквивалентная высоте бугорков при искусственной равномерной шероховатости в опытах Никурадзе.

Численное значение величины $\Delta_э$ зависит от высоты бугорков шероховатости и характера шероховатости стенок трубы. Она определяется материалом трубы и технологией ее изготовления.

Цельнотянутые трубы из цветных металлов, включая и алюминиевые сплавы, а также стальные высококачественные бесшовные трубы практически можно считать гидравлически гладкими ($\Delta_э \approx 0$). Следовательно, топливопроводы и трубы гидравлических систем считаются гидравлически гладкими.

Одна и та же труба при малых числах Рейнольдса может вести себя как гидравлически гладкая, поскольку толщина пристенного ламинарного слоя может быть значительно большей, чем высота бугорков шероховатости. С увеличением числа Рейнольдса толщина ламинарного пристенного слоя уменьшается, и та же самая труба будет вести себя как шероховатая или даже как вполне шероховатая.

Формула Альтшуля (6.27) при $\frac{\Delta_э}{d} \ll \frac{68}{Re}$ переходит в формулу Блазиуса

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{68}{Re} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}}. \quad (6.28)$$

При $\frac{\Delta_э}{d} \gg \frac{68}{Re}$ формула Альтшуля переходит в формулу для вполне шероховатых труб

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta_э}{d} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (6.29)$$

В качестве примера в табл. 6.2 приведены значения $\Delta_э$, мм, для труб из различных материалов.

Таблица 6.2

Шероховатость труб различного назначения

Тип трубы	$\Delta_э$
Стекло	0
Трубы, цельнотянутые из латуни и меди	0 ÷ 0,002
Стальные высококачественные бесшовные трубы	0,06 ÷ 0,2
Стальные трубы	0,1 ÷ 0,5
Чугунные трубы	0,2 ÷ 1,0

На рис. 6.12 для примера представлен график зависимости коэффициента трения от числа Рейнольдса в логарифмических координатах для труб с различной естественной шероховатостью.

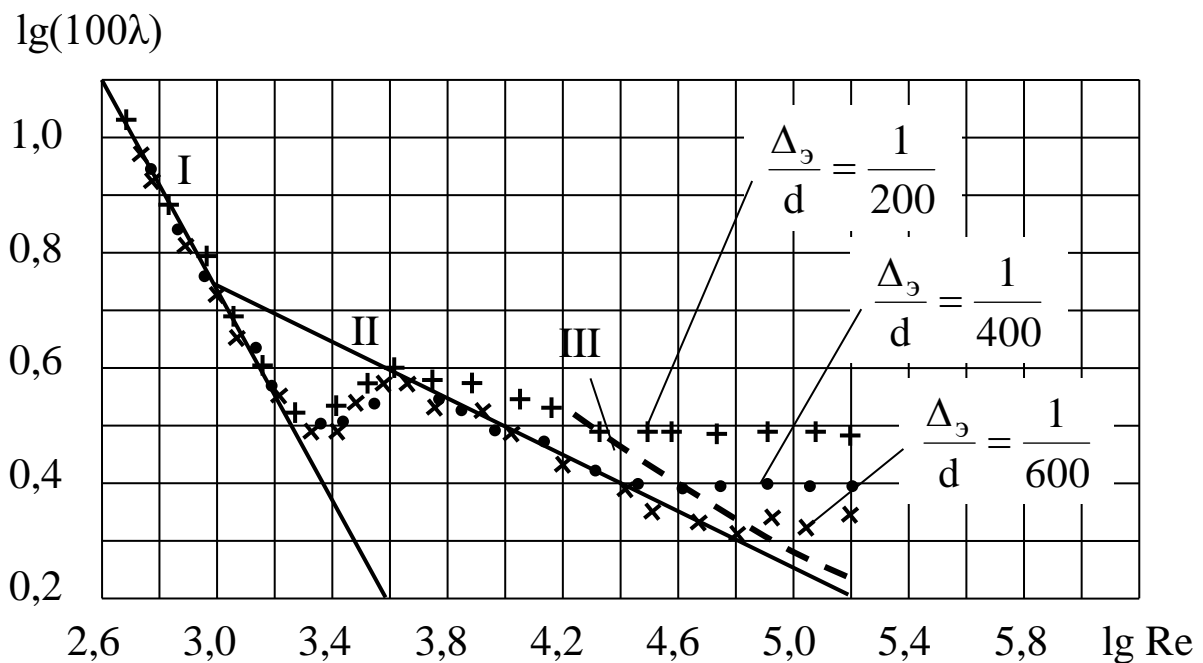


Рис. 6.12. Зависимость коэффициента трения λ от числа Re

Прямая I соответствует ламинарному течению $\left(\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \right)$.

Прямая II соответствует турбулентному течению в гладких трубах $\left(\lambda = \frac{0,316}{\sqrt[4]{\text{Re}}} \right)$.

Как видно из рис.6.12 при ламинарном течении шероховатость не влияет на коэффициент трения λ , а также практически не влияет на значение критического числа Рейнольдса $\text{Re}_{\text{кр}}$. При турбулентном течении чем меньше относительная шероховатость, тем до большего значения числа Рейнольдса опытные точки совпадают с прямой для гладкой трубы. Затем опытные точки отклоняются от нее и, начиная с некоторого значения числа Рейнольдса, располагаются на прямой, параллельной оси абсцисс ($\lambda = \text{const}$).

Пунктирная линия III на рис.6.12 является границей области, в которой коэффициент трения не зависит от числа Re – автомодельной области по числу Рейнольдса. В этой области имеет место квадратичный закон сопротивления трению $h_{\text{тр}} = c \cdot v^2$, где коэффициент пропорциональности $c = \lambda \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \frac{1}{2 \cdot g}$.

6.5. Начальный участок течения

При входе жидкости в трубу на так называемом начальном участке в результате действия сил трения имеет место тормозящее влияние стенок трубы на поток. На этом участке происходит формирование профиля скоростей (рис.6.13). Во входном сечении скорость течения во всех точках можно считать одинаковой. Здесь тормозящее действие стенок еще не успело проявиться.

На начальном участке течения жидкости коэффициент трения λ несколько больше, чем на участке сформировавшегося течения.

При ламинарном движении относительную длину начального участка $\frac{\ell_{\text{нач}}}{d}$ можно определить по приближенной формуле Шиллера

$$\frac{\ell_{\text{нач}}}{d} = 0,029 \cdot \text{Re}, \quad (6.30)$$

если полагать, что в конце начального участка на оси трубы выполняется условие

$$v_{\text{оси}} = 1,9 \cdot v_{\text{ср}},$$

где $v_{\text{оси}}$ – скорость на оси трубы;
 $v_{\text{ср}}$ – средняя скорость течения.

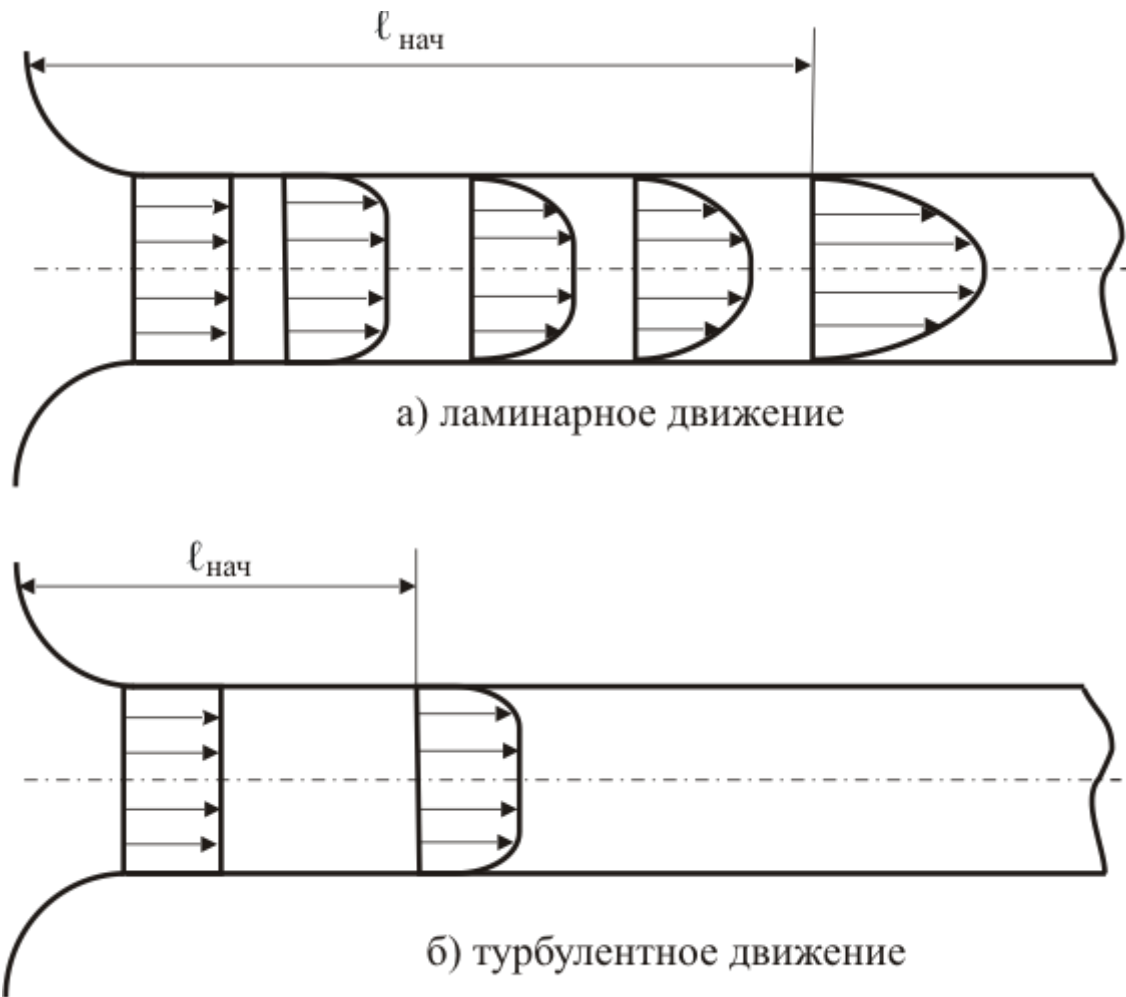


Рис.6.13. Начальные участки движения жидкости (газа)

Если потребовать выполнения теоретического условия

$$v_{\text{оси}} = 2 \cdot v_{\text{ср}},$$

то длина начального участка будет бесконечной.

На начальном участке ламинарного движения

$$\lambda_{\text{нач}} = k \cdot \frac{64}{\text{Re}}, \quad (6.31)$$

где $k > 1$.

Коэффициент кинетической энергии α_3 на начальном участке ламинарного течения возрастает от единицы до двух.

На рис. 6.14 показано изменение k и α_3 в зависимости от

$$\frac{x}{d \cdot \text{Re}}$$

k, α_3

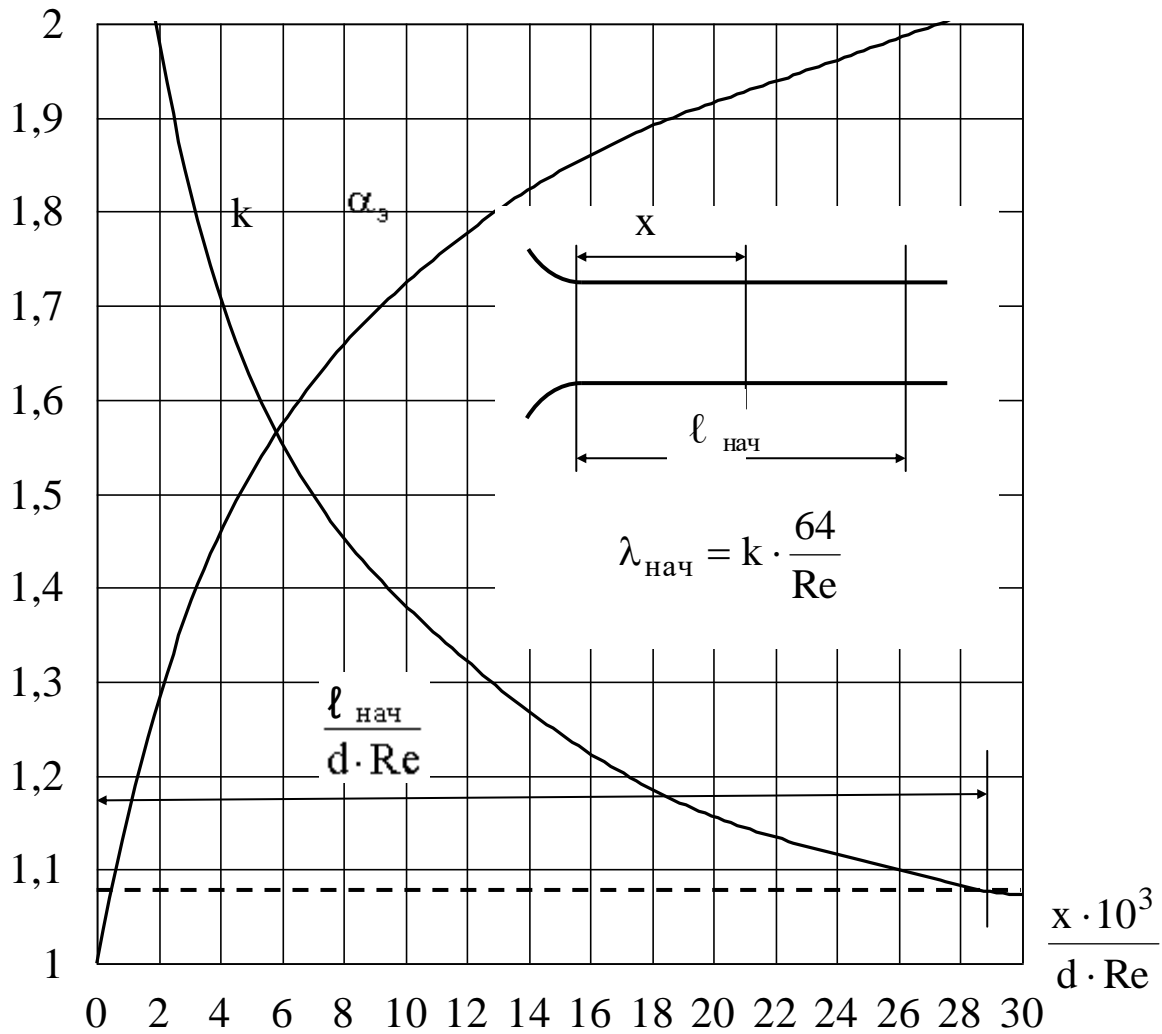


Рис.6.14. Значения коэффициента кинетической энергии α_3 и коэффициента k на начальном участке ламинарного движения жидкости

При турбулентном движении вследствие поперечного перемешивания частиц жидкости длина начального участка течения не значительна, ею практически пренебрегают.

6.6. Течение в некруглых трубах

На практике часто встречается течение жидкости в некруглых трубах: в вентиляционных каналах, теплообменниках, охлаждающих трактах двигателей и др. Для определения потерь на трение и коэффициента трения в некруглых трубах вводится понятие гидравлического радиуса R_{Γ} и гидравлического диаметра D_{Γ} . Гидравлическим радиусом называется отношение площади сечения потока жидкости S к смоченному периметру Π , т.е. к периметру трубы, соприкасающемуся с жидкостью (рис.6.15)

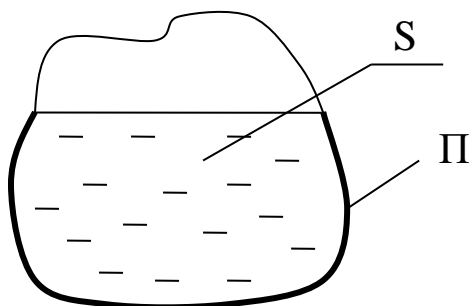


Рис. 6.15. Сечение потока в некруглой трубе

$$R_{\Gamma} = \frac{S}{\Pi}, \quad (6.32)$$

$$D_{\Gamma} = 4 \cdot R_{\Gamma}.$$

В случае круглой трубы диаметра d , полностью заполненной жидкостью,

$$R_{\Gamma} = \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot \pi \cdot d} = \frac{d}{4}, \quad D_{\Gamma} = d. \quad (6.33)$$

Если в выражениях потерь напора и коэффициента трения для круглой трубы, полностью заполненной жидкостью, заменить d на D_{Γ}

$$h_{\text{тр}} = \lambda \cdot \frac{\ell}{D_{\Gamma}} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}, \quad (6.34)$$

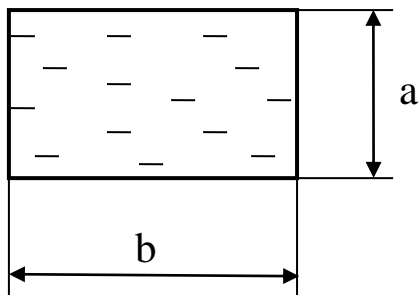
где $\lambda = f\left(\text{Re}_\square, \frac{\Delta_\varepsilon}{D_\Gamma}\right)$, $\text{Re}_\square = \frac{v \cdot D_\Gamma}{\nu}$, то эти выражения

формально можно использовать для некруглых труб. Сравнение с опытом показывает, что при турбулентном движении расчеты по формулам (6.34) хорошо согласуются с опытными данными.

При ламинарном движении следует в выражение для коэффициента трения вводить поправку

$$\lambda = A \cdot \frac{64}{\text{Re}_\square}, \quad (6.35)$$

где для круглой трубы, полностью заполненной жидкостью, $A = 1$, а например, для прямоугольной трубы (рис. 6.16) A зависит от отношения



сторон прямоугольника $\frac{b}{a}$. Значения поправочного коэффициента A для различных отношений $\frac{b}{a}$ трубы прямоугольного сечения приведены в табл. 6.3.

Рис. 6.16. Труба
прямоугольного сечения

Таблица 6.3

Поправочный коэффициент A для трубы прямоугольного сечения

$\frac{b}{a}$	1	1,25	1,5	2	3	4	15	100	∞
A	0,888	0,902	0,921	0,972	1,066	1,14	1,19	1,32	1,5

Раздел 7

МЕСТНЫЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

7.1. Общие сведения

Местные гидравлические сопротивления или, кратко, местные сопротивления – это устройства, деформирующие поток жидкости. К ним относятся установленные в трубопроводе вентили, клапаны, диафрагмы и т.п. Потери удельной энергии (на единицу веса жидкости) или потери напора, вызванные местным сопротивлением, определяют по формуле Вейсбаха

$$h_m = \zeta_m \frac{v^2}{2 \cdot g}, \quad (7.1)$$

где v – средняя скорость в сечении трубы;

ζ_m – безразмерный коэффициент местного сопротивления, численное значение которого зависит от геометрической формы местного сопротивления, степени шероховатости стенок и числа Рейнольдса Re .

Значения ζ_m в подавляющем большинстве случаев определяются опытным путем и приводятся в гидравлических справочниках.

В случаях, когда при турбулентном течении жидкости через местное сопротивление имеет место отрыв потока в одном и том же месте (фиксированная линия отрыва потока), как например, в диафрагме, то потери напора будут вызваны вихреобразованиями в зоне отрыва потока (рис. 7.1). При этом коэффициент местного сопротивления практически не будет зависеть от числа Рейнольдса, а только от формы местного сопротивления.

Хотя местное сопротивление деформирует поток на некотором участке трубопровода, вызванные им потери напора принято относить к тому месту трубопровода, где установлено местное сопротивление.

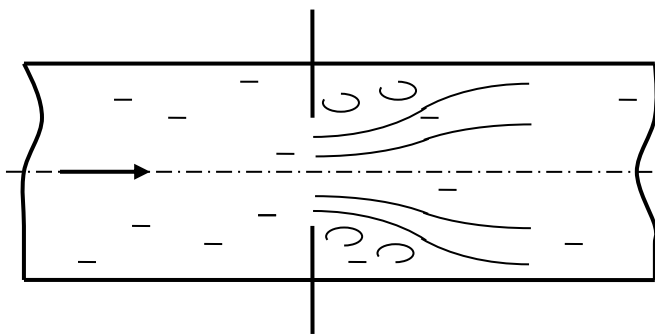


Рис. 7.1. Течение жидкости через диафрагму

Любое местное сопротивление представляет собой комбинацию простейших: расширения потока (внезапного и плавного), сужения потока (внезапного и плавного), поворота потока (резкого и плавного), смешения и разделения потока.

При ламинарном течении местные сопротивления обычно вызывают потери напора значительно меньшие, чем потери из-за трения. Поэтому важно остановиться более подробно на рассмотрении потерь напора в местных сопротивлениях при турбулентном течении.

7.2. Внезапное расширение потока

Внезапное расширение потока имеет место при течении жидкости из трубы меньшего диаметра в трубу большего диаметра (рис. 7.2).

