УДК 621.391

ЖУЧЕНКО А.С., к.т.н., доцент,
ГРЕБЕНЮК М.В., аспирант (УкрГАЖТ)

Мягкое декодирование помехоустойчивых кодов

Показана взаимосвязь оптимальных методов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов с минимизацией средней вероятности ошибки символа. Обобщены подходы, направленные на уменьшение сложности алгоритмов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов.

Ключевые слова: *помехоустойчивый код, мягкое декодирование, SISO модуль.*

Постановка проблемы и анализ литературы

Среди декодеров помехоустойчивых кодов присутствуют так называемые SISO (от англ. soft input soft output) декодеры – декодеры с мягким входом и мягким выходом. Мягкий вход декодера позволяет наиболее полно задействовать информацию получаемую демодулятором. На выходе декодера с мягким решением возможно итерационно приближаться к искомому решению, разделив информацию о каждом символе на внешнюю (т.е. информацию, сообщаемую о нем другими символами) внутреннюю (информацию о нем демодулятора). Наиболее широко методы мягкого декодирования стали использоваться с появлением каскадных кодов, допускающих эффективное итеративное декодирование с обменом мягкими решениями на каждой итерации.

Цель статьи. Проанализировав методы итеративного декодирования блоковых кодов, выявить основные подходы, связанные с уменьшением сложности мягкого декодирования помехоустойчивых кодов.

Математическая постановка задачи оптимального декодирования

Пусть $\overline{m}_i$ – i-е передаваемое сообщение (информационная последовательность) длиной K двоичных символов, $\overline{m}_i = (m_{i1}, m_{ij}, ..., m_{iK})$, $i = 1 ... 2^K$.

Пусть $\overline{x}_i$ – i-е кодовое слово блочного систематического помехоустойчивого (N, K) кода, $\overline{x}_i = (x_{i1}, x_{ij}, ..., x_{iK}, x_{iK+1}, ..., x_{iN})$, $i = 1 ... 2^K$ (кодовая последовательность). Если считать, что первые K символов кодового слова представляют собой передаваемое сообщение $\overline{m}_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{iK})$, то справедливо равенство $\overline{x}_i = (\overline{m}_i, \overline{c}_i)$, где $\overline{c}_i$ – последовательность проверочных символов кода.

Будем считать, что заданы:

– вероятности передачи сообщений (кодовых слов) $Pr(\overline{m}_i) = Pr(\overline{x}_i)$, $i = 1 ... 2^K$ или вероятности того, что символ x_j, $j = 1 ... N$ примет значение 1 и 0 – $Pr(x_j = 0)$ и $Pr(x_j = 1)$, причем $Pr(x_j = 0) + Pr(x_j = 1) = 1$;

– условная плотность вероятности $p(\overline{y} / \overline{x}_i)$ принимаемой последовательности $\overline{y}$, $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_K, y_{K+1}, ..., y_N)$ на входе декодера при условии, что передается кодовое слово $\overline{x}_i$. Отметим, что для канала без памяти справедливо равенство $p(\overline{y} / \overline{x}_i) = \prod_{j=1}^{N} p(y_i / x_{ij})$, где $p(y_i / x_{ij})$ – условная плотность вероятности принятого символа y_i, при условии, что передан символ x_{ij}.

Задачу оптимального декодирования помехоустойчивого кода можно сформулировать двумя способами.

1. По принятой последовательности $\overline{y}$ вынести оптимальное по критерию минимума средней вероятности ошибки последовательности решение о том, какое именно сообщение $\overline{m}_i$ из множества возможных сообщений было передано [5].

2. По принятой последовательности $\overline{y}$ вынести оптимальное по критерию минимума средней вероятности ошибки символа решение о том, какое значение имеет символ x_j.

Далее рассмотрим оптимальные методы мягкого декодирования помехоустойчивых кодов с минимизацией средней вероятности ошибки символа.

Мягкое декодирование помехоустойчивых кодов с минимизацией средней вероятности ошибки символа [4]. На рис. 1 представлена блок-схема решетчатого кодера.

