УДК 621.391

БОЦУЛ А.В., аспирант (НТУ «ХПИ»),
ВОЛКОВ А.С., к.т.н., старший преподаватель,
ПРИХОДЬКО С.И., д.т.н., профессор,
ШТОМПЕЛЬ Н.А., к.т.н., доцент (УкрГАЖТ)

Метод построения алгебраических несистематических сверточных кодов перемежения с произвольной скоростью кодирования

Предложен метод построения алгебраических несистематических сверточных кодов перемежения с произвольной скоростью кодирования, параметры которых полностью задаются модифицированным обобщенным порождающим многочленом.

Ключевые слова: *сверточные коды, перемежение, скорость кодирования, обобщенный порождающий многочлен, коды Рида-Соломона.*

Постановка проблемы и анализ литературы

Каналы связи телекоммуникационных систем подвержены воздействию различного вида помех, приводящих к возникновению как одиночных, так и групповых ошибок. Большинство помехоустойчивых кодов предназначены для исправления только одиночных ошибок, хотя известно [1, 2], что ряд каналов связи характеризуются наличием «памяти», приводящей к группированию ошибок в пакеты. Для исправления ошибок в таких каналах возможно применение специфических помехоустойчивых кодов, таких как сверточные коды Ивадаре или блоковые коды Файра [2]. Данные виды кодов обладают рядом ограничений, поэтому в современных телекоммуникационных системах более перспективным направлением является использование различных классов помехоустойчивых кодов перемежения. Задача поиска «хороших» кодов перемежения решается либо путем полного перебора с применением вычислительной техники, требующего значительных временных и вычислительных затрат, или путем построения кодов с заданными параметрами и характеристиками на основе теории конечных полей.

С использованием последнего подхода в [3] показано, что параметры некоторого несистематического сверточного кода перемежения можно алгебраически задавать через модифицированный обобщенный порождающий многочлен. В качестве данного многочлена может выступать видоизмененный порождающий многочлен недвоичного блокового кода, например кода БЧХ или Рида-Соломона. В [4] предложен метод построения алгебраических несистематических сверточных кодов перемежения со скоростью кодирования $R = 1/n_0$ (где n_0 – длина кадра кодового слова) на основе преобразованного порождающего многочлена кода Рида-Соломона. Таким образом, актуальной задачей является снятие существующего ограничения на скорость кодирования алгебраических сверточных кодов перемежения.

Цель статьи - разработка метода построения алгебраических несистематических сверточных кодов перемежения с произвольной скоростью кодирования на основе преобразованных порождающих многочленов кода Рида-Соломона.

Основная часть

Информационное слово несистематического сверточного кода с произвольной скоростью кодирования $R = k_0 / n_0$ в полиномиальной форме записи имеет следующий вид:

$$i(x) = (i_{0,1},...,i_{0,k_0}) + (i_{1,1},...,i_{1,k_0})x + (i_{2,0},...,i_{2,k_0})x^2 + ..., \quad (1)$$

где $i_{i,j}$ – информационные символы, объединенные в кадры по k_0 элементов, $i_{i,j} \in GF(q)$, $j = 1, 2, ..., k_0$; k_0 – длина кадра информационного слова.

Наборы информационных символов сверточного кода со скоростью кодирования $R = k_0 / n_0$ можно рассматривать как элементы поля $GF(q^m)$, являющегося расширением исходного поля $GF(q)$, при этом длина информационного кадра дополняется нулями до значения $m = n_0$.

Тогда информационный многочлен (1) представим следующим образом:

$$i(x) = I_0 + I_1 x + I_2 x^2 + ..., \tag{2}$$

где I_i – информационные символы, $I_i \in GF(q^m)$.

Следовательно, полученные недвоичные информационные символы рассматриваемого сверточного кода формируют множество $H \subseteq GF(q^m)$, а в частном случае (при $k_0 = 1$) – множество $Q \subseteq GF(q)$.