Струя жидкости, отрываясь от стенок трубы в сечении 1-1, постепенно расширяясь, на некотором расстоянии заполняет сечение трубы 2-2. В кольцевом пространстве между стенками трубы и струей жидкости образуются вихри. При этом происходит непрерывный обмен частицами жидкости между основным потоком и завихренной его частью. Это является причиной потерь энергии потока.

При турбулентном течении для внезапного расширения русла потерю напора можно достаточно точно найти теоретическим путем.

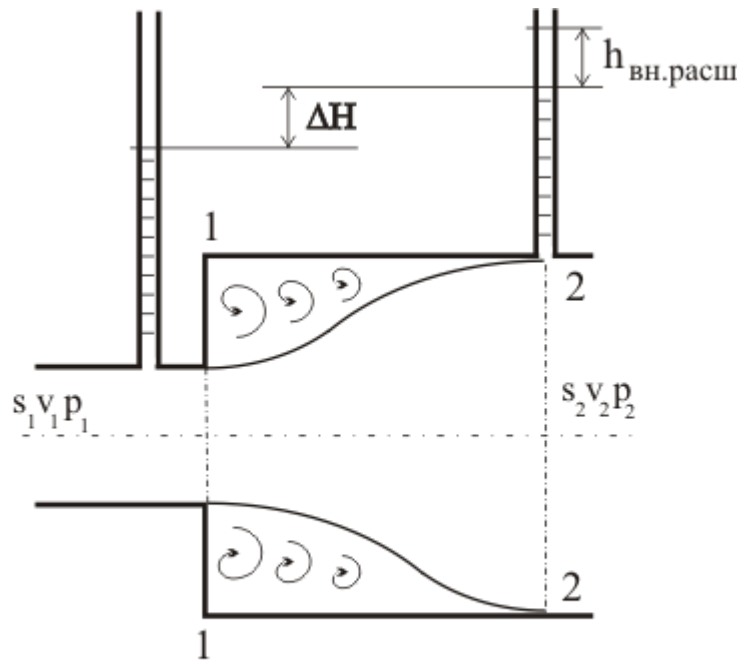


Рис.7.2. Внезапное расширение трубы

Рассмотрим два сечения потока: 1-1 и 2-2, полагая ось трубы горизонтальной (рис. 7.2). Т.к. поток между рассматриваемыми сечениями расширяется, то скорость его уменьшается, а давление возрастает. Поэтому второй пьезометр показывает высоту на ΔH большую, чем первый. Если бы потеря напора при внезапном расширении не было, то показание второго пьезометра было бы больше на $h_{\text{вн.расш}}$. Эта высота в данном случае является потерей напора.

Примем следующие допущения:

- 1) распределение скоростей в сечениях 1-1 и 2-2 равномерное, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, что обычно и принимается при турбулентном режиме;
- 2) касательное напряжение на стенке трубы между сечениями 1-1 и 2-2 равно нулю;
- 3) давление в этих сечениях можно считать изменяющимся по гидростатическому закону.

Запишем уравнение Бернулли для сечения 1-1 и 2-2. Поскольку $z_1 = z_2$, будем иметь

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + h_{\text{вн.расш}}, \quad (7.2)$$

откуда

$$h_{\text{вн.расш}} = \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g}. \quad (7.3)$$

Применим теорему Эйлера об изменении количества движения к фиксированному цилиндрическому объему, заключенному между сечениями 1-1, 2-2 и стенкой трубы. Разность количества движения жидкости, вытекшей и втекшей за единицу времени в указанный фиксированный объем пространства, равна сумме внешних сил, действующих на этот объем в направлении движения жидкости

$$\rho \cdot Q \cdot (v_2 - v_1) = (p_1 - p_2) \frac{\pi \cdot d_2^2}{4}. \quad (7.4)$$

Здесь

$$Q = v_1 \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} - \text{объемный расход жидкости.}$$

Откуда

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g} = \frac{v_2(v_2 - v_1)}{g}. \quad (7.5)$$

Подставим в уравнение (7.3) $\frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g}$ согласно (7.5)

$$h_{\text{вн.расш}} = \frac{v_2(v_2 - v_1)}{g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g}. \quad (7.6)$$

Окончательно получим

$$h_{\text{вн.расш}} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2 \cdot g}. \quad (7.7)$$

Полученный результат (7.7) является содержанием теоремы французского ученого Борда, которая формулируется следующим образом: **потеря напора при внезапном расширении потока равна скоростному напору потерянной скорости.**

Приведенную теорему называют также теоремой Борда – Карно, поскольку она является частным случаем известной в механике общей теоремы Карно о потере кинетической энергии телом при неупругом ударе.

По аналогии с неупругим ударом потерю на внезапное расширение часто называют **потерей на удар.**

Преобразуем выражение (7.7) к виду формулы Вейсбаха (7.1)

$$h_{\text{вн.расш}} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 \cdot \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \zeta_{\text{вн.расш}} \frac{v_1^2}{2 \cdot g}, \quad (7.8)$$

откуда следует

$$\zeta_{\text{вн.расш}} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2. \quad (7.9)$$

С учетом уравнения объемного расхода $v_1 \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi \cdot d_2^2}{4}$ выражение (7.9) примет вид

$$\zeta_{\text{вн.расш}} = \left(1 - \frac{d_1^2}{d_2^2}\right)^2. \quad (7.10)$$

Полученное выражение для коэффициента сопротивления при внезапном расширении потока $\zeta_{\text{вн.расш}}$ вполне удовлетворительно согласуется с опытом.

Как видно из выражения (7.10), коэффициент местного сопротивления при внезапном расширении потока принимает значения от

$$\zeta_{\text{вн.расш}} = 0 \text{ при } \frac{d_1}{d_2} = 1$$

(внезапное расширение потока отсутствует) до

$$\zeta_{\text{вн.расш}} = 1 \text{ при } \frac{d_1}{d_2} = 0$$

(практически это имеет место при входе жидкости из трубы в бак большого размера, рис. 7.3).

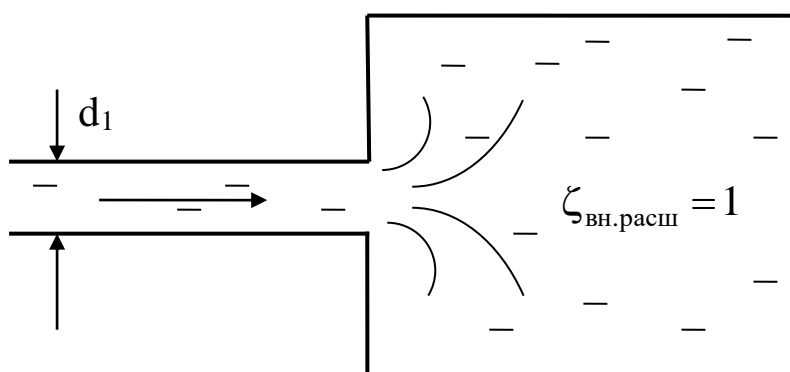


Рис. 7.3. Течение жидкости из трубы в емкость большого размера

7.3. Плавное расширение потока. Диффузор

При транспортировке жидкости (газа) по трубопроводу желательно иметь небольшие потери напора. Согласно (6.19) и (7.1) потери напора будут тем меньшими, чем меньше скорость движения жидкости (газа). При заданном объемном расходе скорость движения жидкости обратно пропорциональна квадрату диаметра трубы

$$v = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2}. \quad (7.11)$$

Следовательно, потери напора на трение равны

$$h_{\text{тр}} = \lambda \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = \lambda \cdot \frac{\ell}{d^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g}, \quad (7.12)$$

а местные потери напора

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = \zeta \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^4 \cdot g}. \quad (7.13)$$

Таким образом, например, в режиме автомодельности по числу Re, когда для данного трубопровода и конкретных местных сопротивлений $\lambda = \text{const}$, $\zeta_{\text{мс}} = \text{const}$, потери напора на трение обратно пропорциональны d^5 , а местные потери напора обратно пропорциональны d^4 , т.е. существенно уменьшаются с увеличением диаметра трубопровода.

Поэтому подачу жидкости (газа) потребителю на большое расстояние осуществляют по длинному трубопроводу большого диаметра. Если же подача реализуется насосом, у которого диаметр выходного патрубка меньше диаметра трубопровода, то между патрубком и трубопроводом устанавливается диффузор, реализующий плавное расширение потока (рис. 7.4).

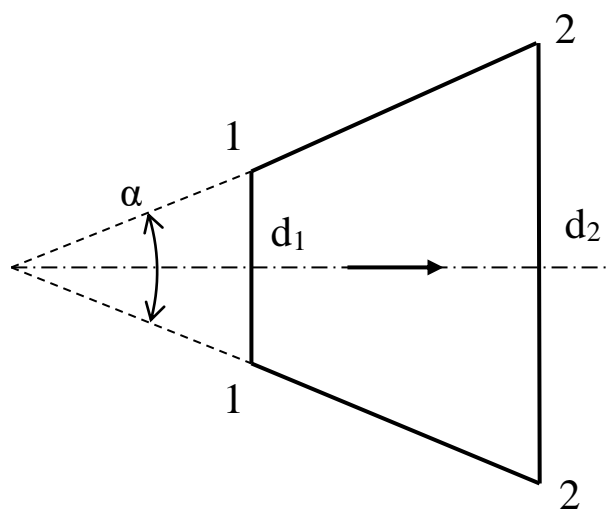


Рис. 7.4. Диффузор

Диффузор, плавно расширяя поток, вызывает меньшие потери напора, чем внезапное расширение потока.

В диффузоре происходит перераспределение полной энергии потока между кинетической и потенциальной энергиями, а именно – вдоль диффузора кинетическая энергия потока убывает (уменьшается скорость движения), а потенциальная энергия увеличивается

(увеличивается давление). При этом полная энергия уменьшается на величину потерь напора, состоящих из потерь на трение и потерь на расширение (деформацию) потока, $h_{\text{диф}} = h_{\text{тр}} + h_{\text{расш}}$.

Круглый диффузор представляет собой усеченный конус. Его форма характеризуется двумя параметрами: углом расширения α и степенью расширения $n = \frac{d_2^2}{d_1^2}$ – отношением площадей сечения на выходе и входе в диффузор (рис.7.4).

С уменьшением угла α длина диффузора при данной степени расширения увеличивается, потери на трение растут, а потери на расширение уменьшаются, поскольку уменьшается, как показывает опыт, неравномерность потока в диффузоре. С увеличением угла α при той же степени расширения диффузор становится короче. При этом уменьшаются потери напора на трение, но увеличиваются потери на расширение вследствие увеличения неравномерности потока (рис. 7.5).

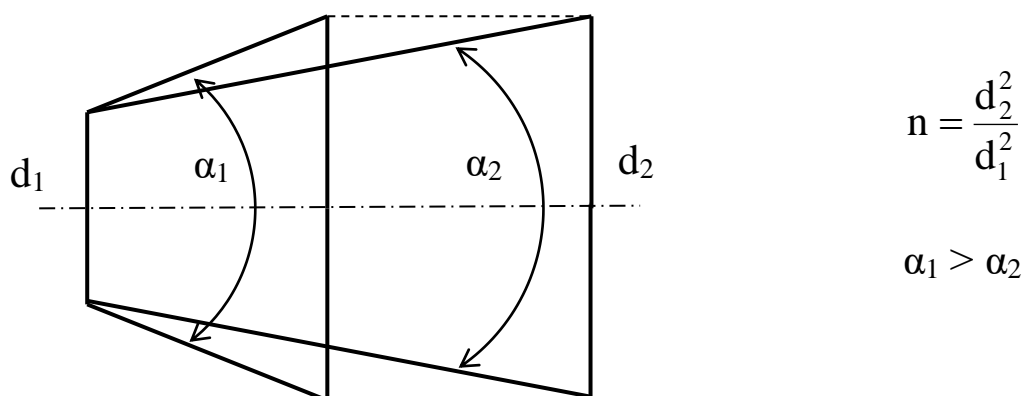


Рис. 7.5. Различные диффузоры

Следовательно, при некотором угле расширения диффузора α при заданной степени расширения потока n потери напора в диффузоре будут минимальными. Как показывает опыт, таким углом расширения будет

$$\alpha \approx 6 \div 8^\circ.$$

Потери напора в диффузоре определяют по формуле Вейсбаха

$$h_{\text{диф}} = \zeta_{\text{диф}} \cdot \frac{v_1^2}{2 \cdot g}, \quad (7.14)$$

где v_1 – средняя скорость потока на входе в диффузор;
 $\zeta_{\text{диф}} = f(\alpha, n, Re)$, а в режиме автомодельности по Re –
 $\zeta_{\text{диф}} = f(\alpha, n)$.

Безразмерный коэффициент сопротивления $\zeta_{\text{диф}}$ определяется опытным путем, его значения приводятся в справочниках по гидравлическим сопротивлениям.

Иногда в режиме автомодельности по числу Re потери в диффузоре определяют по эмпирической формуле

$$h_{\text{диф}} = k(\alpha) \cdot \frac{(v_1 - v_2)^2}{2 \cdot g}, \quad (7.15)$$

где $k(\alpha)$ – коэффициент смягчения удара в диффузоре по сравнению с внезапным расширением потока.

Значения $k(\alpha)$, полученные опытным путем, приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

α	2	4	6	8	10	12	14	16	20	25	180
$k(\alpha)$	0,022	0,043	0,072	0,103	0,138	0,177	0,221	0,270	0,386	0,645	1

Следует заметить, что при углах расширения диффузора $\alpha > 10^\circ \div 12^\circ$ наблюдается отрыв потока от стенок диффузора (рис. 7.6).

При этом существенно возрастают потери напора.

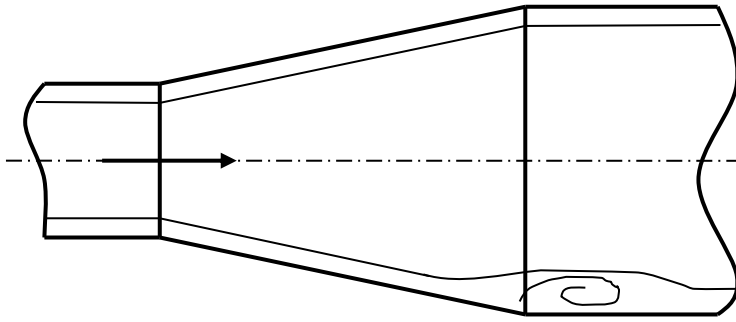


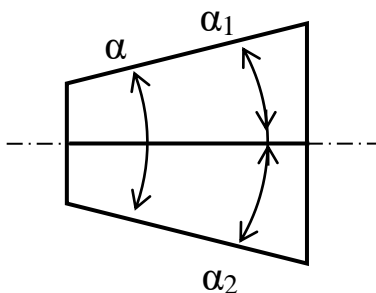
Рис. 7.6. Отрыв потока от стенок диффузора

Отрыв потока от стенок связан с тем, что жидкость движется против нарастающего давления. Скорость движения жидкости и ее кинетическая энергия уменьшаются. В результате действия сил давления, а в пристенном слое дополнительно и сил

трения, в некотором месте у стенки диффузора частицы жидкости остановятся, а потом оторвутся от стенки. Образуется вихревая зона – источник возросших потерь напора, аналогично внезапному расширению потока.

Отрыв потока от стенок возможен лишь в области нарастающего по направлению движения жидкости давления $\left(\frac{dp}{dx} > 0\right)$.

Если для уменьшения габаритов диффузора необходимо иметь угол расширения $\alpha > 10^\circ \div 12^\circ$, то во избежание отрыва потока от стенок диффузора вдоль оси диффузора устанавливают разделяющую стенку, обеспечивающую одностороннее расширение потока (рис. 7.7).



$$\alpha \approx 12^\circ$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \approx 6^\circ$$

Рис. 7.7. Разделяющая стенка в диффузоре

В этом случае течение жидкости будет безотрывным. Наличие разделяющей стенки приведет к дополнительным небольшим потерям напора на трение.

7.4. Внезапное сужение потока

При внезапном сужении потока (рис. 7.8) потери напора, как и в вышерассмотренных случаях, определяют по формуле Вейсбаха

$$h_{\text{в.с.}} = \zeta_{\text{в.с.}} \cdot \frac{v_2^2}{2 \cdot g},$$

где v_2 – средняя скорость движения жидкости в узкой трубе;

$\zeta_{\text{в.с.}}$ – коэффициент местных сопротивлений устанавливаются

опытным путем, $\zeta_{\text{в.с.}} = f\left(\frac{\ell}{d_2}; \frac{d_2^2}{d_1^2}; \text{Re}\right)$.

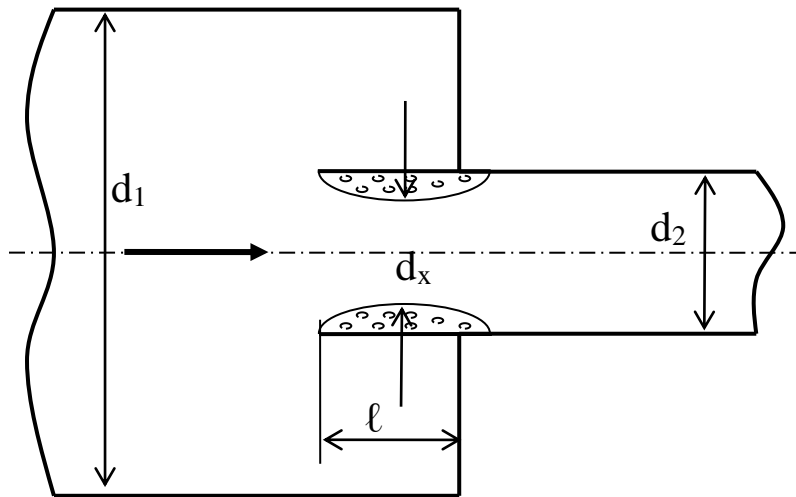


Рис.7.8. Внезапное сужение потока

Струя сжимается до диаметра $d_x < d_2$, а затем расширяется, заполняя все сечение узкой трубы диаметра d_2 . Образуется область, заполненная вихрями, являющаяся основной причиной потерь напора.

При турбулентном движении коэффициент сопротивления $\zeta_{\text{в.с.}}$ практически не зависит от числа Re и может быть определен по полуэмпирической формуле

$$\zeta_{\text{в.с.}} = \zeta_0 \left(1 - \frac{d_2^2}{d_1^2}\right), \quad (7.16)$$

где ζ_0 является функцией от $\frac{\ell}{d_2}$.

$$\zeta_0 = 0,71 \text{ при } \frac{\ell}{d_2} = 4,5 \div 5,0;$$

$$\zeta_0 = 0,5 \text{ при } \frac{\ell}{d_2} = 0.$$

При выходе жидкости из большого бака в трубу можно считать $\frac{d_2^2}{d_1^2} = 0$ (рис.7.9).

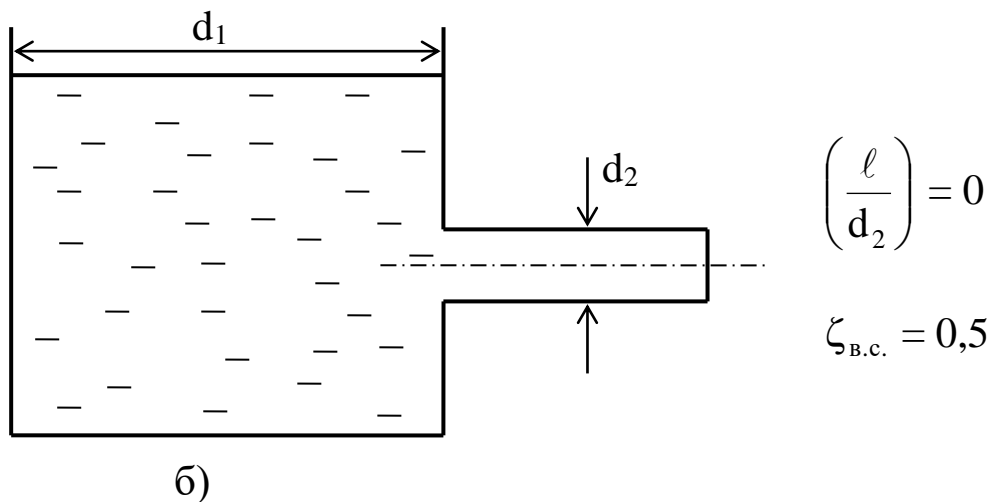
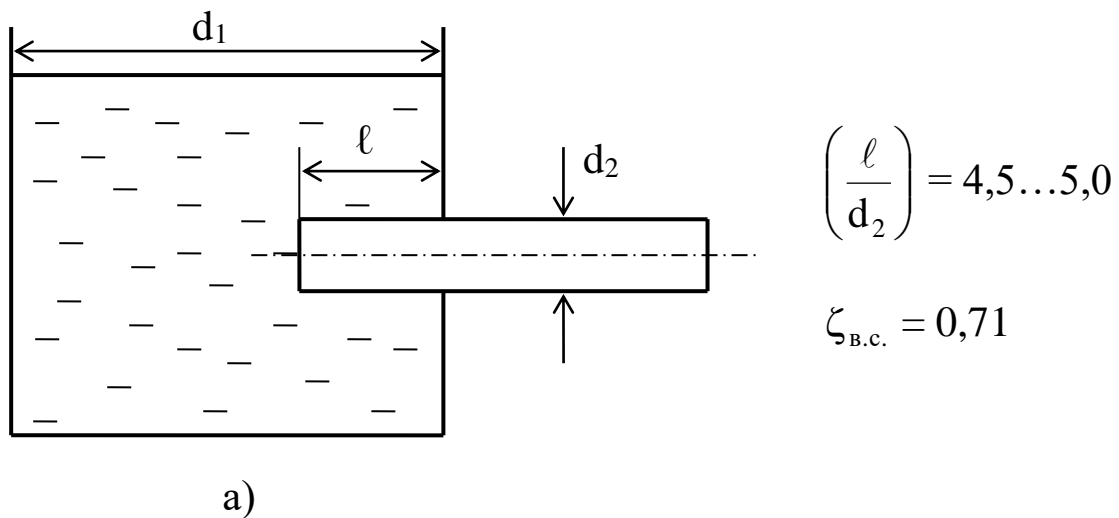


Рис. 7.9. Вытекание жидкости из большой емкости в трубу:

а) при $\left(\frac{\ell}{d_2}\right) = 4,5 \dots 5,0$; б) при $\left(\frac{\ell}{d_2}\right) = 0$

7.5. Плавное сужение потока

Устройство плавного сужения потока называется конфузуром или соплом (рис. 7.10).