Рис. 1. Блок – схема решетчатого кодера:
U – последовательность информационных символов
$U = \{U_1, U_2 ..., U_i ..., U_{I_{вх}}\}$;
$I_{вх}$ – число информационных символов;
C – последовательности кодовых символов
$C = \{C_1, C_2 ..., C_i ..., C_{N_{вых}}\}$;
$N_{вых}$ – число кодовых символов.

Вероятность поступления на вход случайных информационных символов $\Pr^{вх}\{U\}$:

$$\{\Pr^{вх}\{u_1\}, \Pr^{вх}\{u_2\}, ..., \Pr^{вх}\{u_i\}, ..., \Pr^{вх}\{u_{вх}\}\} = \\ = \Pr^{вх}\{U\}.$$

Значения, которые может принимать один информационный символ:

$$U \in \{u_1, u_2 ..., u_i, ..., u_{вх}\}.$$

На рис. 2 представлена таблица информационных символов для недвоичного кода.

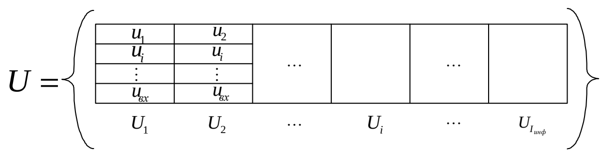

Рис. 2. Таблица информационных символов для недвоичного кода

На рис. 3 представлена таблица информационных символов для двоичного кода

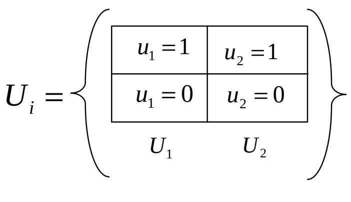

Рис. 3. Таблица информационных символов для двоичного кода:
U_i – один случайный элемент информационной последовательности, $i = 1,2,...I_{инф}$;
$I_{инф}$ – число информационных символов.

Схема формирования кодовой последовательности представлена на рис. 4.

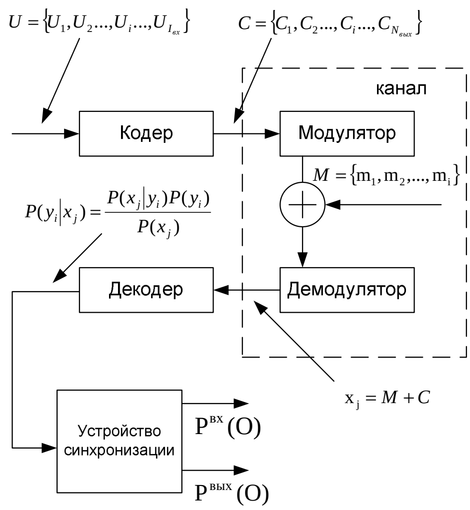

Рис. 4. Схема формирования кодовой последовательности

При использовании двоичных кодов дискретная случайная величина может принадлежать отдельному кодовому символу: $u_i \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

При этом вероятности появления значения кодового символа λ_1 и λ_2 будут следующие:

$\Pr(X) = \{\Pr(X = \lambda_1); \Pr(X = \lambda_2)\}$ - апостериорная вероятность одного элемента из $N_{вых}$;

$$\{\Pr^{вых}\{c_1\}, ...\Pr^{вых}\{c_2\}, ...\Pr^{вых}\{c_i\}, ...\Pr^{вых}\{c_{вых}\}\} = \\ = \Pr^{вых}\{C\};$$

c – кодовая последовательность $C \in \{c_1, c_2 ..., c_{вых}\}$.

На рис. 5 представлены апостериорные вероятности символов кодовой комбинации.

Рис. 5. Апостериорные вероятности символов кодовой последовательности

Апостериорная вероятность на выходе из канала $\Pr(x_j = \lambda)$ при условии $\overline{y}$:

$$\Pr^{\text{вых}} = \{\Pr(x_j = \lambda/(\bar{y}))\},$$

$j = 1..., N_{вых}$, $N_{вых}$ – номер элемента, который поступает на выходе.

$$\Pr\{x_j\} = \{\Pr(x_1)...\Pr(x_2)...\Pr(x_{N_{\text{вых}}})\},$$

x_j – кодовая последовательность j-того символа кодовой последовательности $j = 1,2...N_{\text{вых}}$.