Согласно [5, 6] сверточный код со скоростью кодирования $R = k_0 / n_0$ можно задать обобщенным порождающим многочленом, который суть порождающий многочлен кода Рида-Соломона

$$G(x) = (x - \alpha^b)(x - \alpha^{b+1})...(x - \alpha^{b+D-2}), \tag{3}$$

где $\alpha^b, \alpha^{b+1}, ..., \alpha^{b+D-2}$ – корни многочлена $G(x)$, принадлежащие полю $GF(q^m)$;

b – целое число;

D – минимальное кодовое расстояние многочлен кода Рида-Соломона.

После осуществления вычислений обобщенный многочлен сверточного кода (3) можно представить как

$$G(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_r x^r, \tag{4}$$

где r – память сверточного кода, соответствующая числу проверочных символов в кодовом слове кода Рида-Соломона, $r = D - 1$;

$\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_r$ – корни многочлена $G(x)$, принадлежащие полю $GF(q^m)$.

Тогда процесс сверточного кодирования информационной последовательности соответствует произведению информационного многочлена (2) на обобщенный порождающий многочлен (4)

$$c(x) = i(x)G(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ..., \tag{5}$$

где C_i – кодовые символы сверточного кода, $C_i \in GF(q^m)$.

Для получения q-го кодового слова необходимо осуществить отображение полученных согласно (5) кодовых символов в наборы элементов поля $GF(q)$, соответствующих кадрам кодового слова длиной n_0

$$c(x) = (c_{0,1}, ..., c_{0,n_0}) + (c_{1,1}, ..., c_{1,n_0})x + \\ + (c_{2,0}, ..., c_{2,n_0})x^2 + ...,$$

где $c_{i,k}$ – кодовые символы, объединенные в кадры по n_0 элементов, $c_{i,k} \in GF(q)$, $k = 1, 2, ..., n_0$.

Таким образом, несистематический сверточный код со скоростью кодирования $R = k_0 / n_0$, алгебраически заданный обобщенным порождающим многочленом (4), имеет следующие параметры: длина кадра информационного слова $k_0 = \log_q(H)$, длина кадра кодового слова $n_0 = m$, длина кодового ограничения $v = rk_0$, длина информационного слова $k = (r+1)k_0$, длина кодового слова $n = (r+1)n_0 = kn_0 / k_0$, свободное кодовое расстояние $d_\infty \geq D$ [5, 6].

Для обобщения данного результата на случай несистематического сверточного кода перемежения со скоростью кодирования $R = k_0 / n_0$ ограничим длину информационной последовательности, поступающей на вход кодера до значения K, что с учетом (2) в полиномиальном виде соответствует

$$I(x) = I_0 + I_1 x + I_2 x^2 + ... + I_{K-1} x^{K-1}, \tag{6}$$

тогда кодовый многочлен рассматриваемого сверточного кода, в соответствии с (5), равен

$$C(x) = I(x)G(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ... + C_{N-1} x^{N-1}. \tag{7}$$

Для разнесения во времени элементов кодового слова рассматриваемого кода на глубину перемежения M преобразуем информационный (6) и обобщенный порождающий (4) многочлены следующим образом:

$$I(x^M) = I_0 + I_1 x^M + I_2 x^{2M} + ... + I_{K-1} x^{(K-1)M}; \\ G(x^M) = \alpha_0 + \alpha_1 x^M + \alpha_2 x^{2M} + ... + \alpha_r x^{rM}, \tag{8}$$

а затем, согласно (7), определим частичный кодовый многочлен несистематического сверточного кода перемежения со скоростью кодирования $R = k_0 / n_0$

$$C(x^M) = I(x^M)G(x^M) = C_0 + C_1 x^M + \\ + C_2 x^{2M} + ... + C_{N-1} x^{(N-1)M}. \tag{9}$$

Тогда кодовое слово алгебраического сверточного кода перемежения со скоростью $R = k_0 / n_0$

получается в результате применения операции (9) к M кодовым словам исходного сверточного кода, что в полиномиальной форме записи соответствует выражению

$$C'(x) = \sum_{l=0}^{M-1} C_l(x^M)x^{lN}, \tag{10}$$

где $C_l(x^M)$ – частичные кодовые многочлены, соответствующие отдельным информационным многочленам (6).