Потери напора при плавном сужении потока обусловлены, главным образом, трением (если угол конусности сопла относительно невелик). Значение потерь напора определяется по формуле Вейсбаха

$$h_{\text{пл.с.}} = \zeta_{\text{пл.с.}} \cdot \frac{v_2^2}{2 \cdot g},$$

где $\zeta_{\text{пл.с.}} = 0,1 \div 0,03$ в зависимости от конфигурации образующей конфузора (сопла) и числа Re .

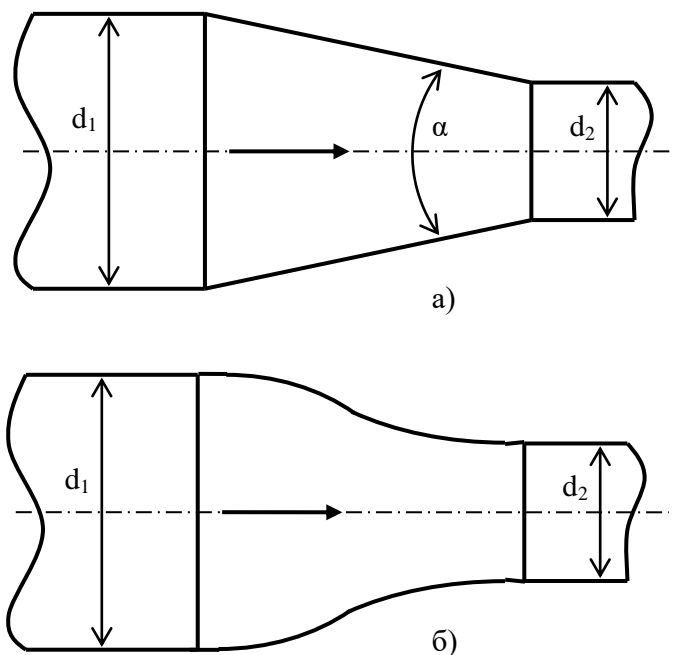


Рис. 7.10. Плавное сужение потока:
а) конфузур; б) сопло

С увеличением Re $\zeta_{\text{пл.с.}}$ уменьшается. Численные значения $\zeta_{\text{пл.с.}}$ определяются опытным путем.

Плавное сужение потока уменьшает неравномерность скорости в сечении на выходе из него, по сравнению с сечением на входе. Поэтому в тех случаях, когда предъявляют высокие требования к равномерности потока, например, в рабочей части аэродинамической трубы, перед ней устанавливают сопло.

Поясним вышесказанное подробнее. Пусть в сечении сопла 1-1 средняя скорость по сечению $v_{1\text{ср}}$, а в сечении 2-2 – $v_{2\text{ср}}$ (рис. 7.11). Истинные скорости в сечениях какой-либо струйки

равны, соответственно, v_1 и v_2 . Неравномерность скоростей в этих сечениях струйки характеризуется разностями

$$\Delta v_1 = v_1 - v_{1cp} \text{ и } \Delta v_2 = v_2 - v_{2cp}.$$

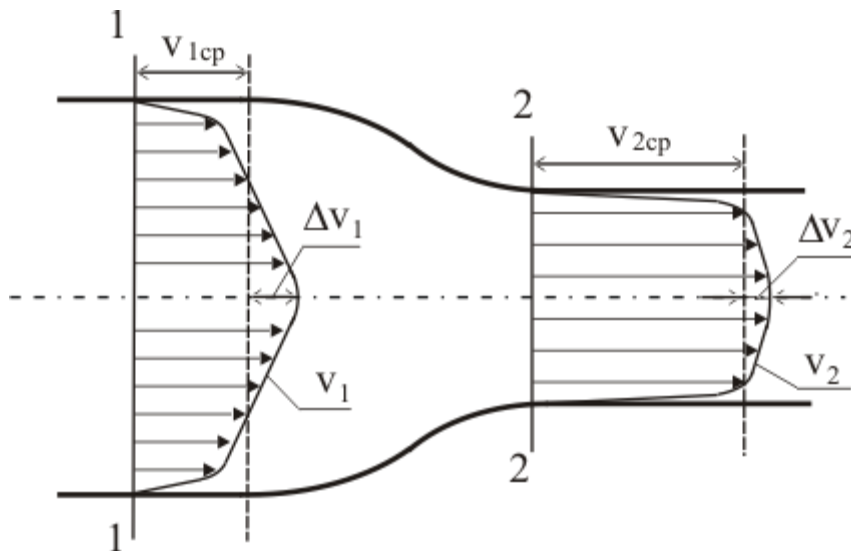


Рис.7.11. К определению неравномерности скоростей

Пренебрегая потерями напора, которые достаточно малы, и полагая коэффициенты Кориолиса для турбулентного движения $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, запишем уравнения Бернулли для сечений 1-1 и 2-2 струйки и потока:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}, \quad (7.17)$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_{1cp}^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_{2cp}^2}{2 \cdot g}. \quad (7.18)$$

Вычитая (7.18) из (7.17), получим

$$v_1^2 - v_{1cp}^2 = v_2^2 - v_{2cp}^2$$

или

$$(v_1 - v_{1cp}) \cdot (v_1 + v_{1cp}) = (v_2 - v_{2cp}) \cdot (v_2 + v_{2cp}). \quad (7.19)$$

Ввиду малости Δv_1 и Δv_2 принимаем

$$v_1 + v_{1cp} = 2 \cdot v_{1cp},$$

$$v_2 + v_{2cp} = 2 \cdot v_{2cp},$$

тогда (7.19) примет вид

$$\Delta v_1 \cdot v_{1cp} = \Delta v_2 \cdot v_{2cp}. \quad (7.20)$$

Согласно уравнению объемного расхода

$$\frac{v_{1cp}}{v_{2cp}} = \frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad (7.21)$$

где ε – степень сужения потока.

Окончательно абсолютная неравномерность скоростей

$$\Delta v_2 = \Delta v_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon}, \quad (7.22)$$

а относительная неравномерность скоростей

$$\frac{\Delta v_2}{v_{2cp}} = \frac{\Delta v_1}{v_{1cp}} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

7.6. Внезапный поворот потока

Участок трубопровода с внезапным поворотом потока называется коленом трубы (рис. 7.12).

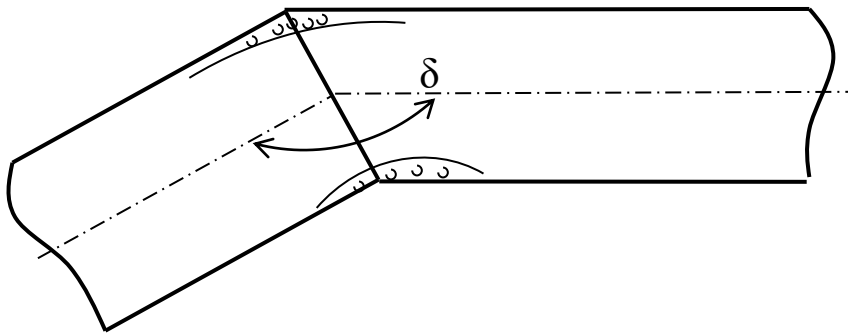


Рис. 7.12. Колено трубы

Потери напора при таком повороте потока вызваны вихревыми зонами, образующимися в результате отрыва потока от внешней и внутренней стенок трубы, трением и возникновением так называемого парного вихря. Причина возникновения парного вихря при повороте потока объяснена в п.7.7.

Потери напора при внезапном повороте потока, т.е. в колене, определяются по формуле Вейсбаха

$$h_k = \zeta_k \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}, \quad (7.23)$$

где ζ_k – коэффициент сопротивления колена, определяемый опытным путем.

Величина ζ_k зависит от формы поперечного сечения трубы, угла поворота потока δ и числа Re.

7.7. Плавный поворот потока

При плавном повороте потока (колена трубы), рис. 7.13, коэффициент сопротивления колена будет зависеть, кроме перечисленных выше факторов, еще и от относительного радиуса поворота $\frac{d}{R}$ для круглого сечения или $\frac{h}{R}$ для прямоугольного сечения трубы, где h – одна из сторон прямоугольника.

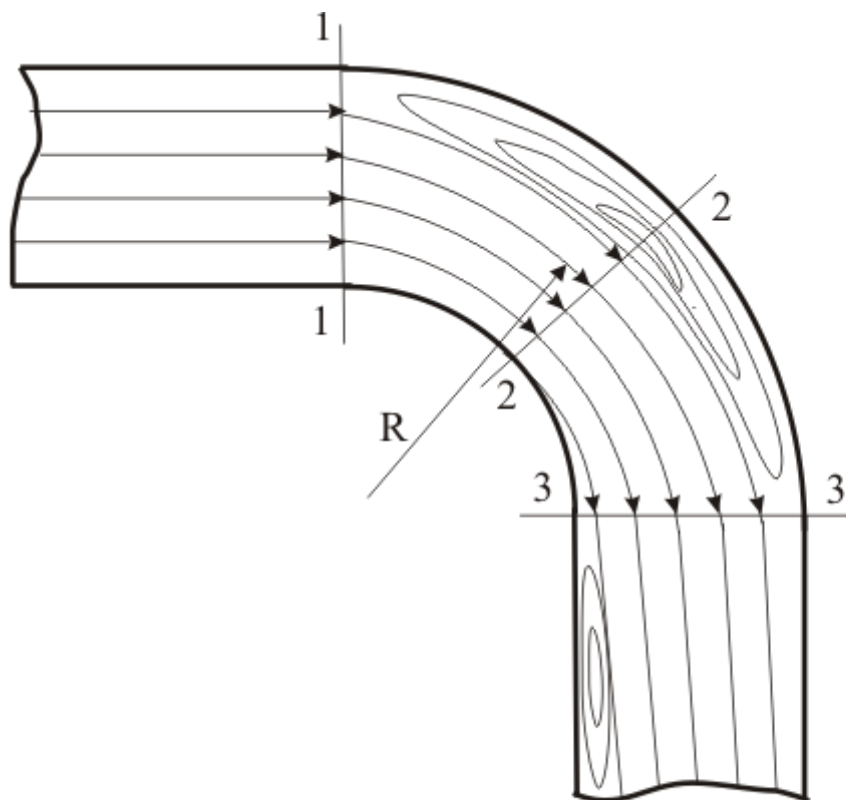


Рис.7.13. Отрыв потока от стенок трубы при плавном повороте

При плавном повороте потока отрыва потока от стенок трубы может и не быть, но если он будет, то на участке, где имеет место рост давления по течению жидкости. У наружной стенки трубы это происходит на участке 1-2, а у внутренней стенки – на участке 2-3.

Парный вихрь, возникающий при повороте потока, в совокупности с перемещением жидкости вдоль оси трубы, образует винтовое движение жидкости при повороте потока.

Возникновение парного вихря объясняется тем, что действующая на частицы жидкости массой Δm центростремительная сила ΔF искривляет траекторию частиц, радиус кривизны которой r тем меньше, чем меньше скорость их движения

$$\Delta F = \Delta m \cdot \frac{v^2}{r}. \quad (7.24)$$

Частицы жидкости, движущиеся вблизи оси трубы, обладают большей скоростью, чем частицы, движущиеся у стенки. При повороте потока радиусы кривизны траекторий частиц жидкости, движущихся у стенки, будут меньшими, чем у частиц, движущихся у оси трубы. В результате четыре частицы, находившиеся перед поворотом потока на одной оси 0-0, окажутся в каком-либо сечении на повороте сдвинутыми, как показано на рис. 7.14, что и объясняет возникновение парного вихря.

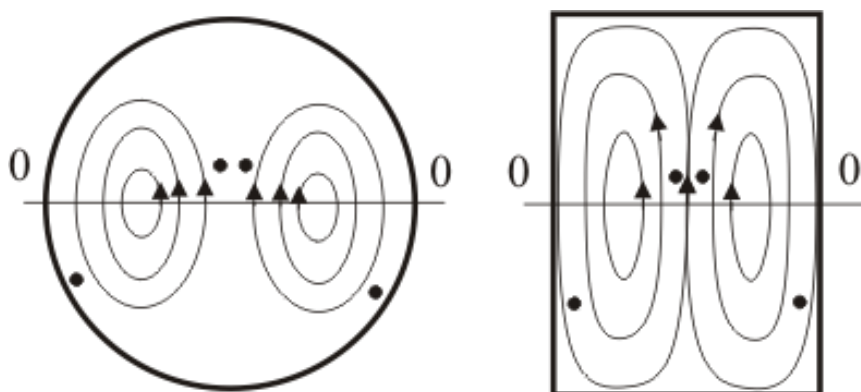


Рис.7.14. Возникновение парного вихря:
а) при круглом сечении колена трубы;
б) при прямоугольном сечении колена трубы

7.8. Тройники

Тройником называется деталь трубопровода, в которой происходит слияние или разделение потоков. Тройники подразделяются на нагнетательные и всасывающие. На рис. 7.15 изображен нагнетательный тройник, в котором жидкость из магистрали течет в ответвления. На рис. 7.16 изображен всасывающий тройник, в котором жидкость из ответвлений поступает в магистраль.

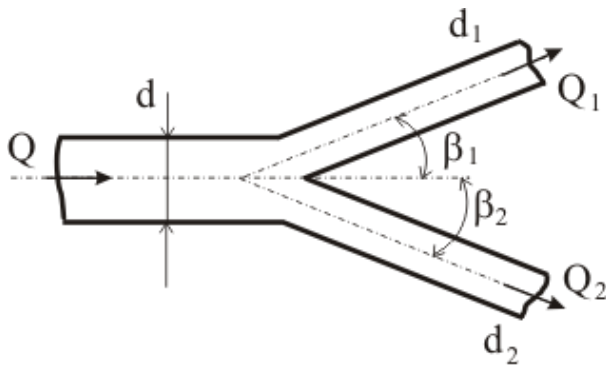


Рис.7.15. Нагнетательный тройник

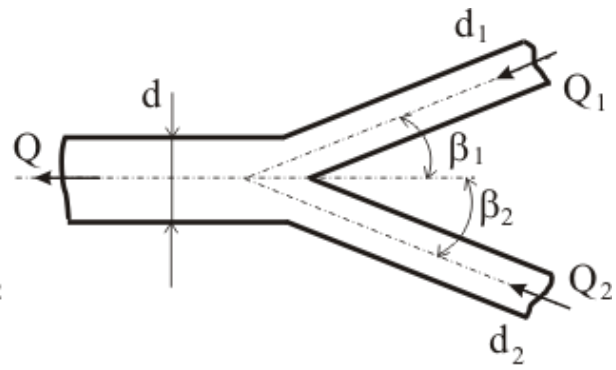


Рис.7.16. Всасывающий тройник

Потери напора в тройниках изучены недостаточно подробно, так же, как и процессы течения жидкости в них. Чаще всего потери напора в тройниках определяют по формуле Вейсбаха

$$h_{тр} = \zeta_{тр} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}, \quad (7.25)$$

где v – средняя скорость течения жидкости в магистрали;

$\zeta_{тр}$ – коэффициент сопротивления тройника,

определяемый опытным путем, в зависимости от

$\frac{Q_1}{Q}$ или $\frac{Q_2}{Q}$ и углов β_1 и β_2 .

Здесь Q – объемный расход в магистрали;

Q_1, Q_2 – соответственно, объемные расходы в ответвлениях;

β_1, β_2 – углы, которые составляют оси труб ответвлений с осью магистральной трубы.

Раздел 8

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ

В данном разделе рассматривается истечение несжимаемой капельной жидкости из отверстий и насадков – коротких трубопроводов различной формы при турбулентном движении (рис. 8.1.).

Выводятся формулы для определения скорости и объемного расхода при истечении жидкости, а также времени вытекания некоторого объема жидкости.

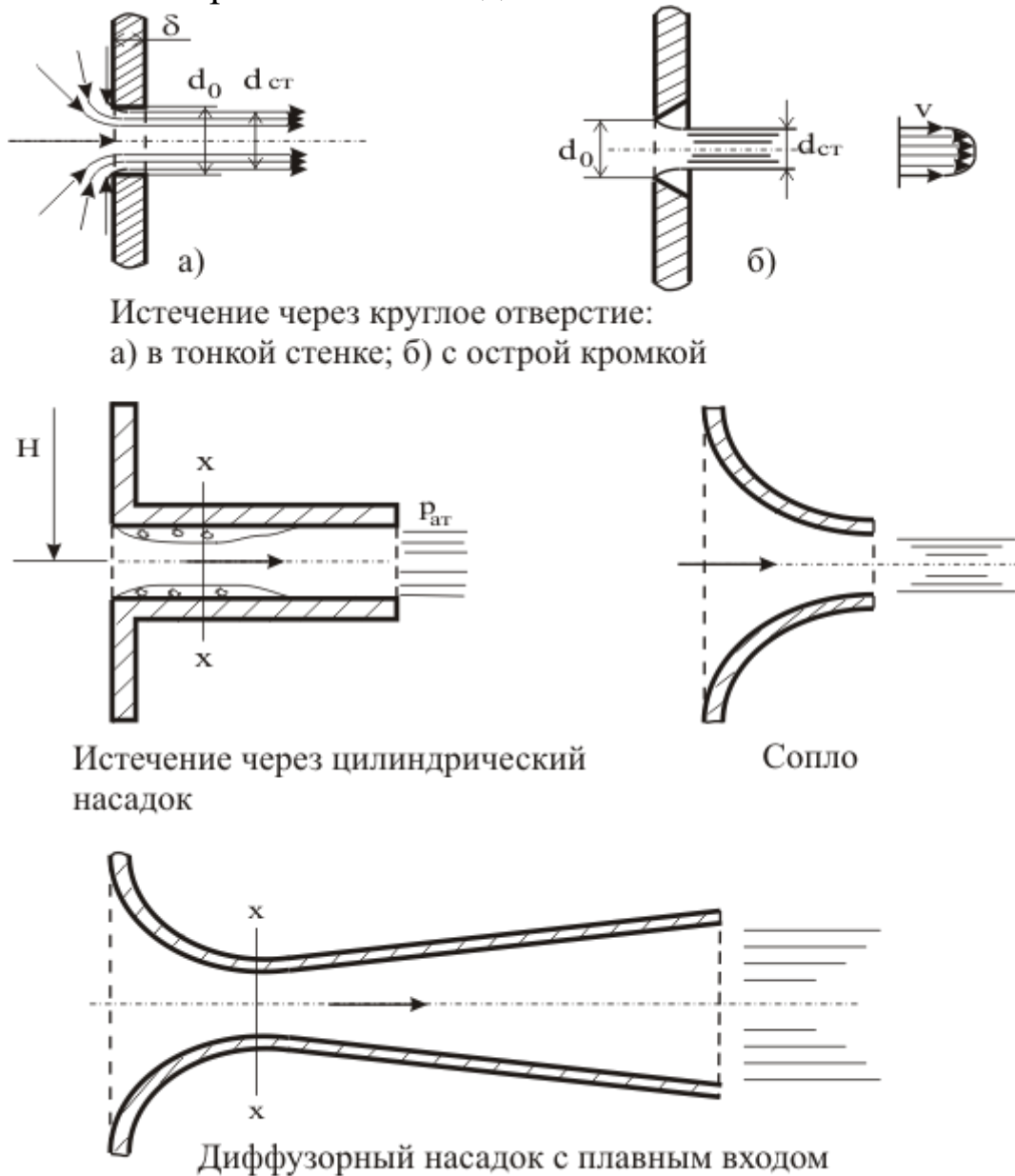


Рис.8.1. Истечение жидкости через отверстия и насадки

8.1. Истечение жидкости при постоянном избыточном напоре

При истечении жидкости из большого бака без свободной поверхности (рис. 8.2, а) или со свободной поверхностью (рис. 8.2, б) через отверстия или насадки малого диаметра можно пренебречь скоростью движения жидкости в баке.