Далее на рис. 6 приведена блок – схема модуля SISO опирающаяся на отношение правдоподобия для двоичного кода:

Рис. 6. Блок - схема модуля SISO

Отношение правдоподобия для двоичного кода, где $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$ при условии $\bar{y}$:

$$\Lambda = \frac{\Pr(x_j = \lambda_1 / \bar{y})}{\Pr(x_j = \lambda_2 / \bar{y})}.$$

Далее на рис. 7 представлена схема формирования отношения правдоподобия.

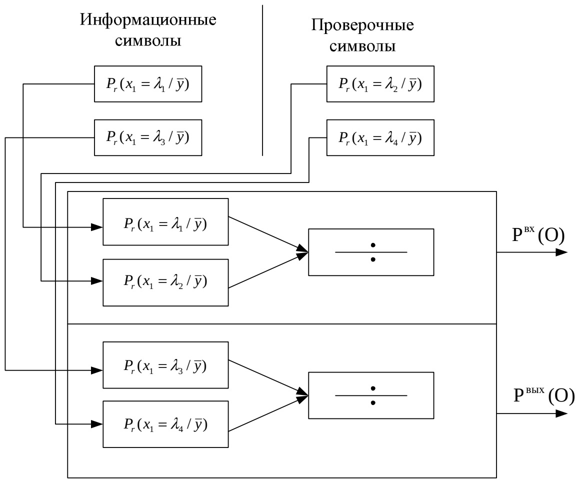

Рис. 7. Схема формирования отношения правдоподобия

Методы мягкого декодирования с посимвольным принятием решений являются базовыми при разработке итеративных методов декодирования помехоустойчивых кодов.

Как и в предыдущем случае, оптимальным является решение, принимаемое по максимуму апостериорной вероятности, но не последовательности, а одного символа:

$\hat{x}_j = 0$, если $Pr(x_j = 0/\bar{y}) > Pr(x_j = 1/\bar{y})$;

$\hat{x}_j = 1$, если $Pr(x_j = 1/\bar{y}) > Pr(x_j = 0/\bar{y})$,

где $Pr(x_j = 0/\bar{y})$ – апостериорная вероятность того, что символ $x_j = 0$; $Pr(x_j = 1/\bar{y})$ – апостериорная вероятность того, что символ $x_j = 1$.

Соответственно можно записать:

$$Pr(x_j = \alpha/\bar{y}) = p(\bar{y}/x_j = \alpha)\frac{Pr(x_j = \alpha)}{p(\bar{y})}, \qquad (1)$$

где $\alpha = 0,1$.

Теперь, считая, что известны плотности вероятности $p(\bar{y} / \bar{x}_i)$ $\forall i = 1 \ldots 2^K$, а также полагая значения всех символов, кроме x_j, несущественными, найдем $p(\bar{y}/x_j = \alpha)$, $\alpha = 0,1$ путем статистического усреднения $p(\bar{y} / \bar{x}_i)$ по несущественным символам:

$$p(\bar{y}/x_j = \alpha) = \sum_{\substack{\forall i = 1 \ldots 2^K, \\ \text{если } x_{ij} = \alpha}} p(\bar{y} / \bar{x}_i)\, Pr(\bar{x}_i'),$$

где $\bar{x}_i = \{\bar{x}_i', x_{ij}\}$.

Используя (3), определим $Pr(x_j = \alpha/\bar{y})$:

$$Pr(x_j = \alpha/\bar{y}) = p(\bar{y}/x_j = \alpha)\frac{Pr(x_j = \alpha)}{p(\bar{y})} =$$

$$= \frac{1}{p(\bar{y})} Pr(x_j = \alpha) \sum_{\substack{\forall i = 1 \ldots 2^K, \\ \text{если } x_{ij} = \alpha}} p(\bar{y} / \bar{x}_i)\, Pr(\bar{x}_i').$$

В полученном выражении внесем множитель $Pr(x_j = \alpha)$ под знак суммы и, учитывая, что для независимых x_j – $\Pr(\bar{x}_i/\bar{y}) = \Pr(\{\bar{x}_i', x_{ij} = \alpha\}/\bar{y}) =$ $= Pr(x_j = \alpha)\, Pr(\bar{x}_i')$, получим

$$Pr(x_j = \alpha/\bar{y}) = \frac{1}{p(\bar{y})} \sum_{\substack{\forall i = 1 \ldots 2^K, \\ \text{если } x_{ij} = \alpha}} p(\bar{y} / \bar{x}_i)\, Pr(\bar{x}_i). \qquad (2)$$

Анализ выражения (2) показывает, что общим для двух оптимальных методов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов является нахождение апостериорных вероятностей всех возможных кодовых последовательностей. А отличие состоит в том, каким образом найденные апостериорные вероятности используются для принятия решения.