Также многочлен (10) можно представить в развернутом виде

$$\begin{aligned} C'(x) &= C_{0,0} + C_{0,1}x + \ldots + C_{0,M-1}x^{M-1} + C_{1,0}x^M + C_{1,1}x^{M+1} + \ldots + \\ &+ C_{1,M-1}x^{2M-1} + C_{2,0}x^{2M} + C_{2,1}x^{2M+1} + \ldots C_{2,M-1}x^{3M-1} + \ldots + \\ &+ C_{N-1,0}x^{(N-1)M} + C_{N-1,1}x^{(N-1)M+1} + \ldots + C_{N-1,M-1}x^{NM-1} \end{aligned}, \tag{11}$$

где $C_{u,l}$ – кодовые символы кодового многочлена сверточного кода перемежения, $u = 0,1,\ldots,N-1$.

Кроме того кодовое слово рассматриваемого кода перемежения можно получить, если коэффициенты при формальной переменной x в (11) записать в виде вектора длиной NM

$$C' = (C_{0,0}, C_{0,1}, \ldots, C_{0,M-1}, C_{1,0}, C_{1,1}, \ldots, C_{1,M-1}, C_{2,0}, C_{2,1}, \ldots C_{2,M-1}, \ldots, C_{N-1,0}, C_{N-1,1}, \ldots, C_{N-1,M-1})$$

или в виде матрицы размером $N \times M$

$$C' = \begin{pmatrix} C_{0,0} & C_{0,1} & \ldots & C_{0,M-1} \\ C_{1,0} & C_{1,1} & \ldots & C_{1,M-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{N-1,0} & C_{N-1,1} & \ldots & C_{N-1,M-1} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Окончательно кодовое слово алгебраического несистематического сверточного кода перемежения со скоростью $R = k_0 / n_0$ получим после отображения элементов поля $GF(q^m)$ в матрице (12) в наборы элементов поля $GF(q)$

$$c' = \begin{pmatrix} c_{0,0,1},\ldots,c_{0,0,m} & c_{0,1,1},\ldots,c_{0,1,m} & \ldots & c_{0,M-1,1},\ldots,c_{0,M-1,m} \\ c_{1,0,1},\ldots,c_{1,0,m} & c_{1,1,1},\ldots,c_{1,1,m} & \ldots & c_{1,M-1,1},\ldots,c_{1,M-1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{N-1,0,1},\ldots,c_{N-1,0,m} & c_{N-1,1,1},\ldots,c_{N-1,1,m} & \ldots & c_{N-1,M-1,1},\ldots,c_{N-1,M-1,m} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $c_{u,l,k}$ – кодовые символы, объединенные в кадры по $m = n_0$ символов, $c_{u,l,k} \in GF(q)$.

Следовательно, некоторое кодовое слово рассматриваемого кода перемежения получается путем объединения M кодовых слов исходного сверточного кода в матрицу размером $N \times M$ вида (13). Тогда множество таких кодовых слов образует алгебраический несистематический сверточный код перемежения со скоростью кодирования $R = k_0 / n_0$, параметры которого полностью определяются модифицированным порождающим многочленом (8): длина кадра информационного слова $k'_0 = Mk_0 = M\log_q(H)$, длина кадра кодового слова $n'_0 = Mn_0 = Mm$, скорость кодирования $R = k'_0 / n'_0 = k_0 / n_0$, память кода $r' = Mr$, длина кодового ограничения $v' = r'k'$, длина информационного слова $k' = (r'+1)k'_0$, длина кодового слова $n' = (r'+1)n'_0 = k'n'_0 / k'_0$, свободное кодовое расстояние $d_\infty \ge D$.