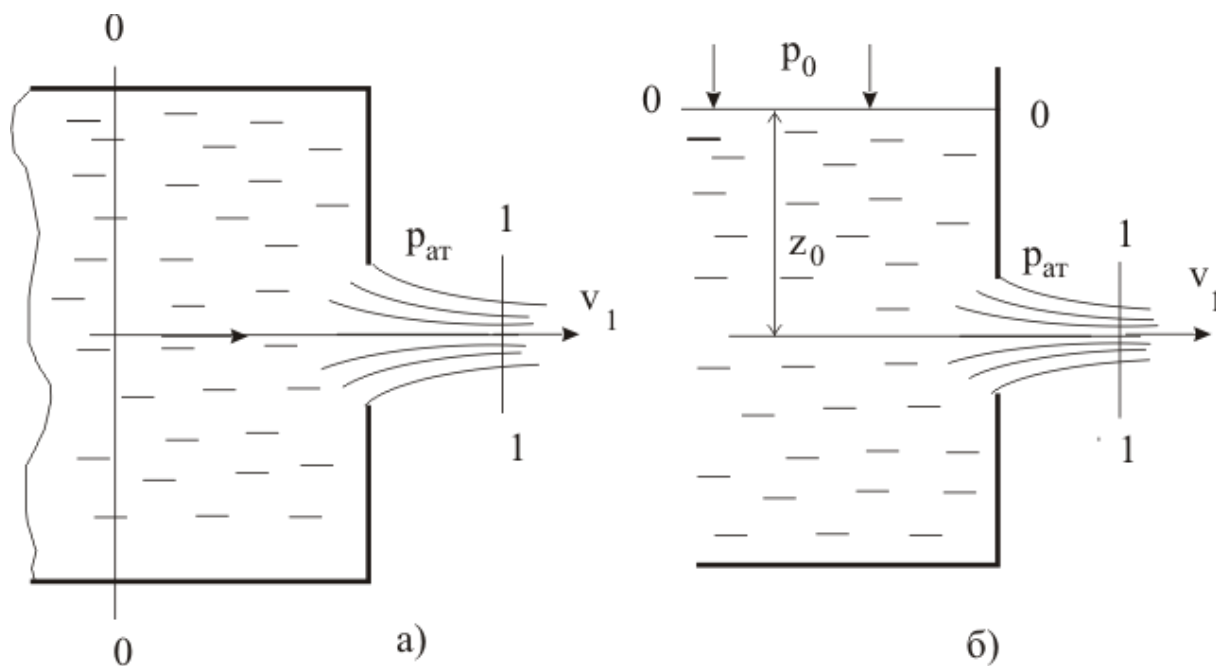


Рис.8.2. Истечение жидкости из большого бака:
а) без свободной поверхности; б) со свободной поверхностью

Тогда полный напор в сечении 0 - 0 в баке будет

$$H_0 = \frac{p_0}{\rho \cdot g} \text{ или } H_0 = z_0 + \frac{p_0}{\rho \cdot g}, \quad (8.1)$$

а избыточный напор при истечении будет

$$H_{\text{изб}} = \frac{p_0}{\rho \cdot g} - \frac{p_1}{\rho \cdot g} \text{ или } H_{\text{изб}} = z_0 + \frac{p_0}{\rho \cdot g} - \frac{p_1}{\rho \cdot g}, \quad (8.2)$$

где p_1 — давление в окружающем пространстве, куда вытекает жидкость.

Скорость жидкости на выходе из отверстия или насадка, т.е. скорость истечения, определяется из уравнения Бернулли, составленного для двух сечений: 0 – 0 в баке и 1 – 1 на выходе струи из отверстия или насадка (рис.8.2, б). При истечении из отверстия сечение 1 – 1 выбирается в том месте, где струя принимает цилиндрическую форму.

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho \cdot g} = \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha \cdot v_1^2}{2 \cdot g} + \zeta \frac{v_1^2}{2 \cdot g}, \quad (8.3)$$

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho \cdot g} - \frac{p_1}{\rho \cdot g} = (\alpha + \zeta) \frac{v_1^2}{2 \cdot g},$$

т.е.

$$H_{\text{изб}} = (\alpha + \zeta) \frac{v_1^2}{2 \cdot g}, \quad (8.4)$$

откуда

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}} \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{\text{изб}}}, \quad (8.5)$$

где $\alpha \approx 1$ для турбулентного движения;

ζ – коэффициент сопротивления отверстия или насадка.

Обозначая

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}} \quad (8.6)$$

и опуская индекс «1», получим окончательно

$$v = \varphi \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{\text{изб}}}. \quad (8.7)$$

где φ называется коэффициентом скорости (определяется из опыта).

Объемный расход равен произведению скорости истечения струи на площадь струи, т.е.

$$Q = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot v_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot \varphi \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{\text{изб}}} . \quad (8.8)$$

Вводя в это выражение вместо диаметра струи d_1 диаметр отверстия или насадка d_0 по формуле

$$d_1^2 = \frac{d_1^2}{d_0^2} \cdot d_0^2 \quad (8.9)$$

и обозначая

$$\varepsilon = \frac{d_1^2}{d_0^2} \quad (8.10)$$

(ε – коэффициент сжатия струи),
получим

$$Q = \varepsilon \cdot \varphi \cdot \frac{\pi \cdot d_0^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{\text{изб}}} \quad (8.11)$$

или

$$Q = \mu \cdot \frac{\pi \cdot d_0^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{\text{изб}}} , \quad (8.12)$$

где $\mu = \varepsilon \cdot \varphi$ – коэффициент расхода отверстия или насадка (определяется опытным путем).

φ , ε и μ называются коэффициентами истечения. Их численные величины зависят от формы отверстия или насадка и числа Рейнольдса Re .

На рис. 8.3 представлены экспериментальные зависимости коэффициентов истечения от чисел Re для круглого отверстия.

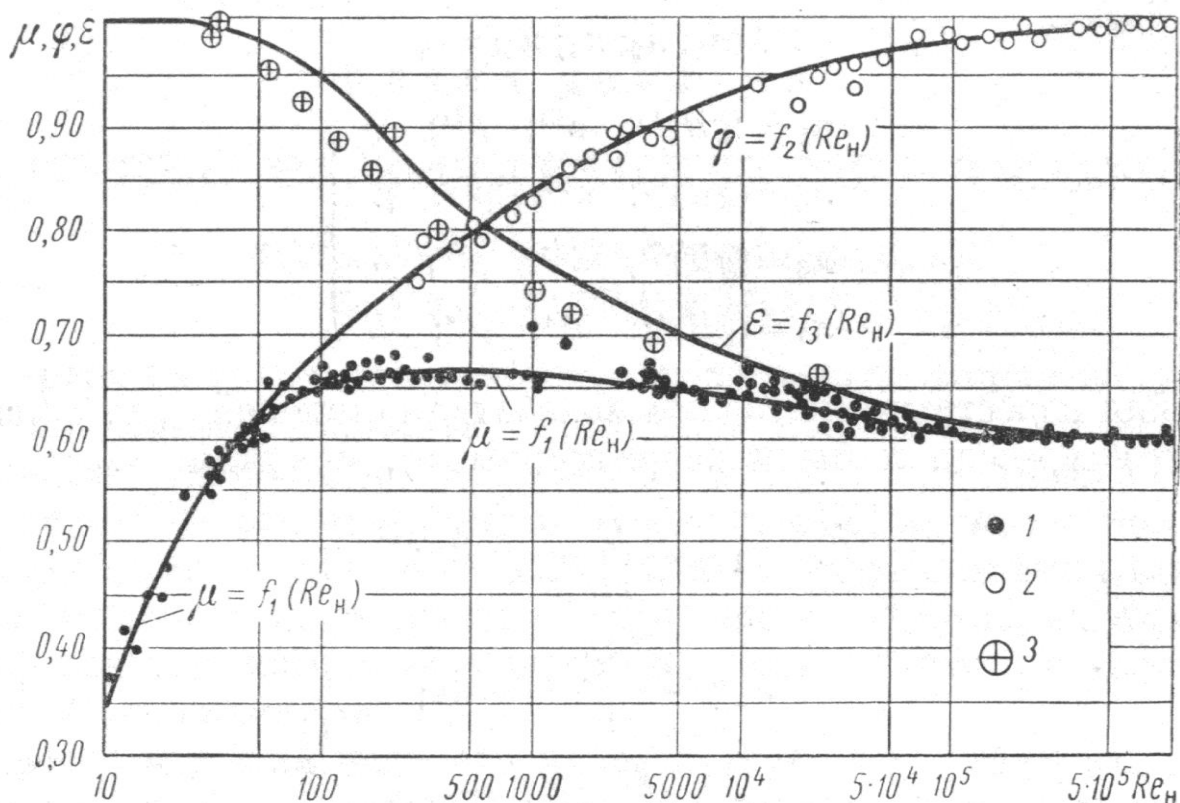


Рис. 8.3. Зависимость μ , φ , и ε от Re для круглого отверстия в тонкой стенке

В автомодельной области по числу Re ($Re > 5 \cdot 10^4$) для круглого отверстия

$$\varphi = 0,98; \mu = 0,63; \varepsilon = 0,64,$$

а для внешнего цилиндрического насадка при первом режиме течения

$$\varphi = \mu \approx 0,82; \varepsilon = 1.$$

Для насадка по форме сжатой струи (сопла)

$$\varphi = \mu \approx 0,98; \varepsilon = 1.$$

Для диффузорного насадка с плавным входом со следующими геометрическими параметрами – угол расширения конуса $\alpha = 5 \div 7^\circ$, степень расширения $n = \frac{d_1^2}{d_{\text{н\grave{a}}}^2} = 10 \div 12$ ($d_{\text{св}}$ – диаметр узкого сечения или так называемый диаметр в свету) при первом режиме истечения

$$\varphi = \mu \approx 0,24; \quad \varepsilon = 1.$$

$$Q = \mu \cdot \frac{d_1^2}{d_{\text{св}}^2} \cdot \pi \cdot \frac{d_{\text{св}}^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{\text{изб}}} \cdot \quad (8.13)$$

Обозначая

$$\mu_{\text{св}} = \mu \cdot \frac{d_1^2}{d_{\text{св}}^2},$$

получим

$$\mu_{\text{св}} \approx 0,24 \cdot 10 = 2,4.$$

Таким образом, при одинаковых избыточных напорах и одном и том же диаметре отверстия и насадков (диаметре «в свету») по значению коэффициентов расхода можно сравнивать их объемные расходы. Так, например, если к отверстию присоединить короткую цилиндрическую трубку с $\frac{\ell}{d} \approx 3,5 \div 4,5$,

то объемный расход увеличится в $\frac{\mu_{\text{вн.ц}}}{\mu_{\text{отв}}} = \frac{0,82}{0,61} = 1,34$ раза.

Если к сопловому насадку присоединить диффузорную часть с вышеуказанными геометрическими параметрами, то объемный расход увеличится в $\frac{\mu_{\text{диф}}}{\mu_{\text{с}}} = \frac{2,4}{0,98} = 2,45$ раза.

8.2. Особенности истечения жидкости из внешнего цилиндрического насадка и диффузорного насадка с плавным входом

При входе жидкости во внешний цилиндрический насадок имеет место внезапное сужение потока. Струя отрывается от стенок насадка, сужается, а затем расширяется до диаметра насадка (рис.8.4, а).

Скорость движения жидкости в струе до сечения $x - x$ увеличивается, а давление уменьшается. От сечения $x - x$ до выхода из насадка скорость движения жидкости уменьшается, а давление нарастает и достигает давления окружающей насадок среды.

При увеличении избыточного напора, под которым происходит истечение жидкости, скорость в сечении $x - x$ увеличивается, давление уменьшается, и при некотором напоре в узком сечении струи начнется кавитация (выделение растворенных в жидкости газов и паров жидкости, рис.8.4, б).

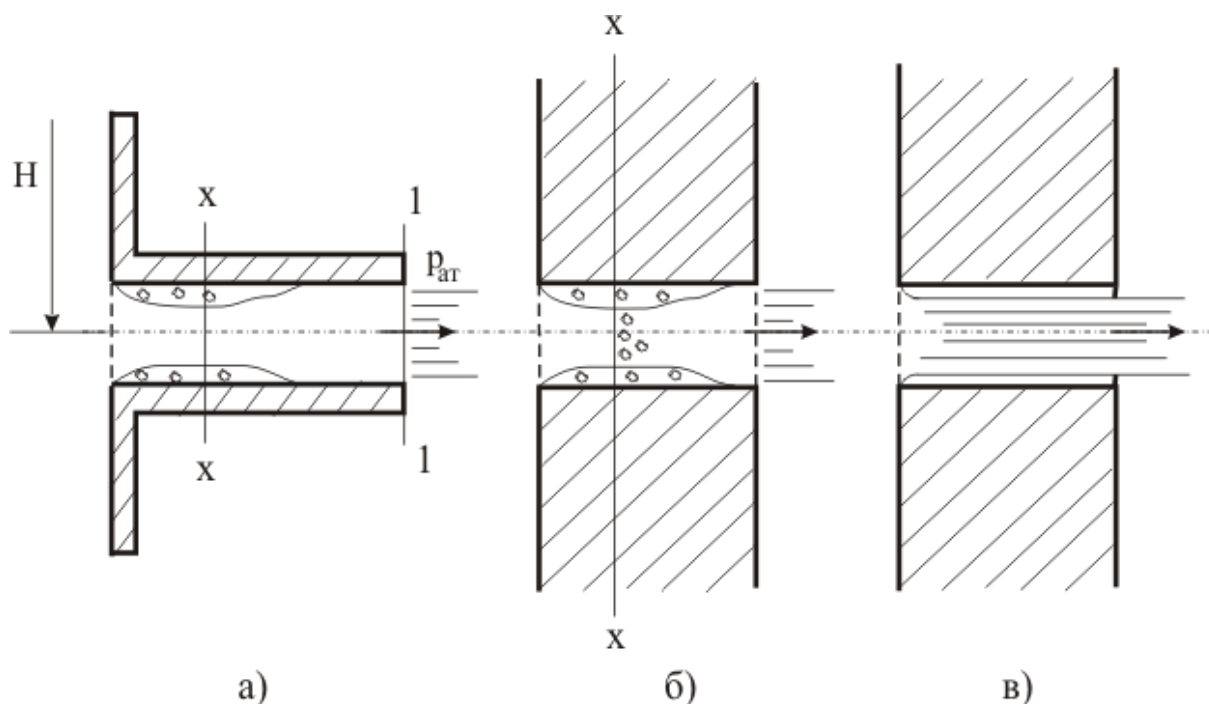


Рис.8.4. Истечение жидкости через внешний цилиндрический насадок: а) и б) - первый режим; в) - второй режим

По мере увеличения избыточного напора область кавитации будет увеличиваться, при достижении выхода из

насадка струя полностью оторвется от стенок насадка, наступит 2-й режим истечения, как из отверстия (рис.8.4, в). Избыточный напор, при котором наступает 2-й режим течения, называют **критическим** $H_{кр}$.

Если бы не было кавитации, то 2-й режим истечения наступил бы при избыточном напоре, при котором давление в сечении $x - x$ (самом узком сечении струи внутри насадка) стало бы равным нулю, поскольку при дальнейшем увеличении напора произошел бы разрыв струи.

Найдем величину критического избыточного напора при следующих условиях:

- 1) истечение жидкости происходит в атмосферу;
- 2) потери напора в насадке обусловлены внезапным расширением струи от диаметра в сечении $x - x$ до диаметра насадка d .

Запишем уравнение Бернулли для двух сечений $x - x$ и $1 - 1$, пренебрегая разностью нивелирных высот:

$$\frac{p_x}{\rho \cdot g} + \frac{v_x^2}{2 \cdot g} = \frac{p_{ат}}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{(v_x - v_1)^2}{2 \cdot g}. \quad (8.14)$$

Полагая $p_x = 0$, получим

$$\frac{p_{ат}}{\rho \cdot g} = \frac{2 \cdot v_x \cdot v_1}{2 \cdot g} - \frac{2 \cdot v_1^2}{2 \cdot g},$$

откуда

$$\frac{p_{ат}}{\rho \cdot g} = \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \cdot 2 \cdot \left(\frac{v_x}{v_1} - 1 \right). \quad (8.15)$$

Скорость при истечении из насадка

$$v_1 = \varphi_{нас} \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{кр}}, \quad (8.16)$$

а

$$\frac{v_x}{v_1} = \frac{d_1^2}{d_x^2} = \frac{1}{\varepsilon_{\text{отв}}}, \quad (8.17)$$

поскольку сжатие струи внутри насадка такое же, как и сжатие струи при истечении из отверстия.

Подставляя (8.16) и (8.17) в (8.15), получим

$$\frac{P_{\text{ат}}}{\rho \cdot g} = \varphi_{\text{нас}}^2 \cdot H_{\text{кр}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{отв}}} - 1 \right). \quad (8.18)$$

В автомодельной области по числу Re для внешнего цилиндрического насадка $\varphi_{\text{нас}} = 0,82$, а для отверстия $\varepsilon_{\text{отв}} = 0,64$.

Окончательно для указанных значений получим

$$H_{\text{кр}} = \frac{1}{0,76} \cdot \frac{P_{\text{ат}}}{\rho \cdot g}. \quad (8.19)$$

При нормальных условиях $\frac{P_{\text{ат}}}{\rho \cdot g} = 10,33$ м.вод.ст. В результате получим $H_{\text{кр}} = 13,6$ м.вод.ст.

При истечении жидкости из диффузорного насадка с плавным входом также имеют место два режима истечения: 1-й режим, при котором избыточный напор меньше некоторого критического значения (рис. 8.5, а), и 2-й режим истечения при избыточном напоре, большем, чем критический избыточный напор (рис. 8.5, б).

В последнем случае истечение жидкости будет таким же, как из насадка по форме сжатой струи, и диффузорная часть насадка никакого влияния на процесс истечения оказывать не будет.

Как показывает опыт, для диффузорного насадка с плавным входом при степени расширения диффузора $n = 8,5 \div 9$, угле расширения $\alpha = 6^\circ \div 8^\circ$ и истечении в атмосферу $\frac{P_{\text{ат}}}{\rho \cdot g} = 10,33$ м.вод.ст., $H_{\text{кр}} \approx 1,4 \div 1,6$ м.вод.ст.