Основные подходы, направленные на уменьшение сложности алгоритмов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов. Рассмотренные выше оптимальные методы мягкого декодирования могут быть реализованы только для коротких кодов, так как сложность соответствующих алгоритмов декодирования пропорциональна количеству всех возможных кодовых слов, т.е. $\sim 2^{K}$.

Кроме того, эти методы в явном виде не учитывают структуру кода (взаимосвязь информационных символов с проверочными) и требуют только знания образцов всех возможных кодовых последовательностей. Однако, в общем случае, учет особенностей структуры кода позволяет существенно снизить сложность алгоритмов мягкого декодирования. Поэтому далее обобщим основные подходы, направленные на уменьшение сложности алгоритмов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов (как оптимальных, так и субоптимальных).

1. Представление помехоустойчивого кода с помощью графа. Такой подход позволяет представить кодовое слово как путь в графе, а декодирование рассматривать как поиск пути, соответствующего кодовому слову с наибольшим значением апостериорной вероятности.

Наиболее эффективным этот подход оказался для сверточных кодов, обладающих регулярной решетчатой структурой с постоянным числом состояний на каждом ярусе решетчатой диаграммы, не зависящим от длины информационной последовательности.

Примерами алгоритмов декодирования, использующих решетчатую диаграмму сверточных кодов, является алгоритм Витерби [6] и MAP алгоритм [7].

Сложность таких алгоритмов определяется, в основном, числом состояний решетчатой диаграммы на одном ярусе – числом состояний кодера с памятью ν как 2^{ν} и линейно зависит от длины информационной последовательности.

Применение данного подхода к блочным кодам наталкивается на определенные трудности, так как решетчатая диаграмма блочных кодов является, в общем случае, нерегулярной с числом состояний 2^{N-K} .

2. Использование множества проверочных уравнений помехоустойчивого кода. Для помехоустойчивого (N, K) кода можно образовать 2^{N-K} проверочных уравнений путем линейной комбинации строк проверочной матрицы.

Такой подход применяется при мягком декодировании с минимизацией средней вероятности ошибки символа. В этом случае мягкое решение символа определяется совокупностью вкладов от всех возможных проверочных уравнений, в которые входит данный символ.

Примером использования такого подхода является алгоритм Хартмана – Рудольфа [3], рассматривающий 2^{N-K} линейных комбинаций строк проверочной матрицы как кодовые слова дуального кода. Сложность алгоритма Хартмана – Рудольфа определяется числом проверочных уравнений, которые используются для получения мягкого решения символа, т.е. $\sim 2^{N-K}$.

Частным случаем метода Хартмана – Рудольфа можно считать методы порогового декодирования [1 – 3], которые используют не все возможные проверочные уравнения, а только те, которые ортогональны по данному символу, недостатком которых является ограниченный класс кодов, к которым этот метод применим.

3. Порождение некоторого числа кодовых слов с большими значениями апостериорных вероятностей (порождение кодовых слов, наиболее близких к передаваемому кодовому слову).

Суть данного подхода заключается в аппроксимации правила (1) путем использования для сравнения только наиболее значимых членов, что позволяет существенно снизить сложность алгоритмов декодирования.

Порождение кодовых слов, наиболее близких к передаваемому кодовому слову, возможно, например, если считать, что ошибки содержатся только на позициях наименее достоверных символов. Таким алгоритмом является алгоритм Чейза [5].