В [7] показано, что бесконечное кодовое слово алгебраически заданного сверточного кода получается в результате объединения частичных кодовых слов длиной Nn_0 с элементами из поля $GF(q)$. Аналогично, для обобщения полученных результатов на случай информационного слова бесконечной длины достаточно объединить кодовые слова (13) длиной NMn_0 с элементами из поля $GF(q)$ в бесконечное кодовое слово алгебраического несистематического сверточного кода перемежения со скоростью кодирования $R = k_0 / n_0$.

Выводы

Применение помехоустойчивых кодов специального вида для исправления пакетов ошибок, возникающих в каналах связи с памятью, накладывает ограничение на корректирующую способность и другие конструктивные параметры кода. Алгебраические сверточные коды с произвольной скоростью кодирования не имеют указанных недостатков, но позволяют исправлять только одиночные ошибки, а предложенный ранее метод построения на их основе кодов перемежения имеет ограничение на скорость кодирования. Для построения алгебраических несистематических сверточных кодов перемежения со скоростью кодирования $R = k_0 / n_0$ предложено использовать модифицированный обобщенный порождающий многочлен, являющегося преобразованным порождающим многочленом кода Рида-Соломона, который полностью определяет параметры кода.

Литература

1. Вернер, М. Основы кодирования [Текст]: учебник для ВУЗов / М. Вернер. – М.: Техносфера, 2004. – 288 с.
2. Питерсон, У. Коды, исправляющие ошибки [Текст] / У. Питерсон, Э. Уэлдон: пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 596 с.
3. Приходько, С.И. Метод модификации обобщенного порождающего многочлена алгебраических сверточных кодов / С.И. Приходько, А.С. Волков, Н.А. Штомпель, А.В. Боцул // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті: науково-технічний журнал. – Харків: УкрДАЗТ, 2012. – № 6. – С. 15 – 19.
4. Приходько, С.И. Метод построения алгебраических сверточных кодов перемежения [Текст] / А.В. Боцул, А.С. Волков, С.И. Приходько, Н.А. Штомпель // Збірник наукових праць Української державної академії залізничного транспорту. – Харків: УкрДАЗТ, 2013. – № 136. – С. 232 – 235.
5. Приходько, С.И. Построение сверточных кодов с использованием кодов РС [Текст] / С.И. Приходько, Г.Е. Березняков // Тематический научно-технический сборник. – 1986. – № 330. – С. 103-107.
6. Приходько, С.И. Алгебраические сверточные коды / С.И. Приходько [Текст] // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте: науково-технічний журнал. – Харків: УкрДАЗТ, 1999. – № 2 (17). – С. 62-63.
7. Алгебраические сверточные коды [Текст]: учеб. пособие / Н.И Данько [и др.]. – Харьков: УкрГАЖТ, 2007. – 238 с.

Боцул А.В., Волков О.С., Приходько С.І., Штомпель М.А. Метод побудови алгебраїчних несистематичних згорткових кодів перемежування з довільною швидкістю кодування
Запропоновано метод побудови алгебраїчних несистематичних згорткових кодів перемежування з довільною швидкістю кодування, параметри яких повністю задаються модифікованим узагальненим породжуючим багаточленом.

Ключові слова: згорткові коди, перемежування, швидкість кодування, узагальнений породжуючий багаточлен, коди Ріда-Соломона.

Botsul A.V., Volkov A.S., Prihodko S.I., Shtompel N.A. Method of constructing algebraic nonsystematic interleaving convolutional codes with random coding velocity. The method of constructing algebraic nonsystematic interleaving convolutional codes with random coding velocity has been proposed. The parameters of the codes are fully specified by modified generalized generator polynomial.

Key words: convolutional codes, interleaving, coding rate, generalized generator polynomial, Reed-Solomon codes.

Рецензент д.т.н., профессор Краснобаев В.А. (Полтавский национальный технический университет им. Ю.Кондратюка)

Поступила18.02.2014 г.