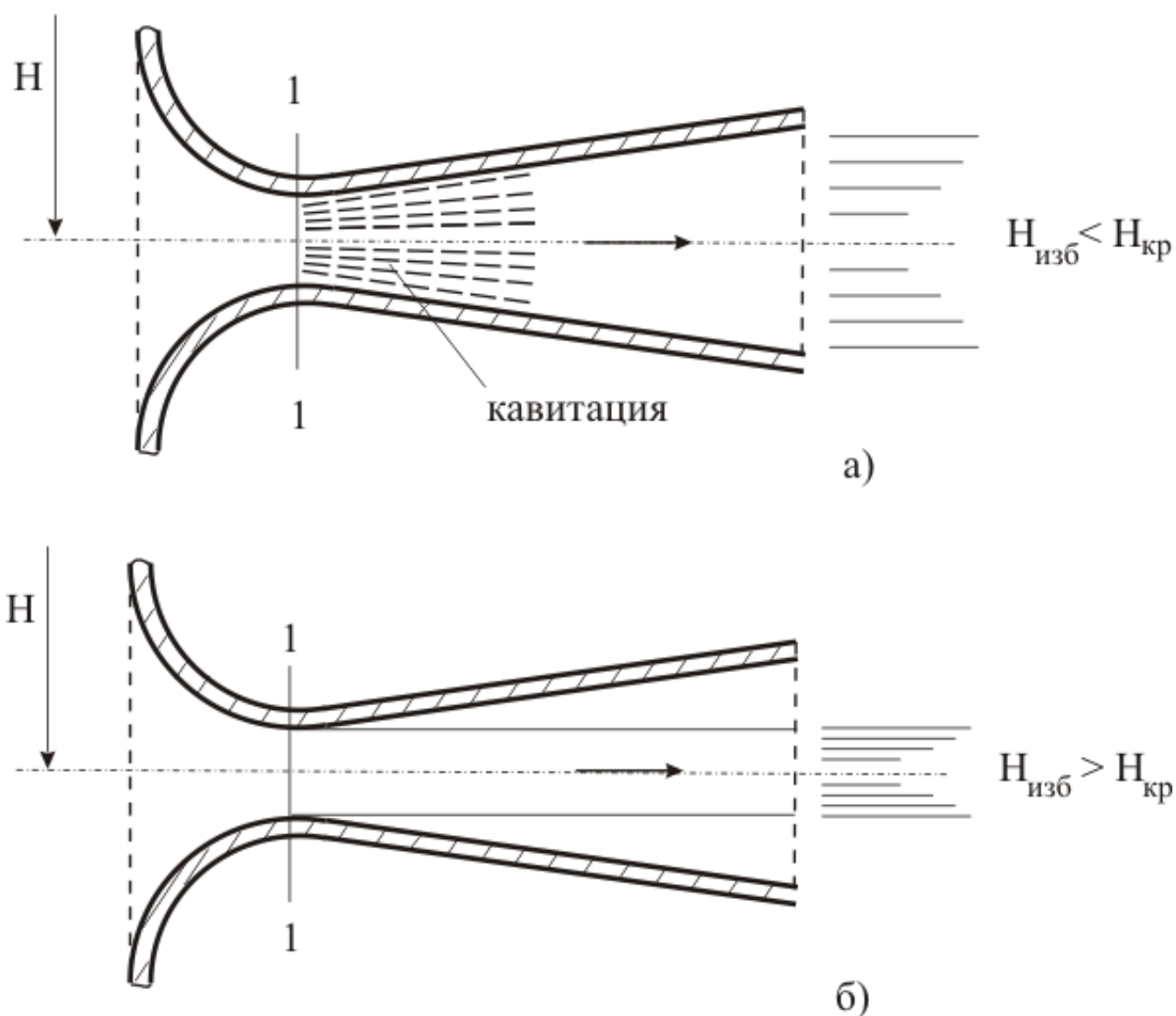


Рис.8.5. Истечение жидкости из диффузорного насадка:
 а) истечение при $H_{изб} < H_{кр}$; б) истечение при $H_{изб} > H_{кр}$

8.3. Истечение жидкости из отверстий и насадков при переменном напоре. Опорожнение емкостей

Истечение жидкостей из отверстий и насадков при переменном избыточном напоре будем рассматривать при следующих допущениях:

1) скорость истечения жидкости и объемный расход в каждый момент времени определяются по тем же формулам, что и при установившемся движении, но при избыточном напоре, соответствующем данному моменту времени;

2) коэффициенты скорости φ и расхода μ будут иметь те же значения, что и при установившемся движении, при значении числа Re , соответствующем данному моменту времени, либо эти коэффициенты постоянны, как это имеет место в режиме автомодельности по числу Re .

Тогда в момент времени t скорость при истечении жидкости определяется по формуле

$$v(t) = \varphi(t) \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{изб}(t)}, \quad (8.20)$$

а объемный расход

$$Q(t) = \mu(t) \cdot \frac{\pi \cdot d_0^2}{4} \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{изб}(t)}. \quad (8.21)$$

Рассмотрим задачу о времени полного опорожнения емкости произвольной формы, открытой в атмосферу (рис. 8.6).

Поскольку напор, а следовательно, и скорость истечения изменяются медленно, то движение в каждый данный момент времени можно рассматривать как установившееся и применить формулы (8.20), (8.21).

Обозначив $h(t)$ переменную высоту уровня жидкости в сосуде, отсчитываемую от дна, $s(t)$ – площадь сечения емкости на этом уровне, а s_0 – площадь отверстия или насадка, получим для бесконечно малого отрезка времени dt следующее уравнение объемов:

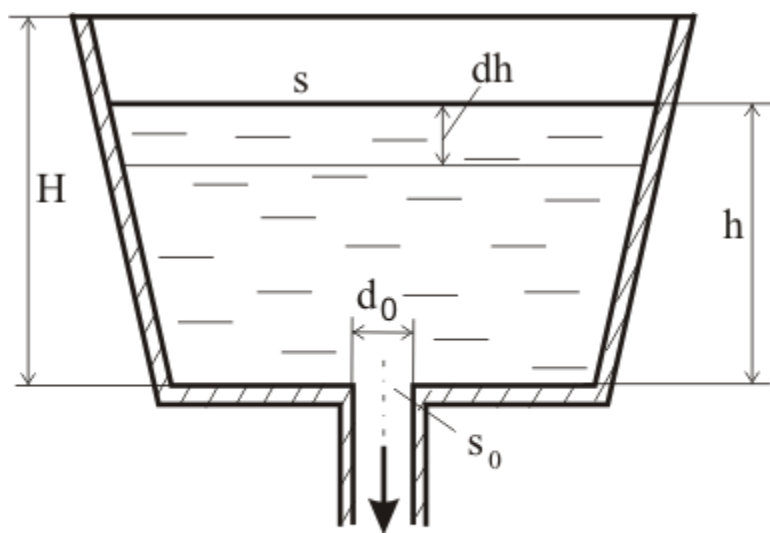


Рис.8.6. Истечение жидкости из бака при переменном напоре

$$Q \cdot dt = -s(t) \cdot dh \quad (8.22)$$

или

$$\mu \cdot s_0 \sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)} \cdot dt = -s(t) \cdot dh,$$

где dh – величина снижения уровня жидкости в сосуде за время dt .

Знак минус обусловлен тем, что положительному приращению dt соответствует отрицательное приращение dh .

Отсюда время полного опорожнения сосуда, в котором начальный уровень жидкости был расположен на высоте H от дна сосуда

$$t = -\frac{1}{s_0 \sqrt{2 \cdot g}} \int_H^0 \frac{s(t)}{\mu} \cdot \frac{dh}{\sqrt{h(t)}}. \quad (8.23)$$

Интеграл может быть подсчитан, если известен закон изменения площади $s(t)$ в зависимости от высоты $h(t)$.

Для призматической емкости (рис.8.7) $s = \text{const}$.

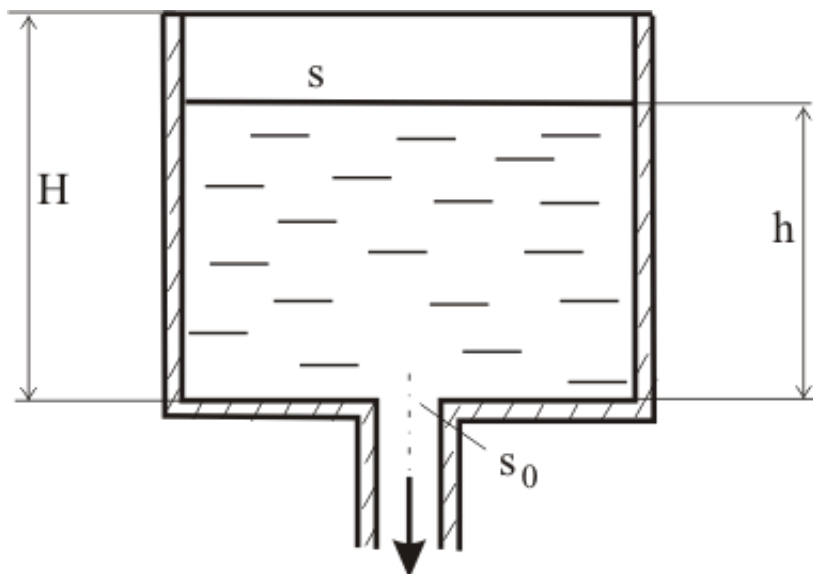


Рис.8.7. Истечение жидкости из призматической емкости при переменном напоре

При постоянном μ будем иметь

$$t = \frac{s}{\mu \cdot s_0 \sqrt{2 \cdot g}} \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}}, \quad (8.24)$$

откуда

$$t = \frac{2 \cdot s}{\mu \cdot s_0 \sqrt{2 \cdot g}} \sqrt{H} = \frac{2 \cdot s \cdot H}{\mu \cdot s_0 \sqrt{2 \cdot g \cdot H}}. \quad (8.25)$$

Числитель этой формулы равен удвоенному объему емкости, а знаменатель представляет собой расход в начальный момент опорожнения, т.е. при напоре H . Следовательно, время полного опорожнения емкости в два раза больше времени истечения того же объема жидкости при постоянном напоре, равном первоначальному.

Рассмотрим задачу о времени опорожнения полностью заполненной жидкостью железнодорожной цистерны через нижнее отверстие (рис. 8.8). Полагаем течение турбулентным, $\mu = \text{const}$.

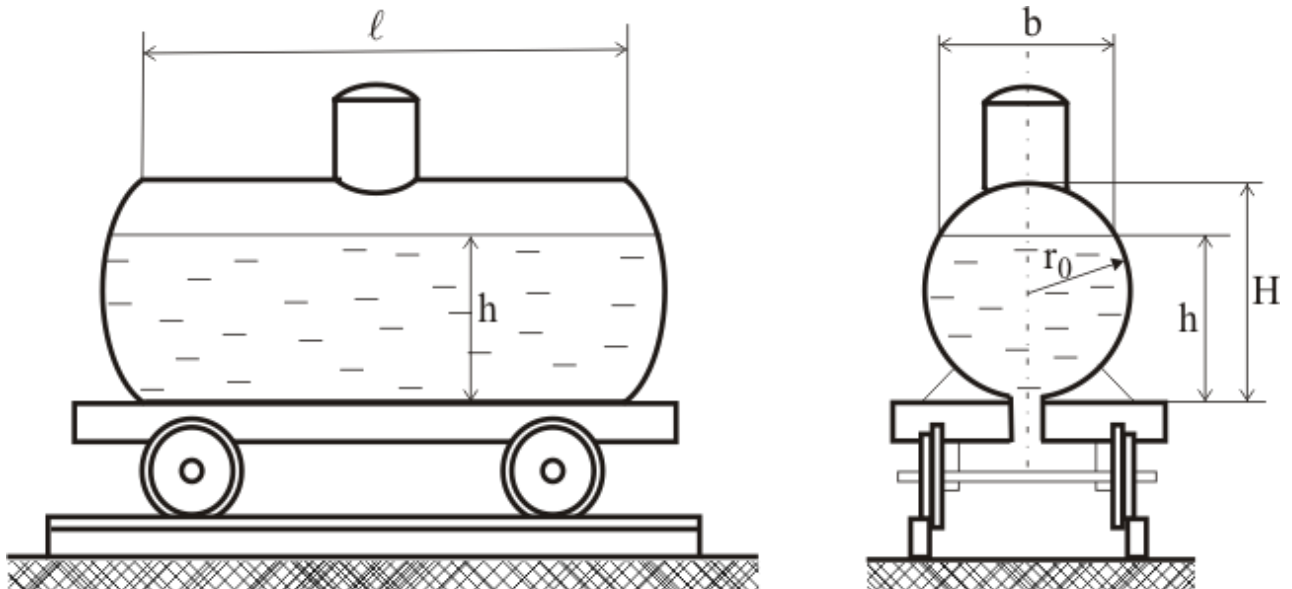


Рис.8.8. Истечение жидкости из железнодорожной цистерны

В общем случае, как было отмечено выше, s является функцией высоты h . В данной задаче

$$s = \ell \cdot b,$$

где

$$b = 2\sqrt{r_0^2 - (h - r_0)^2} = 2\sqrt{2 \cdot r_0 \cdot h - h^2}.$$

Подставляя значение s в формулу (8.23), с учетом того, что $H = 2 \cdot r_0$, и полагая $\mu = \text{const}$, получим

$$t = \frac{2 \cdot \ell}{\mu \cdot s_0 \sqrt{2 \cdot g}} \int_0^{2r_0} \frac{\sqrt{2 \cdot r_0 \cdot h - h^2}}{\sqrt{h}} dh \quad (8.26)$$

или

$$\begin{aligned} t &= \frac{2 \cdot \ell}{\mu \cdot s_0 \sqrt{2 \cdot g}} \int_0^{2r_0} \sqrt{2 \cdot r_0 - h} dh = \\ &= \frac{-2 \cdot \ell}{\mu \cdot s_0 \sqrt{2 \cdot g}} \frac{2}{3} (2 \cdot r_0 - h)^{3/2} \Big|_0^{2r_0} = \end{aligned} \quad (8.27)$$

$$= \frac{8 \ell \cdot r_0}{3 \mu \cdot s_0} \sqrt{\frac{r_0}{g}}.$$

Раздел 9

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ

В этом разделе, за исключением последнего пункта, рассматривается установившееся (стационарное) изотермическое движение несжимаемой жидкости по трубопроводам.

В основе гидравлического расчета сложного трубопровода лежит гидравлический расчет простого трубопровода (трубопровода без разветвлений) постоянного сечения.

9.1. Гидравлический расчет простого трубопровода постоянного сечения

На рис. 9.1 изображен простой трубопровод постоянного сечения с насосной подачей жидкости (рис. 9.1, а), подачей жидкости за счет разности уровней напорного и сливного баков (рис. 9.1, б) и вытеснительной подачей жидкости под избыточным давлением (рис. 9.1, в).

Исходным уравнением для гидравлического расчета трубопровода является уравнение баланса энергии. Для единицы веса жидкости это уравнение имеет вид

$$H_1 + H_{\text{нас}} - \sum_{1-2} h_i = H_2, \quad (9.1)$$

где H_1 – полная удельная энергия жидкости в сечении 1-1;

$H_{\text{нас}}$ – удельная энергия, сообщенная жидкости насосом (при его наличии);

$\sum_{1-2} h_i$ – сумма потерь удельной энергии между сечениями 1-1 и 2-2;

H_2 – полная удельная энергия жидкости на выходе в сечении 2-2.

Откуда

$$H_{\text{нас}} = H_2 - H_1 + \sum_{1-2} h_i. \quad (9.2)$$

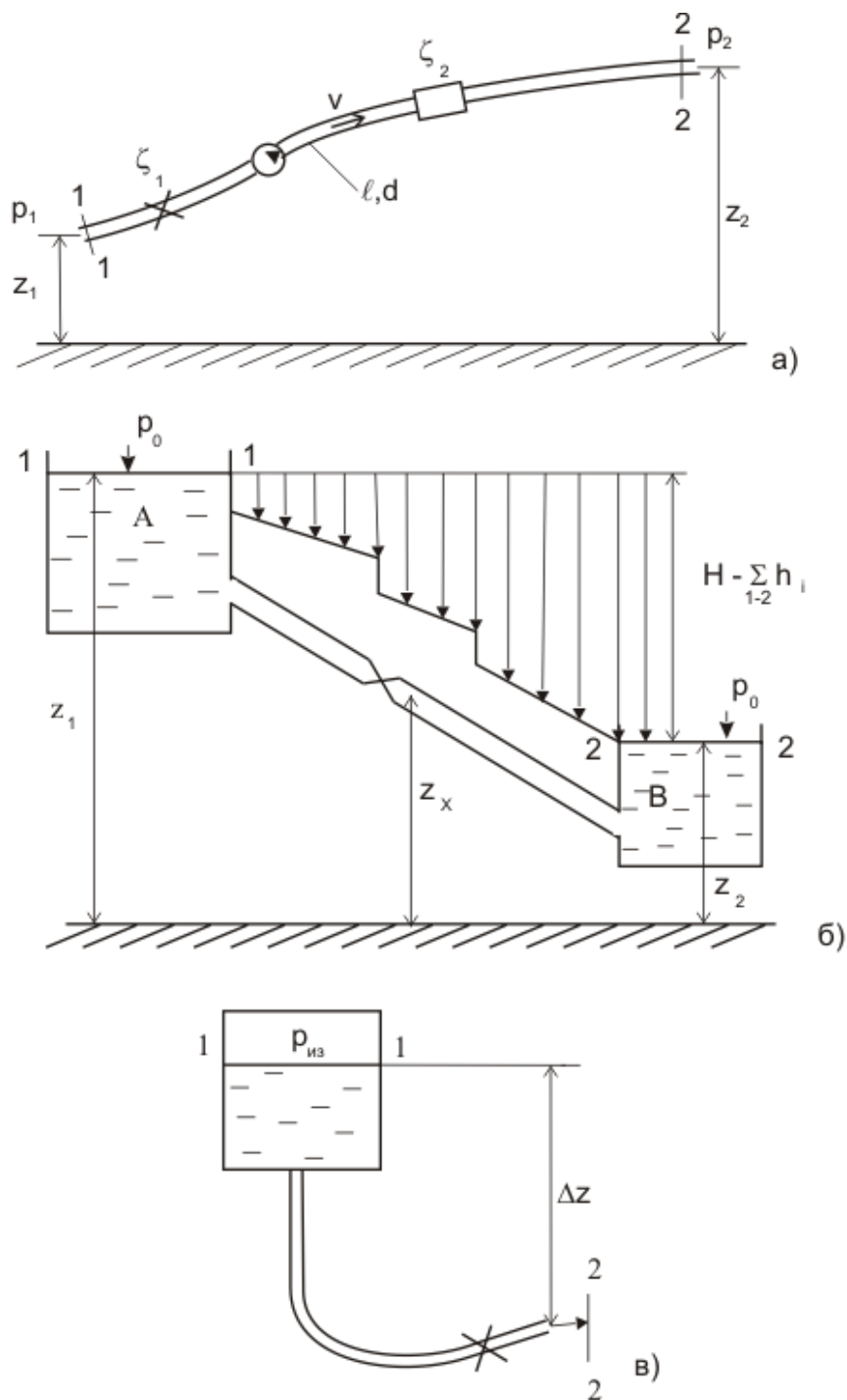


Рис.9.1. К гидравлическому расчету трубопровода:
а) простой трубопровод постоянного сечения с насосной подачей жидкости;
б) трубопровод с подачей жидкости за счет разности уровней напорного и сливного баков;
в) трубопровод с вытеснительной подачей жидкости под избыточным давлением

Правая часть уравнения (9.2) называется **потребным напором** $H_{потр}$ для движения жидкости по данному трубопроводу (диаметра d , длины l и с конкретными местными

сопротивлениями ζ_i) с заданными давлениями на его концах p_1 и p_2 и заданным расходом Q .

Величина потребного напора $H_{\text{потр}}$ тем больше, чем больше расход жидкости Q

$$H_{\text{потр}}(Q) = H_2 - H_1 + \sum_{1-2} h_i. \quad (9.3)$$

Для трубопроводов (рис. 9.1, а и 9.1, б)

$$H_2 - H_1 = z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g}, \quad (9.4)$$

поскольку скорости движения жидкости на концах трубопровода одинаковы $v_1 = v_2$ (рис. 9.1 а), в частности, $v_1 = v_2 = 0$ (рис. 9.1, б).

Для трубопровода (рис. 9.1, в)

$$H_{\text{потр}} = z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} + \alpha \cdot \frac{v_2^2}{2 \cdot g}. \quad (9.5)$$

Поскольку потери напора имеют вид

$$\sum_{1-2} h_i = \left(\lambda \frac{\ell}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{v^2}{2 \cdot g},$$

а

$$\frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^4 \cdot g},$$

то

$$\sum_{1-2} h_i = \left(\lambda \frac{\ell}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^4 \cdot g}. \quad (9.6)$$

Тогда (9.3) с учетом (9.4), (9.5) и (9.6) запишется

$$H_{i\hat{\imath}\delta\delta} = z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} + \left(\lambda \frac{\ell}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^4 \cdot g} \quad (9.7)$$

или

$$H_{i\hat{\imath}\delta\delta} = z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} + \left(\alpha + \lambda \frac{\ell}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^4 \cdot g}. \quad (9.8)$$

Выражения (9.7) и (9.8), отражающие зависимость потребного напора $H_{\text{потр}}$ от объемного расхода Q , называется **характеристикой простого трубопровода постоянного диаметра**.

Графики характеристик трубопровода при ламинарном течении представлены на рис. 9.2, а, а при турбулентном течении – на рис. 9.2, б.