Этот алгоритм использует множество или список наиболее вероятных последовательностей ошибок, обеспечивая почти оптимальное декодирование. Такое множество ошибок выбирается на основе оценок надежности принятых символов. Для каждой комбинации ошибок прибавляемой к слову, используется декодер с жестким решением. Для декодированных слов подсчитывается их метрика относительно принятой с мягким решением последовательности символов. Решением является наиболее вероятное кодовое слово с наилучшей метрикой [8]. Алгоритм имеет три типа:

1) Проверяются все комбинации ошибок на расстоянии не более $(d-1)$ от принятого слова,

d - расстояние комбинации ошибок.

2) Проверяются комбинации ошибок веса $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ и меньше, которые размещаются на любых

позициях за исключением $\lfloor d/2 \rfloor$ позиций с наименьшими надежностями. Эффективность этого алгоритма лишь немного уступает алгоритму типа-1, однако сложность его намного меньше за счет меньшего количества проверяемых комбинаций ошибок.

3) Проверяются те комбинации ошибок, для которых i ошибок размещаются на i наименее надежных позициях, i нечетно, $1 \le i \le d-1$.

Структурная схема второго типа показана на рис.8.

Рис. 8. Структурная схема алгоритма Чейза второго типа

Среди методов, использующих этот подход, можно выделить методы перестановочного декодирования [3], метод декодирования по обобщенному минимальному расстоянию [2].

Выводы

Была проанализирована взаимосвязь оптимальных методов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов с минимизацией средней вероятности ошибки символа. Обобщены подходы, направленные на уменьшение сложности алгоритмов мягкого декодирования помехоустойчивых кодов. Использована процедура Чейза для уменьшения сложности.

Литература

1. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки [Текст]: Пер. с англ. / Под ред. К.Ш. Зигангирова. – М.: Мир, 1986. – 576 с.
2. Витерби А.Д., Омура Дж. К. Принципы цифровой связи и кодирования [Текст]: Пер. с англ. / Под ред. К.Ш. Зигангирова. – М.: Радио и связь, 1982. – 535 с.
3. Кларк Дж.-мл., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи [Текст]: Пер. с англ. / Под ред. Б.С. Цыбакова. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
4. Жученко А.С.,Метод ітеративного декодирования турбокодов уменьшеной сложности в телекоммуникационных системах [Текст]/ Жученко А.С.//Диссертационные исследования, 2005
5. Морелос–Сарагоса, Р. Исскуство помехо-устойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение. [Текст]: Пер. с англ./ Под ред. В.Б. Афанасьева. – М.: Техносфера, 2005. – 320с.
6. G.D. Forney Jr., “Concatenated codes,” Massachussetts Inst. Technol., [Текст]:Cambridge, MA, 1966.
7. C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, “Near Shannon limit error-correcting coding and decoding [Текст]: Turbo-codes,” in Proc. ICC’93, Geneva, Switzerland, May 1993, pp. 1064–1070.
8. S. Benedetto, D. Divsalar, G. Montorsi, and F. Pollara, “Serial concatenation of Interleaved codes [Текст]: Performance analysis, design, and iterative decoding,” TDA Progress Rep. 42-126, Apr.–June 1996, Jet Propulsion Lab., Pasadena, CA, pp. 1–26, Aug. 15, 1996 (Available: http://edmswww. jpl.nasa.gov/tda/progress_report/42-126/126D.pdf)
9. L.R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, “Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate,” [Текст]: IEEE Trans. Inform.Theory, vol. IT-20, pp. 284–287, Mar. 1974.

Жученко О.С., Гребенюк М.В. М’яке декодування завадостійких кодів. Показаний взаємозв'язок оптимальних методів м'якого декодування завадостійких кодів з мінімізацією середньої вірогідності помилки символу. Узагальнені підходи, направлені на зменшення складності алгоритмів м'якого декодування завадостійких кодів.
Ключові слова: завадостійкий код, м'яке декодування, SISO модуль

Zhuchenko O.S., Grebenyuk M.V. Soft-decision decoding of noise combating codes. Interaction of soft-decision decoding optimum methods of noise combating codes with digital error mean probability minimization has been shown. Approaches directed on the reduction of the algorithm complexity of soft-decision decoding of noise combating codes have been generalized.
Key words: noise combating code, soft-decision decoding, SISO module.

Рецензент д.т.н., профессор Приходько С.И. (УкрГАЖТ)

Поступила 01.04.2013г.