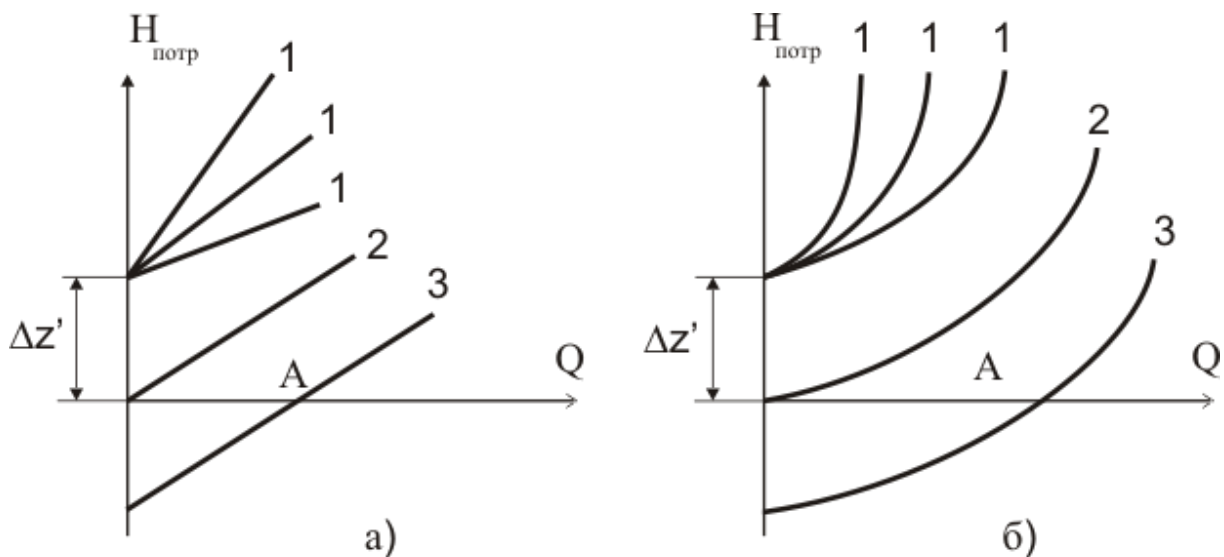


Рис.9.2. Кривые потребных напоров:
а) ламинарное течение; б) турбулентное течение

На графиках кривые 1 относятся к трубопроводу, у которого

$$z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} > 0,$$

кривые 2 относятся к трубопроводу, у которого

$$z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} = 0,$$

кривые 3 относятся к трубопроводу, у которого

$$z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} < 0.$$

Точка А на графиках, в которой $H_{\text{потр}} = 0$, соответствует движению жидкости самотеком с объемным расходом Q_A .

Гидравлический расчет простого трубопровода постоянного диаметра сводится к решению одной из трех основных задач.

9.2. Три основные задачи гидравлического расчета простого трубопровода постоянного диаметра

Задача 1

Предполагаются известными все геометрические и гидравлические параметры трубопровода, т.е. длина ℓ , диаметр d , коэффициенты установленных в трубопроводе местных сопротивлений ζ_i (Re), коэффициенты трения $\lambda\left(Re, \frac{\Delta}{d}\right)$, нивелирные высоты сечений 1-1 и 2-2 z_1 и z_2 , давления на концах трубопровода p_1 и p_2 и объемный расход Q . Требуется определить потребный напор $H_{\text{потр}}$.

Алгоритм решения поставленной задачи следующий:

1. По заданному расходу Q определяем число Рейнольдса

$$Re = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d \cdot v}.$$

2. Если $Re < Re_{\text{кр}}$ ($Re_{\text{кр}} = 2300$), то движение в трубопроводе ламинарное и

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

Если $Re > Re_{кр}$, то движение в трубопроводе турбулентное
и

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{68}{Re} + \frac{\Delta}{d} \right)^{0,25} .$$

3. Коэффициенты $\zeta_i(Re)$ находим по опытным данным.

4. Потребный напор $H_{потр}$ определяем по формуле (9.7) или (9.8).

Задача 2

Предполагаются известными все геометрические и гидравлические параметры трубопровода, кроме объемного расхода Q (см. условие задачи 1). Задан располагаемый напор $H_{расп}$. Требуется определить объемный расход Q .

Решение

Задаемся последовательностью значений объемного расхода Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) для каждого из которых находим по алгоритму решения задачи 1 соответствующее значение потребного напора $H_{потр}$. Искомый объемный расход Q будет соответствовать значению $H_{потр\ i} = H_{расп}$ (рис. 9.3).

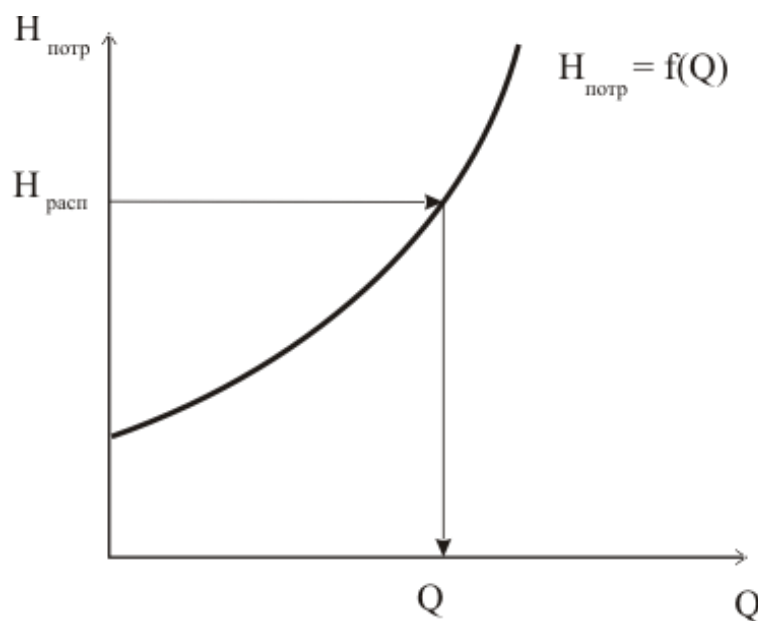


Рис.9.3. К определению расхода Q при заданном располагаемом напоре $H_{расп}$

Задача 3

Предполагаются известными все геометрические и гидравлические параметры трубопровода, кроме диаметра d . Задан объемный расход Q при известном располагаемом напоре $H_{\text{расп}}$.

Решение

Задаемся последовательностью значений диаметра d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и находим соответствующие значения $H_{\text{потр } i}$ при заданном объемном расходе Q по алгоритму решения задачи 1. Искомое значение диаметра d будет соответствовать значению $H_{\text{потр } i} = H_{\text{расп}}$ (рис. 9.4).

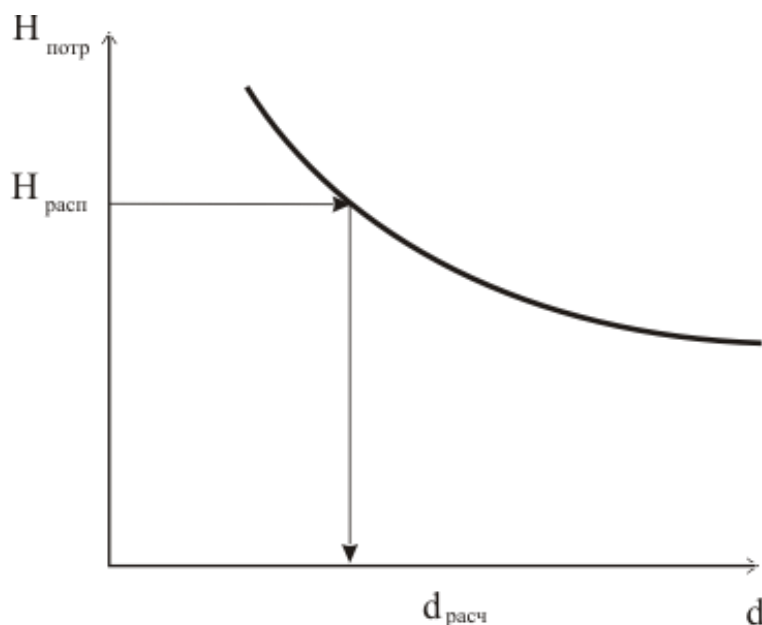


Рис.9.4. К определению диаметра трубопровода при заданном расходе и известном располагаемом напоре $H_{\text{расп}}$

9.3. Сифон

Сифоном называется трубопровод, часть которого находится выше уровня в напорном баке (рис. 9.5).

Для течения по сифону он должен быть предварительно заполнен жидкостью.

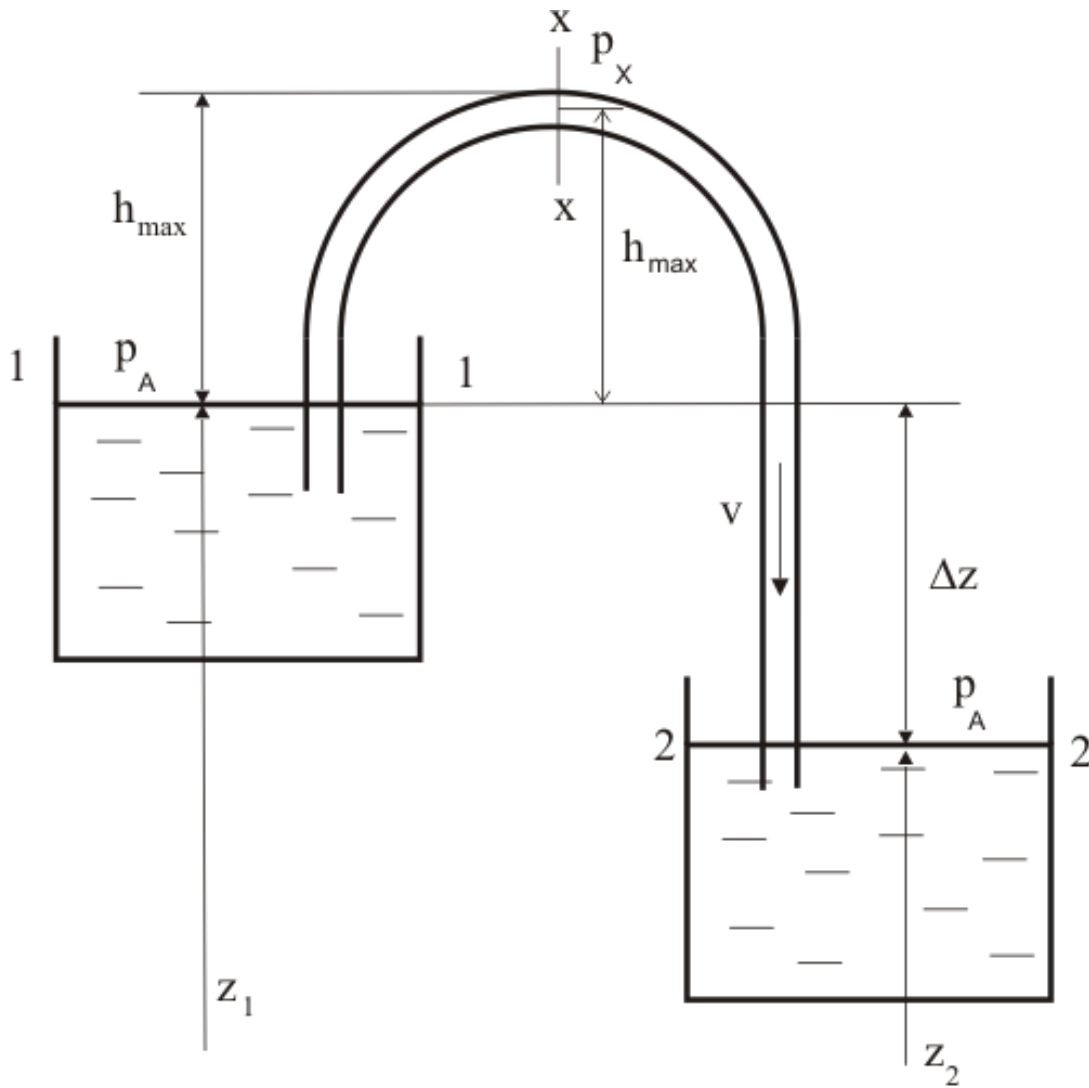


Рис.9.5. Сифон

Объемный расход определяется по уравнению Бернулли, составленному для двух сечений 1-1 и 2-2, или, что то же, по уравнению баланса удельных энергий (9.1), в котором полагают $H_{\text{нас}} = 0$

$$z_1 + \frac{p_{\text{ат}}}{\rho \cdot g} = z_2 + \frac{p_{\text{ат}}}{\rho \cdot g} + \sum_{i=1}^2 h_i . \quad (9.9)$$

$v_1 = v_2 \approx 0$, поскольку сечения 1-1 и 2-2 велики по сравнению с сечением трубы.

Согласно (9.6) выражение (9.8) будет иметь вид

$$\Delta z = \left(\lambda \frac{\ell}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^4 \cdot g}, \quad (9.10)$$

где $\Delta z = z_1 - z_2$.

Отсюда

$$Q = \sqrt{\frac{\Delta z \cdot \pi^2 \cdot d^4 \cdot g}{8 \left(\lambda \frac{\ell}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right)}}. \quad (9.11)$$

Максимальная высота расположения сечения сифона $x - x$ (рис. 9.5) h_{\max} определяется из уравнения Бернулли, записанного для сечений 1 - 1 и $x - x$, при условии, что абсолютное давление в сечении $x - x$

$$p_x = 0.$$

В этом сечении давление в сифоне минимальное.

$$z_1 + \frac{p_{\text{атм}}}{\rho \cdot g} = z_1 + h_{\max} + \frac{v^2}{2 \cdot g} + \left(\lambda \frac{\ell_x}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (9.12)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{p_{\text{атм}}}{\rho \cdot g} &= h_{\max} + \left(1 + \lambda \frac{\ell_x}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^4 \cdot g}; \\ h_{\max} &= \frac{p_{\text{атм}}}{\rho \cdot g} - \left(1 + \lambda \frac{\ell_x}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^4 \cdot g}, \end{aligned} \quad (9.13)$$

где ℓ_x – длина сифона от начала до сечения $x - x$;

$\sum_{i=1}^n \zeta_i$ – сумма коэффициентов местных сопротивлений,

установленных на длине ℓ_x .

Из выражения (9.13) следует, чем меньше расход жидкости через сифон, тем выше может быть расположено сечение $x - x$. Максимальная высота соответствует $Q = 0$ и равна

$$h_{\max} = \frac{p_{\text{ат}}}{\rho \cdot g}.$$

Уменьшить расход через сифон можно при прочих равных условиях установкой местных сопротивлений на нисходящем участке сифона от сечения $x - x$ до конечного сечения.

В реальных условиях при повышении расположения сечения $x - x$ над уровнем в напорном баке давление в этом сечении p_x будет уменьшаться, и при достижении некоторого критического значения в этом сечении начнется кавитация. При дальнейшем увеличении высоты расположения сечения $x - x$ до некоторого значения h_{\max} и связанным с этим понижением давления и развитием кавитации струя жидкости разорвется и течение через сифон прекратится.

9.4. Последовательное соединение труб

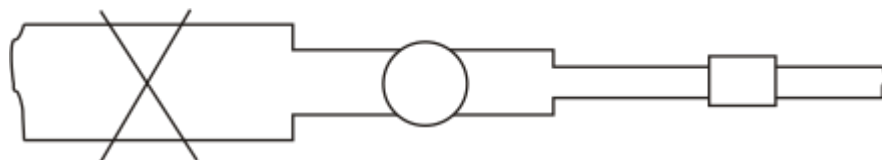


Рис.9.6. Последовательное соединение труб

При последовательном соединении труб (рис. 9.6) расход жидкости в любом сечении

трубопровода будет одним и тем же, а потери напора во всем трубопроводе $\sum_{s=1}^n h$ будут равны сумме потерь напора в каждой из труб, составляющих последовательное соединение:

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n, \quad (9.14)$$

$$\sum_{i=1}^n h = h_1 + h_2 + \dots + h_n, \quad (9.15)$$

где h_1, h_2, \dots, h_n – потери напора в каждой из труб последовательного соединения.

На рис. 9.7 показано построение зависимости потерь напора от расхода для трех труб, составляющих последовательное соединение.

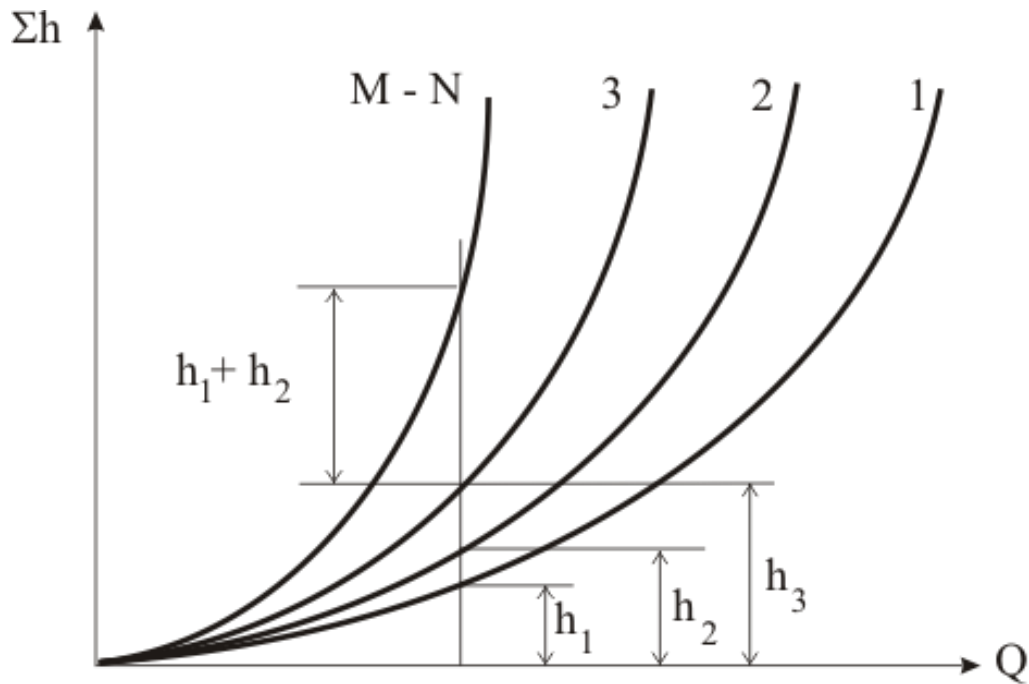


Рис. 9.7. Построение характеристики последовательного соединения труб

Кривая 1 – зависимость потерь напора от расхода в первой трубе

$$h_1 = \left(\lambda_1 \frac{\ell_1}{d_1} + \sum_1 \zeta_i \right) \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d_1^4 \cdot g}. \quad (9.16)$$

Кривая 2 – та же зависимость для второй трубы

$$h_2 = \left(\lambda_2 \frac{\ell_2}{d_2} + \sum_2 \zeta_i \right) \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d_2^4 \cdot g}. \quad (9.17)$$

Кривая 3 – та же зависимость для третьей трубы

$$h_3 = \left(\lambda_3 \frac{\ell_3}{d_3} + \sum_3 \zeta_i \right) \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d_3^4 \cdot g}. \quad (9.18)$$

Кривая М - N – зависимость потерь напора от расхода во всем трубопроводе.

9.5. Параллельное соединение труб

Параллельное соединение труб представляет собой фрагмент сложного трубопровода, у которого общее сечение разветвления потоков и общее сечение слияния потоков.

На рис. 9.8 показано параллельное соединение, состоящее из трех труб.

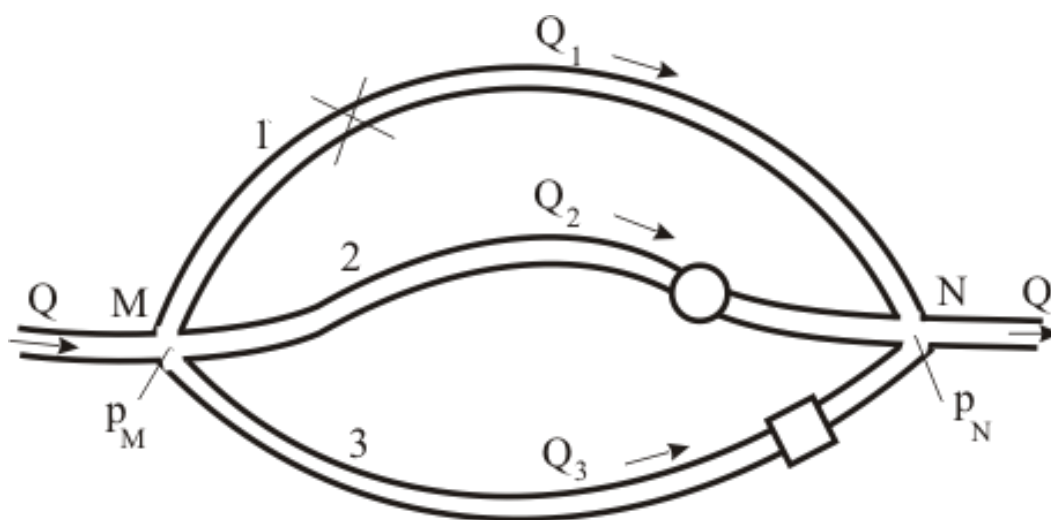


Рис.9.8. Параллельное соединение труб

Очевидно, что сумма расходов в каждой из труб Q_i , составляющих параллельное соединение, равна расходу жидкости Q в подводящей магистрали, т.е.

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n, \quad (9.19)$$

причем расход Q так распределяется по трубам параллельного соединения, чтобы потери напора в каждой из труб были одинаковыми

$$h_1 = h_2 = \dots = h_n, \quad (9.20)$$

где

$$h_i = \left(\lambda_i \frac{\ell_i}{d_i} + \sum_i \zeta_i \right) \frac{8 \cdot Q_i^2}{\pi^2 \cdot d_i^4 \cdot g}. \quad (9.21)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

Это следует из того, что поскольку полный напор на входе (в сечении М) параллельного соединения труб в каждой трубе один и тот же, то и на выходе из параллельного соединения (в сечении N) полный напор будет меньшим, но также одинаковым во всех трубах, чтобы жидкость поступала из них в отводящий магистральный трубопровод.

На примере параллельного соединения, состоящего из трех труб диаметра d_i , длины ℓ_i , местные сопротивления ζ_i в которых известны, а также известны расход жидкости в подводящем трубопроводе Q , приведем систему уравнений для определения расходов в каждой из труб Q_i :

$$\begin{cases} Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ k_1 Q_1^2 = k_2 Q_2^2 \\ k_2 Q_2^2 = k_3 Q_3^2 \end{cases} \quad (9.22)$$

где обозначено

$$k_i = \left(\lambda_i \frac{\ell_i}{d_i} + \sum_i \zeta_i \right) \frac{8}{\pi^2 \cdot d_i^4 \cdot g}. \quad (9.23)$$

Графическое решение задачи показано на рис.9.9.

Кривые 1, 2, 3, соответственно, – зависимости потерь напора от расхода в каждой трубе, составляющей параллельное соединение, а кривая М - N – зависимость потерь напора в параллельном соединении от расхода Q в магистральном трубопроводе.

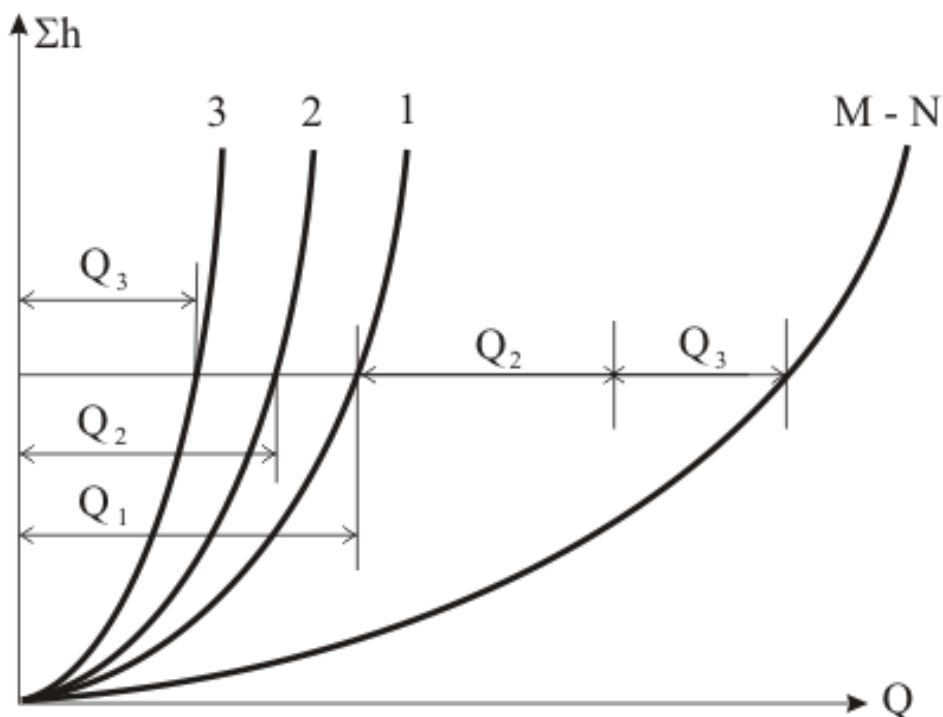


Рис. 9.9. Построение характеристики параллельного соединения труб

9.6. Разветвленный трубопровод

Разветвленным трубопроводом называют соединение простых трубопроводов, имеющих общее сечение разветвления потоков либо слияния потоков.

Такое соединение труб, так же, как и параллельное соединение, представляет собой фрагмент сложного трубопровода.

Рассмотрим в качестве примера разветвленный трубопровод, состоящий из двух простых труб, имеющих общее сечение М - М разветвления потоков (рис. 9.10).

Обозначим полный напор в сечении М - М на входе в каждую из труб H_M , нивелирную высоту и давление на выходе из

первой трубы, соответственно, z_1 и p_1 , а на выходе из второй трубы – z_2 и p_2 . Объемный расход в подводящей магистрали Q , в первой трубе Q_1 , а во второй трубе – Q_2 .

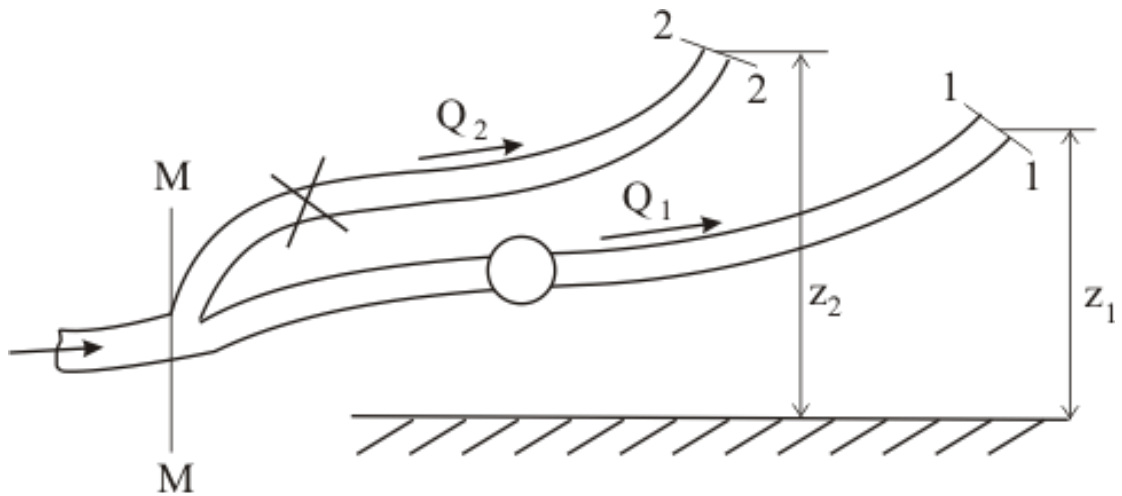


Рис.9.10. Разветвленный трубопровод

Из уравнения баланса расхода

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (9.24)$$

и двух уравнений Бернулли, составленных для сечений М - М и 1 - 1, М - М и 2 - 2

$$H_M = z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{8 \cdot Q_1^2}{\pi^2 \cdot d_1^4 \cdot g} + k_1 \cdot Q_1^2, \quad (9.25)$$

$$H_M = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{8 \cdot Q_2^2}{\pi^2 \cdot d_2^4 \cdot g} + k_2 \cdot Q_2^2, \quad (9.26)$$

где k_1 и k_2 обозначены в соответствии с выражением (9.23), можно определить три неизвестных Q_1 , Q_2 и H_M , если задан расход Q или определить расход Q , если задан полный напор H_M .

Графическое решение этой задачи представлено на рис. 9.11.

Кривые 1 и 2 построены по выражениям (9.25) и (9.26). Кривая 3 построена по выражению (9.24) при одном и том же полном напоре H_M на входе в каждую из труб.

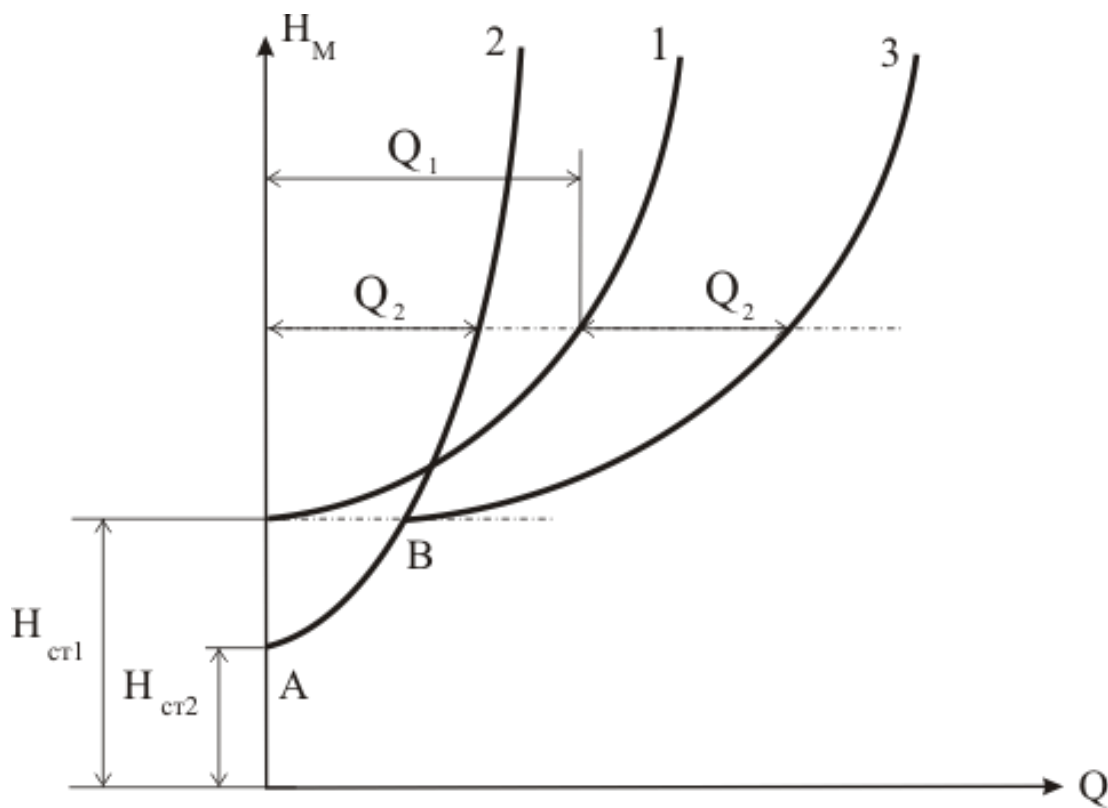


Рис. 9.11. Построение характеристики разветвленного соединения труб

Как видно из графика (рис. 9.11), если полный напор

$$H_M < H_A, \quad (9.27)$$

то жидкость не поступает ни в одну из двух труб, составляющих разветвление трубопровода.

Если

$$H_A < H_M < H_B, \quad (9.28)$$

то жидкость поступает во вторую трубу.

Если

$$H_M > H_B, \quad (9.28)$$

то жидкость поступает в обе трубы 1 и 2.

9.7. Сложный трубопровод

Сложный трубопровод состоит в общем случае из участков труб разного диаметра, параллельных соединений труб и разветвлений.

Пример сложного трубопровода схематично изображен на рис. 9.12.

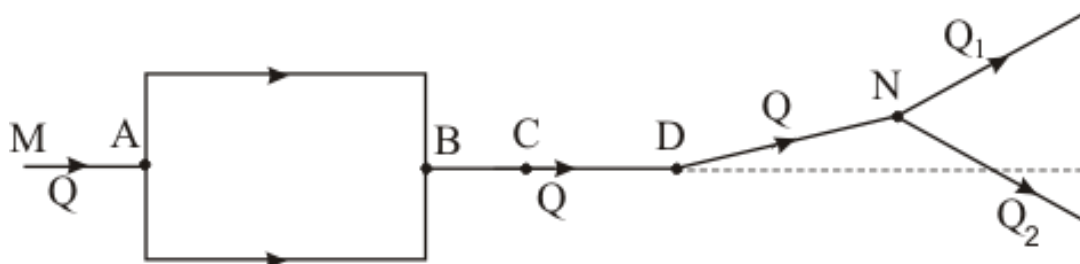


Рис.9.12. Сложный трубопровод

Гидравлический расчет сложного трубопровода, геометрические характеристики которого и установленные в нем местные сопротивления известны, сводится к определению потребного напора при заданном расходе либо к определению расхода при заданном располагаемом напоре.

Гидравлический расчет производится в следующем порядке:

1) сложный трубопровод мысленно расчленяется на последовательно соединенные участки простого трубопровода, параллельные соединения и разветвления труб. В рассматриваемом примере (рис. 9.12) участки МА, АВ, ВС, CD, DN;

2) определяется полный напор в сечении N и потери напора на перечисленных выше последовательно соединенных участках, в зависимости от расхода;

3) определяется полный напор на входе в сложный трубопровод (в сечении М), равный сумме полного напора (в сечении N) и сумме всех потерь напоров в последовательно соединенных участках МА, АВ, ВС, CD, DN.

9.8. Гидравлический удар в трубах

В трубопроводе, по которому движется жидкость, при «мгновенном» перекрытии сечения трубы каким-либо запорным устройством (вентилем, клапаном и т.п.) возникает сложный колебательный процесс повышения и понижения давления, называемый гидравлическим ударом.

Гидравлический удар может быть причиной разрыва труб, что и наблюдалось в системах водоснабжения городов в конце XIX ст.

Впервые явление гидравлического удара в трубах было теоретически и экспериментально исследовано Н.Е.Жуковским в 1897 – 1898 г.г. Его работа «О гидравлическом ударе», вышедшая в свет в 1898 г., принесла автору мировую известность.

Рассмотрим подробнее, что происходит в трубопроводе, по которому движется жидкость, при внезапном перекрытии его сечения каким-либо запорным устройством. В первый момент остановятся частицы жидкости, натолкнувшиеся на запорное устройство, и давление в этом слое увеличится на $\Delta p_{уд}$. Затем остановится следующий слой жидкости и т.д. Поверхность, разделяющая заторможенную жидкость от движущейся, на которой давление изменяется скачком от p_0 до $p_0 + \Delta p_{уд}$, представляет собой ударную волну. Ударная волна перемещается от запорного устройства к началу трубы с достаточно большой скоростью (рис. 9.13, а). Когда ударная волна достигнет начала трубы, жидкость в ней остановится, и давление в трубе будет равно $p_0 + \Delta p_{уд}$. Под действием повышенного давления жидкость в трубе будет сжата, а стенки трубы растянуты (рис. 9.13, б). Такое неуравновешенное состояние приведет к оттоку жидкости от трубы и скачкообразному восстановлению давления на волне разрежения от $p_0 + \Delta p_{уд}$ до p_0 (рис. 9.13, в). Когда волна разрежения дойдет до запорного устройства, жидкость в трубе будет перемещаться от него в сторону начала трубы со скоростью v_0 , а давление в трубе будет равно p_0 (рис. 9.13, г). Когда волна разрежения, двигавшаяся в сторону запорного устройства со скоростью c , отразится от него и начнет двигаться с той же скоростью к началу трубы, за ней жидкость остановится, и давление упадет на $\Delta p_{уд}$, т.е. будет равно $p_0 - \Delta p_{уд}$ (рис. 9.13, д).

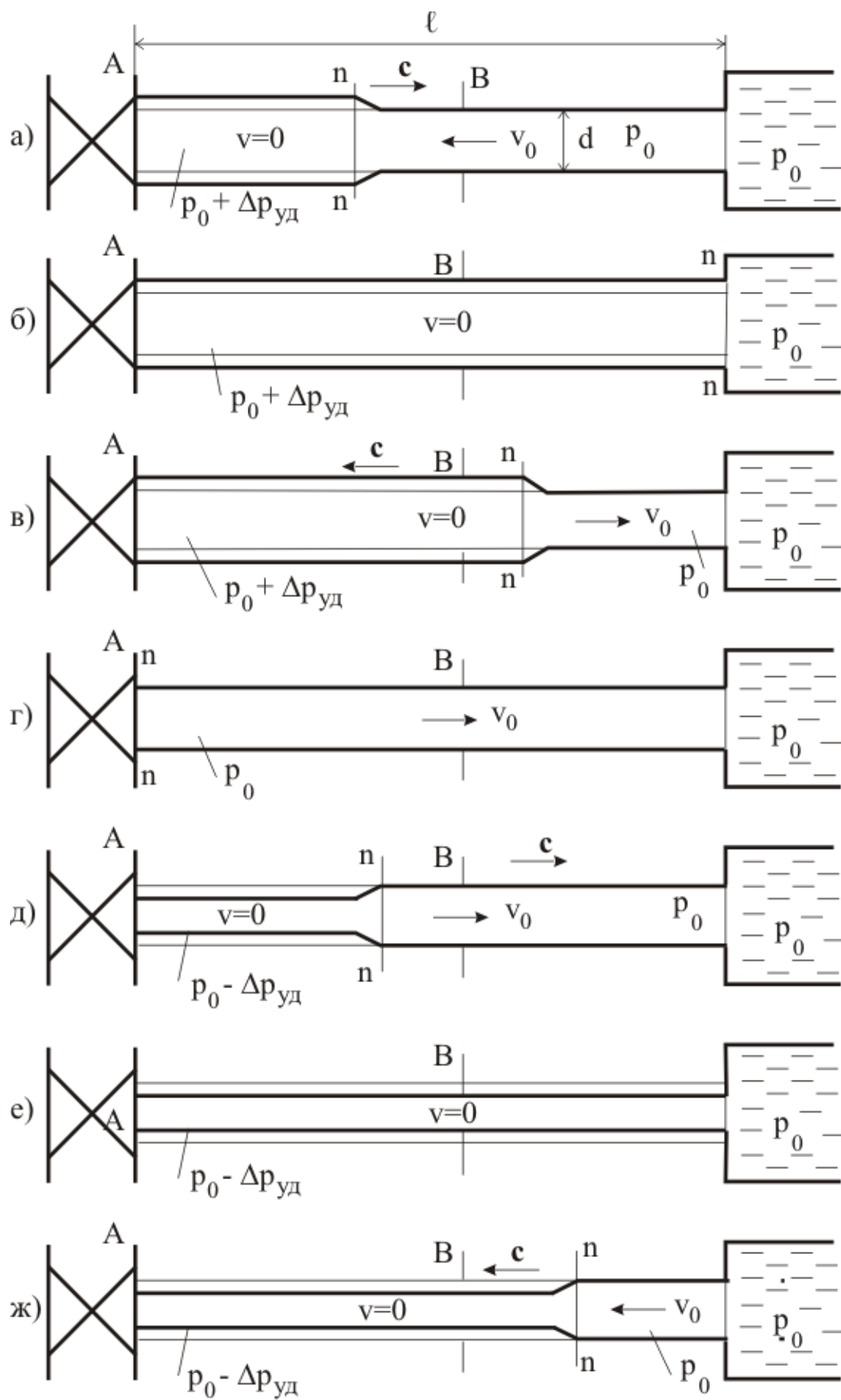


Рис.9.13. Распространение ударной волны в трубе

Когда волна разрежения дойдет до начала трубы, то жидкость в трубе остановится, и давление будет равно $p_0 - \Delta p_{уд}$ (рис. 9.13, е). Жидкость будет разрежена, а стенки трубы сжаты (рис. 9.13, ж). Такое состояние будет также неуравновешенным, и начнется приток жидкости в трубу. Возникнет ударная волна. За ней скорость частиц жидкости будет v_0 , а давление скачком увеличится от $p_0 - \Delta p_{уд}$ до p_0 . Когда ударная волна дойдет до запорного устройства, в трубе скорость движения жидкости v_0 будет направлена в сторону запорного устройства, а давление будет p_0 . Отразившись от запорного устройства, ударная волна будет двигаться к началу трубы со скоростью c , за ней в трубе установится давление $p_0 + \Delta p_{уд}$ (рис. 9.13, а), и колебательный процесс изменения скорости движения жидкости и давления повторится. В реальных условиях вследствие рассеивания (диссипации) энергии этот колебательный процесс постепенно затухает.

На рис. 9.14,а показано изменение давления во времени у запорного устройства и в середине трубы (рис. 9.14, б) в сечении «В» в идеальном и реальном случае (пунктирная кривая).

Определим повышение давления при гидравлическом ударе $\Delta p_{уд}$, пренебрегая трением, полагая абсолютно упругими деформацию стенки трубы и жидкости.

Рассмотрим трубу диаметра d и длины ℓ (рис. 9.15), по которой течет жидкость со скоростью v_0 , при этом давление в трубе p_0 . При внезапном перекрытии сечения трубы возникает гидравлический удар. Ударная волна от запорного устройства движется со скоростью c к началу трубы, через время $t = \ell/c$ жидкость в трубе остановится, а давление достигнет $p_0 + \Delta p_{уд}$ (рис. 9.13, б). Пренебрегая весом жидкости, применим теорему об изменении количества движения K массы жидкости, находящейся в трубопроводе, за время $t = \ell/c$. В проекции на ось трубы изменение количества движения этой массы жидкости

$$K_2 - K_1 = 0 - \rho \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \ell \cdot v_0. \quad (9.29)$$

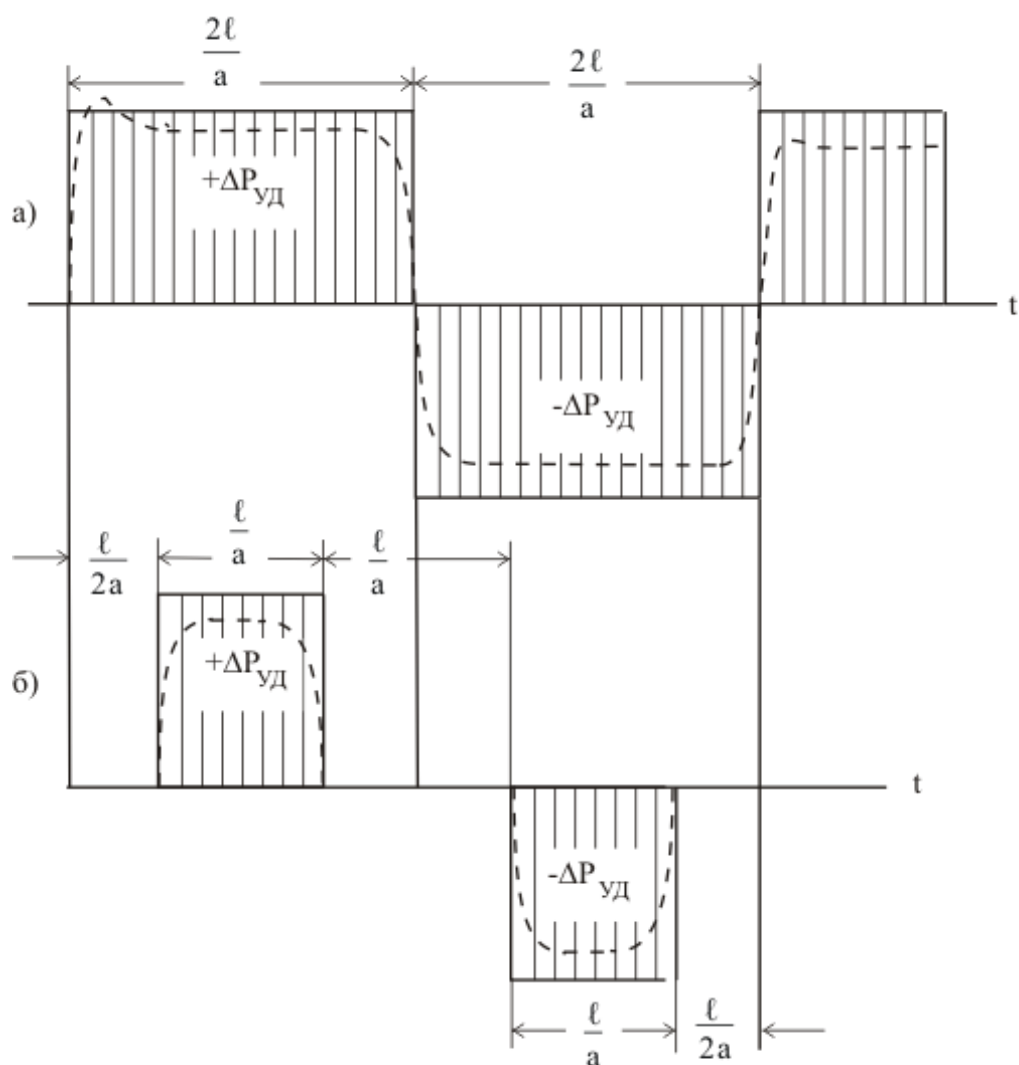


Рис.9.14. Изменение давления по времени:
 а) у запорного устройства; б) в середине трубы

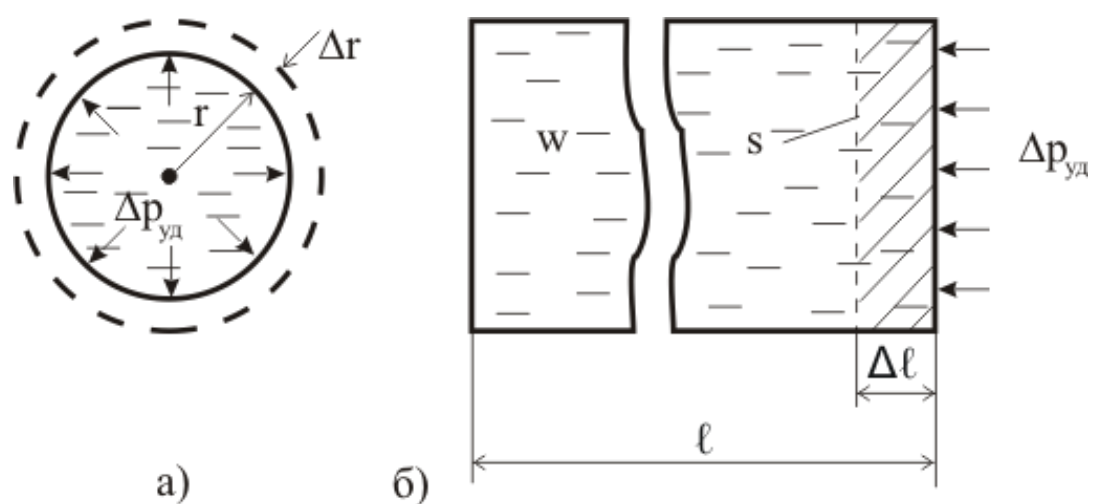


Рис.9.15. Деформация стенок трубы и жидкости:
 а) растяжение трубы б) сжатие жидкости в трубе

Импульс сил, действующих на эту массу жидкости, равен

$$\left[p_0 \frac{\pi \cdot d^2}{4} - (p_0 + \Delta p_{уд}) \frac{\pi \cdot d^2}{4} \right] \cdot \frac{\ell}{c} = \Delta p_{уд} \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{\ell}{c}. \quad (9.30)$$

Из (9.29) и (9.30)

$$\Delta p_{уд} = \rho \cdot v_0 \cdot c. \quad (9.31)$$

Полученное выражение – это формула Н.Е Жуковского для определения повышения давления при гидравлическом ударе в прямой трубе при мгновенном перекрытии сечения.

Для определения скорости движения ударной волны воспользуемся законом сохранения энергии, который при принятии допущений об отсутствии сил трения и упругих деформациях стенок трубы и жидкости утверждает, что кинетическая энергия жидкости $\mathcal{E}_{кин}$ расходуется на работу растяжения стенок трубы $A_{деф}$ и сжатия жидкости $A_{сж}$. Поскольку изменением внутренней энергии жидкости даже в реальном случае можно пренебречь в силу незначительной сжимаемости жидкости, то

$$\mathcal{E}_{кин} = A_{деф} + A_{сж}. \quad (9.32)$$

Рассмотрим отрезок времени от момента внезапного перекрытия сечения до момента времени, когда ударная волна достигнет начала трубы. При этом жидкость в трубе остановится и, следовательно, ее кинетическая энергия будет равна нулю, а давление в трубе будет равно $p_0 + \Delta p_{уд}$.

Начальная кинетическая энергия жидкости

$$\mathcal{E}_{кин} = \frac{m \cdot v_0^2}{2} = \rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \ell \cdot \frac{v_0^2}{2} \quad (9.33)$$

будет израсходована на работу растяжения стенок трубы (рис. 9.15, а)

$$A_{\text{деф}} = \frac{1}{2} \cdot \Delta p_{\text{уд}} \cdot \pi \cdot d \cdot \ell \cdot \frac{\Delta d}{2}, \quad (9.34)$$

где $\frac{\Delta d}{2} = \Delta r$,

и на работу сжатия объема жидкости $w = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \ell$, т.е. на работу

сил давления $\Delta p_{\text{уд}} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ на пути $\Delta \ell$ (рис. 9.15, б)

$$A_{\text{сж}} = \frac{1}{2} \cdot \Delta p_{\text{уд}} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \Delta \ell = \frac{1}{2} \cdot \Delta p_{\text{уд}} \cdot \Delta w. \quad (9.35)$$

Напряжение стенок трубы

$$\sigma = \frac{\Delta p_{\text{уд}} \cdot d}{2 \cdot \delta}, \quad (9.36)$$

где δ – толщина стенок трубы.

По закону Гука

$$\sigma = \frac{\pi [(d + \Delta d) - d]}{\pi \cdot d} \cdot E = \frac{\Delta d}{d} \cdot E, \quad (9.37)$$

где E – модуль упругости материала стенок.

Приравняв правые части выражений (9.36) и (9.37), получим

$$\Delta d = \frac{\Delta p_{\text{уд}} \cdot d^2}{2 \cdot \delta \cdot E}. \quad (9.38)$$

Подставляя это выражение в (9.34), получим работу деформации стенок трубы в виде

$$A_{\text{деф}} = \frac{1}{8} \cdot \Delta p_{\text{уд}}^2 \cdot \frac{\pi \cdot d^3 \cdot \ell}{\delta \cdot E}. \quad (9.39)$$

Полагая, что упругое сжатие жидкости подчиняется закону, представляющему собой аналог закона Гука, будем иметь

$$\frac{\Delta w}{w} E_{\text{ж}} = \Delta p_{\text{уд}}, \quad (9.40)$$

где $\Delta p_{\text{уд}}$ – дополнительные нормальные напряжения в жидкости, возникающие при ее сжатии;
 $E_{\text{ж}}$ – объемный модуль упругости жидкости.

Отсюда

$$\Delta w = \frac{w}{E_{\text{ж}}} \Delta p_{\text{уд}}. \quad (9.41)$$

Подставляя (9.41) в (9.35), получим

$$A_{\text{сж}} = \frac{1}{2} \cdot \Delta p_{\text{уд}}^2 \cdot \frac{w}{E_{\text{ж}}} = \frac{1}{8} \cdot \Delta p_{\text{уд}}^2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \ell}{E_{\text{ж}}}. \quad (9.42)$$

Закон сохранения энергии (9.32) с учетом (9.33), (9.39) и (9.42) будет иметь вид

$$\rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \ell \cdot \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{8} \cdot \Delta p_{\text{уд}}^2 \cdot \frac{\pi \cdot d^3 \cdot \ell}{\delta \cdot E} + \frac{1}{8} \cdot \Delta p_{\text{уд}}^2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \ell}{E_{\text{ж}}} \quad (9.43)$$

или

$$\rho \cdot v_0^2 = \Delta \delta_{\text{оä}}^2 \left(\frac{d}{\delta \cdot E} + \frac{1}{\overset{\circ}{A}_{\text{æ}}} \right). \quad (9.44)$$

Подставляя в выражение (9.44) $\Delta p_{уд}$ по формуле Жуковского (9.31), найдем формулу скорости движения ударной волны c :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{d \cdot \rho}{\delta \cdot E} + \frac{\rho}{E_{ж}}}}. \quad (9.45)$$

Замечая, что скорость c_0 распространения звука в неограниченной сплошной среде

$$c_0 = \sqrt{\frac{E_{ж}}{\rho}}, \quad (9.46)$$

получим выражение скорости звука в трубе диаметра d с толщиной стенок δ , изготовленной из материала, модуль упругости которого E

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{d}{\delta} \cdot \frac{E_{ж}}{E}}}. \quad (9.47)$$

Следовательно, при гидравлическом ударе скорость движения ударной волны в трубопроводе будет совпадать со скоростью распространения звука (9.47).

Следует заметить, что скорость движения ударной волны в сплошных средах больше скорости звука в них, и тем больше, чем мощнее ударная волна.

Повышение давления при гидравлическом ударе, определяемое по формуле Н.Е. Жуковского (9.31), незначительно отличается от опытных данных в первой фазе прямого гидравлического удара.

Прямой гидравлический удар называется гидравлический удар, который имеет место, если время перекрытия сечения трубы

$$t_{\Pi} \leq \frac{2 \cdot \ell}{c}, \quad (9.48)$$

где $\frac{2 \cdot \ell}{c} = T_{\phi}$ – фаза гидроудара, т.е. время, за которое ударная волна проходит путь от запорного устройства до начала трубы и возвращается обратно к запорному устройству.

При непрямом ударе время перекрытия сечения трубы t_{Π} больше фазы гидроудара

$$t_{\Pi} > T_{\phi}. \quad (9.49)$$

При непрямом ударе повышение давления будет меньшим. Его можно определить по приближенным формулам:

$$\Delta p_{\text{н уд}} = \Delta p_{\text{уд}} \frac{T_{\phi}}{t_{\Pi}}, \quad (9.50)$$

$$\Delta p_{\text{н уд}} = \Delta p_{\text{уд}} \frac{2 \cdot \ell}{c \cdot t_{\Pi}} \quad (9.51)$$

или

$$\Delta p_{\text{н уд}} = \frac{2 \cdot \rho \cdot v_0 \cdot \ell}{t_{\Pi}}. \quad (9.52)$$

Следовательно, для уменьшения повышения давления при гидроударе нужно увеличивать время перекрытия сечения трубы. Это и предусмотрено в вентилях водопроводных труб, которые, в отличие от пробковых кранов, постепенно перекрывают сечение трубы.

К предохранительным мерам, препятствующим повышению давления в трубопроводе при гидроударе, относятся

сбросные клапаны (рис. 9.16), компенсационные колпаки (рис. 9.17).

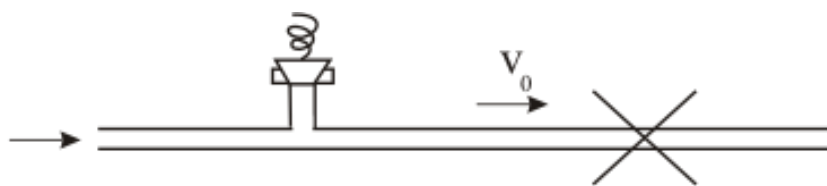


Рис.9.16. Схема установки сбросного клапана

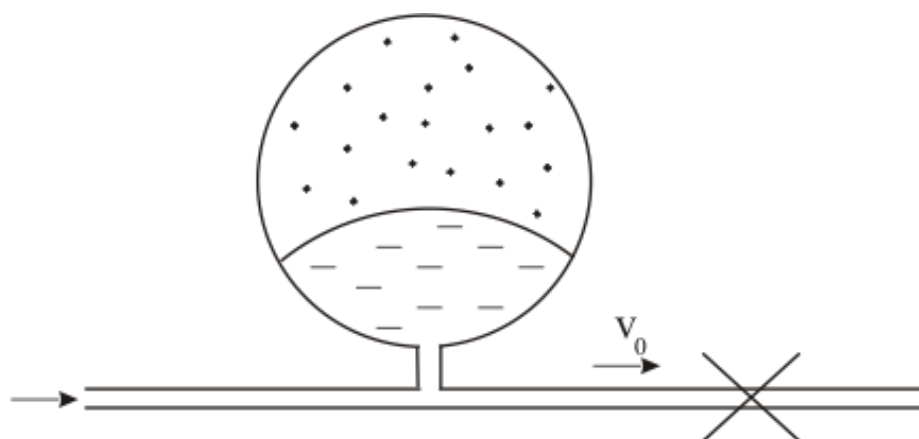


Рис.9.17. Схема установки компенсационного колпака

Существует устройство – гидравлический таран, в котором используется энергия гидроудара для безнасосной подачи воды (рис. 9.18).

В нерабочем состоянии вес ударного клапана K_1 удерживается силой гидростатического давления, вес напорного клапана K_2 больше силы гидростатического давления. Поэтому оба клапана в нерабочем состоянии закрыты. При открытии ударного клапана жидкость из бака А по трубе будет вытекать из-под клапана и под действием силы сопротивления, возникающей при обтекании ударного клапана, он закроется, вызвав ударную волну и повышение давления на $\Delta p_{уд}$. Когда ударная волна достигнет напорного клапана, он под действием дополнительного давления откроется, и часть жидкости втечет под герметичный колпак С, что приведет к падению давления в трубе. Напорный клапан закроется, а волна разрежения начнет двигаться к ударному

клапану. Когда волна разрешения дойдет до ударного клапана, то вследствие пониженного давления $\Delta p_{уд}$ этот клапан автоматически откроется, и цикл повторится. В результате вода, поступающая под герметичный колпак С, будет вытесняться в трубу и подаваться в бак В на высоту h .

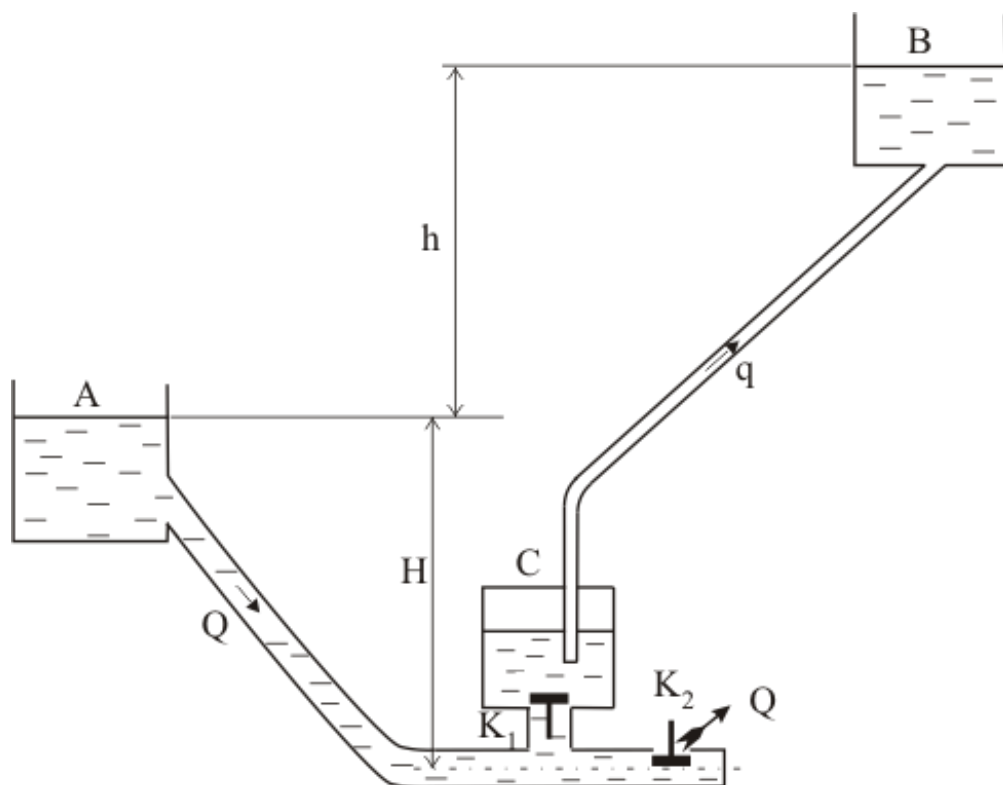


Рис.9.18. Гидравлический таран

Коэффициент полезного действия гидротарана определяется по формуле

$$\eta = \frac{h \cdot q}{H \cdot Q} \quad (9.53)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альтшуль А.Д. Гидравлические сопротивления. – Л.: Недра, 1970. – 216 с.
2. Альтшуль А.Д., Животовский Л.С., Иванов Л.П. Гидравлика и аэродинамика. – М.: Машиностроение, 1987. – 414 с.
3. Атанов Г.А. Газовая динамика. – К.: Вища школа, 1991.
4. Башта П.М., Руднев С.С., Некрасов Б.Б. и др. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы. – М.: Машиностроение, 1982. – 423 с.
5. Дейч М.Е., Зарянкин А.Е. Гидрогазодинамика. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 383 с.
6. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. – М.: Машиностроение, 1987. – 440 с.
7. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. – 2 изд. – М.: Машиностроение, 1975. – 559 с.
8. Левицкий Б.Ф., Лещій Н.П. Гідравліка. Загальний курс. – Львів: Світ, 1994. – 264 с.
9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 736 с.
10. Некрасов Б.Б. Гидравлика и ее применение на летательных аппаратах. – М.: Машиностроение, 1967. – 367 с.
11. Овсепян В.М. Гидравлический таран и таранные установки. – М.: Машиностроение, 1968. – 123 с.
12. Самойлович Г.С. Гидрогазодинамика. – М.: Машиностроение, 1990. – 385 с.
13. Справочное пособие по гидравлике, гидромашинам и гидроприводам / Под общ. ред. Б.Б.Некрасова. – Минск: Высшая школа, 1985. – 383 с.
14. Френкель Н.З. Гидравлика. – М.; Л.: Государственное энергетическое издательство, 1956. – 456 с.
15. Юшкин В.В. Гидравлика и гидравлические машины. – Минск: Высшая школа, 1976. – 270 с.

$$\bar{V}(x, t)$$

А.А. ЯРХО, Е.Е. СЧАСТНЫЙ, В.М. ЛЯЛЮК

ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

Учебное пособие

Часть I

Ответственный за выпуск Лялюк В.М.

Редактор Еткало О.О.

Подписано к печати 18.12.06 г.

Формат бумаги 60x84 1/16. Бумага писчая.

Усл.-печ.л 14,25. Уч.-изд.л. 14,5.

Заказ № Тираж 200 Цена

Издательство УкрГАЗТ, свидетельство ДК № 2874 от 12.06.2007 г.

Типография УкрГАЗТ,
61050, Харьков, пл. Фейербаха, 7